Hello, World!

ТЕОРИЈА ИГАРА - део I

Алекса Плавшић

Теорија игара је једна од области математике која се све више среће на такмичењима, како из математике тако и из програмирања. Многим такмичарима она задаје озбиљне проблеме. То је, пре свега, зато што није у садржајима редовне наставе, а и због тога што задаци из ове категорије нису тако чести на домаћим такмичењима. Циљ овог чланка је да се читаоцу приближи наведена тема и да се прикажу различити аспекти теорије игара у области програмирања.

Као прво, дефинисаћемо појам математичке игре и навести скуп правила који ће важити у свим примерима који следе.

Под математичком игром сматра се игра двојице играча са јасно дефинисаним правилима. Притом, оба играча играју оптимално (најбоље што могу) у намери да остваре победу.

Јасно дефинисана правила подразумевају следеће:

1° прецизно одређен редослед потеза. Најчешће играчи вуку потезе наизменично;

2° информација о играчу који је први на потезу;

3° дефиниција скупа дозвољених потеза за оба играча;

4° постојање једнаких информација о тренутном стању игре за оба играча;

5° дефинисање победе сваког од играча.

У наставку ћемо детаљно обрадити више приступа за решавање проблема игара које ћемо илустровати карактеристичним примерима. Спремите се, полећемо!

Динамичко програмирање

Готово да не постоји програмер који није чуо за чувени проблем ранца (knapsack problem) и за његово решење коришћењем динамичког програмирања. Кључ оваквог поступка је израчунавање тренутног стања значајног за наведени проблем помоћу претходних већ израчунатих стања. Наравно, на почетку морамо дефинисати базу, односно скуп стања за која су нам позната решења и који ће нам служити за будућа израчунавања.

Сличну идеју можемо применити и у теорији игара. Најчешћи облик динамичког програмирања је одређивање да ли први играч има победничку стратегију за тражено стање. Ово постижемо разматрањем свих дозвољених потеза које играч може да повуче и утврђивањем да ли неки од тих потеза води у стање у коме други играч има победничку стратегију. Ствар је у томе што први играч након повлачења свог потеза и преласка у неко ново стање постаје други на потезу у том стању. Следећи пример ће помоћи да се боље разуме описана стратегија.

Задатак 1 - Гомила штапића

На гомили је N штапића. Два играча наизменично узимају одређен број штапића са гомиле по следећем правилу. Играч који је на потезу може и мора да узме 2, 3 или 5 штапића. Након тога, на новонасталој гомили, потез изводи други играч по истом правилу. Потом потез повлачи први играч, па други итд. Губи онај који није у могућности да повуче потез. Који играч има победничку стратегију?

Пре него што се упустимо у решење, уведимо ограничење да је број штапића на почетној гомили највише милион, тј. $1 \le N \le 10^6$.

Решење. Уведимо ознаку $DP[x]$ за низ који означава играча који има победничку стратегију кад се на гомили налази тачно x штапића. Сходно томе је $DP[x] = 1$ ако први играч има победничку стратегију, односно $DP[x] = 2$ ако победничку стратегију има други играч.

Очигледно, решење проблема представља вредност $DP[N]$. Поставља се питање како да израчунамо тражену вредност. Прво ћемо дефинисати базу, односно нека стања, за мале вредности x, за која су позната решења. Ако је $x = 0$ (празна гомила) или $x = 1$, први играч не може да повуче потез у оквиру правила игре. Победник је други играч, па је $DP[0] = DP[1] = 2$. Ако је на гомили 2, 3, 4 или 5 штапића, лако се види да је победник први играч. Наиме, у случају 2, 3 или 5 штапића он узима све штапиће и оставља другог играча без потеза у празној гомили. У случају 4 штапића, узима 3. Након тога је други играч поново у изгубљеној позицији, сад с гомилом од једног штапића.

Одредимо општу формулу за израчунавање $DP[x]$ за $x > 5$. Први играч својим потезом може да преведе гомилу од x у једну од гомила од $x - 2$ или $x - 3$ или $x - 5$ штапића. Ако је $DP[z] = 2$ за бар једно $z \in \{x - 2, x - 3, x - 5\}$, он узима $x - z$ штапића и другог играча оставља у изгубљеној позицији са гомилом од $x - 2, x - 3$ или $x - 5$ штапића. На пример, ако је $DP[x - 2] = 2$, први играч узима $x - (x - 2) = 2$ штапића. Све у свему, у овом случају је $DP[x] = 1$.

У супротном, тј. ако је $DP[x-2] = DP[x-3] = DP[x-5] = 1$, први играч губи, шта год да одигра. Победничку стратегију има други играч, те је $DP[x] = 2$.

Оба случаја покрива формула

$$DP[x] = 3 - \max(DP[x-2], DP[x-3], DP\ [x-5]) \qquad (1)$$

Заиста, ако је $DP[z] = 2$ за неко $z \in \{x-2, x-3, x-5\}$ тада (1) даје $DP[x] = 3 - 2 = 1$. Ако је $DP[x-2] = DP[x-3] = DP[x-5] = 1$, тада из (1) следи $DP[x] = 3 - 1 = 2$. И једно и друго се поклапа с претходном анализом.

Из (1) непосредно следи алгоритам који решава наведени пример.

Алгоритам: Гомила штапића
Улаз: Природан број N.
Излаз: Победник у игри са тачно N штапића

$DP[0] \leftarrow 2$
$DP[1] \leftarrow 2$
$DP[2] \leftarrow 1$
$DP[3] \leftarrow 1$
$DP[4] \leftarrow 1$
$DP[5] \leftarrow 1$
for $i \leftarrow 6 \dots N$
$DP[i] \ \leftarrow \ 3 - max(DP[i-2], DP[i-3], DP[i-5])$
return $DP[N]$

Сложеност алгоритма је $O(N)$.

□

Пример 1. Одредимо победника на гомили од 9 штапића, тј. израчунајмо $DP[9]$.

Након дефинисања базе тј. победника за гомиле са x $(x \leq 5)$ штапића, потребно је да израчунамо ко има победничку стратегију за гомиле са 6, 7, 8 и 9 штапића. Према алгоритму је:

$$DP[6] = 3 - \max(DP[1], DP[3], DP[4]) = 1$$

Победник за гомилу од 6 штапића је први играч. Заиста, он може да узме 5 штапића, остане 1, и други играч не може да изведе потез.

Сличним поступком закључујемо да је победник за гомиле од 7 и 8 штапића други играч.

$$DP[7] = 3 - \max(DP[2], DP[4], DP[5]) = 2$$

$$DP[8] = 3 - \max(DP[3], DP[5], DP[6]) = 2.$$

У првом случају, потези првог играча воде гомилама од 5, 4 или 2 штапића. Како је за сваку од њих победник играч који је тренутно на потезу, а то је сад други играч, следи $DP[7] = 2$. Слично је за гомилу са 8 штапића. Користећи добијене резултате, израчунаћемо победника за тражену гомилу од 9 штапића. Како је

$$DP[9] = 3 - \max(DP[4], DP[6], DP[7]) = 1,$$

победичку стратегију за има први играч. Он у првом потезу може да узме 2 штапића, остављајући другог играча на потезу са гомилом од 7 штапића. Како је $DP[7] = 2$, то је изгубљена позиција за играча на потезу, у овом случају другог играча. Приметимо да је то једини добитнички потез за првог играча. Ако узме 3 или 5 штапића, оставља другог играча на потезу са гомилама од 6 или 4 штапића које су добитничке за њега јер је $DP[6] = DP[4] = 1$.

Напомена. Читаоцима се препоручује да размисле и о рекурзивној варијанти наведеног алгоритма која је врло честа у динамичком програмирању.

Додатни задаци, који се решавају сличним поступком, налазе се на крају текста.

Greedy поступак

Greedy (*грамзиви*) *алгоритам* не представља неки конкретан метод за решавање проблема. То је скуп алгоритама који се примењују и појединим стадијумима. Притом, сваки алгоритам даје оптимално решење за стадијум у којем делује, тзв. локално оптимално решење. У одређеним случајевима та локална оптимална решења, узета заједно, дају глобално оптимално решење. У математичким играма greedy поступак представља одређивање оптималног потеза играча у позицији у којој се тренутно налази и који је на потезу не обзирући се на претходне потезе и будуће последице. Код многих игара оваква стратегија је сасвим погрешна. Међутим, постоје игре у којима је greedy стратегија оптимална.

Задатак 2 - Бирање бројева низа

Дата су два низа бројева A: $A[1]$, $A[2]$, ... , $A[N]$ и B: $B[1]$, $B[2]$, ... , $B[N]$. Играчи P_1 и P_2 наизменично бирају бројеве из тих низова по следећим правилима. Игру започиње играч P_1 тако што изабере један број i из скупа $M = \{1, 2, \dots, N\}$ и на свој скор дода вредност $A[i]$. Затим играч P_2 изабере број j из скупа $M - \{i\}$ и на свој скор дода вредност $B[j]$. Онда играч P_1 изабере број k из скупа $M - \{i, j\}$ и на свој скор дода вредност

$A[k]$ (његов скор постаје $A[i] + A[k]$). Потом играч P_2 изабере број l из скупа $M - \{i, j, k\}$ и на свој скор дода вредност $B[l]$(његов скор постаје $B[j] + B[l]$) итд. Игра се завршава кад се искористе сви бројеви скупа M, након тачно N потеза. Победник је онај играч чији скор већи. У случају једнаких скорова, резултат је нерешен.

Потребно је наћи исход игре. Притом, исход је 1 ако P_1 има победничку стратегију, 2 ако P_2 има победничку стратегију и 0 ако је резултат нерешен.

□

Напомена. Оба играча желе да однесу победу. Уколико неки играч не може да победи, покушаће да избори нерешен резултат.

Решење. Показаћемо да је greedy стратегија оптимална за оба играча. Састоји се у томе да играч који је на потезу бира, међу расположивим (до тада неизабраним) бројевима скупа M, број i за који је збир $A[i] + B[i]$ максималан.

Означимо са S_A и S_B суме свих бројева низова A и B, редом, тј. $S_A = \sum_{i=1}^{n} A[i]$ и $S_B = \sum_{i=1}^{n} B[i]$. Претпоставимо да је, следећи ту стратегију, играч P_1 одабрао бројеве $i_1,\ i_2,\ \dots\ ,\ i_k$ из M. Тада је остварио скор $S = \sum_{j=1}^{k} A[\,i_j]$. Играч P_2 је изабрао све остале бројеве из M, па је његов скор био $C = S_B - \sum_{j=1}^{k} B[i_j]$. (Од укупне суме S_B низа B одузима се сума $B[i_1] +\ B[i_2] + \cdots + B[i_k]$ која се састоји од оних елемената низа B које је играч P_1 „блокирао“ бирајући бројеве $i_1,\ i_2,\ \dots\ ,\ i_k$.)

Упоредимо вредности $S = \sum_{j=1}^{k} A[\,i_j]$ и $C = S_B - \sum_{j=1}^{k} B[i_j]$. Ако и једној и другој додамо $\sum_{j=1}^{k} B[i_j]$, добијамо еквивалентно упоређивање између $\sum_{j=1}^{k}(A[\,i_j] + B[i_j])$ и S_B. Како је S_B константа, играч P_2 не утиче више на свој крајњи скор, њему задатак постаје минимизовање скора који ће остварити играч P_1. Играч P_1 жели максимизовати свој скор, односно суму $\sum_{j=1}^{k}(A[\,i_j] + B[i_j])$, то ће постићи бирањем максималне вредности А$[i] + B[i]$ из скупа свих неодабраних индекса до тог тренутка. Сличну стратегију ће применити и играч P_2, јер на тај начин приморава играча P_1 да у наредном потезу изабере мањи збир.

Ако се наведном greedy стратегијом (бирањем броја i, таквог да је збир $A[i] + B[i]$ највећи могући) постигне да је сума $\sum_{j=1}^{k}(A[\,i_j] + B[i_j])$ већа од S_B, играч P_1 је победник. Уколико важи да је $\sum_{j=1}^{k}(A[\,i_j] + B[i_j]) = S_B$, исход је нерешен. Коначно, ако је $\sum_{j=1}^{k}(A[\,i_j] + B[i_j]) < S_B$, победник је играч P_2. Сада можемо конструисати алгоритам који одређује исход игре.

Алгоритам: Бирање бројева низа
Улаз: Природан број N, низови целих бројева $A,\ B$
Излаз: Исход игре: 0, 1 или 2
$S \leftarrow 0$
$C \leftarrow 0$
$\boldsymbol{sort}(A, B)$ //сортирање низова растуће по критеријуму $A[i] + B[i]$
for $i\ \leftarrow 1 \dots N$
if i непарно
$S \leftarrow S + A[i]$
else
$C \leftarrow C + B[i]$
if $S = C$
return 0
else
if $S > C$
retrun 1
else
return 2

Асимптотска сложеност овог алгоритма је једнака сложености алгоритма сортирања. Под претпоставком да смо користили неки од брзих алгоритама сортирања попут *heap sort*, сложеност је $O(n\ log\ n)$.

□

Пример 2. Одредимо исход игре за следеће низове, где је $N = 6$.

(а) Нека су низови A и B дати табелом десно. Сходно алгоритму, играчи P_1 и P_2бирају бројеве из скупа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ следећим редом: 5, 4; 1, 3; 6, 2. Отуда је $S = 8 + 5 + 4 = 17$ и $C = 4 + 3 + 3 = 10$. Како је $S > C$, победник је играч P_1.

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
A	5	1	5	7	8	4
B	5	3	3	4	4	2

(б) У овом случају редослед изабраних бројева је: 3, 1; 4, 2; 6, 5. Сад је $S = 8 + 5 + 2 = 15$ и $C = 7 + 5 + 3 = 15$, односно $S > C$. Исход је нерешен.

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
A	4	3	8	5	1	2
B	7	5	4	5	3	4

(в) Изабрани бројеви су: 1, 4; 2, 6; 3, 5, па је $S = 4 + 5 + 2 = 11$ и $C = 7 + 5 + 3 = 1$. Како је $S < C$, победник је играч P_2.

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
A	4	5	2	4	1	3
B	8	5	4	7	3	5

Напомена. Површно гледајући, могло би да се помисли да је, уместо наведене, оптимална следећа стратегија. Сваки од играча који је на потезу бира највећи расположиви број у свом низу. Међутим, није тако. На једном малом примеру показаћемо да је ова стратегија погрешна.

Нека је $N = 2$ и нека је

$$A\colon\ A[1] = 7,\ A[2] = 3$$

$$B\colon\ B[1] = 2,\ B[2] = 8.$$

Следећи ову стратегију, први играч бира $A[1] = 7$, други $B[2] = 8$ и други играч побеђује. Међутим, ако први играч следи стратегију из решења, тј. бира $A[i]$, тако да је $A[i] + B[i]$ максимално, он бира $A[2] = 3$. Другом играчу преостаје $B[1] = 2$ и победник је први играч.

Математичко решавање игара

Иако је одређен математички апарат потребан за решавање већине игара, у ову категорију сврставамо игре у којима тај апарат доминантан. Наиме, постоји прецизна математичка формула по којој се одређује победник. Задаци таквог типа често се појављују на математичким такмичењима различитих нивоа.

Обрадићемо један такав пример.

Задатак 3 - Велики израз

На табли је написан израз

$$* \, 2^1 * \, 2^2 * \, 2^3 * \ldots * 2^N.$$

Два играча, P_1 и P_2, наизменично повлаче потезе. Игру почиње играч P_1, тако што у изразу изабере једну звездицу и уместо ње упише $+$ или $-$. Затим играч P_2 бира неку од преосталих звездица и на њено место упише $+$ или $-$. Онда сличан потез повлачи P_1, па P_2 итд. Игра се завршава након замене последње N-те звездице. Ако завршни израз није дељив са 17, победник је играч P_1. У противном победник је P_2. Који играч има победничку стратегију?

Решење. Показаћемо да за $N \equiv 0 (mod\ 8)$ победничку стратегију има играч P_2, док је у свим осталим случајевима победник играч P_1.

Сваки од бројева 2^i, $1 \leq i \leq N$, заменимо његовим остатком a_i при деоби са 17, тј. $2^i \equiv a_i (mod\ 17)$. Како је $2^8 = 256 \equiv 1 (mod\ 17)$, следи $2^{i+8} \equiv 2^i (mod\ 17)$. Стога, низ остатака $a_1, a_2, \ldots, a_N$ има периоду 8. Ево првих 10 чланова тог низа: 2, 4, 8, 16, 15, 13, 9, 1, 2, 4, … . Осим тога, из чињенице да је $2^{i+4} \equiv 17 - a_i (mod\ 17)$ следи да за сваки број x из низа остатака и број $17 - x$ је у том низу.

С обзиром на број N размотрићемо неколико случајева.

1° $N \equiv 1\ (mod\ 2)$. Тада је N непаран број и играч P_1 вуче последњи потез. Претпоставимо да му је остао једино број 2^i и тренутна вредност израза (без изабраног знака за 2^i) једнака S по модулу 17. Како P_1 бира знак $+$ или $-$ за 2^i, вредност завршног израза је $S + a_i$ или $S - a_i$ по модулу 17. Показаћемо да је бар једна од тих вредности различита од 0, тј. бар један од завршних израза није дељив са 17.

Претпоставимо супротно. Тада је $S + a_i \equiv 0(mod\ 17)$ и $S - a_i \equiv 0(mod\ 17)$. Следи $(S + a_i) - (S - a_i) \equiv 0(mod\ 17)$ и $2a_i \equiv 0(mod\ 17)$. Но то је немогуће, јер $a_i \in \{2, 4, 8, 16, 15, 13, 9, 1\}$.

Према томе играч P_1 може да изабере згодан знак за једини преостали број 2^i, тако да завршни израз не буде дељив са 17. Други речима, за N непарно, играч P_1 има победничку стратегију.

2° $N \equiv 0\ (mod\ 2)$. Разликоваћемо два подслучаја.

(а) $N \equiv 0\ (mod\ 8)$. Играч P_2 примењује тзв. симетричну стратегију копирајући на одређен начин потезе играча P_1. Наиме, нека P_1, при свом потезу, изабере број 2^i и знак $+$ или $-$. На основу горе наведеног, постоји број j, такав да је $a_j \equiv 17 - a_i(mod\ 17)$. Играч P_2 бира број 2^j са истим знаком који је P_1 ставио уз 2^i. Тада је $2^i + 2^j \equiv a_i + 17 - a_i(mod\ 17) = 0(mod\ 17)$, тј. збир $2^i + 2^j$ је дељив са 17. Исто важи за $-2^i - 2^j$. Тако играч P_2 постиже да је тренутна сума после сваког његовог потеза дељива са 17.

Како је $N = 8k$, низ остатака можемо да разбијемо на k поднизова, сваки дужине 8; првих осам, следећих осам итд. С обзиром да је $2^{i+4} \equiv 17 - a_i(mod\ 17)$, у сваком поднизу се појављују четири пара $\{x, y\}$, такви да је $y \equiv 17 - x(mod\ 17)$. Стога, играч P_2 увек може да изведе свој потез.

Дакле, за $N \equiv 0\ (mod\ 8)$, играч P_2 има победничку стратегију.

(б) $N \equiv 0\ (mod\ 2) \wedge N \not\equiv 0\ (mod\ 8)$.

Прво ћемо уочити да у зависноти од остатка који даје N при деоби са 8, преостаће 2 или 4 броја која неће имати свој пар у низу остатака. Прецизније ако је:

1. $N \equiv 2\ (mod\ 8)$ бројеви без свог пара су 2 и 4.
2. $N \equiv 4\ (mod\ 8)$ бројеви без свог пара су 2, 4, 8, 16
3. $N \equiv 6\ (mod\ 8)$ бројеви без свог пара су 8 и 16.

Први играч ће у првом потезу да изабере један од бројева који немају свој пар и ставити испред њега знак $+$. Након назначеног потеза сваки пут када је у могућности искористиће симетричну стратегију коју је примењивао други играч у делу под (а). Сложенијом анализом случајева и праћења комбинација бројева који су преостали и нису упарени на прави начин може се доказати да први играч увек има начин да однесе победу. Читаоцима препуштамо да допуне детаље доказа 2(б).

Сложеност наведеног алгортима је $O(1)$.

$\square$

Пример 3. Приказаћемо одређивање победника и победничке стратегије у следећим конкретним случајевима.

(а) $N = 7$. Узмимо да је после три потеза играча P_1 и три потеза играча P_2 настала позиција $+2^1 + 2^2 - 2^3 + 2^4 * 2^5 + 2^6 + 2^7$. Остаје још потез играча P_1 који треба да изабере знак за 2^5. Како је $2^1 + 2^2 - 2^3 + 2^4 + 2^6 + 2^7 = 206 \equiv 2\ (mod\ 17)$ и како је $2^5 = 32 \equiv 15\ (mod\ 17)$, избор знака $+$ води броју$+2^1 + 2^2 - 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 = 238 \equiv 0\ (mod\ 17)$ и победи играча P_2. Стога P_1 бира знак $-$, добија број $+2^1 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - 2^5 + 2^6 + 2^7 = 174 \equiv 4\ (mod\ 17)$ и побеђује (случај 1^o).

(б) $N = 8$. Играча P_2 следи симетричну стратегију као у 2^o(а). Дате бројеве разбије у парове $\{2^1, 2^5\}$, $\{2^2, 2^6\}$, $\{2^3, 2^7\}$, $\{2^4, 2^8\}$. Кад P_1 изабере један број из неког пара са одређеним знаком, P_2 бира други број из тог пара са истим знаком. Како је збир бројева у сваком пару дељив са 17, P_2 тако постиже да завршни број буде дељив са 17 и побеђује.

Задаци

1. Дато је N кула, свака висине M, где је M природан број. Два играча играју следећу игру. Они наизменично мењају висине кула према следећем правилу. Играч који је на потезу одабере једну кулу висине H, где је $H > 1$, и замени је кулом висине D, где је D делитељ H и $D < H$. Губитник је онај играч који не може да повуче потез. Одредити који играч има победничку стратегију.

2. Дата је табла димензија 15×15 чија поља имају координате (i, j), где је $1 \leq i, j \leq 15$. На једном пољу налази се новчић. Два играча наизменично померају новчић према следећем правилу. Ако је новчић на пољу (x, y), играч који је на потезу може да га помери на неко од поља: $(x-2, y+1)$, $(x-2, y-1)$, $(x+1, y-2)$, $(x-1, y-2)$, под условом да дотично поље припада табли. Губитник је онај играч који не може да повуче потез. Одредити који играч има победничку стратегију и оценити асимптотску сложеност одговарајућег алгоритма.

Статијата прв пат е објавена во списанието Тангента на ДМ на Србија во 2004/05 година