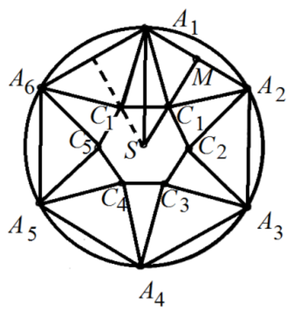
Ристо Малчески

ДВЕ ЗАДАЧИ ЗА ПРАВИЛЕН ШЕСТАГОЛНИК

Во овој напис ќе разгледаме две познати, но занимливи задачи за правилен шестаголник.

Задача 1. На секоја страна на правилен шестаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ како над хипотенуза, од внатрешната страна е конструиран по еден рамнокрак правоаголен триаголник. Темињата $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ на овие триаголници се темиња на внатрешен шестаголник (цртеж 1).

Докажи дека шестаголникот $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ е правилен и пресметај ја неговата плоштина, ако е позната страната a на шестаголникот $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.



Цртеж 1

Решение. Темето C_1 лежи на симетралата на страната A_1A_2, па затоа $\measuredangle C_1SA_1 = 30^0$. Слично $\measuredangle C_6SA_1 = 30^0$, па значи $\measuredangle C_1SC_6 = 60^0$. Аналогно

$$\measuredangle C_1SC_2 = \measuredangle C_2SC_3 = \measuredangle C_3SC_4 = \measuredangle C_4SC_5 = \measuredangle C_5SC_6 = 60^0.$$

Од друга страна

$$\overline{C_1S} = \overline{M_1S} - \overline{M_1C}_1 = \tfrac{a\sqrt{3}}{2} - \tfrac{a}{2} = \tfrac{a}{2}(\sqrt{3}-1).$$

Аналогно

$$\overline{C_2S} = \overline{C_3S} = \overline{C_4S} = \overline{C_5S} = \overline{C_6S} = \tfrac{a}{2}(\sqrt{3}-1).$$

Според тоа, триаголниците $C_1SC_2, C_2SC_3, C_3SC_4, C_4SC_5, C_5SC_6, C_6SC_1$ се рамнокраки и аголот меѓу крците е еднаков на 60^0, а значи тие се рамнострани. Значи

$$\overline{C_1C}_2 = \overline{C_2C}_3 = \overline{C_3C}_4 = \overline{C_4C}_5 = \overline{C_5C}_6 = \overline{C_6C}_1 = \tfrac{a}{2}(\sqrt{3}-1)$$

и

$$\measuredangle C_1C_2C_3 = \measuredangle C_2C_3C_4 = \measuredangle C_3C_4C_5 = \measuredangle C_4C_5C_6 = \measuredangle C_5C_6C_1 = \measuredangle C_6C_1C_2 = 60^0.$$

Конечно, шестаголникот $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ има еднакви страни и еднакви агли, т.е. тој е правилен и неговата страна е $b = \frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)$. Според тоа, неговата плоштина е

$$P_1 = 6\frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}(\frac{a}{2})^2(\sqrt{3}-1)^2 = \frac{3a^2}{4}(2\sqrt{3}-3)\,. \blacksquare$$

Забелешка 1. а) Плоштината P_2 на делот од надворешниот шестаголник, кога од него ќе се исече внатрешниот шестаголник е $P_2 = P - P_1$, каде $P = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$. Значи

$$P_2 = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} - \frac{3a^2}{4}(2\sqrt{3}-3) = \frac{9a^2}{4}\,.$$

б) Плоштината на шесткраката ѕвезда $A_1C_1A_2C_2A_3C_3A_4C_4A_5C_5A_6C_6$ ја добиваме кога од плоштината на надворешниот шестаголник ќе ја одземеме плоштината на шесте рамнокраки правоаголни триаголници $A_1C_1A_2$, $A_2C_2A_3, A_3C_3A_4, A_4C_4A_5, A_5C_5A_6, A_6C_6A_1$. Секој од овие триаголници има хипотенуза a и висина спуштена кон хипотенузата $\frac{a}{2}$, па затоа нивната вкушна плоштина е $P' = \frac{6a^2}{4}$. Според тоа, плоштината на ѕвездата е

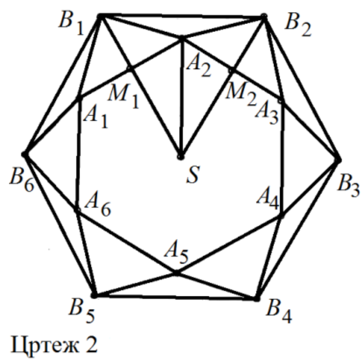
$$P_3 = P - P' = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} - \frac{3a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}(\sqrt{3}-1)\,.$$

Задача 2. На секоја страна на правилен шестаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, како мад хипотенуза, од надворешната страна е конструиран по еден рамнокрак правоаголен триаголник. Темињата на правите агли B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 на овие триаголници се темиња на друг надоверешен шестаголник (цртеж 2).

Докажи дека шестаголникот $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ е правилен и пресметај ја неговата плоштина P_4, ако е позната странатa a на шестаголникот $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

Решение. Нека со S го означиме центарот на симетрија на шестаголникот $A_1A_2A_3$ $A_4A_5A_6$. Ако со M_1 и M_2 ги означиме средините на A_1A_2 и A_2A_3, тогаш $A_1A_2 \perp B_1M_1$ и $A_1A_2 \perp SM_1$, т.е. точките B_1, M_1 и S се колинеарни и притоа важи

$$\overline{B_1S} = \overline{M_1S} + \overline{M_1B_1} = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{3}+1)\,.$$



Цртеж 2

Аналогно се докажува дека $\overline{B_2S}=\overline{B_3S}=\overline{B_4S}=\overline{B_5S}=\overline{B_6S}=\frac{a}{2}(\sqrt{3}+1)$. Од друга страна $\measuredangle B_1SB_2=\measuredangle B_1SA_2+\measuredangle A_2SB_2=30^0+30^0=60^0$, т.е. триаголникот B_1SB_2 е рамностран. Слично докажуваме дека триаголниците B_2SB_3, $B_3SB_4, B_4SB_5, B_5SB_6, B_6SB_1$ се рамнострани. Значи

$$\overline{B_1B_2}=\overline{B_2B_3}=\overline{B_3B_4}=\overline{B_4B_5}=\overline{B_5B_6}=\overline{B_6B_1}=\frac{a}{2}(\sqrt{3}+1)$$

и

$$\measuredangle B_1B_2B_3=\measuredangle B_2B_3B_4=\measuredangle B_3B_4B_5=\measuredangle B_4B_5B_6=\measuredangle B_5B_6B_1=\measuredangle B_6B_1B_2=60^0.$$

Конечно, шестаголникот $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ има еднакви страни и еднакви агли, т.е. тој е правилен и неговата страна е $b=\frac{a}{2}(\sqrt{3}+1)$. Според тоа, неговата плоштина е

$$P_4=6\frac{b^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}(\frac{a}{2})^2(\sqrt{3}+1)^2=\frac{3a^2}{4}(2\sqrt{3}+3). \blacksquare$$

Забелешка 2. а) Плоштината P_5 на делот од надворешниот шестаголник, кога од него ќе се исече внатрешниот шестаголник е $P_5=P_4-P$, каде $P=\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$. Значи $P_5=\frac{3a^2}{4}(2\sqrt{3}+3)-\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}=\frac{9a^2}{4}$.

б) Плоштината на шесткраката ѕвезда $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4A_5B_5A_6B_6$ ја добиваме кога на плоштината на шестаголникот $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ ќе ги додадеме плоштините на шесте рамнокраки правоаголни триаголници $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3, A_3B_3A_4, A_4B_4A_5, A_5B_5A_6, A_6B_6A_1$. Секој од овие триаголници има хипотенуза a и висина спуштена кон хипотенузата $\frac{a}{2}$, па затоа нивната вкушна плоштина е $P'=\frac{6a^2}{4}$. Според тоа, плоштината на ѕвездата е

$$P_6=P+P'=\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}+\frac{3a^2}{2}=\frac{3a^2}{2}(\sqrt{3}+1).$$

Забелешка 3. Задачите 1 и 2 може да се обопштат, така што наместо рамнокраки правоаголни триаголници, се конструираат произволни рамнокраки триаголници. Притоа, во задачата 1 кракот на констрираниот триаголник мора да биде помал од a, а во задачата 2 нема никакво ограничување. Обиди се некои од овие обопштувања самостојно да ги направиш. На пример, за $c=\frac{2}{3}a$ и $c=\frac{3}{4}a$.