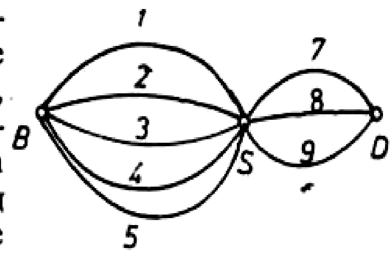
Војислав Андрић (Ваљево)

ПРЕБРОЈАВАЊЕ КОНАЧНИХ СКУПОВА[1)]

У великом броју математичких проблема потребно је пребројати елементе неког коначног скупа. Циљ овога текста је да прикаже једну методу погодну за пребројавање коначних скупова и укаже на неке њене примене.

Пример **1.** Из Београда се у Сарајево може стићи коришћењем 5 путних праваца, а из Сарајева се у Дубровник може аутомобилом стићи коришћењем 3 пута. На колико начина аутомобилиста може стићи у Дубровник, ако се креће преко Сарајева?

Нека су B, S и D тачке које означавају градове Београд, Сарајево и Дубровник и нека су 1, 2, 3, 4, 5 ознаке за путеве Београд — Сарајево, а 7, 8, 9 ознаке за путеве Сарајево — Дубровник (сл. 1). Тада путник из Београда може стићи у Сарајево било којим од путева 1, 2, 3, 4, 5, а после тога своје путовање за Дубровник може продужити било којим од путева 7, 8, 9. Према томе, сви путеви Београд—Дубровник одређени су уређеним паровима путева (1, 7), (1, 8), (1, 9), (2, 7), (2, 8), (2,9), (3, 7), (3, 8), (3, 9), (4, 7), (4, 8), (4, 9), (5, 7), (5, 8), (5, 9), који заправо представљају елементе Декартовог производа скупова $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B=\{7, 8, 9\}$. Дакле, укупан број путева је $5 \cdot 3=15$.



Сл. 1

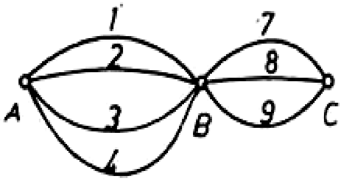
Пример **2.** Колико двоцифрених бројева се може написати ако је једна цифра елемент скупа $M=\{1, 2, 3, 4\}$, а друга цифра елемент скупа $N=\{7, 8, 9\}$?

Претпоставимо најпре да се за цифре десетица узимају елементи скупа M, а за цифре јединица елементи скупа N. У том случају добијамо граф представљен на слици 2а, одакле се види да ће се на тај начин у овом случају добити укупно $4 \cdot 3=12$ бројева.

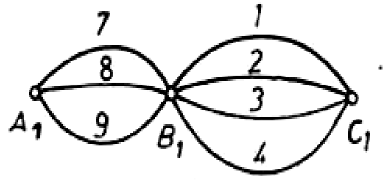
---

[2] Аутор је ову тему реализовао у току Летње школе младих математичара СР Србије — Шупља Стена, 1985.

Ако се пак за цифру десетица узимају елементи скупа N, а за цифру јединица елементи скупа M, добија се граф на сл. 2б, на основу којег закључујемо да ће се и у овом случају добити укупно $3 \cdot 4 = 12$ бројева.



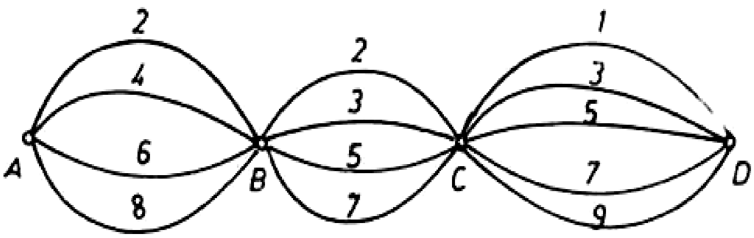
Сл. 2а



Сл. 2б

Пример 3. Колико се троцифрених бројева може написати ако је цифра стотина парна, цифра десетица прост број, а цифра јединица непаран број?

Услове дате у овом задатку можемо представити схемом на сл. 3. Сваки од путева од тачке A до тачке D (без враћања у назад) представља један од тражених бројева. Како за цифру стотина можемо узети сваку од 4 парне цифре (0 не долази у обзир, јер тро-

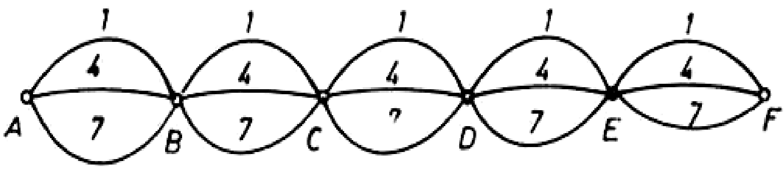


Сл. 3

цифрен број не може почињати цифром 0), за цифру десетица сваки од 4 једноцифрена проста броја, а за цифру јединица сваку од 5 непарних цифара, можемо формирати укупно $4 \cdot 4 \cdot 5 = 80$ бројева.

Пример 4. Колико се петоцифрених бројева може написати помоћу цифара 1, 4 и 7?

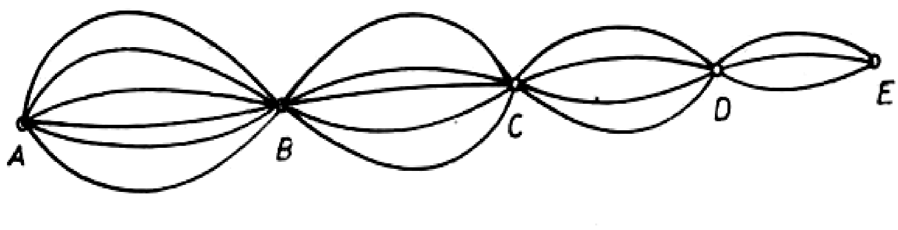
На ово питање се најлакше може одговорити на основу схеме на слици 4. Са схеме се види да се тражени бројеви могу формирати имајући у виду путеве по којима се може стићи из тачке A у тачку F. Тих путева, а према томе и петоцифрених бројева, има $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$.



Сл. 4

Пример 5. Дат је скуп $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Колико се четвороцифрених бројева може написати помоћу цифара из скупа A, ако се при том ни једна цифра не сме поновити?

Овај задатак је унеколико сличан претходним, али се за његово решење ипак не може употребити граф какав смо имали у претходном примеру. У овом случају, наиме, може се само назначити да се за прву цифру тражених бројева могу узимати, редом, свих 6 елемената скупа A. Када се одабере прва цифра, за другу цифру се могу узети, опет редом, само 5 преосталих елемената скупа A, а потом се поступак даље наставља . . . Међутим, очигледно је да се по гранама графа сада не могу исписивати бројеви, јер ове гране неће увек представљати исте бројеве.

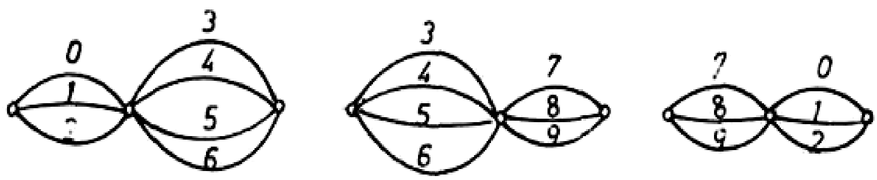


Сл. 5

Ипак, број тражених четвороцифрених бројева није тешко израчунати, јер број путева који воде од A ка E је, очигледно, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ (сл. 5).

Пример 6. На правој p дате су редом тачке A, B и C; на правој q тачке M, N, P, O и на правој r тачке X, Y, Z. Никоје три од тачака са различитих правих не налазе се на истој правој. Колико је правих одређено датим системом правих?

Тачке праве p и тачке праве q одређују $3 \cdot 4 = 12$ правих. Тачке праве q и тачке праве r одређују $4 \cdot 3 = 12$ правих, а тачке праве r и праве p одређују $3 \cdot 3 = 9$ правих. То је укупно $12 + 12 + 9 = 33$ праве, при чему нису рачунате праве p, q и r. Ако и њих урачунамо, укупан број правих је 36.

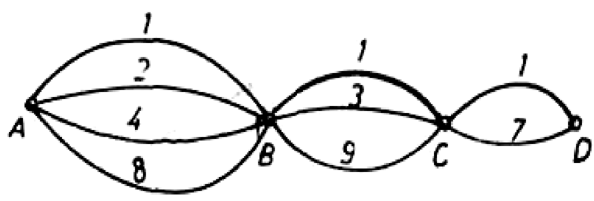


Сл. 6а Сл. 6б Сл. 6в

Ако тачке A, B, C, M, N, P, O, X, Y, Z кодирамо бројевима 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, онда се претходни задатак може и графички приказати графовима на сликама 6а, 6б и 6в.

Пример 7. Колико делилаца има број 504 (узимајући у обзир и 1, као и сам дати број 504)?

Како је $504 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, овај задатак можемо решити посматрајући три групе фактора: оне који се садрже у фактору 2^3, а то су 1, 2, 4, 8; оне који се садрже у фактору 3^2, а то су 1, 3 и 9; и оне који се садрже у фактору 7, а то су 1 и 7. Сваки фактор броја 504 представља производ по једног фактора и сваке од три наведене групе фактора, односно сваком делиоцу броја 504 одговара по један пут од A до D на нашем графу (сл. 7).



Сл. 7

Није тешко израчунати да је укупан број делилаца броја 504 једнак $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, а са графа се лако могу и прочитати:

$1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot 1 \cdot 7 = 7$, $1 \cdot 3 \cdot 1 = 3$, $1 \cdot 3 \cdot 7 = 21$, $1 \cdot 9 \cdot 1 = 9$, $1 \cdot 9 \cdot 7 = 63$

$2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$, $2 \cdot 1 \cdot 7 = 14$, $2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$, $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$, $2 \cdot 9 \cdot 1 = 18$, $2 \cdot 9 \cdot 7 = 126$

$4 \cdot 1 \cdot 1 = 4$, $4 \cdot 1 \cdot 7 = 28$, $4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$, $4 \cdot 3 \cdot 7 = 84$, $4 \cdot 9 \cdot 1 = 36$, $4 \cdot 9 \cdot 7 = 252$

$8 \cdot 1 \cdot 1 = 8$, $8 \cdot 1 \cdot 7 = 56$, $8 \cdot 3 \cdot 1 = 24$, $8 \cdot 3 \cdot 7 = 168$, $8 \cdot 9 \cdot 1 = 72$, $8 \cdot 9 \cdot 7 = 504$.

Задаци

1. Колико четвороцифрених бројева се завршава цифром 7?
2. Да ли је више петоцифрених бројева који почињу парном, а завршавају се непарном цифром или је више оних који почињу непарном, а завршавају се парном цифром? Образложи решење.
3. На колико начина се може у 7 гаража паркирати: а) 7 аутомобила; б) 5 аутомобила?
4. Ко има више делилаца: број 144 или број 1225?
5. Колико разних могућности се може остварити при истовременом окретању 5 коцкица (за „Не љути се човече")?
6. У нашој земљи ће се, почев од 1987. године, увести и регистрације за бицикле. Колико се највише бицикла може регистровати ако свака регистрација садржи два слова азбуке (иста или различита) и један четвороцифрен број (на пример ВВ-4567)?

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија