ВЕРОВАТНОСНЕ МЕТОДЕ

Бранислав Шобот, Нови Сад

1. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ИЗ ВЕРОВАТНОЋЕ

У овом делу даћемо дефиниције неких основних појмовима из вероватноће. Због сложености и ограничености простора за поједине појмове ћемо формалну дефиницију заменити интуитивном представом. Један од таквих је појам *елементарног догађаја*. Може се сматрати исходом (резултатом) неког експеримента. Његово уопштење је *догађај* који представља унију неколико елементарних догађаја. Ево неколико примера.

(а) При бацању новчића, један елементаран догађај је „појава главе".

(б) При бацању коцкице, чије су стране нумерисане бројевима од 1 до 6, један догађај је „појава броја дељивог са 3". Он се састоји од два елементарна догађаја: „појава 3" и „појава 6".

(в) При насумичном бирању једног броја из скупа $\{1, 2, \dots, n\}$, један догађај је „изабран је број мањи или једнак $\frac{n}{2}$ ".

Уколико експеримент има коначан број исхода, као у наведеним случајевима, вероватноћа неког од догађаја, у ознаци $P(\text{догађај})$, рачуна се по Лапласовој[1] формули

$$P(\text{догађај}) = \frac{\text{број повољних исхода}}{\text{укупан број исхода}}. \qquad (1)$$

Под „повољним исходом" сматра се онај који се тражи. То је „глава" у (а), „паран број између 1 и 6" у (б), односно „број мањи или једнак $\frac{n}{2}$ " у (в).

Како број повољних није већи од укупног броја исхода, за сваки догађај A важи $0 \le P(A) \le 1$. Користећи формулу (1) израчунајмо вероватноће догађаја (а), (б), (в).

а) При бацању новчића могућа су два исхода: глава и писмо. Дакле, укупан број исхода је два, док је број повољних једнак један (појава главе). Према томе, $P(\text{појава главе}) = \frac{1}{2}$.

б) При бацању коцкице имамо 6 исхода. То су појаве једног од бројева 1, 2, 3, 4, 5, 6. Како нас интересује појава броја дељивог са 3, таквих исхода има два: 3 и 6. Отуда је $P(\text{појава броја дељивог са } 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

---

[1] Пјер-Симон Лаплас (1749-1827) - француски математичар.

(в) При насумичном бирању једног броја из скупа $\{1, 2, \dots, n\}$, очигледно има n исхода. Међутим, број повољних исхода зависи од парности броја n. Ако је n парно, $n = 2k$, тада су повољни исходи 1, 2, … , k и има их $k = \frac{n}{2}$. Ако је, пак, n непарно, $n = 2k + 1$, повољни исходи су поново 1, 2, … , k, али сада их је $k = \frac{n-1}{2}$. Ако са A означимо догађај „изабран је број мањи или једнак $\frac{n}{2}$ “, тада је за n парно $P(A) = \frac{\frac{n}{2}}{n} = \frac{1}{2}$, док је за n непарно $(A) = \frac{\frac{n-1}{2}}{n} = \frac{n-1}{2n} < \frac{1}{2}$.

Вратимо се још једном на пример бацања коцкице. Као што смо видели, исходи су: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Дефинишимо величину X која представља број добијен при бацању коцкице. Сходно томе, X може имати било коју вредност из скупа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Такву величину X називамо *случајном променљивом*.

Случајна промељива се може дефинисати за било који експеримент и кад исходи нису бројеви. На пример, при бацању новчића можемо узети да је $X = 0$ ако се окрене глава и $X = 1$ уколико се појави писмо. У општем случају, случајна променљива се добија, тако што се сваки исход, сваки елементаран догађај, преслика у неки реалан број.

Тако је код бацања коцкице

$$P(X = 1) = P(X = 2) = \cdots = P(X = 6) = \frac{1}{6} .$$

Међутим, за исти експеримент можемо дефинисати случајну променљиву Y која представља остатак броја који се појави при бацању коцкице при деоби са 5. Сада Y узима вредности из скупа $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Притом је $P(Y = 0) = P(Y = 2) = P(Y = 3) = P(Y = 4) = \frac{1}{6}$, док је $P(Y = 1) = \frac{1}{3}$. То је због тога што за остатке 0, 2, 3, 4 има по један повољан исход (то су редом 5, 2, 3, 4), док за остатак 1 има два (1 и 6).

Поменимо још једну случајну променљиву коју ћемо касније користити. Кажемо да је случајна променљива X *индикатор догађаја* A уколико је

$$X = \begin{cases} 0 & \text{ако се } A \text{ није десио} \\ 1 & \text{ако се } A \text{ десио.} \end{cases}$$

Уведимо још неке ознаке. Нека су A и B произвољни догађаји. Са $A \wedge B$ означавамо догађај у којем су се десили оба догађаја A и B. С друге стране, са $A \vee B$ означавамо догађај којем се десио бар један од догађаја A и B. На сличан начин се дефинишу догађаји $\bigwedge_{i=1}^{n} A_n = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ и $\bigvee_{i=1}^{n} A_i = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ за $n \geq 2$.

Пермутација скупа $\{1, 2, 3, 4\}$ је један поредак свих елемената тог скупа. На пример, 4123. Нека скуп елементарних догађаја чине све пермутације скупа $\{1, 2, 3, 4\}$. (Има их укупно $4! = 24$.) Означимо са A догађај који чине све пермутације у којима је на првом месту број 1; на пример 1423. Са B означимо догађај који се састоји од свих пермутација у којима је на другом месту број 2. Тада је $A \wedge B$ догађај који чине све пермутације у којима је на првом месту 1 и на другом 2. На пример, 1234. С друге стране, догађај $A \vee B$ се састоји од свих пермутација у којој на првом месту 1 или на другом месту 2. Такве су 1342, 3214 итд. Није тешко видети да се догађај $A \wedge B$ састоји од две пермутације, а $A \vee B$ од десет. Ако посматрамо случајне изборе пермутација скупа $\{1, 2, 3, 4\}$, из наведеног добијамо да је $P(A \wedge B) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$ и $P(A \vee B) = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$.

За догађаје A и B кажемо да су *независни* уколико је $P(A \wedge B) = P(A)P(B)$. Интуитивно, то значи да реализација догађаја A не зависи од реализације догађаја B и обратно. На пример, при бацању две коцкице K_1 и K_2, појава одређеног броја на коцкици K_1 не зависи од појаве неког броја на K_2 и обратно. Ако са A означимо појаву броја 2 на K_1 и са B појаву броја 3 (или било ког другог) на K_2, интуитивно је јасно да су догађаји A и B независни. То потврђује и формална дефиниција. Наиме, из $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$ и $P(A \wedge B) = \frac{1}{36}$, следи $P(A \wedge B) = P(A)P(B)$. С друге стране, догађаји A и B, из примера о пермутацијама скупа $\{1, 2, 3, 4\}$, нису независни. Разлог за то је што догађај A може да узрокује догађај B. Рецимо, пермутација 1243 је и у A и у B. С обзиром да је $P(A \wedge B) = \frac{1}{12}$ и $P(A)P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, следи $P(A \wedge B) \neq P(A)P(B)$, што је у супротности с дефиницијом независности два догађаја.

Ако за догађаје A и B важи $P(A \wedge B) = 0$, кажемо да су они *дисјунктни*. То значи да A и B не могу да се десе истовремено. При бацању новчића, нека је A појављивање главе и B појављивање писма. Јасно је да не може да се истовремено окрене и глава и писмо. Отуда је $P(A \wedge B) = 0$, тј. A и B су дисјунктни догађаји. Слично, при случајном избору пермутација скупа $\{1, 2, 3, 4\}$, нека A чине пермутације у којима је на првом месту 1 и на другом 2 и нека су у B пермутације у којима је на другом месту 3. Очигледно је $P(A \wedge B) = 0$ и догађаји A и B су дисјунктни.

Следећа два тврђења, која ћемо касније користити, дајемо без доказа.

Теорема 1. Ако су $A_1, A_2, \dots, A_n$ догађаји, такви да су свака два независна, тада је

$$P(\wedge_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i),$$

где је $\prod_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$.

□

Теорема 2. Ако су $A_1, A_2, \ldots, A_n$ произвољни догађаји, тада је

$$P(\vee_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

где је $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$. Притом, једнакост важи ако и само ако су свака догађаја дисјунктна, тј. $P(A_i \wedge A_j) = 0$ за свако $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

□

Нека је X случајна променљива која узима вредности из скупа $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, где су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ реални бројеви. Ако је $P(X = a_i) = p_i$ $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$, тада се функција $E(X)$, дефинисана са

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i, \tag{2}$$

зове *очекивана вредност* или само *очекивање* случајне променљиве X.

На пример, нека је X случајна променљива која представља број добијен при бацању коцкице. Тада $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и важи $P(X = i) = \frac{1}{6}$ за свако $i \in \{1,2, \ldots, 6\}$. Тада је, на основу (2),

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5.$$

Нека је Y случајна променљива чије су вредности остаци броја који се појави при бацању коцкице при деоби са 5. Као што смо видели, тада је $P(Y = 0) = P(Y = 2) = P(Y = 3) = P(Y = 4) = \frac{1}{6}$ и $P(Y = 1) = \frac{1}{3}$, па је

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{6} \approx 1{,}8.$$

Тако је очекивана вредност случајне промељиве Y једнака 1,83.

При бацању новчића, нека је Z случајна промељива дефинисана са: $Z = 0$ ако се појави глава и $Z = 1$ ако се појави писмо. Тада је очекивана вредност за Z једнака

$$E(Z) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Из саме дефиниције, а то показују и наведени примери, види се да очекивана вредност случајне променљиве представља њену просечну вредност.

У специјалном случају, ако је случајна променљива X индикатор догађаја A, тада је $E(X) = P(A)$.

Како случајне променљиве узимају вредности из скупа реалних бројева, може се, на природан начин, дефинисати операција сабирања. Ако су X_1 і X_2 случајне променљиве, њихов збир се дефинише као случајна променљива $X = X_1 + X_2$. На пример, нека је $X_1 \in \{1, 2\}$ и $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$ и $X_2 \in \{2, 4\}$ и $P(X_2 = 2) = P(X_2 = 4) = \frac{1}{2}$. Тада је $X = X_1 + X_2 \in \{3, 4, 5, 6\}$ и $(X = 3) = P(X = 4) = P(X = 5) = P(X = 6) = \frac{1}{4}$. Према (2) је

$$E(X_1) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$E(X_2) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{2}$$

$$E(X) = 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2},$$

одакле је $E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$. То није случајност, јер важи следеће тврђење које, такође, дајемо без доказа.

Теорема 3. Ако су X_1, X_2,..., X_n произвољне случајне променљиве и $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, тада је $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$.

□

Читаоце који желе више да сазнају о теорији вероватноће упућујемо на литературу [2] и [3].

2. ВЕРОВАТНОСНЕ МЕТОДЕ

Вероватносне методе се, наравно, користе у самој вероватноћи. Међутим, као изузетно моћно средство, нашле су примене и другим, веома различитим, областима математике. Због пуно облика и верзија, тешко је дати њихову прецизну и свеобухватну дефиницију. Огроман допринос примени и развоју вероватносних метода дала је група мађарских математичара на челу са чувеним Ердешом[2].

У примерима који следе илустроваћемо различите примене вероватносних метода. Пре тога, један термин који ћемо у наставку користити у више наврата.

Кад кажемо да је x *случајан број* из скупа $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, онда подразумевамо да сваки број из тог скупа има исту вероватноћу да буде

[2] Пал Ердеш (1913-1996) - мађарски математичар.

изабран за x. То можемо посматрати и на следећи начин. Замислимо да имамо „коцкицу" са n страна које су означене бројевима $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тада је x случајна променљива која представља број који се појавио при бацању те коцкице.

Први пример је једноставан и може се решити и без коришћења вероватноће.

Пример 1. Да ли у скупу $\{0, 1, 2, \dots, 999999\}$ има више оних бројева који садрже цифру 1 или оних који је не садрже?

Прво решење. Сваки од наведених бројева може се записати у облику $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, где $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$. На пример $0 = \overline{000000}$, $51 = \overline{000051}$, $234801 = \overline{234801}$ итд. Ако број не садржи цифру 1, тада за сваку цифру има 9 могућности: 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Због тога, таквих бројева има $9^6 = 531441$. Како је укупно 10^6 бројева, број оних без цифре 1 једнак је $10^6 - 9^6 = 46955$. Дакле, више има бројева који је не садрже цифру 1.

Други решење. Уз исте ознаке из првог решења, посматрајмо случајан број $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ из скупа $\{0, 1, 2, \dots, 999999\}$. Њега можемо добити и тако што независно изаберемо случајних 6 цифара (у битном поретку) из скупа $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. За сваку цифру a_i, $i = 1, 2, \dots, 6$, важи $P(a_i \neq 1) = \frac{9}{10}$. Дефинишемо A_i као догађај, такав да је $a_i \neq 1$. Како су свака два догађаја A_i и A_j $(i \neq j)$ независна, према теореми 1 добијамо да је

$$P(\text{број не садржи } 1) = P\left(\bigwedge_{i=1}^{6} A_i\right) = \prod_{i=1}^{6} P(A_i) = \prod_{i=1}^{6} \frac{9}{10}$$

$$= \underbrace{\frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \dots \cdot \frac{9}{10}}_{6} = 0{,}531441 > 0{,}5.$$

Пошто је вероватноћа да број не садржи цифру 1 већа од $\frac{1}{2}$, таквих бројева има више од половине, тј. има их више бројева који садрже цифру 1.

□

Приметимо да се друго, „вероватносно" решење суштински не разликује од првог, комбинаторног. Основна намера је била да прикажемо како се користи и како функционише одговарајућа метода из вероватноће.

Наредни пример демонстрира „праву" примену вероватносне методе.

Пример 2. Нека су $A_1, A_2, \dots, A_{500}$ произвољни скупови од по десет тачака у равни (не морају бити дисјунктни). Доказати да је могуће обојити сваку тачку црвено или плаво, тако да у сваком скупу буду заступљене обе боје.

Решење. Посматрајмо случајно бојење тачака скупа $A_1 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{500}$ у којем свака тачка има вероватноћу $\frac{1}{2}$ да буде обојена плаво и исту толику вероватноћу да буде обојена црвено. Ако су, притом, све тачке скупа A_i обојене истом бојом (црвеном или плавом) рећићемо да је скуп A_i монохроматски (једнобојан). У противном је бихроматски (двобојан). Уколико докажемо да је вероватноћа да је сваки од скупова $A_1, A_2, \ldots, A_{500}$ бихроматски већа од 0, тиме би доказали да постоји тражено бојење. Нека B_i представља догађај, такав да је скуп A_i монохроматски (једнобојан) при наведеном случајном бојењу. Како има 10 тачака, скуп A_i се може обојити са две боје на 2^{10} начина; свака тачка може бити црвена или плава. С друге стране, има 2 бојења у којима је A_i монохроматски. Отуда је, према формули (1), $(B_i) = \frac{2}{2^{10}} = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$. Како је

$$P(\text{постоји монохроматски скуп}) = P\left(\vee_{i=1}^{500} B_i\right),$$

из теореме 2 добијамо да је

$$P\left(\vee_{i=1}^{500} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{500} P(B_i) = \sum_{i=1}^{500} \frac{1}{512} = \frac{500}{512} < 1,$$

односно $P(\text{постоји монохроматски скуп}) < 1$. Дакле вероватноћа да постоји монохроматски скуп је мања од 1, па је вероватноћа да су сви скупови бихроматски већа од 0. То значи да постоји тражено бојење.

□

Напомена. Управо представљено решење спада у тзв. неконструктивне доказе. Није нађено тражено бојење, већ је само показано да оно постоји. Такви докази су веома чести кад се користе вероватносне методе.

Вероватносне методе се могу користити и за доказивање неких неједнакости. То илуструју следећа два примера.

Пример 3. (Лењинградска Математичка Олимпијада 1987, 10. разред) Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_n$ подскупови скупа $N_M = \{1, 2, \ldots, M\}$, такви да за свака два A_i и A_j важи $A_i \not\subset A_j$ и $A_j \not\subset A_i$. Ако је $|A_i| = a_i$ за $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, доказати да је

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\binom{M}{a_i}} \leq 1.$$

($|A|$ означава број елемената скупа A.)

Решење. Нека је $\sigma = x_1 x_2 \ldots x_M$ случајна пермутација скупа N_M. За свако $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, означимо са B_i догађај у којем су првих a_i бројева пермутације σ баш бројеви из скупа A_i, тј. $\{x_1, x_2, \dots, x_{a_i}\} = A_i$. Број повољних исхода једнак је броју таквих пермутација, а њих има $a_i!\,(M-a_i)!$. (Бројеве $x_1, x_2, \dots, x_{a_i}$ можемо пермутовати на првих a_i места на $a_i!$, а преосталих $M-a_i$ бројева на последњих $M-a_i$ места на $(M-a_i)!$ начина.) Како је укупан број исхода једнак броју пермутација скупа N_M, а то је $M!$, вероватноћа догађаја B_i једнака је

$$P(B_i) = \frac{a_i!(M-a_i)!}{M!} = \frac{1}{\frac{M!}{a_i!(M-a_i)!}} = \frac{1}{\binom{M}{a_i}}.$$

Докажимо да су међу догађајима B_1, B_2, …, B_n свака два дисјунктна.

Претпоставимо супротно, тј. да су се за неке индексе i и j десили и B_i и B_j. Без умањења општости, можемо узети да је $a_i > a_j$. Тада су у пермутацији σ првих a_i бројева из скупа A_i и првих a_j бројеви из скупа A_j. Како је $a_i > a_j$, следи $A_j \subseteq A_i$, што је у контрадикцији са условом задатка. Дакле, свака два догађаја B_i и B_j су дисјунктна, па из Теореме 2 добијамо да је

$$P(\vee_{i=1}^{n} B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\binom{M}{a_i}}.$$

Како је вероватноћа сваког догађаја највише 1, следи

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\binom{M}{a_i}} = P(\vee_{i=1}^{n} B_i) \le 1\,, \tag{3}$$

што је и требало да се докаже.

□

Напомена. На скоро исти начин иде доказ чувене Шпернерове[3] теореме о максималним антиланцима. Кажемо да подскупови A_1, A_2, …, A_n скупа $N_M = \{1, 2, \dots, M\}$ образују *антиланац* ако за сва два подскупа A_i и A_j важи $A_i \not\subset A_j$ и $A_j \not\subset A_i$.

Теорема 4 (Шпернер 1928) Ако подскупови A_1, A_2, …, A_n скупа $N_M = \{1, 2, \dots, M\}$ образују антиланац, тада је

$$n \le \binom{M}{\left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor}.$$

[3] Емануел Шпернер (1905-1980) - немачки математичар.

(Ако је α реалан број, $\lfloor\alpha\rfloor$ означава највећи цео број који није већи од α.)

Доказ. Познато је да је међу биномним коефицијентима $\binom{M}{0}, \binom{M}{1}, \ldots, \binom{M}{M}$ највећи „средњи“, тј. $\binom{M}{\lfloor\frac{M}{2}\rfloor}$. (Ако је M парно, такав је тачно један, а ако је M непарно, има их два.) Отуда је $\binom{M}{a_i} \le \binom{M}{\lfloor\frac{M}{2}\rfloor}$ за свако $0 \le a_i \le M$, па је $\frac{1}{\binom{M}{\lfloor\frac{M}{2}\rfloor}} \le \frac{1}{\binom{M}{a_i}}$. Из тога и (3) следи $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\binom{M}{\lfloor\frac{M}{2}\rfloor}} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\binom{M}{a_i}} \le 1$. С обзиром да је $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\binom{M}{\lfloor\frac{M}{2}\rfloor}} = \frac{n}{\binom{M}{\lfloor\frac{M}{2}\rfloor}}$, добијамо $\frac{n}{\binom{M}{\lfloor\frac{M}{2}\rfloor}} \le 1$ и $n \le \binom{M}{\lfloor\frac{M}{2}\rfloor}$.

□

Наредни пример је с такозване уже листе предлога задатака за Међународну математичку олимпијаду (ИМО) 2006.

Пример 4. (ИМО 2006, ужа листа) Нека је S скуп тачака у равни, таквих да никоје три нису колинеарне. Ако је M конвексан полигон чија су темена неке од тачака скупа S, тада $a(M)$ представља број темена полигона M, а $b(M)$ број тачака из S изван M. Доказати да за сваки реалан број $0 < x < 1$ важи

$$\sum_M x^{a(M)}(1-x)^{b(M)} = 1.$$

Сумирање се врши по свим конвексним полигонима M са теменима из S. Притом се дуж, тачка и празан скуп се сматрају полигонима са 2, 1, 0 темена, редом.

Решење. Посматрајмо бојење тачака скупа S црном и белом бојом, тако да је за сваку тачка вероватноћа да буде црна једнака x, а да буде бела $1-x$. Ако је M полигон, означимо са A_M догађај да су сва његова темена црна и да су све тачке изван полигона M беле. Како M има $a(M)$ темена, вероватноћа да су сва она црна је $x^{a(M)}$. Слично, вероватноћа да су сва темена изван полигона M бела је $(1-x)^{b(M)}$. Ако су M и M' два различита полигона, остављамо читаоцу да докаже да су догађаји A_M и $A_{M'}$ дисјунктни. Сада из Теореме 2 добијамо да је

$$P(\text{десио се неки } A_M) = P(\vee_M A_M) = \sum_M P(A_M)$$

$$= \sum_M x^{a(M)}(1-x)^{b(M)}. \tag{4}$$

Посматрајмо при неком бојењу само црне тачке и уочимо њихов конвексан омотач. То је полигон Q чија су темена црне тачке и који у својој унутрашњости садржи све остале црне тачке. Како су све тачке изван Q беле, закључујемо да је $P(A_Q) = 1$. Отуда је $P(\text{десио се неки } A_M) = 1$, па је, због (4), $\sum_M x^{a(M)}(1-x)^{b(M)} = 1$.

□

Следећи пример илустроваће примену још једне вероватносне методе. У питању је очекивана вредност или очекивање случајне променљиве. Наиме, ако за неку случајну променљиву X важи $E(X) \geq a$, онда се сигурно може остварити догађај у којем је $X \geq a$. На пример, уколико X представља број добијен при бацању коцкице, видели смо да је $E(X) = 3{,}5 > 3$. Из тога следи да се при бацању коцкице може добити број већи од 3. Такође, због $E(X) = 3{,}5 < 4$, следи да може пасти и број мањи од 4.

Иако наведени закључци звуче исувише тривијално, испоставља се да је очекивање изузетно моћно средство. У примени посебно долази до изражаја његова линеарност, тј. тврђење теореме 3. Користећи ту методу Ердеш је доказао следеће фасцинантно тврђење. (Ако је A коначан скуп, $|A|$ означава број елемената у A.)

Теорема 5. (Ердеш 1965) Нека је A скуп од n различитих природних бројева. Тада постоји подскуп $B \subseteq A$, такав да је $|B| \geq \frac{n}{3}$ и једначина $a + b = c$ нема решења у B.

Доказ. Нека је $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Уочимо прост број p, такав да је $p = 3k + 2$ и $p > 2a_n$. Нека је x случајан број из скупа $\{1, 2, \dots, p-1\}$. Уместо бројева из скупа A посматраћемо њихове случајне остатке по великом простом модулу. Означимо са $b_1, b_2, \dots, b_n$ редом остатке при дељењу бројева $xa_1, xa_2, \dots, xa_n$ са p. Није тешко видети да су сви сви ти остаци међусобно различити. Заиста, из $b_i = b_j$, $i \neq j$, следи $xa_i \equiv xa_j (\operatorname{mod} p)$. Из тога следи $a_i \equiv a_j (\operatorname{mod} p)$, јер је p прост број и $x \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. То, даље, повлачи $a_i \equiv a_j (\operatorname{mod} p)$ и $a_i = a_j$, јер су a_i и a_j мањи од p. Но, последње је контрадикторно услову теореме да сви бројеви из A различити. Према томе, $\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset \{1, 2, \dots, p-1\}$.

Посматрајмо скуп $C = \{k+1, \dots, 2k+1\}$. (Имајмо у виду да је $p = 3k + 2$.) Према дефиницији случајног броја из датог скупа, x узима сваку од вредности из скупа $\{1, 2, \dots, p-1\}$ са истом вероватноћом. Због напред наведеног, то исто важи за случајне бројеве из скупа $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Сходно формули (1), вероватноћа да неко b_i буде у скупу C једнака је

$$P(b_i \in C) = \frac{k+1}{3k+1}. \tag{5}$$

Како је $\frac{k+1}{3k+1} = \frac{1}{3} + \frac{\frac{2}{3}}{3k+1} > \frac{1}{3}$, добијамо

$$P(b_i \in C) > \frac{1}{3}. \tag{6}$$

Нека је X_i индикатор догађаја $b_i \in C$ и $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Тада случајна променљива X означава број b_i-ова који су "упали" у C. Из линеарности очекивања, (5) и (6) добијамо да је

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} P(b_i \in C) = n \cdot \frac{k+1}{3k+1} > \frac{n}{3}.$$

Дакле, постоји избор броја x, такав да је $X \geq \frac{n}{3}$. За то x, означимо са D скуп оних b_i који су у C, тј. $D = \{b_i \mid b_i \in C\}$. Тада је $|D| = X \geq \frac{n}{3}$. Најзад, нека је $B = \{a_i \mid b_i \in D\}$. Како сваком a_i одговара тачно једно b_i и обратно, следи $|B| = |D| \geq \frac{n}{3}$. Тврдимо да је тако добијени подскуп B тражени.

С обзиром да је $|B| \geq \frac{n}{3}$, остаје да се покаже да једначина $a + b = c$ нема решења у B. Препоставимо супротно. Тада постоје $a_i, a_j, a_l \in B$, такви да је $a_i + a_j = a_l$. Из тога је $xa_i + xa_j = xa_l$, односно $b_i + b_j \equiv b_l (\operatorname{mod} p)$. Како $b_l \in C$ (тако смо формирали скуп D, а касније и B), важи $b_l \geq k + 1$, па имамо

$$b_l + p \geq k + 1 + 3k + 2 = 4k + 3 > 4k + 2. \tag{7}$$

С друге стране, из $b_i, b_j, b_l \in C$ следи $k + 1 \leq b_i, b_j, b_l \leq 2k + 1$, па имамо

$$\begin{aligned} 4k + 2 = 2k + 1 + 2k + 1 &\geq b_i + b_j \\ &\geq k + 1 + k + 1 = 2k + 2 > 2k + 1 \\ &\geq b_l. \end{aligned} \tag{8}$$

Из (7) и (8) следи $b_l + p > b_i + b_j > b_l$, контрадикција.

Према томе, једначина $a + b = c$ нема решења у B, па је B заиста тражени подскуп.

□

Слични и други примери коришћења вероватносних метода могу се наћи у монографији [1].

Литература

[1] N. Alon, J. H. Spencer, *The probabilistic method*, John Wiley & Sons, 2004.

[2] С. Гилезан, Љ. Недовић, З. Лужанин, З. Овцин, Т. Грбић, Ј. Ивстић, Б. Михаиловић, К. Дорословачки, *Збирка решених задатака из вероватноће и статистике*, Нови Сад, 2009.

[3] П. Младеновић, *Елементаран увод у вероватноћу и статистику*, Друштво математичара Србије, Београд, 1998.

[4] В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић, *Увод у теорију бројева*, Друштво математичара Србије, Београд, 2013.

Статијата прв пат е објавена во списанието Тангента на ДМ на Србија во 2017/18 година