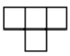
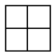
Сава Гроздев, Софија
Алекса Малчески, Скопје

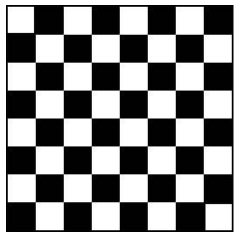
МАЛКУ МАТЕМАТИКА НА ШАХОВСКА ТАБЛА I

Задачите со боење и покривање со определени фигури на полињата на дадена табла се карактеризираат по тоа што не постои универзален метод за нивно решавање. Меѓутоа, и покрај разновидноста на методите за решавање на овој тип задачи, сепак постојат методи кои може да се применат на повеќе задачи, па дури и на цели класи проблеми од овој вид. Во нашите разгледувања ќе се задржиме на повеќе видови задачи за покривање и боење, при што покрај тоа што ќе презентираме разлини идеи за нивно решавање, ќе разгледаме и задачи за чие решавање се користи иста идеја или идејата незначитечно се модифицира.

1. Дали табла со димензии 8×8, може да се покрие со петнаесет T-тетрамина и едно квадратно тетрамино (види ги цртежите долу).

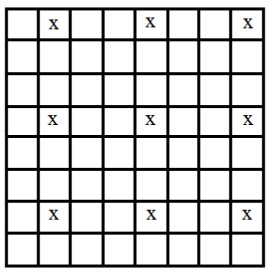

Т-тетрамино


квадратно тетрамино



Решение. Ќе докажеме дека такво покривање не постои. Да ја обоиме таблата во две бои, на стандарден начин (цртеж десно). Тогаш едно T-тетрамино, во зависност од тоа како е поставено, ќе покрива или 3 црни и 1 бело или 1 црно и 3 бели полиња. Значи, петнаесет T-тетрамина вкупно ќе покријат непарен број црни и непарен број бели полиња, додека едно квадратно тетрамино секогаш покрива 2 црни и 2 бели полиња. Според тоа, со петнаесет T-тетрамина и 1 квадратно тетрамино може да се покријат непарен број црни и непарен број бели полиња, а таблата има по 32 полиња во двете бои. Значи, бараното покривање не постои.

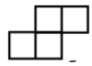
2. На шаховска табла обележи најмал број полиња така што, да бидат исполнети следниве услови:
а) Меѓу обележаните полиња да нема соседни (соседни се полињата кои имаат заедничко теме или заедничка страна);
б) Обележувањето на уште едно поле да го нарушува условот а).
Прикажи такво обележување и докажи дека не е можно да се обележат помал број полиња на шаховската табла така што да се исполнети условите на задачата.



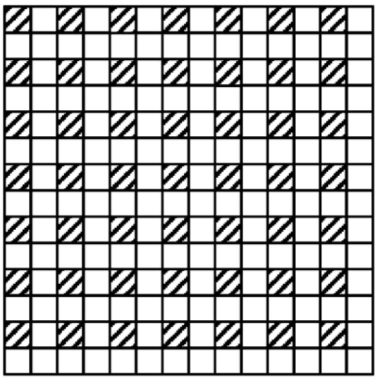
Решение. Доволно е да обележиме 9 полиња, на пример, како што е прикажано на цртежот.
Ќе покажеме дека не е можно да обележеме помалку од 9 полиња и при тоа да се исполнети условите на задачата. Да претпоставиме дека страната на секое поле на шаховската табла има должина еден. Нека секое од обележените полиња на цртежот е централно поле на квадрат со страна 3 (некои од тие квадрати излегуваат надвор од шаховската табла).
Да допуштиме, дека постои комбинација од помалку од 9 обележени полиња, која ги задоволува условите на задачата. Тогаш

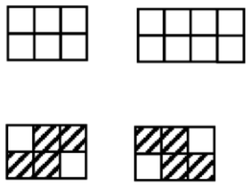
барем во еден од квадратите со димензија 3×3 нема да има обележено поле. Да го обележиме централното поле од овој квадрат. Ова поле нема да биде соседно со ниту едно од претходно обележените полиња, па значи нема да биде исполнет условот б). Според тоа, бројот на обележените полиња не може да биде помал од 9.

3. Дадени се 14×14 табла, разделена на 196 единечни квадратчиња и фигура со 4 единечни квадратчиња (цртеж десно). Фигурата се поставува на таблата така што квадратчињата да ѝ се совпаѓаат со квадратчињата на таблата. Колку најмалку квадратчиња од таблата треба да се обојат така што како и да се постави фигурата, таа да покрива барем едно обоено квадратче?



Решение. Даден е пример со обојување на 49 единечни квадратчиња.





Јасно е, дека како и да се постави дадената фигура, таа покрива точно едно обоено единечно квадратче.

Ќе докажеме, дека не е можно да се обојат помалку од 49 квадратчиња така што е исполнет условот на задачата. За таа цел да забележиме, дека во секој 2×3 правоаголник од таблата треба да е обоено барем едно квадратче, додека во секој 2×4 правоаголник треба да се обоени барем две квадратчиња. Сега да ја поделиме таблата на 7 правоаголника со димензии 2×14. Секој таков правоаголник може да се разгледува дека е составен од еден 2×2 квадрат и три 2×4 правоаголници.

Ако во 2×2 квадратот е обоено барем едно квадратче, кога ќе искористиме дека во 2×4 правоаголниците треба да има барем по 2 обоени квадратчиња, заклучуваме, дека во 2×14 правоаголникот има барем $1+2\cdot3=7$ обоени квадратчиња. Во вториот случај, кога во 2×2 квадратот нема обоено квадратче, можеме да разгледаме 2×14 правоаголникот да е составен од два 2×3 правоаголника и два 2×4 правоаголника. Притоа можеме да сметаме, дека 2×2 квадратот со необоени квадратчиња се наоѓа во единиот од 2×3 правоаголниците. Но, дадената фигура може да се постави во 2×3 правоаголник само на еден од покажаните погоре два начина и како во тој правоаголник има 2×2 квадрат со необоени квадратчиња, следува, дека во разгледуваниот 2×3 правоаголник треба да има барем 2 обоени квадратчиња. За 2×14 правоаголникот во тој случај заклучуваме, дека тој треба да има барем $2+1+2\cdot2=7$ обоени квадратчиња. Значи, на целата табла треба да има најмалку $7\cdot7=49$ обоени квадратчиња.

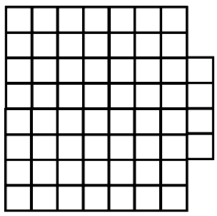
4. Дали табла со димензии 10×10, може да се покрие со правоаголници со димензија 1×4 (прави тетрамина)?

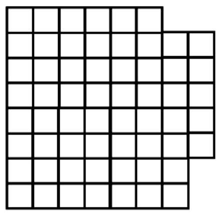
Решение. Да ја обоиме дадената табла во четири бои 1, 2, 3 и 4, како на цртежот.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3

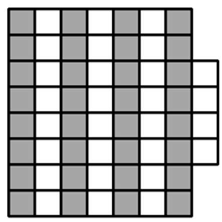
Секое право тетрамино секогаш покрива по едно поле од секоја боја. Но имаме 25 полиња обоени во боја 1, 26 во боја 2, 25 во боја 3 и 24 полиња обоени во боја 4. Според тоа, дадената табла не може да се покрие на бараниот начин.

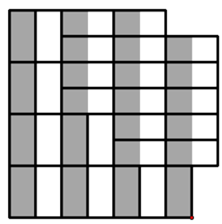
5. Квадратна табла 8×8 е поделена на 1×1 квадратчиња, после што од неа се отстранети два 1×2 правоаголника. Дали е можно останатиот дел од таблата да се покрие со домино плочки со димензии 1×2, половината од кои се хоризонтално поставени, ако:
а) двата правоаголника се отстранети, како што е прикажано на цртеж 1;
б) двата правоаголника се отстранети, како што е прикажано на цртеж 2;


Цртеж 1


Цртеж 2

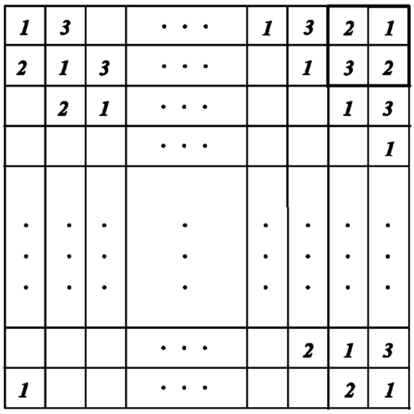
Решение. а) Ја боиме таблата по колони во две бои: црна и бела, како што е прикажано на цртежот десно. Има вкупно $64-4=60$ квадратчиња и се потребни $60:2=30$ домино плочки, од кои 15 треба да бидат хоризонтални и 15 вертикални. Бројот на црните квадратчиња е $4\cdot8=32$, а бројот на белите $3\cdot8+4=28$. Хоризонтална плочка покрива едно црно и едно бело квадратче, а вертикална плочка покрива две бели или две црни квадратчиња. Значи, вертикалните плочки секогаш покриваат парен број црни и парен број бели квадратчиња. Од друга страна 15 хоризонтални плочки покриваат 15 бели и 15 црни квадратчиња. Затоа за вертикалните остануваат $32-15=17$ црни и $28-15=13$ бели квадратчиња. Бидејќи 17 и 13 се непарни броеви, покривањето не е можно.





б) Ја боиме таблата на ист начин. Сега има $3.8+7=31$ црни и $3.8+5=29$ бели квадратчиња. Хоризонталните плочки ќе покријат 15 бели и 15 црни квадратчиња. Следствено за вертикалните остануваат $31-15=16$ црни и $29-15=14$ бели квадратчиња. На цртежот десно е даден пример на такво покривање.

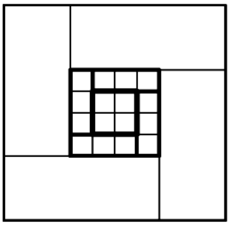
6. Од 100×100 квадрат се исечени четири полиња кои формираат 2×2 квадрат.



а) Докажи дека преостанатиот дел од таблата не може да се покрие со 1×3 правоаголници (секој правоаголник покрива 3 полиња) ако 2×2 квадратот е исечен во еден од аглите на 100×100 квадратот.

б) Докажи дека покривањето е можно ако 2×2 квадратот е исечен од центарот на 100×100 квадратот.

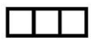
Решение. а) Да ги обоиме полињата на 100×100 квадратот со боите 1, 2, 3 како на цртежот десно. После отсекувањето на квадратот 2×2, во преостанатиот дел ќе имаме 333 квадрати со боја 1, 331 квадрати со боја 2 и 332 квадрати со боја 3. Бидејќи секој правоаголник покрива по едно поле од секоја боја, бараното покривање не е можно.



б) После отстранувањето на централниот 2×2 квадрат, да ја врамиме дупката со четири правоаголници, види цртеж лево. Остатокот може да се покрие со четири правоаголници со “димензии” 48×52. Бидејќи $3|48$ добиваме дека бараното покривање е можно.

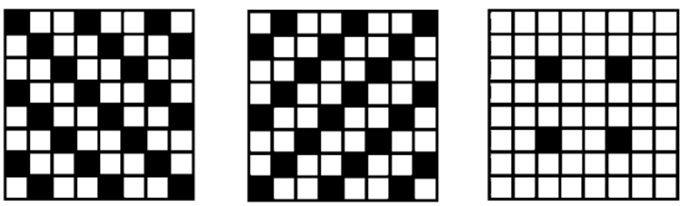
За решавање на следните четири задачи ќе слични идеи, или може да се каже дека ќе користиме една идеја и нејзини варијанти.

7. На шаховска 8×8 табла со 64 полиња (единечни квадратчиња) се поставени 21 право тримино (види цртеж десно). Тримината не се преклопуваат и нивните единечни квадратчиња покриваат цели полиња на таблата. Дали постои поле на шаховската табла кое не е покриено од тримино? Ако одговорот е позитивен, определи ги сите такви полиња.

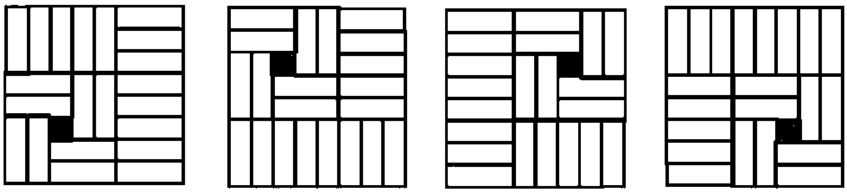


Решение. Сите 21 тримино покриваат точно $21\times3=63$ поле од таблата. Таблата има 64 полиња, па затоа постои барем едно поле кое не е покриено со тримино.

Да разгледаме боењето на таблата во две бои, црна и бела, кое е прикажано на левиот цртеж долу. Јасно, секое тримино покрива 2 бели и 1 црно поле. Така, дадените 21 тримино покриват најмногу 21 црно поле. Бидејќи во разгледуваното боење имаме 22 црни полиња, заклучуваме дека барем едно од нив нема да биде покриено со тримино. Сега да го разгледаме боењето дадено на средниот цртеж долу. Јасно, при ова боење останува непокриено најмалку едно црно поле.



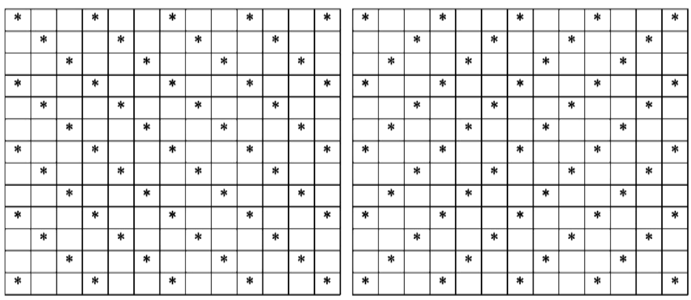
Нека сега ги поставиме сите 21 тримино на левиот цртеж, а потоа тримината на ист начин ги поставиме на средниот цртеж. Притоа, и во двата случаја едно поле останува непокриено и тоа е црно поле. Според тоа, за да видиме кои полиња може да бидат непокриени, доволно е двете боења да ги преклопиме и да ги најдеме заедничките црни полиња. Можните 4 црни полиња кои остануваат непокриени се дадени на десниот цртеж горе.



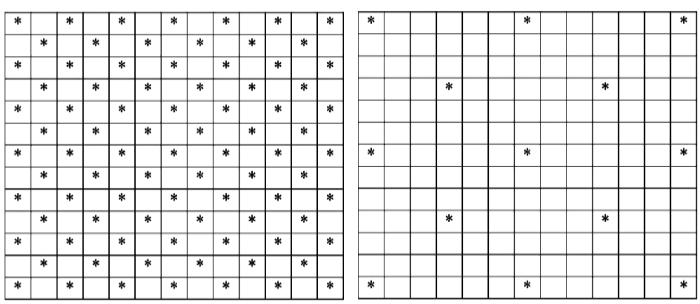
На претходните четири цртежи е прикажано поставувањето на 21 тримино при кое непокриени остануваат најдените 4 полиња.

8. Квадрат 13×13 е поделен на единечни квадратчиња и е покриен со 28 правоаголници 3×2 кои не се преклопуваат така, што точно едно единечно квадратче е останато непокриено. Определи ги можните положби на непокриеното единечно квадратче.

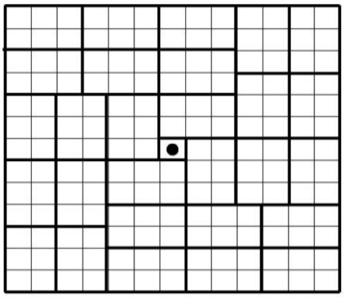
Решение. Да го обоиме квадратот дијагонално на покажаните два начина. При секое од овие боења бројот на обоените единечни квадратчоња е 57. Од друга страна, како и да се постави правоаголник 3×2, тој покрива точно 2 обоени квадратчиња. Следува единечното квадратче кое останува непокриено е обоено квадратче.

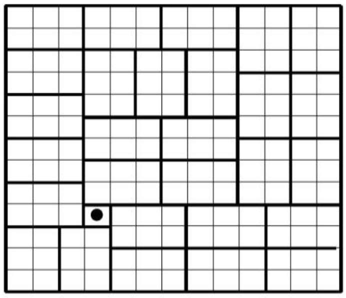


Ќе искористиме и трето боење, кое е како на шаховска табла. При ова боење бројот на обоените единечни квадратчиња е 85. Од друга страна, како и да се постави правоаголник 3×2, тој покрива точно 3 обоени квадратчиња. Следува останува едно непокриено единечно квадратче кое е обоено.



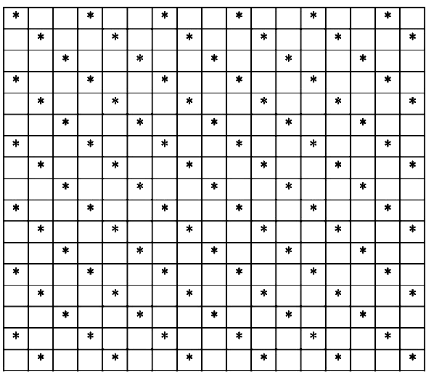
Ако трите боења ги преклопиме едно над друго забележуваме, дека дел од заедничките обоени единечни квадратчиња се наоѓаат на периферијата на квадратот и очигледно не можат да останат непокриени. Останатите заенички квадратчиња се централното и четирите квадратчиња во внатрешноста (види го вториот цртеж долу).
Задачата има пет решенија. Реализациите на тие случаи се покажани на долните цртежи:

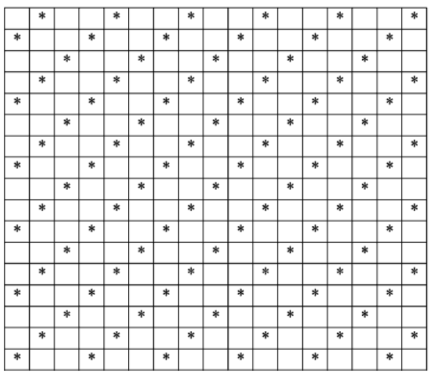




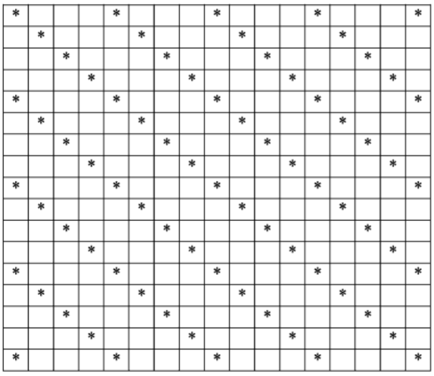
Ако последователно за агол од 90° го ротираме последниот цртеж ги добиваме останатите три решенија.

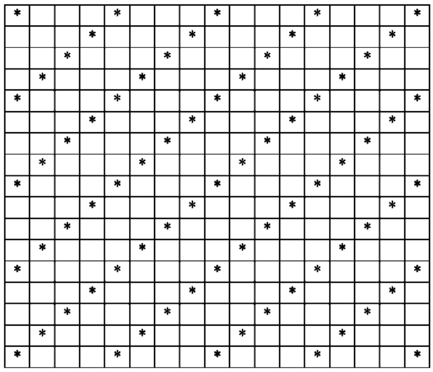
9. Квадрат 17×17 е разделен на единечни квадратчиња и е покриен со 24 правоаголници 4×3 кои не се преклопуваат така што точно едно единечно квадратче останува непокриено. Определи ги сите можни положби на непокриеното единечно квадратче.
Решение. Квадратот ќе го обоиме дијагонално на прикажаните два начина. Забележуваме дека при секое од двете боења бројот на обоените единечни квадратчиња е 97. Од друга страна, како и да се постави правоаголник 4×3, тој покрива точно 4 обоени квадратчиња. Следува дека се покриени точно $24\cdot4=96$ обоени квадратчиња, што значи, дека останува непокриено обоено единечно квадратче.



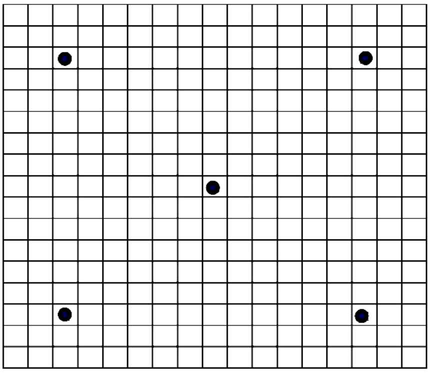


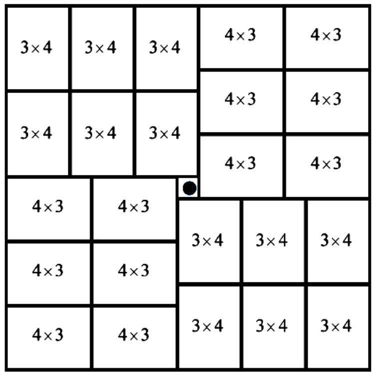
Сега квадратот го боиме дијагонално на уште два начина. Забележуваме, дека овој пат при секое од двете боења бројот на обоените единечни квадратчиња е 73. Од друга страна, како и да се постави правоаголник 4×3, тој покрива точно 3 обоени квадратчиња.
Следува дека имаме $24\cdot3=72$ покриени обоени квадратчиња, па затоа непокриеното единечно квадратче е обоено.
Ако ги преклопиме четирите боења едно врз друго забележуваме, дека заеднички обоени единечни квадратчиња се централното квадратче и уште четири квадратчиња, (како што е прикажано на левиот цртеж долу). Јасно е, дека тие четири квадратчиња не можат да останат непокриени.



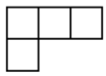


Едно покривање на на случајот со централното единечно квадратче е дадена на долниот цртеж десно.





10. Табла со димензии 7×7 е покриена со L фигури составени од 4 еднакви квадрати, но така да точно едно поле останува непокриено. Најди ги сите полиња на таблата кои може да останат непокриени.



Решение. Таблата ја боиме црно бело, како шаховската табла. Притоа добиваме 25 црни и 24 бели полиња. Бидејќи L фигурата покрива 2 бели и 2 црни полиња, секогаш непокриено останува црно поле. Сега таблата да ја обоиме црно-бело по колони. Нека x е бројот на L фигурите кои покриваат три црни и едно бело поле, а y е бројот на фигурите кои покриваат три бели и едно црно поле. Во овој случај разликата на бројот меѓу црните и белите полиња може да биде 8 или 6, во зависност од тоа дали непокриено останува црно или бело поле. Бидејќи $x+y=12$, заради парноста следува $x-y=4$, па во случајов останува непокриено бело поле. Црни полиња од првото боење, кои при второто боење стануваат бели има вкупно девет и тоа: (2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4) и (6,6) и со проба ги наоѓаме бараните покривања. Јасно, заради симетрија доволно е да ги разгледаме полињата (2,2), (2,4) и (4,4), види цртеж долу.