Osječki matematički list 15 (2015), 19-31

Geometrijska vjerojatnost u svakodnevnom životu

Dragana Jankov Maširević Ana Kozić*

Sažetak

U ovom članku je opisan geometrijski pristup definiranju vjerojatnosti te su dani primjeri problema iz svakodnevnoga života koji se mogu riješiti primjenom geometrijske vjerojatnosti.

Ključne riječi: *vjerojatnost, geometrijska vjerojatnost, primjena u svakodnevnom životu*

Geometric probability in real life

Abstract

In this paper, we present a geometric approach to defining probability. We also give examples of real life problems that can be solved by applying geometric probability.

Keywords: *probability, geometric probability, application in real life*

1 Povijesni pregled

Poznato je da su indijski matematičari već oko 3. stoljeća prije nove ere rješavali određene vjerojatnosne probleme, uglavnom iz religioznih razloga. Bavili su se permutacijama i kombinacijama, a u 9. stoljeću Mahavira je zapisao njihova pravila.

Girolamo Cardano (1501.–1576.), talijanski matematičar

Ipak, jednim od glavnih prethodnika teorije vjerojatnosti smatra se Cardano, autor jednog od prvih matematičkih djela o vjerojatnosti *Liber de luda*

*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: djankov@mathos.hr, akozic@mathos.hr

aleae (*Knjiga o bacanju kocke*), koju je napisao kao strastveni kockar. U toj knjizi, koja je nastala oko 1564. godine, opisani su problemi izračunavanja vjerojatnosti dobitka u igrama na sreću, a u njoj se nalazi i *klasična definicija vjerojatnosti* kao omjera broja povoljnih i broja mogućih ishoda. Od želje za sigurnim dobitkom teorija vjerojatnosti se razvila do matematičke discipline u 17. stoljeću kroz dopisivanja Pascala i Fermata. Prvi kompletan pregled svojih i svih do tada poznatih rezultata dao je 1812. godine Laplace u djelu *Théorie Analytique des Probabilités*, dok je 1933. Kolmogorov aksiomatizirao vjerojatnost uvođenjem *vjerojatnosnog prostora* što je naziv za uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ koja se sastoji od *prostora elementarnih događaja* (*skupa svih mogućih ishoda*) Ω, familije $\mathcal{F}$ podskupova od Ω, koju nazivamo *σ-algebra*, a njezine elemente *događajima* i funkcije $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ koju nazivamo *vjerojatnost* ukoliko zadovoljava aksiome vjerojatnosti, tj. da je $P(A) \geq 0$ za svaki $A \in \mathcal{F}$, $P(\Omega) = 1$, te da je vjerojatnost unije proizvoljne familije međusobno disjunktnih događaja jednaka zbroju vjerojatnosti pojedinih događaja.

Blaise Pascal (1623.-1662.), francuski matematičar

Pierre de Fermat (1601.–1665.), francuski matematičar

Pierre-Simon Laplace (1749.–1827.), francuski matematičar

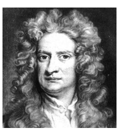
Geometrijska vjerojatnost se prvi puta javlja oko 1665. godine u privatnim rukopisima Isaaca Newtona koji se bavio problemom određivanja vjerojatnosti da će lopta zanemarive veličine, bačena u krug na slučajan način, pogoditi jedan od dvaju nejednakih područja kruga, dok se jednim od najpoznatijih problema vezanih uz geometrijsku vjerojatnost smatra *Buffonov problem* nazvan po G. L. L. Buffonu. Ovaj problem, u kojem treba odrediti vjerojatnost da će igla duljine $2l$ bačena na papir na kojemu su nacrtani paralelni pravci, od kojih su svaka dva pravca međusobno udaljena za $2a$, sjeći neki od tih pravaca, uz uvjet da je $l < a$, obrađen je u mnogim člancima (vidi npr. [5]).

Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903.–1987.), ruski matematičar

2 Geometrijski pristup definiranju vjerojatnosti

Ako je prostor elementarnih događaja Ω neki podskup skupa realnih brojeva ili općenito podskup skupa $\mathbb{R}^n$, koji nije diskretan, govorimo o geometrijskoj vjerojatnosti. U nastavku ćemo opisati slučajeve kada je $n = 1, 2, 3$.

Neka je $\Omega = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ segment i zamislimo da na slučajan način odabiremo točku x iz danog segmenta. Ako je $[c, d] \subseteq [a, b]$ zanima nas kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana točka x iz segmenta $[a, b]$ bude ujedno i u segmentu $[c, d]$. Za pripadnu σ-algebru na $\mathbb{R}$ prirodno uzimamo Borelovu σ-algebru, čije članove nazivamo Borelovi skupovi, a o kojoj čitatelj može pročitati više u [4]. Ipak, navedimo da u Borelove skupove ubrajamo: zatvorene intervale, poluotvorene (odnosno poluzatvorene) intervale, neograničene intervale, jednočlane skupove i prebrojive podskupove skupa $\mathbb{R}$.



Isaac Newton (1643.–1728.), engleski matematičar

Georges-Louis Leclerc Buffon (1707.–1788.), francuski matematičar

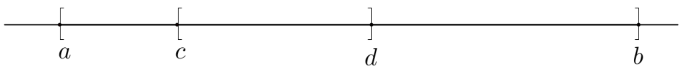
Uzimajući u obzir sljedeće prirodne pretpostavke:

- slučajno odabrana točka može biti bilo koja točka iz segmenta $[a, b]$
- vjerojatnost da odabrana točka bude u bilo kojem segmentu $[c, d]$ takvom da je $[c, d] \subseteq [a, b]$ proporcionalna je duljini tog segmenta i ne ovisi o njegovom položaju (pretpostavka o uniformnosti),

ako sa A označimo događaj *točka x je iz segmenta* $[c, d] \subseteq [a, b]$, slijedi da je

$$P(A) = P(x \in A) = k \cdot (d - c),$$

gdje je k konstanta koju nazivamo *koeficijent proporcionalnosti*.



Slika 1: Geometrijska vjerojatnost na $\mathbb{R}$

Iz aksioma vjerojatnosti, za događaj $\Omega = \{$*točka x je iz segmenta* $[a, b]\}$ vrijedi $P(\Omega) = 1$ te je stoga

$$1 = P(\Omega) = k \cdot (b - a), \quad \text{odnosno} \quad k = \frac{1}{b - a}.$$

Sada je

$$P(A) = \frac{d - c}{b - a}. \tag{1}$$

Ako duljinu segmenta interpretiramo kao njegovu mjeru i označimo je sa m, tada (1) prelazi u

$$P(A) = P(x \in A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}, \quad \text{za svaki } A \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}. \tag{2}$$

Nadalje, promotrimo slučaj kada je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Ulogu mjere sada preuzima površina te pretpostavljamo da je $m(\Omega) < \infty$. Zanima nas vjerojatnost slučajnog odabira točke x iz skupa Ω te ponovno uzimamo u obzir sljedeće pretpostavke:

- slučajno odabrana točka može biti bilo koja točka iz skupa Ω
- vjerojatnost da odabrana točka bude u bilo kojem skupu $A \subseteq \Omega$ proporcionalna je površini $m(A)$ tog skupa i ne ovisi o njegovom obliku i položaju (pretpostavka o uniformnosti).

Ako sa A označimo događaj *točka x je iz skupa A*, tada je

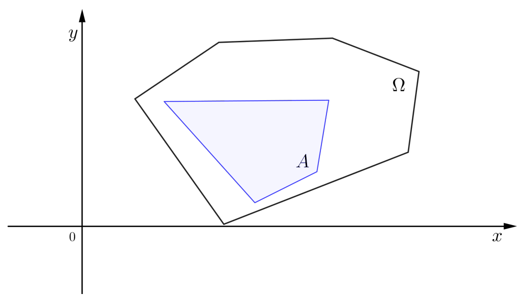
$$P(A) = P(x \in A) = k \cdot m(A),$$

gdje je k koeficijent proporcionalnosti.
Očigledno točka može pasti samo u skup Ω, tj. taj događaj je siguran pa je

$$1 = P(\Omega) = P(x \in \Omega) = k \cdot m(\Omega)$$

iz čega slijedi

$$k = \frac{1}{m(\Omega)}.$$



Slika 2: Geometrijska vjerojatnost na $\mathbb{R}^2$

Prema tome vrijedi

$$P(A) = P(x \in A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}, \quad \text{za svaki } A \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

Uz pretpostavku da je Ω ograničen skup u $\mathbb{R}^3$, na analogan način dobivamo formulu

$$P(A) = P(x \in A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}, \quad \text{za svaki } A \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \tag{4}$$

gdje ulogu mjere m sada preuzima obujam.
Funkciju P definiranu sa (2), (3) odnosno (4) nazivamo geometrijska vjerojatnost te se lako može provjeriti da tako definirana funkcija zadovoljava aksiome vjerojatnosti (vidi [7, str. 46]).

3 Zanimljivi primjeri

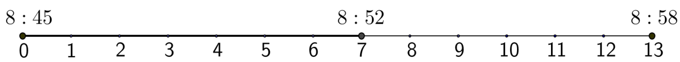
U ovom poglavlju pokušat ćemo kroz zanimljive primjere iz svakodnevnoga života čitateljima približiti računanje vjerojatnosti geometrijskim pristupom.

Primjer 1. Ivana studira na Odjelu za matematiku u Osijeku i stanuje na Vijencu Petrove gore. Danas se kasno ustala te je na autobusnu stanicu stigla u 8:45. Ivana se brine hoće li stići na predavanje koje počinje u 9:00. Pogledala je vozni red i pročitala da autobus dolazi svakih 13 minuta te mu treba 8 minuta da stigne na Gajev trg na kojemu se nalazi njezin fakultet. Kolika je vjerojatnost da će Ivanin autobus stići na vrijeme, uz pretpostavku uniformnosti vremena dolaska autobusa na stanicu?

Rješenje. Kako vožnja od Vijenca Petrove gore do stanice koja se nalazi ispred Odjela za matematiku traje 8 minuta, autobus treba na Vijenac Petrove gore stići najkasnije u 8:52, odnosno za najviše 7 minuta od kada je Ivana stigla na stanicu. Ako sa A označimo događaj *autobus je stigao na vrijeme*, znajući da autobus stiže na Ivaninu stanicu svakih 13 minuta (što predstavlja prostor elementarnih događaja Ω), vjerojatnost da ona neće zakasniti na predavanje je (vidi sliku 3)

$$P(A) = \frac{7}{13} = 0.538,$$

odnosno približno 54%. ◀

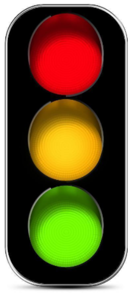


Slika 3.

Primjer 2. Ivana je ušla u autobus i nada se da će na putu do Gajevog trga biti što više zelenih svjetala na semaforu. Ukoliko na prvom semaforu bude zeleno svjetlo, Ivana zna da će autobus proći kroz zeleni val te će prije stići na odredište. Svjetlosni ciklus tog prvog semafora je sljedeći: 20 sekundi crveno, 5 sekundi žuto, 50 sekundi zeleno svjetlo. Kolika je vjerojatnost da će njezin autobus naići u trenutku kada je na prvom semaforu upaljeno zeleno svjetlo?

Rješenje. Prostor elementarnih događaja Ω je jedan ciklus izmjene svjetala na semaforu. Kako crveno svjetlo traje 20 s, žuto 5 s i zeleno 50 s, ukupno trajanje jednog ciklusa je $20\,\mathrm{s} + 5\,\mathrm{s} + 50\,\mathrm{s} = 75\,\mathrm{s}$. Ukoliko sa A označimo događaj *na semaforu je upaljeno zeleno svjetlo*, vrijedi $m(A) = 50\,\mathrm{s}$ te je

$$P(A) = \frac{50}{75} = \frac{2}{3} = 0.667.$$



Slika 4.

Dakle, vjerojatnost da će Ivanin autobus naići u trenutku kada je na semaforu upaljeno zeleno svjetlo je približno 67 %. ◀

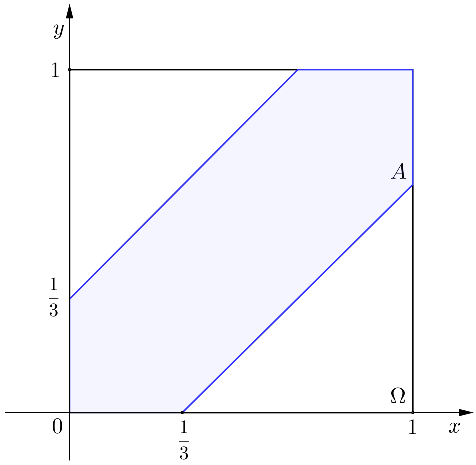
Primjer 3. Nakon predavanja na koje je ipak stigla, Ivana je krenula u studentski restoran *Gaudeamus* na ručak. Dogovorila se s prijateljicom Marijom, koja studira na drugom fakultetu, da će se naći između 12 i 13 sati, kada obje imaju pauzu. I Ivana i Marija moraju se vratiti na fakultet pa su se dogovorile da će pri dolasku u restoran čekati jedna drugu najviše 20 minuta. Kolika je vjerojatnost da će se one sastati uz pretpostavku uniformnosti vremena njihovog susreta?

Rješenje. Ako sa x označimo trenutak Ivaninog dolaska, a sa y trenutak Marijinog dolaska u restoran (pri čemu iz danih uvjeta vrijedi $x, y \in [12, 13]$), tada prostor elementarnih događaja Ω možemo zapisati na sljedeći način:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 12 \leqslant x \leqslant 13,\ \ 12 \leqslant y \leqslant 13\}.$$

Kako je poznato da će se Ivana i Marija sastati ako i samo ako je $|x - y| \leq \frac{1}{3}$, jer je 20 minuta jednako $\frac{1}{3}$ sata, ukoliko sa A označimo događaj da su se one sastale, slijedi da je

$$A = \left\{(x, y) \in \Omega : |x - y| \leqslant \frac{1}{3}\right\} = \left\{(x, y) \in \Omega : x - \frac{1}{3} \leqslant y \leqslant x + \frac{1}{3}\right\}.$$



Slika 5.

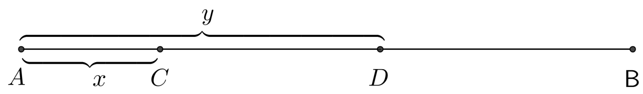
Zbog $m(\Omega) = 1$, iz slike 5 je jasno da je vjerojatnost događaja A jednaka

$$P(A) = m(A) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} = 0.556 \approx 56\%.$$

Prethodna je slika dobivena translacijom kvadrata Ω tako da mu se jedan vrh nalazi u ishodištu te je očito da prethodni račun ne ovisi o spomenutoj translaciji. ◀

Primjer 4. Nakon ručka Ivana se vratila na Odjel za matematiku jer se s kolegama dogovorila da zajedno uče za kolokvij iz kolegija Uvod u vjerojatnost i statistiku, koji je uskoro. Kako je bio lijep dan, odlučili su učiti u dvorištu. Razmišljajući o jednom zadatku primijetili su da su na žlijeb krova slučajno sletjela dva vrapca. Petar je predložio da izračunaju vjerojatnost da je udaljenost vrabaca od krajeva žlijeba, kao i njihova međusobna udaljenost barem 2 metra. Darija je dodala da je potrebno uzeti u obzir pretpostavku o uniformnosti svih navedenih udaljenosti kao i duljinu žlijeba pa su pretpostavili da je ona 20 metara. Koliko iznosi vjerojatnost koju su računali?

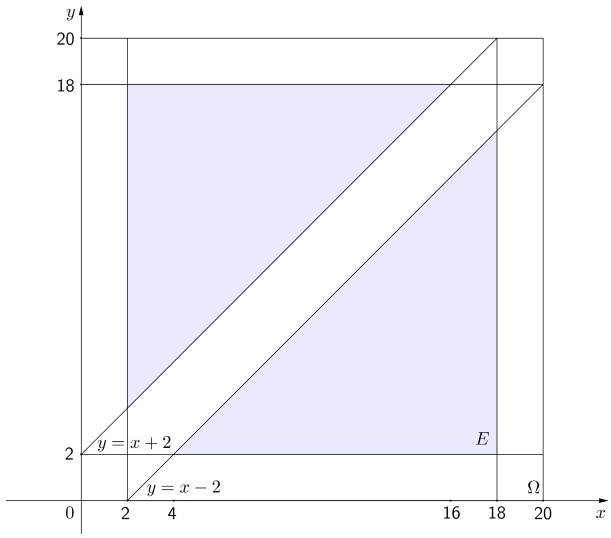
Rješenje. Označimo krajeve žlijeba sa A i B, vrapce sa C i D, te pripadne udaljenosti $x = |C - A|$, $y = |D - A|$ (vidi sliku 6).
Kako je duljina žlijeba 20 metara, slijedi da je $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 20, 0 \leqslant y \leqslant 20\}$. Uzimajući u obzir da su vrapci od krajeva žlijeba udaljeni barem 2 metra te da je njihova međusobna udaljenost također barem



Slika 6.

2 metra, traženi događaj možemo zapisati na sljedeći način:

$$E = \{(x, y) \in \Omega : 2 \leq x \leq 18, \ 2 \leq y \leq 18, \ |y - x| \geq 2\}.$$



Slika 7.

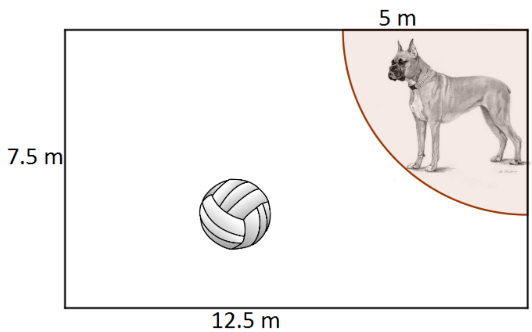
Sa slike 7 vidimo da događaj E možemo prikazati kao dva pravokutna trokuta od kojih svaki ima obje katete duljine 14, stoga dobivamo da je tražena vjerojatnost

$$P(E) = \frac{14 \cdot 14}{20 \cdot 20} = \frac{49}{100} = 0.49,$$

odnosno 49%. ◀

Primjer 5. Kada se Ivana vratila u stan, brzo je ostavila svoje stvari i obukla trenerku jer ide kod Mateje igrati odbojku. Prije polaska namjestila je snimanje omiljene serije Teorija Velikog praska, koja uskoro počinje, pa će je pogledati kada se vrati kući. Kada je stigla kod Mateje odmah se uključila u igru, jer su ostali prijatelji već stigli. Mateja ima veliko dvorište u obliku pravokutnika, dugačko 12.5 metara i široko 7.5 metara pa je pozvala prijatelje kod sebe. U žaru igre Marko je jako udario loptu i ona je odletjela u susjedovo dvorište. Mateja je rekla da je susjedovo dvorište istih dimenzija kao i njezino, ali da susjed ima psa koji se nalazi u jednom kutu dvorišta na uzici dugačkoj 5 metara i koji uništi svaku loptu koju uspije dohvatiti. Susjed nije kod kuće te Mateja mora čekati da se on vrati kako bi uzela loptu i s prijateljima nastavila igru, ako je lopta čitava. Kolika je vjerojatnost da je lopta ostala čitava ako ona s jednakom vjerojatnosti pada na dijelove dvorišta jednake površine?

Rješenje. Lopta je mogla pasti bilo gdje u susjedovo dvorište pa je prostor elementarnih događaja Ω susjedovo dvorište oblika pravokutnika i površine $m(\Omega) = 7.5\,m \cdot 12.5\,m = 93.75\,m^2$.



Slika 8.

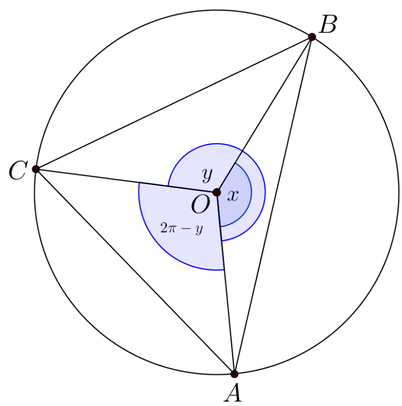
Vidimo da je površina područja kojim se pas može kretati jednaka četvrtini površine kruga polumjera $r = 5\,m$, odnosno $\frac{25\pi}{4}\,m^2$. Ako sa A označimo događaj *lopta je ostala čitava*, to znači da je lopta pala izvan dometa psa, odnosno u dio dvorišta površine $93.75\,m^2 - \frac{25\pi}{4}\,m^2 \approx 74.12\,m^2$.
Prema tome, vjerojatnost da je lopta ostala čitava je

$$P(A) = \frac{74.12}{93.75} = 0.7906,$$

što je približno 79%. ◀

Primjer 6. Nakon igre (Matejin susjed ubrzo je došao i vratio im loptu koja je ostala čitava) Ivana se vratila u stan, spremila za spavanje i upalila televizor kako bi pogledala epizodu serije koja se snimala dok nje nije bilo. Kada je pokrenula snimku, shvatila je da je u žurbi podesila snimanje krivog programa te se umjesto njezine serije snimio dio emisije na kanalu National Geographic. U emisiji su govorili o tome kako se tri svemirska broda približavaju Zemlji i pokazivali su sliku s istaknutom kružnicom oko nje na kojoj su svjetlile tri točke koje predstavljaju svemirske brodove. Ivana je skicirala sliku koju je vidjela i zapitala se kolika je vjerojatnost da je trokut kojeg određuju ti brodovi šiljastokutan ako pretpostavi da su kutovi određeni danim točkama s vrhom u središtu promatrane kružnice uniformno distribuirani na $[0, 2\pi]$.

Rješenje. Označimo svemirske brodove sa A, B i C te središte promatrane kružnice sa O. Neka nam je brod A na kružnici fiksan te, bez smanjenja općenitosti, neka je B brod koji sa A zatvara manji kut (promatrajući u smjeru obrnutom od kretanja kazaljke na satu). Označimo promatrani kut $\angle AOB$ sa x (kao na slici 9). Sa y označimo kut koji brod C zatvara s brodom A tj. $y = \angle AOC$. Uočimo kako je $y \geq x$ te je preostali kut $\angle COA = 2\pi - y$.



Slika 9.

Prostor elementarnih događaja Ω možemo zapisati na sljedeći način:

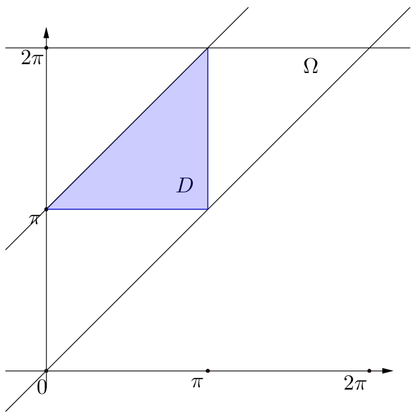
$$\Omega = \{(x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] : y \geq x\}.$$

Označimo sa D događaj *trokut ABC je šiljastokutan*. Iz uvjeta da kutovi $\angle BCA$, $\angle CAB$ i $\angle ABC$ budu šiljasti za pripadne središnje kutove mora biti redom zadovoljeno $x \leq \pi$, $y - x \leq \pi$ te $2\pi - y \leq \pi$ pri čemu je zadnji uvjet ekvivalentan sa $y \geq \pi$. Iz prethodnog razmatranja slijedi da je

$$D = \{(x, y) \in \Omega : x \leq \pi,\ y \geq \pi,\ y - x \leq \pi\}.$$

Sa slike 10 vidimo da vjerojatnost događaja D možemo izračunati na sljedeći način:

$$P(D) = \frac{\frac{\pi^2}{2}}{\frac{(2\pi)^2}{2}} = \frac{1}{4} = 0.25.$$



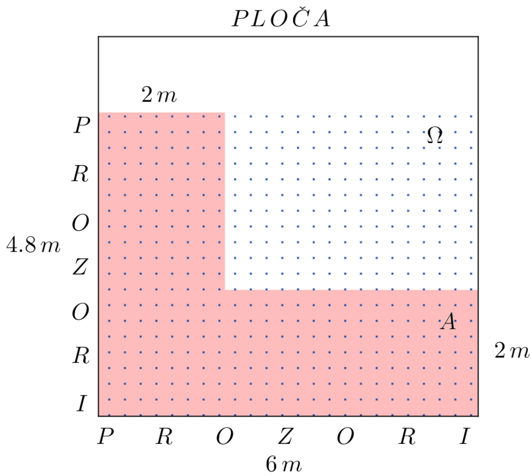
Slika 10.

Dakle, vjerojatnost da trokut koji je Ivana skicirala bude šiljastokutan je 25%. ◀

Primjer 7. Kada je došao trenutak kolokvija, Ivana se nadala da će uspjeti sjesti barem na 2 metra udaljenosti od prozora jer tada, zbog jače svjetlosti i svježeg zraka, ima bolju koncentraciju. Predavaonica u kojoj se piše ispit je kvadratnog oblika širine 6 metara, dok se prozori protežu na 80% duljine s lijeve strane prostorije i cijelom širinom u zadnjem dijelu (vidi sliku 11), a u tom dijelu se nalaze i stolice. Kolika je vjerojatnost da će Ivana sjesti gdje želi?

Rješenje. Sa slike 11 vidimo da je površina područja u kojem se nalaze stolice $4.8\,m \cdot 6\,m = 28.8\,m^2$ što upravo predstavlja površinu prostora elementarnih događaja Ω. Ako sa A označimo događaj *Ivana je sjela gdje želi*, uočimo da je površina tog događaja jednaka površini osjenčanog dijela na slici 11, tj. $4\,m \cdot 2\,m + 4.8\,m \cdot 2\,m = 17.6\,m^2$ pa je vjerojatnost traženog događaja

$$P(A) = \frac{17.6}{28.8} = 0.611 \approx 61\%.$$



Slika 11.

Ivana je uspjela sjesti do prozora te je dobro riješila kolokvij, pomalo zbog svježeg zraka, a više zbog uloženog truda u vježbanje zadataka i smišljanje primjera iz svakodnevnice koji se mogu riješiti primjenom geometrijske vjerojatnosti. ◀

Literatura

[1] F. M. Brückler, *Povijest Matematike II*, Zagreb, 2009.

[2] M. Hykšová, A. Kalousová, I. Saxl, *Early history of geometric probability and geometric stereology*, Image Analysis and Stereology, Volume 31, International Society for Stereology, 2012.

[3] A. Johnson, *Geometric Probability*, COMAP, Inc., 1995.

[4] D. Jukić, *Mjera i integral*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2012.

[5] P. Novaković, *Prošireni Buffonov pokus*, Osječki matematički list, **11** (2011), 29–38.

[6] I. Plavčić, T. Škrtić, D. Pavrlišak, *Matematički paradoksi*, Math.e, **16** (2010).

[7] N. Sarapa, *Vjerojatnost i statistika*, Školska knjiga, Zagreb, 1993.