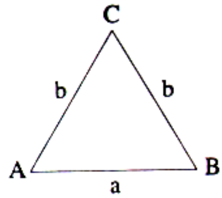
XXII РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

IV одделение

1. Производот на три природни броеви е 240. Производот на првиот и вториот број е 60, а производот на првиот и третиот број е 24. Кои се тие броеви?

Решение. Од условот на задачата следува дека $a\cdot b\cdot c=240$, $a\cdot b=60$, $a\cdot c=24$. Тогаш од $(a\cdot b)\cdot c=240$ и $a\cdot b=60$ имаме $60\cdot c=240$ односно $c=4$. Заради $a\cdot c=24$ добиваме дека $a=6$. Тогаш од $a\cdot b=60$ добиваме дека $b=10$.

2. Пресметај ја основата a на рамнокрак триаголник ако се знае дека обиколката е $O=12cm$, а кракот $b=35mm$.



Решение. Обиколката на рамнокрак триаголник е $O=a+2b=12cm=120mm$. Бидејќи $b=35mm$, следува дека $120=a+2\cdot 35$, од каде се добива дека $a=120-70=50$ т.е. $a=50mm$.

3. Еден велосипедист се движи од местото А кон местото В, а на средина меѓу А и В е местото С. Велосипедистот го поминал растојанието од А до С за 4 часа, возејќи по 18km на час. За колку часови велосипедистот ќе го помине растојанието од местото С до В, ако се движи со брзина од 12km на час?

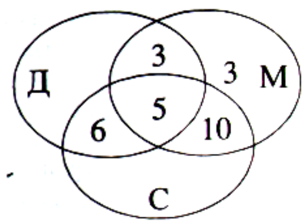
Решение. Растојанието од местото А до местото С е $4\cdot 18=72km$. Од условот на задачата имаме дека растојанието од С до В е исто колку растојанието од А до С, значи растојанието од С до В е $4\cdot 18=72km$. Бидејќи патникот се движел со 12km на час имаме $12\cdot x=72km$, од каде $x=6$ часа.

4. Без да го пресметаш производот: $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13$ најди ги неговите последни две цифри.

Решение. Да го разгледаме производот $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13$. Бидејќи $2\cdot 5=10$, а производот го содржи и множителот 10, добиваме: $1\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 100$ што значи дека последните две цифри на производот се нули.

V одделение

1. Учениците од петто одделение во едно училиште членуваат во математичка, драмска и спортска секција. Од 27 ученици, 14 се членови на драмската секција, 3 ученици се членови само на математичката секција и 5 ученици се членови на сите три секции. Колку ученици членуваат во секоја секција, ако само во спортската и драмската секција членуваат 6 ученици, сите ученици се членови на некоја секција, а само во спортската и само во драмската секција не членува ниту еден ученик?



Решение. Задачата ќе ја решиме со Венов дијаграм. Во математичката секција членувале 21 ученик исто колку и во спортската, а во драмската секција членувале 14 ученици.

2. Најди го најмалиот трицифрен број кој при делење со 3,4,5,6 или 7 дава остаток 7.

Решение. Нека е x бараниот број. Тогаш $x-7$ се дели со 3,4,5,6 или 7. Затоа x се дели со нивниот најмал заеднички содржател НЗС(3,4,5,6,7)=420. Бидејќи се бара најмалиот трицифрен број со даденото својство земаме x-7=420 од каде x=427.

3. Плоштината на правоаголникот е еднаква на плоштината на квадрат со обиколка 36cm. Чија обиколка е поголема и за колку, ако должината на едната страна на правоаголникот е еднаква на 27cm.

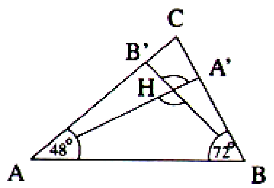
Решение. Бидејќи обиколката на квадратот е 36cm, неговата страна е еднаква на 36:4=9cm, а плоштината му е еднаква на $9\cdot9=81cm^2$. Плоштината на правоаголникот е исто така $81cm^2$, а бидејќи едната негова страна е еднаква на 27cm, добиваме дека другата страна на правоаголникот е еднаква на 81:27=3cm. Обиколката на правоаголникот е еднаква на $2\cdot27+2\cdot3=60$cm. Обиколката на правоаголникот е за 24cm поголема од обиколката на квадратот.

4. Најди број кој поделен со 143 дава остаток 132, а поделен со 144 дава ист количник и остаток 108.

Решение. Бараниот број е од облик a=143b+132 и a=144b+108. Оттука 143b+132=144b+108, од каде следува b=24. Бараниот број е $a=143\cdot24+132=3564$.

VI одделение

1. Висините повлечени од темињата A и B на ΔABC се сечат во точката H. Најди го $\measuredangle AHB$ ако $\measuredangle A = 48^\circ$, $\measuredangle B = 72^\circ$.



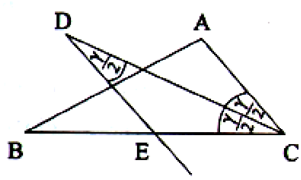
Решение. $\measuredangle ACB=180^\circ-\measuredangle A-\measuredangle B=180^\circ-120^\circ=60^\circ$.

Тогаш $\measuredangle A'HB'=180^0-\measuredangle ACB=120^0$ па $\measuredangle AHB=\measuredangle A'HB'$ како накрсни агли од каде следува дека $\measuredangle AHB=120^\circ$.

2. На која цифра завршува бројот 777^{333}?

Решение. Бројот 777 завршува на 7, бројот $777\cdot777$ завршува на 9, бројот $777\cdot777\cdot777$ завршува на 3, бројот $777\cdot777\cdot777\cdot777$ завршува на 1 итн. Значи, вака запишаните производи завршуваат на: 7,9,3,1,7,9,3,1,7... т.е. секој четврти производ завршува на иста цифра. Бидејќи $333=83\cdot4+1$, бараниот производ завршува на 7.

3. Даден е ΔABC. Ако симетралата на аголот при темето C со симетралата на страната AB образува агол еднаков на половината од аголот при темето C, тогаш ΔABC е правоаголен.



Решение. Нека s е симетралата на страната AB и нека D е пресечната точка на s со симетралата на аголот при темето C. Според условот на задачата имаме $\angle EDC=\frac{\gamma}{2}=\angle ACD$. Бидејќи овие два агли се наизменични добиваме дека $s \parallel AC$. Но, $s\perp AB$, па затоа $CA\perp AB$.

4. Во едно одделение има 32 ученика. На тестот по математика Илија ги решил сите 9 задачи. Докажи дека во одделението барем 4 ученици решиле ист број задачи.

Решение. Учениците решавале вкупно 9 задачи, па постојат ученици кои не решиле ниту една задача, ученици кои решиле една задача, ученици кои решиле две задачи, ..., ученици кои решиле девет задачи, т.е постојат десет групи ученици. Ако во секоја група има помалку од 3 ученици, тогаш имаме најмногу $3\cdot 10=30$ ученици, што не е можно бидејќи во одделението има 32 ученици. Значи, барем во една група мора да има најмалку 4 ученици.

VII одделение

1. Ако разликата на трицифрените броеви $\overline{xyz}$ се $\overline{zyx}$ се подели со $x-z$ се добива количник кој не зависи од изборот на трицифрениот број $\overline{xyz}$. Докажи.

Решение. Важи

$\overline{xyz}-\overline{zyx}=100x+10y+z-100z-10y-x=100(x-z)-(x-z)=$

$=99(x-z)$, па количникот $(\overline{xyz}-\overline{zyx}):(x-z)=99$ не зависи од $\overline{xyz}$.

2. Нека a е прост број поголем од 3. Ако $2\nmid a$ и $3\nmid a$, тогаш $6\mid(4a^2+3a+5)$. Докажи!

Решение. Од $2\nmid a$ и $3\nmid a$, тогаш $a=6k\pm1$. Ако $a=6k+1$, тогаш

$4(6k+1)^2+3(6k+1)+5=6(24k^2+11k+2)$, ако, пак a=6k-1, тогаш

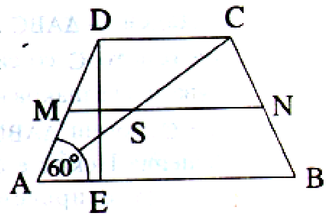
$4(6k+1)^2+3(6k+1)+5=6(24k^2-5k+1)$. Значи $6\mid(4a^2+3a+5)$.

3. Во рамнокрак трапез ABCD, каде $\overline{AD}=\overline{BC}=6cm$, дијагоналата ја дели средната линија на делови од 2cm и 5cm. Одреди го:

а) периметарот на трапезот

б) аглите на трапезот

Решение. Да ја означиме средната линија на трапезот со MN, а пресекот на MN со дијагоналата AC со S. Тогаш од условот на задачата $\overline{MS}=2cm$ и $\overline{SN}=5cm$. Бидејќи MS е средна линија на триаголникот ACD следува дека $\overline{DC}=2\cdot\overline{MS}=4cm$. Слично $\overline{AB}=2\cdot\overline{SN}=10cm$.

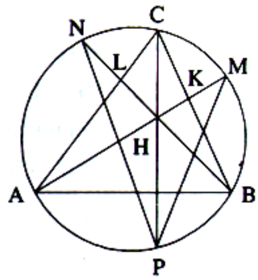


а) периметарот на трапезот е L=26cm.

б) Да ја означиме со DE висината во трапезот. Тогаш $\overline{AE}=\frac{10-4}{2}=3cm$.
Значи ΔAED е правоаголен со катетата 3cm и хипотенузата 6cm, па според тоа $\angle EAD=60^0$ и $\angle ADC=180^0-60^0=120^0$.

4. Околу остроаголен триаголник ABC опишана е кружница. Нека M,N и P се пресечни точки на висините спуштени од темињата на триаголникот и кружницата, соодветно. Докажи дека ортоцентарот на триаголникот ABC е центар на впишаната кружница во триаголникот MNP.

Решение: Треба да се докаже дека AM,BN и CP се симетрали на внатрешните агли во триаголникот MNP. Нека подножјата на висините од темињата A и B на триаголникот ABC ги означиме со K и L, соодветно. Тогаш триаголниците ACK и BCL се правоаголни со ист остар агол во темето C, па според тоа $\angle CAK=\angle CBL$, т.е. $\angle CAM=\angle CBN$. Притоа $\angle CPN=\angle CBN$ како периферни агли над лакот $\overset{\frown}{CN}$ и $\angle CPM=\angle CAM$ како периферни агли над лакот $\overset{\frown}{CM}$.

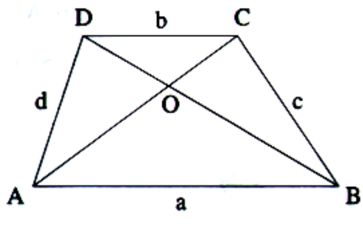


Значи $\angle CPN=\angle CPM$, т.е. CP е симетрала на аголот NPM. Слично се докажува дека AM е симетрала на аголот NMP и BN е симетрала на аголот MNP. Според тоа, ортоцентарот на триаголникот ABC е центар на впишаната кружница во триаголникот MNP.

VIII одделение

1. Основите на еден трапез ABCD (AB||CD) се однесуваат како 1:5, а дијагоналите му се сечат во точка O. Збирот на плоштините на триаголниците AOB и COD е 120cm^2. Најди ги плоштините на тие триаголници.

Решение. Нека $\overline{AB}=a$ и $\overline{CD}=b$. Од условот на задачата a:b=1:5 од каде следува $b=5a$. Од сличноста на триаголниците AOB и COD следува дека $P_{\Delta AOB}:P_{\Delta COD}=a^2:b^2$, па тогаш $P_{\Delta AOB}:P_{\Delta COD}=a^2:25a^2$ од каде следува дека $P_{\Delta COD}=25P_{\Delta AOB}$. Од условот на задачата $P_{\Delta AOB}+P_{\Delta COD}=120$, па тогаш $P_{\Delta AOB}+25P_{\Delta AOB}=120$ од каде следува дека $P_{\Delta AOB}=4,62\ cm^2$. Сега $P_{\Delta COD}=115,38\ cm^2$.



2. Најди ги простите броеви p, q и r такви што $pqr = 3(p+q+r)$.

Решение. Очигледно дека еден од броевите p, q и r е 3. Без губење од општоста, нека $p=3$. Тогаш $qr=3+q+r$, од каде следува дека $q(r-1)-(r-1)=4$ т.е. $(q-1)\cdot(r-1)=4=1\cdot4=4\cdot1=2\cdot2$. Тогаш добиваме три системи равенки со две непознати $\begin{cases} q-1=1 \\ r-1=4 \end{cases}$; $\begin{cases} q-1=4 \\ r-1=1 \end{cases}$ и $\begin{cases} q-1=2 \\ r-1=2 \end{cases}$ чии решенија се $(2,5)$, $(5,2)$ и $(3,3)$ соодветно. Бараните броеви се $(3,2,5)$, $(3,5,2)$ и $(3,3,3)$.

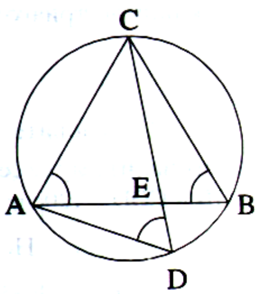
3. Најди го четирицифрениот број $\overline{abcd}$, ако $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=1990$.

Решение. Од условот на задачата се добива $1000a+100b+10c+d+100a+10b+c+10a+b+a=1990$ т.е. $1111a+111b+11c+d=1990$

Притоа $a=1$, бидејќи во спротивно збирот ќе биде поголем од 1990. Тогаш $111b+11c+d=879$. Цифрата $b<8$, бидејќи во спротивно $111b+11c+d>879$. Значи $b\leq7$. Слично $b>6$, затоа што во спротивно $111b+11c+d<879$. Конечно $b=7$. Според тоа за $b=7$ се добива дека $11c+d=102$, од каде следува дека $c=9$ и $d=3$.

4. Тетивата CD на кружницата опишана околу рамнокрак триаголник ABC ја сече AB во точка E. Ако е $\overline{AC}=\overline{BC}=14cm$ и $\overline{CE}=10cm$ пресметај ја должината на тетивата CD.

Решение. Аглите ADC и ABC се еднакви како периферни агли над иста тетива AC. Меѓутоа, во рамнокракиот триаголник ABC е $\overline{AC}=\overline{BC}$, па е $\angle ABC=\angle BAC$. Според тоа $\angle ADC=\angle EAC$, па триаголниците ADC и EAC се слични (имаат уште и заеднички агол $\angle ACD$). Од сличноста ја добиваме пропорцијата $\overline{AC}:\overline{CD}=\overline{CE}:\overline{AC}$, односно $14:\overline{CD}=10:14$.



Оттука следува дека $\overline{CD}=19{,}6cm$.