Ристо Малчески
Алекса Малчески
Самоил Малчески

МЕЃУНАРОДНИ МАТЕМАТИЧКИ ОЛИМПИЈАДИ 1959-2019

Скопје, 2021

Рецензенти
Проф. д-р Павел Димовски
Проф. д-р Даниел Велинов

С О Д Р Ж И Н А

Предговор		5
1.	IMO1959	7
2.	IMO1960	11
3.	IMO1961	19
4.	IMO1962	24
5.	IMO1963	30
6.	IMO1964	35
7.	IMO1965	40
8.	IMO1966	47
9.	IMO1967	51
10.	IMO1968	58
11.	IMO1969	63
12.	IMO1970	69
13.	IMO1971	75
14.	IMO1972	80
15.	IMO1973	85
16.	IMO1974	89
17.	IMO1975	94
18.	IMO1976	100
19.	IMO1977	105
20.	IMO1978	112
21.	IMO1979	120
22.	IMO1981	125
23.	IMO1982	130
24.	IMO1983	136
25.	IMO1984	141
26.	IMO1985	146
27.	IMO1986	152
28.	IMO1987	158
29.	IMO1988	164
30.	IMO1989	173
31.	IMO1990	178

32.	IMO1991	187
33.	IMO1992	192
34.	IMO1993	198
35.	IMO1994	207
36.	IMO1995	214
37.	IMO1996	220
38.	IMO1997	229
39.	IMO1998	237
40.	IMO1999	245
41.	IMO2000	251
42.	IMO2001	256
43.	IMO2002	260
44.	IMO2003	264
45.	IMO2004	269
46.	IMO2005	275
47.	IMO2006	281
48.	IMO2007	286
49.	IMO2008	297
50.	IMO2009	304
51.	IMO2010	309
52.	IMO2011	318
53.	IMO2012	328
54.	IMO2013	334
55.	IMO2014	341
56.	IMO2015	346
57.	IMO2016	352
58.	IMO2017	358
59.	IMO2018	365
60.	IMO2019	370
	Литература	377

ПРЕДГОВОР

> Ниту едно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука, ако истото не е поткрепено со математички доказ.
>
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките, каде нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Успехот на учениците на натпреварите по математика не е можен без решавање на соодветни задачи, меѓу кои се и задачите кои претходно биле задавани на престижните натпревари, како што е Меѓународната математичка олимпијада. Затоа, имајќи ја предвид долгогодишната наша работа со надарените ученици за математика, пристапивме кон издавање на книгата која е пред вас и во која се содржани задачите и нивните решенија кои се задавани на Меѓународната математичка олимпијада од нејзиното основање во 1959 година, па се до 2019 година, односно на првите шеесет олимпијади.

Мешународната математичка олимпијада, по правило секоја година се одржува во различна држава. Изборот на задачите кои се задават на Машународните математички олимпијади е според следните правила:

- земјите учеснички, освен домаќинот, испраќаат задачи до домаќинот на олимпијадата,
- домаќинот формира комисија, која од предлозите издвојува триесетина задачи и истите ги групира во четири основни области, и тоа: алгебра, геометрија, комбинаторика и теорија на броеви,
- од избраните задачи Жирито на натпреварот, кое го сочинуваат водачите на екипите на земјите учеснички, заедно со претседателот на Жирито кој го определува државата домаќин, врши избор на шест задачи, кои по правило се од четирите наведени области,
- за избраните задачи Жирито составува маркинг шема според која се врши прегледувањето, односно бодирањето на решенијата на учениците, при што секоја задача се вреднува по 7 бодови.

Како што рековме во книгава се дадени решенијата на сите задачи задавани на олимпијадите во разгледуваниот период. Притоа, за голем број задачи се дадени по два или повеќе начини на решавање на истите. Ова посебно се однесува на геометриските задачи, дел од кои се решени со помош на аналитичка геометрија или комплексни броеви. Притоа да забележиме дека повеќето геометриски задачи, при добро поставување на координатниот систем може да се решат на споменатиот начин, меѓутоа најчесто решавањето се сведува на долги и макотрпниo пресметувања, па затоа во книгава само неколку задачи се решени на споменатите начини.

Стандардно, книгава содржи список на користената литература. За крај, и покрај вложениот напор, свесни сме дека се можни подобрувања на оваа книга, како и дека се присутни грешки, кои за жал не го одминуваат издавањето на било кој ракопис. Затоа однапред сме благодарни на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе допринесе да се подобри книгава.

Март 2021 Авторите
Скопје

I олимпијада

1. Докажи дека дропката $\frac{21n+4}{14n+3}$ не може да се скрати ниту за еден природен број n.

Решение. *Прв начин.* Од $3\cdot(14n+3)-2\cdot(21n+4)=1$, следува дека броевите $21n+4$ и $14n+3$ се заемно прости за секој $n\in\mathbb{N}$. Според тоа, дадената дропка не може да се скрати за еден природен број n.

Втор начин. Имаме:

$$\begin{aligned}\mathrm{NZD}(21n+4,14n+3) &= \mathrm{NZD}(7n+1,14n+3) = \mathrm{NZD}(7n+1,7n+2)\\ &= \mathrm{NZD}(7n+1,1)=1,\end{aligned}$$

т.е. броевите $21n+4$ и $14n+3$ се заемно прости за секој $n\in\mathbb{N}$. Според тоа, дадената дропка не може да се скрати за еден природен број n.

2. Во $\mathbb{R}$ реши ги равенките:

а) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$

б) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$

в) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$

Решение. Да ја разгледаме функцијата $y=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$. Од $(x-1)^2\geq 0$, следува $x^2\geq 2x-1$, па затоа ако оваа функција е определена за $x\geq\frac{1}{2}$. Со нејзино квадрирање добиваме

$$y^2=2x+2\sqrt{(x-1)^2}=2x+2\,|\,x-1\,|,\text{ т.е. } y=\sqrt{2}\sqrt{x+|\,x-1\,|}\,.$$

Според тоа,

$$y=\begin{cases}\sqrt{2}, & \frac{1}{2}\leq x\leq 1,\\ \sqrt{2}\sqrt{2x-1}, & x>1.\end{cases}$$

Пасладното значи дека разгледуваната функција монотоно не опаѓа и дека:

- решение на равенката под а) е секој реален број x таков што $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$,
- равенката под б) нема реални решенија, и
- равенката по в) е еквивалентна на равенката $\sqrt{2}\sqrt{2x-1}=2$, од каде добиваме $2x-1=2$, т.е. $x=\frac{3}{2}$.

3. Дадена е кваратна равенка по однос на $\cos x$:

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0,$$

каде $a,b,c,$ се реални броеви.

Со помош на $a, b, c,$ состави ја аналогната квадратна равенка за $\cos 2x$, а потоа спореди ги дадената и добиената равенка за $a=4, b=2, c=-1$.

Решение. Равенката

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$$

ја множиме со

$$4(a\cos^2 x - b\cos x + c)$$

и по средувањето на изразот од левата страна добиваме

$$4a^2\cos^4 x + 2(4ac-2b^2)\cos^2 x + 4c^2 = 0 .$$

Ако го искористиме идентитетот $2\cos^2 x = 1+\cos 2x$, од последната равенка добиваме

$$a^2(1+\cos 2x)^2 + (4ac-2b^2)(1+\cos 2x) + 4c^2 = 0 ,$$

или

$$a^2\cos^2 2x + (2a^2+4ac-2b^2)\cos 2x + (a^2+4ac-2b^2+4c^2) = 0 . \quad (1)$$

За $a=4$, $b=2$, $c=-1$ од дадената равенка добиваме

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$$

а од равенката (1) добиваме

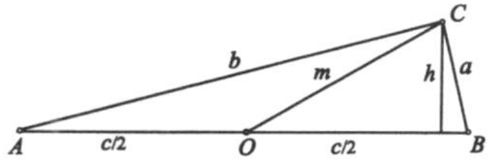
$$4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0 .$$

4. Конструирај правоаголен триаголник со должина на хипотенузата c, ако се знае дека должината на тежишната линија повлечена кон хипотенузата е геометриска средина на должините на неговите катети.

Решение. *Прв начин.* Нека α е еден од острите агли во бараниот триаголник. Тогаш $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\frac{a}{c}\frac{b}{c}$, каде a и b се должини на катетите на бараниот триаголник. Должината на тежишната линија повлечена кон хипотенузата е половина од должината на хипотенузата, т.е. $m=\frac{c}{2}$, па од условот на задачата добиваме $\frac{c^2}{4}=ab$. Од претходните равенства следува $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$ и како α е остар агол имаме $\alpha = 15^\circ$ или $\alpha = 75^\circ$.

Значи, треба да конструираме триаголникот со страна c и налегнати агли на неа $\alpha = 15^\circ$ и $\beta = 75^\circ$. Задачата има единствено решение до складност.

Втор начин. Анализа. Според условот на задачата важи $m=\sqrt{ab}$, а како триаголникот е правоаголен важи $m=\frac{c}{2}$. Понатаму, за плоштината на



триаголникот имаме $P=\frac{ab}{2}$ и $P=\frac{ch}{2}$, па затоа

$$ab=m^2=(\tfrac{c}{2})^2 \text{ и } ab=ch,$$

од каде добиваме $ch=(\frac{c}{2})^2$, т.е. $h=\frac{c}{4}$.

Конструкција:

- конструираме отсечка $AB, \overline{AB}=c$ и ја определуваме нејзината средина O,
- конструираме права l паралелна на AB и на растојание $h=\frac{c}{4}$ од неа,
- конструираме кружница $k(O,\frac{c}{2})$ и во пресек со правата l го наоѓаме третото теме C, со што триаголникот ABC е конструиран.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение до складност.

5. Во рамнина е дадена отсечка AB и произволна нејзина внатрешна точка M. Над отсечките AM и MB како над страни се конструирани квадрати $AMCD$ и $MBEF$ кои се наоѓаат на иста страна од правата AB. Кружниците опишани околу овие квадрати, со центри P и Q, се сечат во точки M и N, соодветно.

а) Докажи дека правите AF и BC се сечат во точката N.

б) Докажи дека правата MN минува низ една иста точка S, независно од изборот на точката M.

в) Најди го геометриското место на средините на отсечките PQ кога M се менува на отсечката AB.

Решение. Поставуваме координатен систем така што правата AB е $x-$оска, а правата AD е $y-$оска. Точката A има координати $(0,0)$ и нека точките B и M имаат координати $B(b,0)$ и $M(m,0)$.

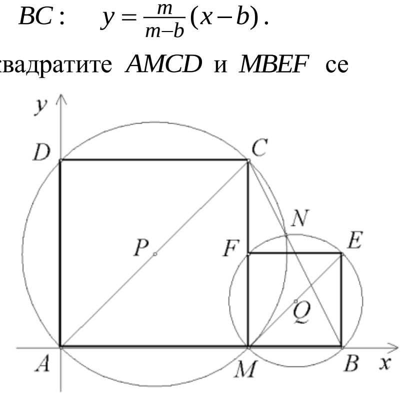
а) Точките F, C, P и Q имаат координати $F(m,b-m)$, $C(m,m)$, $P(\frac{m}{2},\frac{m}{2})$ и $Q(\frac{b+m}{2},\frac{b-m}{2})$. Равенките на правите AF и BC се

$$AF: \quad y=\frac{b-m}{m}x \quad \text{и} \quad BC: \quad y=\frac{m}{m-b}(x-b).$$

Равенките на кружниците опишани околу квадратите $AMCD$ и $MBEF$ се

$$(x-\tfrac{m}{2})^2+(y-\tfrac{m}{2})^2=\tfrac{m^2}{2} \quad \text{и}$$

$$(x-\tfrac{b+m}{2})^2+(y-\tfrac{b-m}{2})^2=\tfrac{(b-m)^2}{2}.$$



Втората пресечна точка на овие кружници е точката

$$N(\frac{m^2b}{b^2-2mb+2m^2},\frac{mb(b-m)}{b^2-2mb+2m^2}).$$

Лесно се проверува дека оваа точка лежи на правите AF и BC.

б) Равенката на правата која минува низ точките M и N е

$$y=\frac{b}{2m-b}(x-m).$$

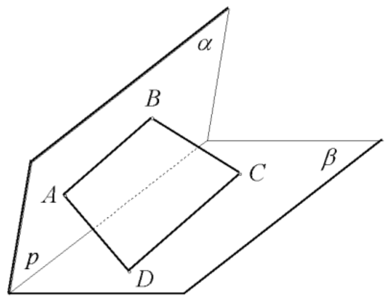
Ако точката M_1 има координати $(m_1,0)$ тогаш равенката на правата M_1N_1 е

$$y=\frac{b}{2m_1-b}(x-m_1).$$

Правите MN и M_1N_1 се сечат во точката $S(\frac{b}{2},-\frac{b}{2})$. Координатите на S не зависат од m и m_1, па според тоа сите прави MN минуваат низ иста точка S.

в) Координатите на средината на отсечката PQ се $(\frac{b+2m}{4},\frac{b}{4})$ т.е. $x=\frac{b+2m}{4}$ и $y=\frac{b}{4}$. Бидејќи $0\le m\le b$, бараното геометриско место на точки е отсечка со крајни точки $(\frac{b}{4},\frac{b}{4})$ и $(\frac{3b}{4},\frac{b}{4})$.

6. Дадени се рамнини α и β кои се сечат во правата p и точки $A\in\alpha$, $C\in\beta$ такви што $A,C\notin p$. Конструирај рамнокрак трапез $ABCD$, ($AB\,||\,CD$) во кој може да се впише кружница, така што $B\in\alpha$ и $D\in\beta$.

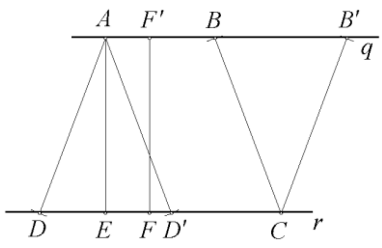


Решение. Нека $ABCD$ е бараниот трапез (цртеж десно). Тогаш, $AB\,||\,CD\,||\,p$ (ако рамнината $ABCD$ ја сече правата p во точка X, тогаш правите $AB=AX$ и $CD=CX$ нема да се паралелни). Значи, низ точките A и C треба да се конструираат прави паралелни со p и на нив да се најдат точки B и D, така што добиениот четириаголник да ги задоволува условите на задачата. Бидејќи трапезот $ABCD$ е тангентен добиваме

$$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}=2\overline{AD},\text{ т.е. } \overline{CD}=2\overline{AD}-\overline{AB}.$$

Ако F' е средина на страната AB, $FF'\perp r$ и E е ортогоналната проекција на A врз CD, тогаш $\overline{AF'}=\overline{EF}$, па според тоа

$$\overline{AB}=2\overline{AF'}=2\overline{EF} \text{ и } \overline{CD}=2\overline{CE}-\overline{AB}.$$



Значи, $\overline{AD}=\overline{CE}$, од што следува дека точката D лежи на кружница со радиус CE и центар во A. Задачата има решение ако и само ако

$$\overline{AD}=\overline{CE}\ge\overline{FF'}.$$

Конструкцијата непосредно следува од претходните разгледувања (цртеж десно).

II олимпијада

1. Определи ги сите трицифрени броеви кои при делење со 11 даваат број кој е еднаков на збирот на квадратите на цифрите на бараниот број.

Решение. Бараниот број е трицифрен и е делив со 11, па може да се запише во облик $11u$ каде $10 \le u \le 90$, $u \in \mathbb{N}$.

Нека $u = 10a + b$, $a \in \{1, 2, ..., 9\}, b \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Ќе разгледаме два случаја.

1° Ако $a + b < 10$, тогаш бараниот број е од облик

$$11 \cdot (10a + b) = 100a + 10(a + b) + b$$

и од условот на задачата следува

$$a^2 + (a + b)^2 + b^2 = 10a + b \text{ или } 2(a^2 + b^2 + ab - 5a) = b,$$

што значи дека b мора да е парен број т.е. $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Со непосредна проверка добиваме дека единствено решение е $a = 5$, $b = 0$, т.е. едно решение на задачата е 550.

2° Ако $a + b \ge 10$, тогаш бараниот број е

$$11 \cdot (10a + b) = 100(a + 1) + 10(a + b - 10) + b$$

и од условот на задачата имаме

$$(a + 1)^2 + (a + b - 10)^2 + b^2 = 10a + b \text{ или } 2(a^2 + b^2 + ab - 14a - 10b + 50) = b - 1,$$

па затоа b мора да биде непарен број т.е. $b \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Со непосредна проверка добиваме дека единствено решение е $a = 7$, $b = 3$, т.е. во овој случај решение на задачата е 803.

Значи, единствени броеви кои ги задоволуваат условите од задачата се 550 и 803.

2. Реши ја неравенката

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9, \ x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Изразот на левата страна е дефиниран за $x \ge -\frac{1}{2}$ и $x \ne 0$. Понатаму,

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{2x-1})^2} = \frac{4x^2}{(1-\sqrt{2x-1})^2} \cdot \frac{(1+\sqrt{2x+1})^2}{(1+\sqrt{2x+1})^2} = (1 + \sqrt{2x+1})^2.$$

па затоа за $x \ge -\frac{1}{2}$ и $x \ne 0$ затоа дадената неравенка последователно е еквивалентна со неравенката

$$(1 + \sqrt{2x+1})^2 < 2x + 9.$$

Бидејќи функцијата $f(x) = (1 + \sqrt{2x+1})^2 - 2x - 9 = 2\sqrt{2x+1} - 7$ е растечка за $x \ge -\frac{1}{2}$ и $x \ne 0$ и важи $f(\frac{45}{8}) = 0$, решение на неравенката е множеството

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, -\tfrac{1}{2} \le x < \tfrac{45}{8}, x \ne 0\}.$$

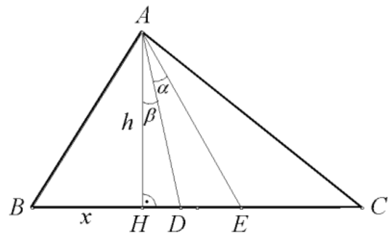
3. Даден е правоаголен триаголник ABC со хипотенуза BC со должина a, која е поделена на n еднакви делови (n е непарен број). Нека α е аголот под кој од точката A се гледа оној од $n-$те делови на хипотенузата кој ја содржи нејзината средина. Докажи дека $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}$, каде што h е должината на висината на триаголникот повлечена од темето A.

Решение. *Прв начин.* Нека DE е отсечката која ја содржи средината на хипотенузата и $\overline{BH} = x$, каде H е подножната точка на висината спуштена од темето A кон основата BC. Тогаш, $x(a-x) = h^2$. Ако со α и β ги означиме аглите EAD и DAH, добиваме $\measuredangle EAH = \alpha + \beta$.

Од правоаголниот триаголник AHE следува $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\overline{HE}}{\overline{AH}}$. Понатаму,

$$\overline{HE} = \overline{HD} + \overline{DE},\ \overline{HD} = \overline{BD} - \overline{BH} \text{ и } \overline{BD} = \tfrac{n-1}{2n}a,$$

па затоа $\overline{HE} = \frac{n+1}{2n}a - x$. Значи,



$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\frac{n+1}{2n}a - x}{h},\quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{n-1}{2n}a - x}{h}.$$

Ако го искористиме идентитетот

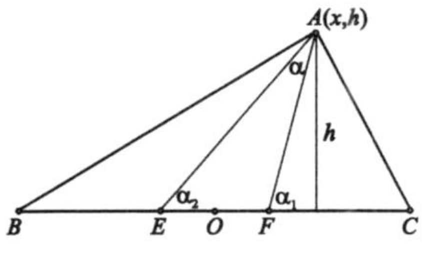
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

добиваме

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ah}{nh^2 + \frac{n^2-1}{4n}a^2 - n(ax - x^2)}.$$

Но, $h^2 = x(a-x)$, па затоа $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4nh}{a(n^2-1)}$.

Втор начин. Поставуваме координатен систем со центар во средината O на хипотенузата и $x-$оска хипотенузата BC (цртеж десно), па затоа $B(-\frac{a}{2},0)$, $C(\frac{a}{2},0)$, $A(x,h)$, $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$ и притоа важи



$$x^2 + h^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Точката O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Ако EF делот од поделбата кој ја содржи точката O, тогаш $\overline{EF} = \frac{a}{n}$ и $E(-\frac{a}{2n},0)$ и $F(\frac{a}{2n},0)$.

За аглите α, α_1 и α_2 важи $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha$, т.е. $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, па затоа

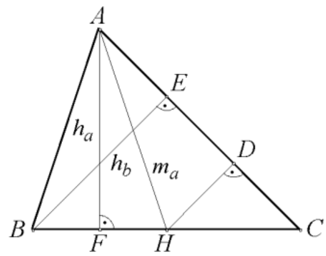
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha_1-\operatorname{tg}\alpha_2}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}=\frac{\frac{h}{x-\frac{a}{2n}}-\frac{h}{x+\frac{a}{2n}}}{1-\frac{h}{x-\frac{a}{2n}}\cdot\frac{h}{x+\frac{a}{2n}}}=\frac{4nh}{a(n^2-1)}.$$

При решавањето на задачата прећутно претпоставивме дека $x>\frac{a}{2n}$. Со минимални измени горниот начин на решавање важи и кога $x<\frac{a}{2n}$. Притоа, заради симетрија доволно е да се разгледа само случајот кога $x\geq 0$. За $x=\frac{a}{2n}$, триаголникот AEF е правоаголен и $\operatorname{tg}\alpha$ се пресметува непосредно.

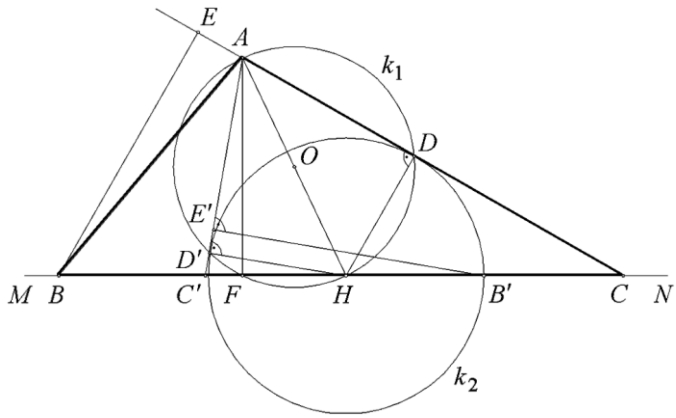
4. Конструирај триаголник ABC ако се познати h_a, h_b и m_a.

Решение. *Анализа.* Нека ABC е триаголникот кој што треба да го конструираме (црт. десно). Од средината H на страната BC повлекуваме нормала HD на AC, а BE и AF се висините повлечени од темињата B и A, соодветно. Според тоа

$$\overline{HD}=\frac{1}{2}\overline{BE}=\frac{1}{2}h_b.$$



Јасно, триаголникот AFH е определен. Точката D се наоѓа во пресекот на кружницата k_1 со дијаметар AH и кружницата k_2 со центар во H и радиус HD. Сега, ако ја знаеме точката D, лесно можеме да ги конструираме останатите темиња на триаголникот.



Конструкција. Повлекуваме права MN и во нејзина точка F ја конструираме висината AF. Опишуваме кружница со радиус m_a и центар во точката A. Таа ја сече правата MN во две точки H и H'. Во пресек на кружниците k_1 и k_2 (со центар во H и H' и радиус $\overline{HD}=\frac{1}{2}h_b$) ги наоѓаме точките D и D'. Точката C е пресек на правите AD и MN. Точката B е симетрична со точката C во однос на точката H. Другото решение го добиваме користејќи ја точката D'. Јасно, постојат уште две решенија кои се складни со веќе конструираните.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

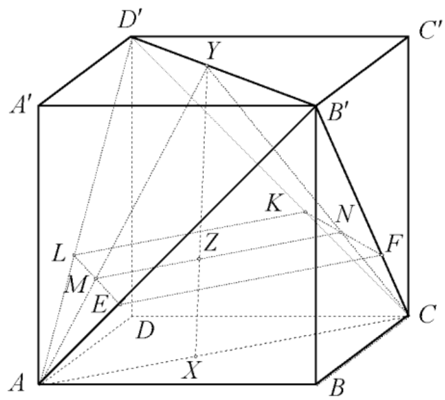
Дискусија. Ако $m_a > h_a$, $\frac{1}{2}h_b < m_a$ и $\frac{1}{2}h_b \neq h_a$, тогаш постојат две различни решенија, а ако $\frac{1}{2}h_b = h_a$ постои само едно решение $(AD \parallel MN)$.

Ако $m_a = h_a$ и $\frac{1}{2}h_b < m_a$ постои само едно решение (два триаголника кои се осносиметрични во однос на правата AF).

5. Дадена е коцка $ABCDA'B'C'D'$.

а) Најди го геометриското место на средините на отсечките XY, каде што X е произволна точка од отсечката AC, а Y е произволна точка од отсечката $B'D'$.

б) Најди го геометриското место на средините Z на отсечките XY за кои што важи $\overline{YZ} = 2\overline{ZX}$.



Решение. *Прв начин.* Ќе го најдеме геометриското место на точки Z од отсечките XY каде X и Y се менуваат на отсечките AC и $B'D'$ такви што $\overline{YZ} = k\overline{XZ}$, $k > 0$.

Ако точката X се совпаѓа со A и Y со B', точката E од дијагоналата AB' за која $\overline{B'E} = k\overline{AE}$, припаѓа на бараното множество. На ист начин ги добиваме точките F, K и L кои припаѓаат на CB', CD' и AD', соодветно. Ако точката Y се движи по $B'D'$, точката Z се движи по $EL \parallel B'D'$. Триаголниците $AB'D'$ и AEL се хомотетични со коефициент на хомотетија $\frac{k}{k+1}$. Исто така, отсечките $EF \parallel AC$, $FK \parallel B'D'$ и $KL \parallel AC$ припаѓаат на бараното геометриско место точки. Бидејќи

$$FK \parallel EL \parallel B'D' \perp AC \parallel EF \parallel KL$$

четириаголникот $EFKL$ е правоаголник. Ќе докажеме дека бараното геометриско место точки е целиот правоголник $EFKL$, заедно со неговите внатрешни точки.

Нека точките X и Y припаѓаат на дијагоналите AC и $B'D'$ соодветно, и нека $Z \in XY$ е точка која ја дели отсечката во однос $\frac{\overline{YZ}}{\overline{XZ}} = k$. Рамнината

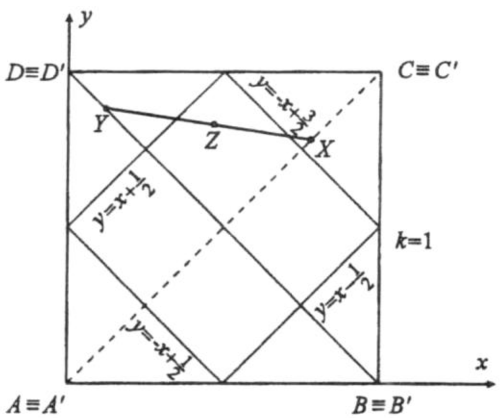
ACY ги сече триаголниците $CD'B'$ и $AB'D'$ во отсечки CY и AY соодветно, а четириаголникот $EFKL$ во отсечка $MN \parallel AC$. Триаголниците YMN и YAC се хомотетични со коефициент на хомотетија $\frac{k}{k+1}$. Отсечката XY ја сече отсечката MN, која е паралелна со AC, во точка Z која ја дели во однос $k = \frac{\overline{YZ}}{\overline{XZ}}$. Но, на отсечката XY постои само една точка која ја дели во тој однос и таа лежи во четириаголникот $EFKL$.

Ќе докажеме дека секоја точка Z од внатрешноста на четириаголникот $EFKL$ припаѓа на некоја отсечка со крајни точки кои припаѓаат на отсечките AC и $B'D'$ и ја дели таа отсечка во однос k. Рамнината ACZ го сече правоаголникот $EFKL$ во отсечка $MN \parallel EF \parallel KL$. Бидејќи Z е внатрешна точка од $EFKL$, правата MN ги сече отсечките EL и FK во внатрешни точки. Таа рамнина ги сече триаголниците $CD'B'$ и $AB'D'$ по отсечки кои лежат во внатрешноста на аглите $B'CD'$ и $D'AB'$, т.е. таа ја сече отсечката $B'D'$ во некоја точка Y. Од $\triangle YMN$ и $\triangle YAC$ се добива $k = \frac{\overline{YZ}}{\overline{XZ}}$.

Бараното геометриско место точки е правоаголникот $EFKL$ чии должини на страни се еднакви на

$$\overline{EL} = \overline{FK} = \tfrac{1}{k+1}\overline{B'D'} = \tfrac{a\sqrt{2}}{k+1} \quad \text{и} \quad \overline{EF} = \overline{KL} = \tfrac{k}{k+1}\overline{AC} = \tfrac{ka\sqrt{2}}{k+1}.$$

Втор начин. а) Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека рабовите на коцката се со должина 1. Нека во правоаголемн координатен систем координатите на темињата на коцката се: $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$, $A'(0,0,1)$, $B'(1,0,1)$, $C'(1,1,1)$ и $D'(0,1,1)$. Гледано од горе проекцијата на коцката и нејзините дијагонали AC и $B'D'$ се прикажани на цртежот десно.



Положбите на точките $X(a,a,0)$ и $Y(b,1-b,1)$ се определени со параметрите $0 \le a,b \le 1$. Средината на отсечката XY е точката $Z(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b+1}{1}, \frac{1}{2})$, па геометриското место на овие точки лежи во рамнината $z = \frac{1}{2}$. Проекцијата на Z во рамнината $z=0$ е точката $M(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b+1}{1})$. Ако го елиминираме a, односно b од $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b+1}{2}$, добиваме $y = x + \frac{1}{2} - b$, $y = -x + \frac{1}{2} + a$. При фиксирана вредност на b со што е определена точката Y и при промена на $a \in [0,1]$, односно придвижување на X од A до C, средната точка Z лежи на правата $y = x + \frac{1}{2} - b, z = \frac{1}{2}$. Ако a е фиксирано, а b се менува се добива правата $y = -x + \frac{1}{2} + a, z = \frac{1}{2}$.

За различни вредности на параметрите a и b се добиваат две фамилии паралелни прави кои лежат меѓу крајните гранични прави кои се добиваат за $b = 0$ и $b = 1$, односно $a = 0$ и $a = 1$:

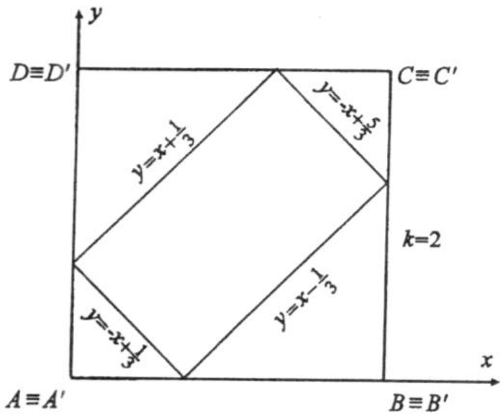
$$y = x + \frac{1}{2},\ y = x - \frac{1}{2}, \text{ односно } y = -x + \frac{1}{2},\ y = -x + \frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Правите од овие две фамилии се ортогонални. Множеството точки кои што припаѓаат на две фамилии прави и коишто го определуваат бараното геометриско место е квадрат во рамнината $z = \frac{1}{2}$ ограничен со правите (1) чија проекција е дадена на горниот цртеж.

б) На ист начин се постапува и во овој случај. Ќе го разгледаме општиот случај: $\overline{YZ} = k\overline{ZX}$, каде k е позитивен реален број. Тогаш

$$\overline{XY} = (k+1)\overline{XZ} \text{ и } \overline{YZ} = \frac{k}{k+1}\overline{XY}. \qquad (2)$$

Ако $X(a,a,0)$ и $Y(b,1-b,1)$, тогаш координатите на $Z(x,y,z)$ се:



$$x - b = \frac{k}{k+1}(a-b),$$
$$y - (1-b) = \frac{k}{k+1}(a-(1-b)),$$
$$z - 1 = \frac{k}{k+1}(0-1),$$

односно

$$x = \frac{1}{k+1}b + \frac{k}{k+1}a,$$
$$y = -\frac{1}{k+1}b + \frac{k}{k+1}a + \frac{1}{k+1},$$
$$z = \frac{1}{k+1}.$$

Со елиминација на b, односно на a се добиваат правите

$$y = -x + \frac{2k}{k+1}a + \frac{1}{k+1},\ y = x - \frac{2}{k+1}b + \frac{1}{k+1},$$

кои што лежат во рамнината $z = \frac{1}{k+1}$. Геометриското место на точката Z е правоаголник во рамнината $z = \frac{1}{k+1}$ ограничен со правите

$$y = -x + \frac{1}{k+1},\ y = -x + 2 - \frac{1}{k+1},\ y = x + \frac{1}{k+1},\ y = x - \frac{1}{k+1}, .$$

За $k = 2$ се добива бараниот правоаголник (види цртеж), кој е ограничен со правите

$$y=-x+\tfrac{1}{3},\ y=-x+\tfrac{5}{3},\ y=x+\tfrac{1}{3},\ y=x-\tfrac{1}{3}\,..$$

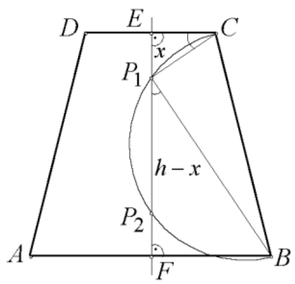
6. Даден е рамнокрак трапез со основи a и b и висина h.

а) Конструирај точка P на оската на симетрија на трапезот од која двата негови крака се гледаат под прав агол.

б) Определи го растојанието од точката P до една од основите на трапезот.

в) Определи при кои услови може да се конструира точката P (разгледај ги сите случаи).

Решение. а) Ќе ја користиме познатата теорема, дека геометриско место точки од кои дадена отсечка се гледа под прав агол е кружница чиј дијаметар е дадената отсечка. Значи, констрираме кружница со дијаметар BC над отсечката BC. Таа ја сече оската на симетрија во бараните точки P_1 и P_2 (цртеж десно). .



б) Нека

$$\overline{EP_1}=x\,,\ \overline{FP_1}=h-x\,.$$

Тогаш $\triangle BP_1F \sim \triangle P_1CE$ и $\frac{\overline{EP_1}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{EC}}{\overline{FP_1}}$, т.е. $x^2-hx+\frac{ab}{4}=0$. Решенија на оваа равенка се $x_{1,2}=\frac{h}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{h^2-ab}$.

в) Ако $h^2>ab$,тогаш постојат две решенија, а ако $h^2=ab$ постои само едно решение (конструираната кружница ја допира оската EF). Ако $h^2<ab$, нема решение (конструираната кружница нема заеднички точки со оската EF).

7. Даден е правилен конус во кој е впишана топка. Околу топката е опишан цилиндар чија основа лежи во рамнината на основата на конусот.

Нека V_1 е волуменот на конусот, а V_2 волуменот на цилиндарот.

а) Докажи дека $V_1 \neq V_2$.

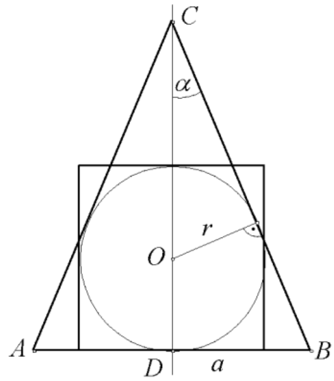
б) Најди го најмалиот број k за кој $V_1=kV_2$, и за вака најденото k конструирај го аголот при темето на оскиниот пресек на конусот.

Решение. Го разгледуваме осниот пресек на конусот, цилиндарот и топката. Нека 2α е аголот при врвот на осниот пресек на конусот, а r е радиусот на топката. Волуменот на конусот е $V_1=\frac{\pi h a^2}{3}$, каде $a=\overline{BD}$ и $h=\overline{CD}$. Бидејќи

$$\overline{CD}=\overline{OC}+\overline{OD}=\frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}\ \text{ и }\ \overline{BD}=\frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}\operatorname{tg}\alpha$$

добиваме

$$V_1 = \frac{\pi r^3(1+\sin\alpha)^2}{3\sin\alpha(1-\sin\alpha)}.$$



Волуменот на цилиндарот е $V_2 = 2\pi r^3$ (висината на цилиндарот е $2r$). Нека $k = \frac{V_1}{V_2}$.

Тогаш

$$k = \frac{(1+\sin\alpha)^2}{6\sin\alpha(1-\sin\alpha)}$$

па според тоа

$$(1+6k)\sin^2\alpha + 2(1-3k)\sin\alpha + 1 = 0.$$

Оваа равенка има решение (по $\sin\alpha$) само во случај кога за нејзината дискриминанта важи $D \geq 0$, т.е. кога $(1-3k)^2 - (1+6k) \geq 0$. Од овде следува $k \geq \frac{4}{3}$.

Според тоа, равенство $V_1 = V_2$ не е можно. За $k = \frac{4}{3}$, добиваме $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $\overline{OC} = 3r$. Од претходно изнесеното непосредно следува конструкцијата на аголот при темето на оскиниот пресек на конусот

III олимпијада

1. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b^2 \\ xy=z^2 \end{cases}$$

каде што a и b се реални параметри. Кои услови треба да ги задоволуваат параметрите a и b за да системот има позитивни и по парови различни решенија.

Решение. Имаме

$$x+y+z=a \tag{1}$$

$$x^2+y^2+z^2=b^2 \tag{2}$$

$$xy=z^2 \tag{3}$$

Од (2) и (3) добиваме

$$(x+y)^2=b^2+z^2,$$

а од (1), $(x+y)^2=(a-z)^2$, од што следува $a^2-2az=b^2$. Ако $a=0$ тогаш и $b=0$ па од (2) се добива решението $(0,0,0)$. Кога $a\neq 0$ тогаш

$$z=z_0=\frac{a^2-b^2}{2a} \tag{4}$$

Ако од (4) замениме во (1) и (3) добиваме

$$x+y=\frac{a^2+b^2}{2a} \quad \text{и} \quad xy=\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2} \tag{5}$$

што значи дека x и y се решенија на квадратната равенка

$$t^2-\frac{a^2+b^2}{2a}t+\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2}=0 \tag{6}$$

т.е. x и y се

$$t_{1/2}=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}}{4a}.$$

Значи, ако $a\neq 0$, тогаш системот има две решенија (t_1,t_2,z_0) и (t_2,t_1,z_0).

Системот (1) – (3) има позитивни и различни решенија ако и само ако равенката (6) има позитивни и различни решенија и ако $z_0>0$.

За да равенката (6) има позитивни и различни решенија потребно и доволно е

$$(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)>0,$$

(решенијата се реални и различни) и

$$x+y=\frac{a^2+b^2}{2a}>0,\ xy=\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2}$$

(решенијата се позитивни) .

Од условот $z_0 > 0$ следува дека $a^2 > b^2$. Од овде се добива бараниот потребен и доволен услов $3b^2 > a^2 > b^2$ односно

$$|b| < a < \sqrt{3}|b|.$$

2. Даден е триаголник со должини на страни a, b и c и плоштина P. Докажи дека

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4P\sqrt{3}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Ќе ја користиме Хероновата формула за плоштина на триаголник

$$P = \sqrt{\tfrac{a+b+c}{2}\tfrac{a+b-c}{2}\tfrac{a-b+c}{2}\tfrac{-a+b+c}{2}}.$$

Секој од множителите под коренот е позитивен па за оценка на производот $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ ќе го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$, т.е. неравенството

$$xyz \leq \tfrac{(x+y+z)^3}{27}.$$

Ако ставиме $x = a+b-c$, $y = a-b+c$, $z = -a+b+c$, добиваме

$$\begin{aligned} 4P &= \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \leq \sqrt{(a+b+c)\tfrac{(a+b+c)^3}{27}} \\ &= \tfrac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} = \tfrac{3a^2+3b^2+3c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2}{3\sqrt{3}} \leq \tfrac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c$.

3. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\cos^n x - \sin^n x = 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

Решение. 1) Ако $n = 2m$, тогаш $\cos^{2m} x = 1 + \sin^{2m} x$.

Бидејќи $\cos^{2m} x \leq 1 \leq 1 + \sin^{2m} x$, добиваме дека $\sin x = 0$ и $\cos x = \pm 1$, т.е. $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) За $n = 1$ равенката го добива обликот $\cos x - \sin x = 1$, т.е. обликот

$$1 = \cos x - \cos(x - \tfrac{\pi}{2}) = -2\sin\tfrac{\pi}{4}\sin(x - \tfrac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}\sin(x - \tfrac{\pi}{4}).$$

Според тоа $x = 2k\pi$ или $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) Нека $n = 2m+1$, $m \geq 1$. За $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ добиваме

$$1 = \cos^{2m+1} x - \sin^{2m+1} x.$$

Оттука

$$1 \leq \cos^2 x |\cos^{2m-1} x| + \sin^2 |\sin^{2m-1} x| < \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

што не е можно. Затоа решенијата можат да бидат од облик $x=\frac{k\pi}{2}$. Во овој случај равенката ја задоволуваат случаи кога едниот собирок е 1 а вториот 0 или првиот собирок е 0 а вториот -1. Решенија се $x=2k\pi$ и $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

4. Даден е триаголникот $P_1P_2P_3$ и произволна точка P од неговата внатрешност. Нека Q_1,Q_2,Q_3 се пресечните точки на правите P_1P и P_2P_3, P_2P и P_1P_3, P_3P и P_1P_2, соодветно. Докажи дека меѓу количниците

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PQ_1}},\frac{\overline{P_2P}}{\overline{PQ_2}},\frac{\overline{P_3P}}{\overline{PQ_3}}$$

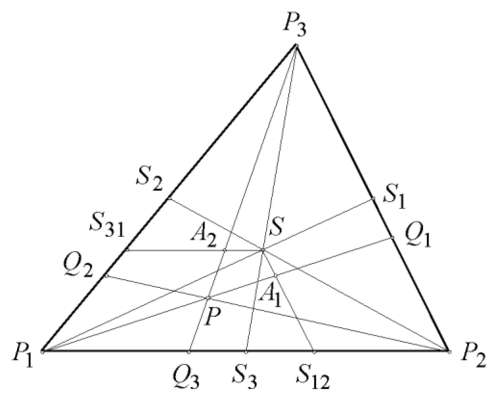
постои барем еден кој не е поголем од 2 и барем еден кој не е помал од 2.

Решение. Нека S е тежиште на триаголникот $P_1P_2P_3$, а P_1S_1, P_2S_2 и P_3S_3 се неговите тежишни линии.

Ако $P=S$ тогаш сите спомнати коефициенти се еднакви на 2 и тврдењето е точно.

Нека $P\neq S$. Тогаш точката P лежи во внатрешноста или на некој раб од шесте триаголници на кои е разделен триаголникот со тежишните линии. Нека тоа е триаголникот P_1S_3S.

Избираме точки S_{12} и S_{31} кои ги делат страните P_1P_2 и P_3P_1 во однос $2:1$, соодветно. Тогаш $S_{12}S\parallel P_2P_3$ и $S_{31}S\parallel P_1P_2$. Триаголникот P_1S_3S лежи во трапезот $P_1S_3SS_{31}$. Правата P_3Q_3 ја сече отсечката $S_{31}S$ во точка A_2 која е меѓу точките P_3 и P. Според тоа



$$\frac{\overline{P_3P}}{\overline{PQ_3}}\geq\frac{\overline{P_3A_2}}{\overline{A_2Q_3}}=2:1$$

На сличен начин, триаголникот P_1S_3S лежи во триаголникот $P_1S_{12}S$. Правата P_1P ја сече правата SS_{12} во точка A_1 која е внатрешна точка на отсечката PQ_1. Според тоа

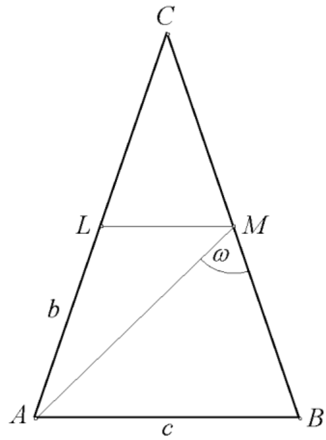
$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PQ_1}}\leq\frac{\overline{P_1A_1}}{\overline{A_1Q_1}}=2:1$$

што и требаше да се докаже.

5. Конструирај триаголник ABC ако е дадено: $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$ и $\measuredangle BMA=\omega$, $(\omega<90^{\circ})$, каде M е средина на страната BC. Докажи дека задачата има решение ако и само ако $b\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\leq c<b$.

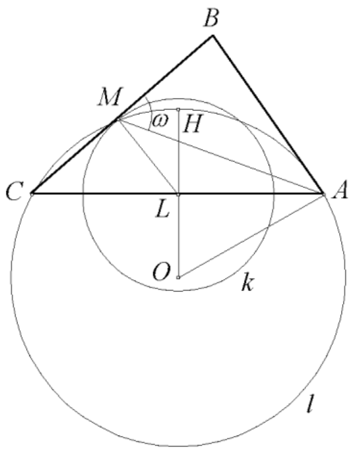
Кога важи знакот за равенство?

Решение. *Анализа.* Нека ABC е бараниот триаголник, $\measuredangle AMC=\pi-\omega>\frac{\pi}{2}$, L е средина на страната AC. Отсечката ML е средна линија на триаголникот ABC и нејзината должина е $\frac{c}{2}$, (цртеж десно).



Конструкција. Над отсечката AC конструираме кружен лак l од кој таа се гледа под агол $\measuredangle AMC$, а во точката L, која е средина на отсечката AC, опишуваме кружница k со радиус $\frac{c}{2}$. Точката M е пресечната точка на кружницата k и лакот l. Потоа ја конструираме отсечката BC за која M е средина (цртеж лево).

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.



Дискусија. За да постои решение, потребно и доволно е кружницата k да го сече лакот l. Нека O е центар на кружницата на која лежи лакот l. Бидејќи $\omega<\frac{\pi}{2}$, точката O лежи надвор од $\triangle AMC$. Нека $OH\perp AC$ е радиус кој го преполовува кружниот лак AC, а M бараната точка на лакот AH (или CH). Од $\triangle OML$ имаме

$$R=\overline{OM}\leq\overline{OL}+\overline{LM}=R-\overline{HL}+\frac{c}{2},$$

т.е. $\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\leq\frac{c}{2}$, каде $\overline{HL}=\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$ е висина на лакот.

Според условите од задачата $\measuredangle BMA=\omega<90^{\circ}<180^{\circ}-\omega=\measuredangle AMC$, па затоа $b=\overline{AC}>\overline{AB}=c$. Условот $\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\leq\frac{c}{2}<\frac{b}{2}$ е потребен. Ако $\overline{LM}=\frac{c}{2}<\frac{b}{2}=\overline{LA}$, тогаш крајната точка A на лакот l лежи надвор од кружницата k и ако уште височината на лакот е $h=\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}<\frac{c}{2}$, темето H на лакот l лежи во кружницата k. Лакот l и кружницата k се сечат меѓу точките A и H. Истото го добиваме и за пресекот меѓу точките C и H. Ако $h=\frac{c}{2}$, тогаш кружницата и лакот се допираат, $M \equiv H$, $\triangle AMC$ е рамнокрак, $AB \parallel LM \perp AC$ и во овој случај триаголникот ABC е правоаголен со прав агол во темето A.

6. Дадена е рамнина ε и три неколинеарни точки A, B, C кои лежат на иста страна од рамнината, такви што рамнината определена со овие точки не е паралелна со рамнината ε. Нека A', B' и C' се произволни точки во рамнината ε и L, M и N се средините на отсечките AA', BB' и CC', соодветно. Најди го геометриското место на тежиштето G на триаголникот LMN (ако тој не е дегенериран), кога точките A', B' и C' независно една од друга се менуваат во рамнината ε.

Решение. Во просторот поставуваме координатен систем така што оските OX и OY лежат во рамнината ε, а оската OZ е нормална на XOY. Точките A, B и C имаат координати $A(x_1, y_1, 2a)$, $B(x_2, y_2, 2b)$, $C(x_3, y_3, 2c)$ соодветно, и барем два од броевите a, b и c се различни меѓу себе. Координатите на тежиштето на триаголникот ABC се

$$S\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{2(a+b+c)}{3}\right).$$

Точките A', B' и C' имаат координати $A'(x_1', y_1', 0)$, $B'(x_2', y_2', 0)$, $C'(x_3', y_3', 0)$, а средини на отсечките AA', BB', CC' се точките L, M, N соодветно,

$$L\left(\frac{x_1+x_1'}{2}, \frac{y_1+y_1'}{2}, a\right), \quad M\left(\frac{x_2+x_2'}{2}, \frac{y_2+y_2'}{2}, b\right), \quad N\left(\frac{x_3+x_3'}{2}, \frac{y_3+y_3'}{2}, c\right).$$

Тежиштето G на триаголникот LMN има координати

$$S\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_1'+x_2'+x_3'}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_1'+y_2'+y_3'}{3}, \frac{a+b+c}{3}\right).$$

Бараното геометриско место на точки е во рамнината

$$z = \frac{a+b+c}{3} \qquad (*),$$

која е паралелна со рамнината ε и која го полови нормалата повлечена од тежиштето на триаголникот ABC и рамнината ε. Ќе докажеме дека секоја точка од оваа рамнина припаѓа на бараното множество точки. Нека $G(\bar{x}, \bar{y}, \frac{a+b+c}{3})$ е точка од рамнината (*). Координатите (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3) се дадени. Секогаш кога ќе избереме x_2', x_3', според горната релација за тежиште G можеме да го одредиме x_1', а исто така, секогаш кога ќе избереме y_2', y_3' можеме да го одредиме y_1'.

Забелешка. Условот рамнината која минува низ точките A, B и C да не е паралелна со рамнината ε не е важен за решавање на задачата.

IV олимпијада

1. Определи го најмалиот природен број n кој што ги има следниве својства:
а) цифрата на единиците на бројот n запишан во декаден броен систем е 6,
б) ако цифрата на единиците се премести пред другите цифри се добива број кој е 4 пати поголем од бројот n.
Решение. *I начин.* Бројот n можеме да го запишеме во облик $n=10A+6$. Тогаш $4n=6\cdot 10^m+A$, каде бројот A има m цифри. Од овие две равенки добиваме

$$A=\frac{2\cdot 10^m-8}{13}.$$

Сега бараме најмал број m за кој овој количникот е цел број. Лесно се гледа дека $m=5$, $A=15384$ и $n=153846$.
II начин. Од условот на задачата имаме

$$n=\overline{a_m a_{m-1}...a_1 6}, \qquad 4n=\overline{6a_m a_{m-1}...a_1},$$

односно

$$n=a_m\cdot 10^m+a_{m-1}\cdot 10^{m-1}+...+a_1\cdot 10+6$$

$$4n=6\cdot 10^m+a_m\cdot 10^{m-1}+a_{m-1}\cdot 10^{m-2}+...+a_1.$$

Бројот $4n$ завршува со 4, бидејќи $6\cdot 4=24$, па затоа $a_1=4$. Понатаму бројот $4n$ завршува со 84, бидејќи $4\cdot 46=184$, од што следува $a_2=8$. Продолжувајќи ја оваа постапка добиваме $n=153846$.

2. Во множеството реални броеви реши ја неравенката

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\tfrac{1}{2},\ x\in\mathbb{R}.$$

Решение. За да изразот од левата страна на неравенката бидат дефиниран, треба да е исполнет условот $-1\le x\le 3$. Ако неравенката важи за некој $x\in\mathbb{R}$ тогаш $\sqrt{3-x}>\sqrt{x+1}$, од каде што добиваме $-1\le x<1$.
Неравенката ја запишуваме во облик

$$\sqrt{3-x}>\tfrac{1}{2}+\sqrt{x+1}.$$

Ако квадрираме, по средувањето на изразот добиваме

$$\tfrac{7}{4}-2x>\sqrt{x+1},$$

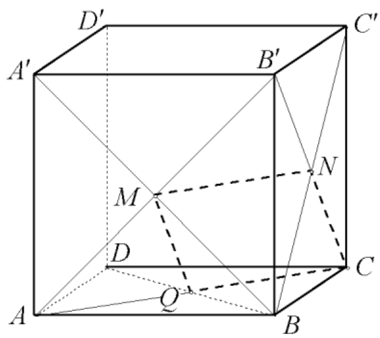
а со повторно квадрирање ја добиваме квадратната неравенка

$$4x^2-8x+\tfrac{33}{16}>0,$$

од каде што наоѓаме $x<1-\frac{\sqrt{31}}{8}$ и $x>1+\frac{\sqrt{31}}{8}$. Ако се земат во предвид сите услови се добива $-1\le x<1-\frac{\sqrt{31}}{8}$.

3. Дадена е коцка $ABCDA'B'C'D'$, со горна и долна основа $ABCD$ и $A'B'C'D'$, соодветно и $AA' \| BB' \| CC' \| DD'$. Точката X се движи со константна брзина по страните на квадратот $ABCD$ во насока $ABCDA$, а точката Y се движи со иста брзина по страните на квадратот $B'C'CB$ во насока $B'C'CBB'$. Точките X и Y почнуваат да се движат во ист момент при што X тргнува од A, а Y од B'. Најди го и нацртај го геометриското место на средините на отсечките XY.

Решение. *Прв начин.* Нека M, N, Q се центри на квадратите $ABB'A', BCC'B'$ и $ABCD,$ соодветно.



Да претпоставиме дека точката X се наоѓа на работ AB. Тогаш $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB},$ $\overrightarrow{B'Y} = \lambda\overrightarrow{B'C'},$ што значи

$$\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB'} + \tfrac{\lambda}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'})$$
$$= \overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{MN}.$$

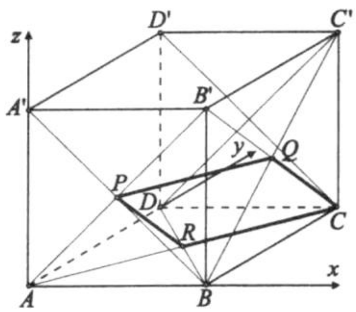
Според тоа, средината на отсечката XY се движи по отсечката $MN,$ додека X се движи по отсечката AB.

Нека точката X се движи по работ BC, т.е. нека $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{BC}$. Тогаш

$$\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AC'} + \mu\overrightarrow{CC'} \text{ и } \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY}) = \overrightarrow{AN} + \tfrac{\mu}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}) = \overrightarrow{AN} + \mu\overrightarrow{NC},$$

што значи дека средината на отсечката XY се движи по отсечката $NC,$ додека X се движи од B до C. Понатаму, на аналоген начин се докажува дека X се движи од C до Q и од Q до M. Бараното геометриско место на точки е четириаголникот $MNCQ$.

Втор начин. Коцката да ја поставиме во правоаголен координатен систем како на цртежот десно. Лесно се гледа дека бараното геометриско место од точки е ромбот $PQCR$, каде што точките P, Q и R се средините на ѕидовите $ABB'A''$, $BCC'B'$ и $ABCD$.



Нека a е должината на работ на коцката, а v е брзината на движењето на точките. Координатите на точката X при рамномерното движење по отсечката AB се дадени со $x = vt, y = 0, z = 0$, каде t се менува од 0 до $\frac{a}{v}$. Истовремено за координатите на точката Y што се движи по работ $B'C'$ се дадени со $x = a$, $y = vt$, $z = a$. Средината на отсечката XY во произволен момент t ги определува координатите на точките од отсечката PQ кои се определени со $(\frac{a+vt}{2},\frac{vt}{2},\frac{a}{2})$. Аналогно се наоѓаат координатите на точките на отсечката QC определени со $(\frac{a}{2},\frac{a+vt}{2},\frac{a-vt}{2})$, кординатите на точките на отсечката CR определени со $(a-\frac{vt}{2},a-\frac{vt}{2},0)$ и координатите на точките на отсечката RP определени со $(\frac{a}{2},\frac{a-vt}{2},\frac{vt}{2})$. Притоа како почетен момент за пресметување на времето во секоја одделна етапа на двужење се зема моментот кога точките X и Y се наоѓаат во некое од темињата на коцката.

4. Реши ја равенката

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1,\ x\in\mathbb{R}.$$

Решение. Со примена на формулите

$$2\cos^2 x=1+\cos 2x \quad \text{и} \quad 2\cos^2 2x=1+\cos 4x$$

дадената равенка ја сведуваме на еквивалентната равенка

$$\cos 2x+\cos 4x+2\cos^2 3x=0,$$

и користејќи ја формулата $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, последователно добиваме

$$\cos 3x(\cos x+\cos 3x)=0,$$

$$\cos x\cos 2x\cos 3x=0.$$

Решенијата на оваа равенка се

$$x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\quad x_3=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3},\ \text{каде}\ k\in\mathbb{Z}.$$

5. На кружница k се дадени три точки A, B и C. Конструирај тоќка $D\in k$ така што четириаголник $ABCD$ е тангентен.

Решение. *Анализа.* Четириаголник $ABCD$ е тангентен ако и само ако

$$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}.$$

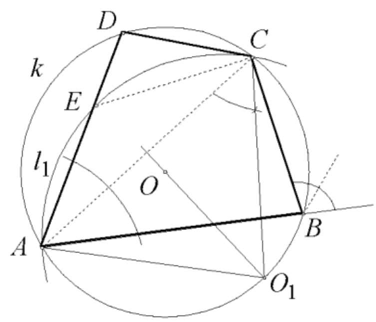
Нека $\overline{AB}\geq\overline{BC}$. Тогаш, $\overline{AB}-\overline{BC}=\overline{AD}-\overline{CD}\geq 0$. Сега задачата се сведува на конструкција на триаголник ACD со познати должината на страна AC, $\measuredangle CDA=\pi-\measuredangle ABC$ и растојанието $\overline{AD}-\overline{CD}$. Да претпоставиме дека задачата е решена. Ја нанесуваме точката E на страната AD така што $\overline{DE}=\overline{CD}$. Тогаш триаголникот ECD е рамнокрак и

$$\measuredangle DEC=\frac{1}{2}(\pi-\measuredangle CDA)=\frac{1}{2}\measuredangle ABC,\ \measuredangle CEA=\pi-\frac{1}{2}\measuredangle ABC.$$

Конструкција. Прво конструираме лак l_1 кој е од спротивната страна на правата AC во однос на точката B, таков отсечката AC се гледа под агол

$$\measuredangle CEA=\pi-\frac{1}{2}\measuredangle ABC.$$

Со центар во точката A опишуваме кружница со радиус $\overline{AB}-\overline{BC}$. Пресекот на лакот l_1 и оваа кружницата е точката E. Отсечката AE ја продолжуваме до пресекот со зададената кружница, со што го добиваме темето D.



Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Дискусија. Ако $\overline{AB}=\overline{BC}$, тогаш точката D лежи на симетралата на отсечката AC. Бидејќи $\overline{AE}=\overline{AD}-\overline{CD}=\overline{AB}-\overline{BC}<\overline{AC}$, кружницата $k(A,\overline{AE})$ го сече лакот во точката E. Според тоа, задачата има единствено решение.

6. Даден е рамнокрак триаголник ABC, со радиуси на опишана и впишана кружница r и ρ, соодветно. Докажи дека растојанието d меѓу центрите на опишаната и впишаната кружница е

$$d=\sqrt{r(r-2\rho)}\,. \qquad (1)$$

Решение. Ќе докажеме дека оваа формула важи за секој триаголник ABC. Нека O_1 и O се центри на опишаната и впишаната кружница во триаголникот ABC, D е средната точка на лакот AB, кој не го содржи темето C. Секој од аглите $\measuredangle OAD$ и $\measuredangle DOA$ е еднаков на половината од збирот на аглите кај темињата A и C во триаголникот ABC. Според тоа $\overline{OD}=\overline{AD}$. Користејќи ја теоремата за степен на точка во однос на кружница за опишаната кружница и точката O добиваме

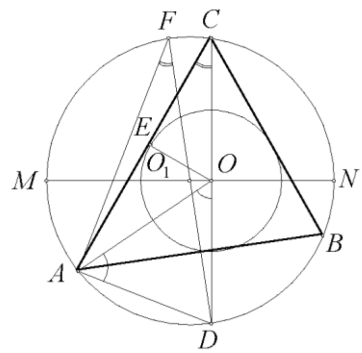
$$\overline{MO}\cdot\overline{ON}=\overline{CO}\cdot\overline{OD}\,.$$

Бидејќи $OE\perp AB$ и FD е дијаметар на опишаната кружница, триаголниците COE и FDA се слични, па според тоа

$$\overline{CO}:\overline{OE}=\overline{FD}:\overline{AD},$$

од каде што добиваме

$$\overline{CO}\cdot\overline{AD}=\overline{OE}\cdot\overline{FD}\,.$$



Бидејќи $\overline{OD}=\overline{AD}$, добиваме

$$\overline{CO}\cdot\overline{OD}=\overline{OE}\cdot\overline{FD}\,.$$

Конечно,

$$\overline{MO}\cdot\overline{ON}=\overline{OE}\cdot\overline{FD}\,.$$

Ако во ова равенство ставиме

$$\overline{MO}=r+d\,,\ \overline{ON}=r-d\,,\ \overline{OE}=\rho \text{ и } \overline{FD}=2r\,,$$

добиваме $r^2 - d^2 = 2r\rho$, што и требаше да докажеме.

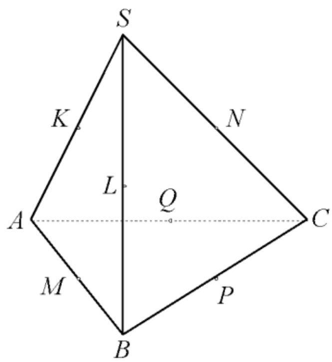
Забелешка. Формулата (1) во литературата е позната како Ојлењрова формула за растојанието меѓу центрите на опишаната и впишаната кружница во триаголник.

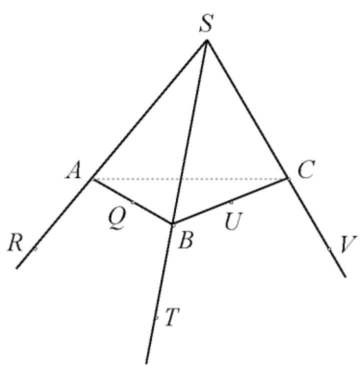
7. Докажи дека тетраедарот $SABC$ е правилен ако и само ако постојат пет различни сфери кои ги допираат правите SA, SB, SC, AB, BC, CA.

Решение. Да забележиме дека секоја сфера која ги допира правите SA, SB, SC, AB, BC, CA ја сече секоја од рамнините на триаголниците SAB, SBC, SCA, ABC во впишаната или припишаната кружница на тој триаголник. За секоја таква сфера од четирите добиени кружници три се припишани, а една е впишана или сите четири се впишани. За да го докажеме ова ќе разгледаме два случаи.

Нека сферата σ ги допира правите SA, SB, SC, AB, BC, CA, а рамнините на триаголниците SAB и SBC ги сече по впишаните кружници.

Нека K, L, M, N, P се допирните точки со рабовите $SA, SB, AB, SC, BC,$ соодветно. Бидејќи припишаната кружница на триаголник има само една заедничка точка со триаголникот, сферата σ мора да ги сече рамнините на триаголниците SCA и ABC по впишаните кружници во тие триаголници. Нека Q е допирната точка на σ и AC. Од овде следува дека сите четири кружници се впишани, т.е. ако две кружници се впишани, тогаш и другите две се впишани.





Нека претпоставиме дека сферата τ ги допира сите прави SA, SB, SC, AB, BC, CA и дека ја сече рамнината на триаголникот SAB по припишаната кружница на триаголникот SAB. Таа има заедничка точка Q со работ AB, а со правите SA и SB заеднички точки R и T, соодветно. Бидејќи точката T не припаѓа на работ SB на тетраедарот, пресекот на сферата τ со рамнината на триаголникот SBC е припишаната кружница на тој триаголник. Таа ја допира отсечката BC во некоја точка U, а правата SC во некоја точка V. Од овде се гледа дека сферата ја сече рамнината на триаголникот ABC по впишана кружница, а рамнината на триаголникот SCA по опишана кружница. Значи, од четирите споменати кружници три се припишани, а една е впишана. Според тоа, ако некоја од кружниците е припишана, тогаш мора три од кружниците да се припишани, а една да е впишана.

Постојат најмногу пет сфери кои ги допираат правите SA, SB, SC, AB, BC, CA и тоа најмногу една за која сите пресеци на сферата со рамнините на страните на тетраедарот се впишани кружници во страните на тетраедарот и најмногу четири сфери кај кои три од пресечните кружници се припишани, а една е впишана.

Ако претпоставиме дека постојат сите пет сфери $(\sigma, \tau$ и останатите три) добиваме дека

$$\overline{SK}=\overline{SL}=\overline{SN}\,,\ \overline{AK}=\overline{AM}=\overline{AQ}\,,\ \overline{BM}=\overline{BL}=\overline{BP}\,, \overline{CP}=\overline{CN}=\overline{CQ}\,,$$

од што следува

$$\overline{SA}+\overline{BC}=\overline{SB}+\overline{CA}=\overline{SC}+\overline{AB}\,,$$

бидејќи сферата σ постои. Аналогно добиваме

$$\overline{SA}-\overline{BC}=\overline{SB}-\overline{CA}=\overline{SC}-\overline{AB}\,,$$

па според тоа

$$\overline{SA}=\overline{SB}=\overline{SC} \text{ и } \overline{BC}=\overline{CA}=\overline{AB}\,.$$

Од претпоставката дека постои барем една од преостанатите три сфери, добиваме дека $\overline{SA}=\overline{AB}$, односно дека тетраедарот е правилен.

Останува да докажеме дека кај правилен тетраедар постојат сите пет сфери. Центарот на правилен тетраедар е на еднаква оддалеченост од секој негов раб, што значи дека сферата σ постои и нејзин центар е центарот на тетраедарот. Ако точките S, A, B, C се центри на хомотетија со коефициент 3, добиваме четири сфери кои се хомотетични слики на сферата σ. Секоја од нив ги допира правите SA, SB, SC, AB, BC и CA.

V олимпијада

1. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x,$$

каде што p е реален параметар.

Решение. Левата страна на равенката е ненегативна, па затоа $x\geq 0$. Понатаму, корените треба да се реални, па затоа $x^2\geq p$ и $x^2\geq 1$. Равенката ја запишуваме во видот

$$2\sqrt{x^2-1}=x-\sqrt{x^2-p}, \qquad (1)$$

од каде што следува $x\geq\sqrt{x^2-p}$, т.е. $p\geq 0$. Со квадрирање на (1) добиваме

$$4-p-2x^2=2x\sqrt{x^2-p}, \qquad (2)$$

па како десната страна на (2) е позитивна добиваме

$$4-p-2x^2\geq 0. \qquad (3)$$

Со квадрирање на (2), по средувањето добиваме добиваме

$$x^2=\tfrac{(p-4)^2}{8(2-p)},\; p<2, \qquad (4)$$

Со замена на x^2 од (4) во (3) ја добиваме неравенката

$$3p^2-16p+16\geq 0,$$

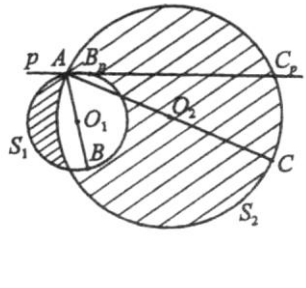
од каде наоѓаме $p\leq\frac{4}{3}$ или $p\geq 4$. Но, треба $p<2$, па затоа случајот $p\geq 4$ доведува до комплексни решенија на дадената равенка. Според тоа, $p\leq\frac{4}{3}$ и како $p\geq 0$ во овој случај имаме

$$x=\tfrac{-p+4}{2\sqrt{2(2-p)}},\; 0\leq p\leq\tfrac{4}{3}.$$

Лесно се проверува во овој случај се исполнети условите $x^2\geq p$ и $x^2\geq 1$.

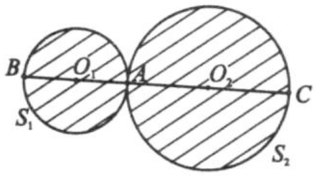
2. Во просторот определи го геометриското место на темињата на правите агли за кои едниот крак минува низ дадена точка A, а другиот има барем една заедничка точка со отсечката BC.

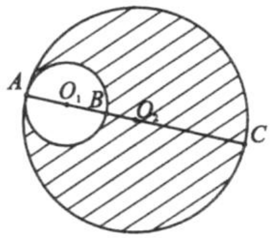
Решение. Околу отсечките AB и AC како дијаметри, конструираме топки S_1 и S_2 (цртеж десно). Секоја точка од површините на овие топки е теме D на правоаголен триаголник BDA, односно CDA.



Бараното геометриско место е определено со точките што припаѓаат на овие топки и на нивните гранични површини, од кои се изземени точките што едновремено припаѓаат на внатрешноста на двете топки. За последното се користи ознаката $(\overline{S_1} \cup \overline{S_2}) \setminus (S_1 \cap S_2)$, каде што $\overline{S_i}$ гом означува множеството точки кои припаѓаат на внатрешноста или на границата на топката S_i, додека со S_i се означени само внатрешните точки.

Навистина, да повлечеме произволна права p низ точката A. Освен во случај кога правата p е тангента на барем една од граничните сфери на топките S_1 и S_2, таа се сече со површините на овие топки, покрај во A, уште во по една точка, соодветно B_p и C_p. Точките B_p и C_p се проекции соодветно на точките B и C на правата p. Очигледно сите точки од отсечката B_pC_p и само тие од правата p припаѓаат на бараното геометриско место, а се вклучени во $(\overline{S_1} \cup \overline{S_2}) \setminus (S_1 \cap S_2)$. На долните цртежи се прикажани и двата специјални случаја кога точката A припаѓа на правата BC.





3. Даден е конвексен $n-$аголник кај кој сите внатрешни агли се еднакви и чии последователни страни ги задоволуваат неравенствата

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n ..$$

Докажи дека $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Решение. Да го разгледаме случајот кога $n = 2k+1$. Да ги означиме темињата на многуаголникот со $A_1, A_2, ..., A_{2k}, A_{2k+1}$. Бидејќи сите агли во многуаголникот се еднакви, симетралата на аголот со теме A_1, меѓу a_1 и a_{2k+1} е нормална на страната $A_{k+1}A_{k+2} = a_{k+1}$. На оваа симетрала ги проектираме искршените линии $A_1A_2...A_{k+1}$ и $A_1A_{2k+1}A_{2k}...A_{k+2}$. Двете проекции имаат еднаква должина. Аглите меѓу страните A_iA_{i+1} и $A_{2k-i+1}A_{2k-i}$ $(i \leq k)$ и симетралата се еднакви. Затоа должината на проекцијата на страната A_iA_{i+1} не е помала од должината на проекцијата на страната $A_{2k-i+1}A_{2k-i}$. Ако во низата неравенства

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_{2k+1}$$

постои строго неравенство, тогаш ќе имаме строго неравенство и во должините на проекциите на $A_1A_2...A_{k+1}$ и $A_1A_{2k+1}A_{2k}...A_{k+2}$, што противречи на добиеното равенство. Од оваа противречност следува $a_1 = a_2 = ... = a_{2k+1}$

Случајот $n = 2k$ се разгледува аналогно, со таа разлика што проекциите се на права која е нормална на правата A_1A_n.

4. Во множеството реални броеви реши го системот

$$\begin{cases} x_5 + x_2 = yx_1 \\ x_1 + x_3 = yx_2 \\ x_2 + x_4 = yx_3 \\ x_3 + x_5 = yx_4 \\ x_4 + x_1 = yx_5 \end{cases}$$

каде y е реален параметар.

Решение. Од првата и втората равенка добиваме

$$x_2 = yx_1 - x_5$$
$$x_3 = yx_2 - x_1$$

односно

$$x_3 = (y^2-1)x_1 - yx_5 \qquad (1)$$

Слично, од четвртата и петтата равенка добиваме

$$x_3 = (y^2-1)x_5 - yx_1 \qquad (2)$$

Понатаму, од (1) и (2) следува

$$(y^2 + y - 1)(x_1 - x_5) = 0$$

Разгледуваме два случаи.

а) Ако $y^2 + y - 1 \neq 0$, тогаш $x_1 = x_5$. Ако наместо првата, втората, четврата и петтата равенка ги разгледаме втората, третата, петата и првата равенка и расудувајќи аналогно, добиваме дека $x_2 = x_1$. Со аналогни разгледувања наоѓаме

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x .$$

За $y = 2$, x е било кој реален број, а за $y \neq 2$ добиваме $x = 0$.

б) Нека $y^2 + y - 1 = 0$. Ги множиме првата, втората и третата равенка со 1, y и $-y$, соодветно и ако добиените равенки ги собереме добиваме

$$x_5 + x_2 + yx_1 + yx_3 - yx_2 - yx_4 = yx_1 + y^2x_2 - y^2x_3 ,$$

односно

$$x_5 + (y^2 + y)x_3 = yx_4 + (y^2 + y - 1)x_2 .$$

Ако го искористиме условот $y^2+y=1$, тогаш последната равенка ја сведуваме на четвртаа равенка. Според тоа, од првите три равенки ја добиваме четвртата равенка. Аналогно, петтата равенка ја добиваме од втората, третата и четвртата равенка.
Според тоа, дадениот систем е еквивалентен на системот

$$x_2 = yx_1 - x_5 \tag{3}$$

$$x_3 = -y(x_1 + x_5) \tag{4}$$

$$x_4 = yx_5 - x_1 \tag{5}$$

каде x_1 и x_5 се произволни реални броеви.

Освен очигледното решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, дадениот систем ги има и следниве решенија:
- ако $y=2$, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x$ за секој $x \in \mathbb{R}$.
- ако $y^2 + y - 1 = 0$, т.е. $y = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, тогаш x_1 и x_5 се произволни реални броеви а x_2, x_3 и x_4 се дадени со равенките (3)-(5).

5. Докажи го равенството

$$\cos\tfrac{\pi}{7} - \cos\tfrac{2\pi}{7} + \cos\tfrac{3\pi}{7} = \tfrac{1}{2}.$$

Решение. Го множиме и делиме изразот од левата страна на равенството со $2\cos\frac{\pi}{14}$ и ако ги искористиме формулата $2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$ и парноста на функцијата $\cos x$ добиваме:

$$\begin{aligned}\cos\tfrac{\pi}{7} - \cos\tfrac{2\pi}{7} + \cos\tfrac{3\pi}{7} &= \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{14}} 2\cos\tfrac{\pi}{14}(\cos\tfrac{\pi}{7} - \cos\tfrac{2\pi}{7} + \cos\tfrac{3\pi}{7})\\ &= \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{14}}(\cos\tfrac{3\pi}{14} + \cos\tfrac{\pi}{14} - \cos\tfrac{5\pi}{14} - \cos\tfrac{3\pi}{14} + \cos\tfrac{7\pi}{14} + \cos\tfrac{5\pi}{14})\\ &= \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{14}}\cos\tfrac{\pi}{14} = \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

6. Учениците A, B, C, D и E учествувале на натпревар. Еден гледач се обидел да ги погоди резултатите на натпреварот и претпоставил дека редоследот ќе биде A, B, C, D, E, но тој не го погодил пласманот на ниту еден ученик и ниту еден пар ученици кои што се пласирале непосредно еден по друг. Друг гледач претпоставил дека резултатот ќе биде D, A, E, C, B и тој го погодил точното место на два ученика, а исто така и на два пара ученици кои се пласирале непосредно еден по друг. Кој е резултатот на натпреварувањето?

Решение. Прво да забележиме дека, ако пласманот на двајца натпреварувачи е точно предвиден и ако е точно предвиден пласманот на едниот натпреварувач, тогаш точно е предвиден и пласманот на другиот натпреварувач.

Да го разгледаме предвидувањето на вториот гледач. Во ова предвидување имаме четири парови: DA, AE, EC и CB. Два од овие пара се точно предвидени.

Нека претпоставиме дека точно се предвидени паровите кои имаат заеднички елемент (DA, AE или AE, EC или EC, CB). Тогаш ниту едно од точно предвидените места не може да припаѓа на некој од точно предвидените парови, бидејќи во овој случај ќе имаме барем три точно предвидени места. Ако двете погодени места се надвор од тројката со погоден редослед, тогаш би биле погодени сите пет места (бидејќи трите преостанати места ги пополнуваат на точен начин трите преостанати натпреварувачи). Затоа точно предвидените парови се дисјунктни.

Според тоа кои парови се точно предвидени, можни се следните случаи:

а) DA и EC. Барем едно погодено место припаѓа на подреден пар, па тој пар претставува две погодени места, а другиот пар погрешно предвидени места. Ако двете места од парот DA се точно предвидени резултатот на натпреварувањето би бил $DABEC$, што не е можно, бидејќи првата личност ќе има точно погоден пар. Ако парот EC е точен, тогаш и парот DA треба да е точно предвиден (во однос на местата) што не е можно.

б) AE и CB. Ако двете места на парот AE се точно предвидени, тогаш и парот CB (во однос на местата) е точно предвиден, што не е можно. Ако двете места на парот CB се точно предвидени, тогаш резултатот ќе биде $AEDCB$, што не е можно, бидејќи предвидувањето за A би било како и кај првата личност.

в) DA и CB. Ако двете места на DA се точно предвидени, тогаш резултатот би бил $DACBE$, што не е можно бидејќи C е на третото место како исто како и кај првата личност. Ако двете места на парот CB се точни, тогаш резултатот е $EDACB$ и се исполнети сите услови на задачата.

VI олимпијада

1. а) Определи ги сите природни броеви n, такви што $7\,|\,(2^n-1)$.

б) Докажи дека $7 \nmid (2^n+1)$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. а) Ако $n\equiv 0(\operatorname{mod}3)$, тогаш $n=3k$, $k\in\mathbb{N}$, т.е.

$$2^n=(2^3)^k\equiv 1(\operatorname{mod}7),$$

па $2^{3k}-1$ е делив со 7.

Ако $n=3k+i,$ за $i=1,2$ тогаш $2^{3k+i}-1=2^i(2^{3k}-1)+2^i-1$. Бидејќи е $2^{3k}-1$ е делив со 7, а 2^i-1 не е делив со 7 добиваме дека $2^{3k+i}-1,$ за $i=1,2$ не е делив со 7.

Значи, 2^n-1 е делив со 7 ако и само ако n е делив со 3.

б) Секој природен број n може да се запише во обликот $3k+i$, $i=0,1,2,$ $k\in\mathbb{N}$. Тогаш $2^n+1=2^i(2^{3k}-1)+2^i+1$. Првиот собирок е делив со 7, а вториот собирок не е делив со 7.

Значи, 2^n+1 не е делив со 7, за секој $n\in\mathbb{N}$.

2. Нека a, b и c се должините на страните на произволен триаголник. Докажи дека

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\le 3abc. \qquad (*)$$

Решение. *Прв начин*. Воведуваме смени

$$b+c-a=x,\quad c+a-b=y,\quad a+b-c=z$$

т.е.

$$a=\tfrac{y+z}{2},\ b=\tfrac{z+x}{2},\ c=\tfrac{x+y}{2}$$

Бидејќи a,b и c се должини на страни на триаголник, $x,y,z>0$. Сега неравенството го добива обликот

$$(\tfrac{y+z}{2})^2x+(\tfrac{z+x}{2})^2y+(\tfrac{x+y}{2})^2z\le 3\tfrac{y+z}{2}\,\tfrac{z+x}{2}\,\tfrac{x+y}{2}.$$

По средување на ова неравенство добиваме

$$6xyz\le xy^2+yx^2+yz^2+zy^2+zx^2+xz^2,$$

кое е еквивалентно на неравенството

$$x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2\ge 0.$$

Последното неравенство очигледно важи за секои $x,y,z\in\mathbb{R}^+$.

Втор начин. Од неравенството на триаголник следува

$$a+b>c,\quad b+c>a,\quad c+a>b. \qquad (1)$$

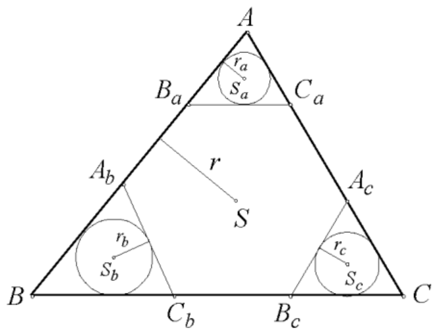
Ако неравенствата (1) соодветно ги помножиме со ненегативните множители $(a-b)^2 \geq 0, (b-c)^2 \geq 0, (c-a)^2 \geq 0$ ги добиваме неравенствата

$$(a+b)(a-b)^2 \geq c(a-b)^2,$$
$$(b+c)(b-c)^2 \geq a(b-c)^2,$$
$$(c+a)(c-a)^2 \geq b(c-a)^2.$$

Ги собираме неравенствата (2) и по средувањето го добиваме неравенството (8).

3. Во $\triangle ABC$ со должина на страните a, b и c впишана е кружница и на неа се повлечени тангенти паралелни со страните на триаголникот, кои од $\triangle ABC$ отсекуваат три нови триаголници во кои се впишани кружници. Пресметај го збирот на плоштините на четирите круга!

Решение. Со r да го означиме радиусот на кругот впишан во $\triangle ABC$, а со r_a, r_b, r_c радиусите на круговите впишани во триаголниците добиени со конструирање на тангентите на впишаниот круг. Нека P е плоштина на $\triangle ABC$, а $s=\frac{a+b+c}{2}$ неговиот полупериметар. Според ознаките на цртежот триаголниците AB_aC_a и ABC се слични, па радиусите на впишаните кругови се однесуваат како висините h_a' и h_a кои соодветствуваат на страните B_aC_a и BC. Значи,



$$\frac{r}{r_a}=\frac{h_a}{h_a'}$$

Бидејќи $h_a' = h_a - 2r$, добиваме

$$r_a = \frac{h_a-2r}{h_a} r .$$

Аналогно,

$$r_i = \frac{h_i-2r}{h_i} r , \quad i=b, c .$$

Бидејќи $r=\frac{P}{s}$ и $h_i = \frac{2P}{i}$, од претходните равенства добиваме

$$r_i = \frac{P(s-i)}{s^2} , \ i=a, b, c .$$

Ако искористиме дека $a+b+c=2s$ и $P^2=(s-a)(s-b)(s-c)s$, добиваме дека

$$S = r^2\pi + r_a^2\pi + r_b^2\pi + r_c^2\pi = \frac{P^2}{s^4}(s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2)\,\pi$$
$$= \frac{P^2}{s^4}(4s^2+a^2+b^2+c^2-2s(a+b+c))\,\pi$$

$$=\tfrac{1}{s^4}(s-a)(s-b)(s-c)(a^2+b^2+c^2)\,s\,\pi$$
$$=\tfrac{1}{(a+b+c)^3}(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a^2+b^2+c^2)\,\pi.$$

4. Секој од 17 научници се допишува со секој преостанатите. Тие се допишуваат на три теми и секој пар се допишува само на една тема. Докажи дека постојат барем тројца научници кои меѓусебно се допишуваат на една иста тема.

Решение. Избираме еден научник, A. Бидејќи тој се допишува со 16 други научници, од принципот на Дирихле следува постојат барем 6 други научници кои со научникот A се допишуваат на иста тема.

Ако меѓу шесте научници, постојат двајца B и C, кои меѓу себе се допишуваат на таа иста тема, тогаш (A, B, C) е бараната тројка.

Ако од овие шест научници било кои двајца не се допишуваат на таа тема, тогаш тие меѓусебно се допишуваат на преостанатите две теми. Избираме еден од шестмината и нека тоа е D. Тој барем со тројца од преостанатите петмина се допишува на една иста тема. Ако барем двајца од нив, E и F, се допишуваат на таа тема, тогаш (D, E, F) е бараната тројка. Ако од таа тројка било кои двајца не се допишуваат на таа тема, тогаш тие се допишуваат меѓу себе на преостанатата трета тема.

Значи, секогаш постојат тројца научници кои се допишуваат на иста тема.

5. Во рамнина се дадени 5 точки. Правите кои се определени со овие точки се различни и меѓу нив нема ниту паралелни, ниту нормални прави. Низ секоја е повлечена нормала кон секоја права определена со преостанатите 4 точки. Определи го најголемиот број пресечни точки на овие нормали, не сметајќи ги дадените точки.

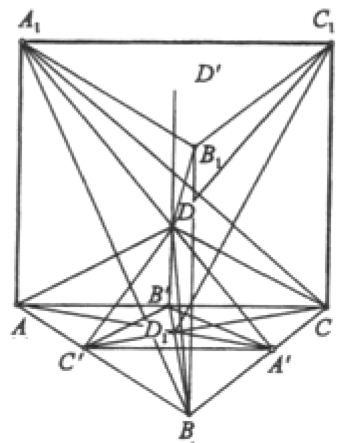
Решение. Вкупно има $\binom{5}{2}=10$ прави. Низ секоја точка, на пример A, минуваат четири прави. Според тоа, низ секоја точка минуваат шест нормали (на секоја права која не минува низ точката A). Разгледуваме било кои две точки, на пример A и B. Ќе го пресметаме бројот на пресеци на нормалите од точката A и нормалите од точката B. Нормала низ точката A кон права низ точката B, ги сече сите нормали низ точката B. Низ точката B минуваат три прави кои не минуваат низ точката A. Тоа значи дека низ точката A кон нив може да се повлечат три нормали. Тие се сечат со нормалите низ точката B во $3\cdot 6=18$ точки. Секоја друга нормала низ точката A на преостанатите три прави, кои не минуваат низ точката A, сече пет нормали низ точката B. Со една од нив не се сече бидејќи е паралелна со неа. На тој начин се добиваат уште 15 точки. Значи, нормалите низ тие две точки се сечат во $18+15=33$ точки. Од петте точки може да се составаат 10 парови.

Затоа, бројот на пресечни точки не е поголем од $33\cdot 10=330$. Но, некои од тие точки се повторуваат. Имено, секои три точки од дадените 5 точки се темиња на триаголник. Правите на кои лежат висините на секој триаголник се сечат во една точка. Оваа точка е броена 3 пати. Такви триаголници има $\binom{5}{3}=10$, па според тоа вкупниот број на пресечни точки не е поголем од $330-30+10=310$.

6. Даден е тетраедар $ABCD$. Врвот D е поврзан со тежиштето D_1 на ѕидот ABC. Правите низ темињата A,B,C кои се паралелни со DD_1 ги сечат рамнините на спротивните ѕидови во точки A_1,B_1 и C_1. Докажи дека волуменот на тетраедарот $ABCD$ е три пати помал од волуменот на тетраедарот $A_1B_1C_1D_1$. Дали тврдењето важи ако се избере било која точка D_1 во внатрешноста на триаголникот ABC?

Решение. Ќе го докажеме ова тврдење во општ случај, т.е. за секоја точка D_1 од внатрешноста на триаголникот ABC, (види цртеж). Нека $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, каде A_1,B_1,C_1 се точки во спротивните рамнини.

Во триаголникот ABC ги повлекуваме правите AD_1,BD_1,CD_1 до нивниот пресек со спротивните страни во точките A',B',C', соодветно. Точката A' лежи на правата A_1D, бидејќи A_1D е во рамнината A_1BC и $AA_1 \parallel D_1D$. Аналогно се покажува дека точките B' и C' се на правите B_1D и C_1D.



Во темињата на триаголникот ABC ставаме точкести маси x,y,z, така што тежиштето на овај систем да е точката D_1. На пример, нека

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}=\frac{z}{x},\ \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}=\frac{y}{z},\ \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}=\frac{x}{y}.$$

Доволно е да земеме

$$x=\overline{C'B},\quad y=\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}\overline{AC'},\ z=\overline{AC'}.$$

Според тоа

$$\frac{P_{AB'C'}}{P_{ABC}}=\frac{\overline{AB'}\cdot\overline{AC'}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}=\frac{yz}{(x+y)(x+z)}$$

и аналогно

$$\frac{P_{BC'A'}}{P_{ABC}}=\frac{xz}{(y+x)(y+z)},\ \frac{P_{CA'B'}}{P_{ABC}}=\frac{xy}{(z+y)(z+x)}.$$

Според тоа

$$\frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}}=\frac{P_{ABC}-P_{AB'C'}-P_{BA'C'}-P_{CA'B'}}{P_{ABC}}=\frac{2xyz}{(x+y)(x+z)(y+z)}.$$

Понатаму,

$$\frac{\overline{A'D}}{\overline{DA_1}} = \frac{\overline{A'D_1}}{\overline{D_1A}} = \frac{x}{y+z},\ \frac{\overline{C'D}}{\overline{DC_1}} = \frac{z}{x+y},\ \frac{\overline{B'D}}{\overline{DB_1}} = \frac{y}{x+z},$$

(D_1 е тежиште на системот со маса x во A и $y+z$ во A' итн.). Бидејќи просторните агли $DA'B'C'$ и $DA_1B_1C_1$ се еднакви, волумените на тетраедрите $A'B'C'D$ и $A_1B_1C_1D$ се пропорционални на производот на должините на бочните рабови, т.е.

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{A_1B_1C_1D}} = \frac{\overline{A'D}\cdot\overline{B'D}\cdot\overline{D'C}}{\overline{DA_1}\cdot\overline{DB_1}\cdot\overline{DC_1}} = \frac{xyz}{(x+y)(x+z)(y+z)},$$

па според тоа

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{ABCD}} = \frac{2xyz}{(x+y)(x+z)(y+z)} = 2\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{A_1B_1C_1D}},$$

т.е. $V_{A_1B_1C_1D} = 2V_{ABCD}$. Сега да ги преместиме масите во $\triangle ABC$ и тоа, во A' маса $\frac{y+z}{2}$, во B' маса $\frac{x+z}{2}$ и во C' маса $\frac{x+y}{2}$. Јасно, повторно тежиштето е D_1. Потоа, во темињата A_1, B_1, C_1 ставаме маси $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}$. Тогаш тежиштето на секој пар точки (A_1, A'), (B_1, B'), (C_1, C') е во точката D, бидејќи

$$\frac{\overline{A_1D}}{\overline{DA'}} = \frac{\overline{AD_1}}{\overline{D_1A'}} = \frac{\frac{y+z}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{y+z}{x}$$

и аналогно за останатите два пара. Затоа тежиштето на целиот систем е во точката D. Од друга страна, тежиштето на системот точки A', B', C' е во точката D_1 и неговата маса е $x+y+z$. Тежиштето на системот точки A_1, B_1, C_1 е во рамнината $A_1B_1C_1$ и на правата DD_1, т.е. во точката D', а неговата маса е $\frac{x+y+z}{2}$. Од овде добиваме

$$\frac{\overline{D_1D}}{\overline{DD'}} = \frac{1}{2} \text{ и } \frac{\overline{D'D_1}}{\overline{D'D}} = \frac{3}{2}.$$

Тоа значи дека односот на висините, повлечени од точките D_1 и D врз рамнината $A_1B_1C_1$ е еднаков на $\frac{3}{2}$. Тетраедрите $A_1B_1C_1D$ и $A_1B_1C_1D_1$ имаат заедничка основа $A_1B_1C_1$. Затоа $\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{A_1B_1C_1D}} = \frac{3}{2}$, а бидејќи $V_{A_1B_1C_1D} = 2V_{ABCD}$, добиваме $V_{A_1B_1C_1D_1} = 3V_{ABCD}$.

VII олимпијада

1. Определи ги сите реални броеви $x\in[0,2\pi]$ за кои е исполнето неравенството

$$2\cos x \le |\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}| \le \sqrt{2}\ .$$

Решение. Имаме:

$$1\pm\sin 2x=\sin^2 x\pm 2\sin x\cos x+\cos^2 x=(\sin x\pm\cos x)^2\ .$$

Со квадрирање на десната страна на неравенството се добива неравенството

$$2-2\sqrt{(1+\sin 2x)(1-\sin 2x)}\le 2$$

кое точно. Левата страна на неравенството ќе ја запишеме во облик

$$2\cos x\le ||\sin x+\cos x|-|\sin x-\cos x||\ . \qquad (1)$$

За $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$, $\cos x\le 0$, па според тоа неравенството е исполнето.

За $0\le x<\frac{\pi}{4}$ исполнето е

$$||\sin x+\cos x|-|\sin x-\cos x||=2\sin x<2\cos x\ ,$$

па според тоа неравенството не е исполнето.

За $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$, десната страна на неравенство (1) е

$$||\sin x+\cos x|-|\sin x-\cos x||=2\cos x$$

па според тоа неравенството е исполнето. Слично се покажува дека неравенството е исполнето за $\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{7\pi}{4}$, а не е исполнето за $\frac{7\pi}{4}<x\le 2\pi$. Значи, двете неравенства се исполнети за $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{7\pi}{4}$.

2. Даден е системот равенки

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=0\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=0\end{aligned}$$

чии коефициентите ги задоволуваат условите:

а) a_{11},a_{22},a_{33} се позитивни,

б) сите преостанати коефициенти се негативни,

в) во секоја равенка збирот на коефициентите е позитивен.

Докажи дека $x_1=x_2=x_3=0$ е единствено решение на системот.

Решение. *Прв начин.* Од условот на задачата следува дека постојат позитивни броеви b_1,b_2,b_3 такви што:

$$a_{11}=b_1-a_{12}-a_{13},\ \ a_{22}=b_2-a_{21}-a_{23},\ \ a_{33}=b_3-a_{31}-a_{32}\ .$$

Со замена на овие изрази во детерминантата на системот и нејзино пресметување се добива дека таа е различна од нула. Сега, бидејќи системот е хомоген, добиваме дека единствено негово решение е $x_1=x_2=x_3=0$.

Втор начин. Нека (x_1, x_2, x_3) е решение на дадениот систем, такво што

$$|x_1| \geq |x_2| \geq |x_3|.$$

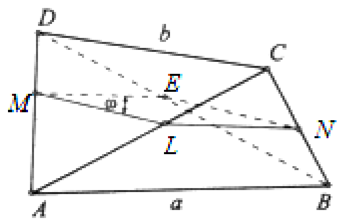
Останатите случаи се сведуваат на аналогни разгледувања, при што е потребно само да се изврши замена на индексите.
Ако $x_1 = 0$, тогаш $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Ако $|x_1| > 0$, тогаш

$$\begin{aligned} |a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3| &= |x_1| \cdot |a_{11} + a_{12}\tfrac{x_2}{x_1} + a_{13}\tfrac{x_3}{x_1}| \\ &\geq |x_1|(a_{11} - |a_{12}|\tfrac{|x_2|}{|x_1|} - |a_{13}|\tfrac{|x_3|}{|x_1|} \quad . \\ &\geq |x_1|(a_{11} - |a_{12}| - |a_{13}|) \\ &= a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0. \end{aligned}$$

Последното противречи на условот на задачата, па затоа $|x_1| = 0$, т.е. единствено решение на разгледуваниот систем е $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

3. Даден е тетраедар $ABCD$. Работ AB има должина a, CD има должина b, растојанието меѓу разминувачките прави AB и CD е d и аголот меѓу нив е еднаков на ω. Нека рамнина π, која е паралелна со правите AB и CD, го дели тетраедарот на два дела. Пресметај го односот на волумени на двата дела ако се знае дека односот на растојанието од AB до π и растојанието од CD до π е еднаков на k.

Решение. На цртежот десно е прикажан тетраедарот $ABCD$ и неговиот пресек со рамнината π. Од паралелноста на рамнината π со рабовите AB и CD следува $AB \| LN \| ME$ и $CD \| ML \| EN$, односно дека четириаголникот $EMLN$ е паралелограм и дека аголот меѓу неговите страни ML и ME е еднаков на аголот меѓу правите AB и CD. Нека растојанието меѓу рамнината π и правата CD е x. Тогаш плоштина на паралелограмот $EMLN$ е



$$\overline{MN} \cdot \overline{ME} \cdot \sin\omega = \frac{ax}{d} \cdot \frac{b(d-x)}{d} \cdot \sin\omega.$$

Според тоа

$$V_1 = \int_0^x \frac{at}{d} \cdot \frac{b(d-t)}{d} \sin\omega \, dt = \left(\frac{abx^2}{2d} - \frac{abx^3}{3d^2}\right)\sin\omega. .$$

Аналогно се добива

$$V_2 = \left(\frac{aby^2}{2d} - \frac{aby^3}{3d^2}\right)\sin\omega$$

каде y е растојание меѓу AB и π.

Значи, односот на волумените е $\frac{V_2}{V_1}=\frac{3dy^2-2y^3}{3dx^2-2x^3}$, и бидејќи $x=\frac{d}{k+1}$, $y=\frac{dk}{k+1}$ добиваме $\frac{V_2}{V_1}=k^2\frac{k+3}{3k+1}$.

4. Определи реални броеви x_1,x_2,x_3,x_4 такви што збирот на секој од нив со производот на преостанатите три броја е еднаков на 2.

Решение. *Прв начин.* Од условот на задачата добиваме дека броевите x_1,x_2, x_3,x_4 го задоволуваат системот равенки

$$\begin{aligned} x_1+x_2x_3x_4&=2\\ x_2+x_1x_3x_4&=2\\ x_3+x_1x_2x_4&=2\\ x_4+x_1x_2x_3&=2 \end{aligned} \qquad (*)$$

Ако овие равенки ги помножиме со x_1,x_2,x_3,x_4 соодветно, и ставиме $p=x_1x_2x_3x_4$, добиваме квадратна равенка $\lambda^2-2\lambda+p=0$, што значи дека меѓу броевите x_1,x_2,x_3,x_4, кои се нејзини решенија, може да има најмногу два различни броја u и v.

1° За $x_1=x_2=x_3=x_4$, добиваме $x_1^3+x_1=2$ и како функцијата $f(x)=x^3+x$ е строго растечка функција добиваме дека единствено решение е $x_1=x_2=x_3=x_4=1$.

2° Ако $x_1=u$, $x_2=x_3=x_4=v$, тогаш $u+v^3=2$ и $v+uv^2=2$. Ако последните две равенки ги одземеме добиваме $(u-v)(1-v^2)=0$. За $v=1$ се добива веќе добиеното решение од 1°, а за $v=-1$, $u=3$ се добива ново решение $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=-1$.

3° Ако $x_1=x_2=u$ и $x_3=x_4=v$ се добива системот равенки $u+uv^2=2$ и $v+vu^2=2$. Ако од првата равенка ја одземеме втората добиваме $(u-v)(1-uv)=0$. За $u=v$ се добива решението од 1°. За $uv=1$ од $u+uv^2=2$ добиваме $u+v=2$, од каде добиваме $u=v=1$, како и во случајот 1°.

Сите решенија на системот се подредените четворки:

$$(1,1,1,1),\ (3,-1,-1,-1),\ (-1,3,-1,-1),\ (-1,-1,3,-1),\ (-1,-1,-1,3).$$

Втор начин. Како и во првиот начин го добиваме сиостемот (*). Ако првата равенка во (*) ја помножиме со x_1, втората со x_2, по нивното одземање ја добиваме равенката

$$(x_1-x_2)(x_1+x_2-2)=0.$$

На сличен начин ги добиваме равенките

$$(x_1-x_3)(x_1+x_3-2)=0,$$
$$(x_1-x_4)(x_1+x_4-2)=0,$$
$$(x_2-x_3)(x_2+x_3-2)=0,$$
$$(x_2-x_4)(x_2+x_4-2)=0,$$
$$(x_3-x_4)(x_3+x_4-2)=0.$$

Нивното решавање доведува до решенијата добиени како при првиот начин на решавање.

5. Даден е $\triangle OAB$ со $\measuredangle BOA=\alpha$ ($\alpha<90^\circ$). Низ точка M , $M\not\equiv O$, на триаголникот се повлечени нормали MP на OA и MQ на OB . Нека H е ортоцентар на триаголникот OPQ . Определи го геометриското место на H ако

а) M припаѓа на страната AB ,

б) M припаѓа на внатрешноста на $\triangle OAB$.

Решение. *Прв начин.* а) Нека точките $A_1,B_1,P,Q,P_1,Q_1,A_2,B_2$ се како на цртежот, при што се исполнети условите:

$$MQ\parallel AA_1\parallel PP_1\parallel BB_1\perp OB\,,\ MP\parallel BB_1\parallel QQ_1\parallel AA_1\perp OA$$

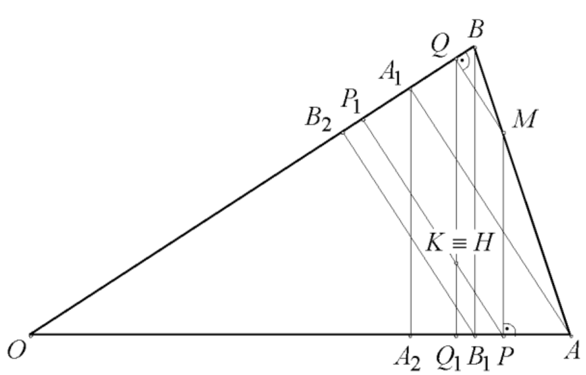
Од Талесовата теорема следува:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{PB_1}}=\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1B_2}}\quad \text{и}\quad \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{A_1Q}}{\overline{QB}}=\frac{\overline{A_2Q_1}}{\overline{Q_1B_1}}\,. \qquad (*)$$

Ќе докажеме дека ортоцентарот H на триаголникот OPQ (т.е. пресекот на висините PP_1 и QQ_1) се наоѓа на отсечката A_1B_1 . Нека K е пресек на висината PP_1 и правата A_1B_1 . Од сличноста $\triangle B_1A_1B_2\sim\triangle KA_1P_1$ и (*) се добива

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1B_2}}=\frac{\overline{A_1K}}{\overline{KB_1}}\ \text{ и }\ \frac{\overline{A_2Q_1}}{\overline{Q_1B_1}}=\frac{\overline{A_1K}}{\overline{KB_1}}\,.$$

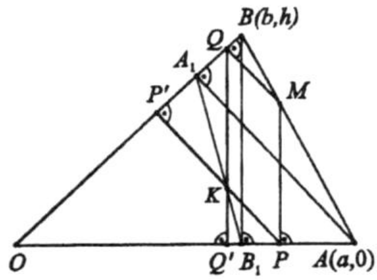
Од последните две равенства следува дека $\triangle A_1A_2B_1\sim\triangle KQ_1B_1$, па затоа $KQ_1\perp OA$, т.е. точката K се наоѓа на висината Q_1Q , што значи дека K се совпаѓа со ортоцентарот H , т.е. ортоцентарот H припаѓа на A_1B_1 .



Сега не е тешко да се види дека за секоја точка K од отсечката A_1B_1 (и само за тие точки) постои точка M на AB таква што K е ортоцентар на $\triangle OPQ$, за $MP\perp OA$ и $MQ\perp OB$.

б) Ако точката M е во внатрешноста на $\triangle OAB$, тогаш постои отсечка $A'B' \| AB$ таква што M припаѓа на $A'B'$. Од сличноста на триаголниците $OA'B'$ и OAB, следува дека ортоцентарот H на триаголникот $OP'Q'$ ($MP' \perp OA'$, $MQ' \perp OB'$) е на отсечката $A_1'B_1'$ која се пресликува во отсечката A_1B_1, со хомотетија со центар во точката O и коефициент $k = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$. Сега од својствата на хомотетијата, следува дека бараното геометриско место за точката H е внатрешноста на $\triangle OA_1B_1$.

Втор начин. а) Кога точката M движејќи се по отсечката AB ги достигнува крајните точки A и B, положбата на ортоцентарот на триаголникот OPQ се стреми кон точката A_1, односно кон точката B_1 (цртеж десно). Ќе докажеме дека при произволна положба на точката M, ортоцентарот на триаголникот OPQ припаѓа на отсечката A_1B_1.



Нека координатите на темињата на дадениот триаголник се $O(0,0)$, $A(a,0)$ и $B(b,h)$. Равенките на правите OB и AB се $y = \frac{h}{b}x$ и $y = -\frac{h}{a-b}x + \frac{ha}{a-b}$, соодветно. Ако M е на AB, тогаш $M(t, \frac{h(a-t)}{a-b})$, каде $b \le t \le a$. Нормалата на правата OB која што минува низ точката M има равенка

$$y = -\frac{b}{h}(x-t) + \frac{h(a-t)}{a-b}.$$

Точката Q е пресаек на оваа нормала и правата OB, па затоа

$$\frac{h}{b}x = -\frac{b}{h}(x-t) + \frac{h(a-t)}{a-b}, \text{ т.е. } x_Q = \frac{b(h^2a + (ab-b^2-h^2)t)}{(a-b)(b^2+h^2)},$$

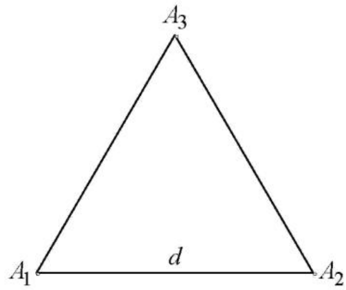
па затоа $y_Q = \frac{h(h^2a + (ab-b^2-h^2)t)}{(a-b)(b^2+h^2)}$. Нормалата на правата OB што минува низ точката $P(t,0)$ има равека $y = -\frac{b}{h}(x-t)$. Точката K е ортоцентар на триаголникот OPQ и таа е пресек на висините PP' и QQ', па затоа

$$K(\frac{b(h^2a + (ab-b^2-h^2)t)}{(a-b)(b^2+h^2)}, \frac{abh(t-b)}{(a-b)(b^2+h^2)}).$$

Бидејќи координатите на точката K се линеарно зависни од параметарот t, геометриското место на точките K што се добиваат при преместувањето на точката M по отсечката AB е отсечка. За $t = b$ и $t = a$ точката K преминува во $B_1(b,0)$ и $A_1(\frac{ab^2}{b^2+h^2}, \frac{abh}{b^2+h^2})$, соодветно.

6. Во рамнина се дадени n $(n \geq 3)$ точки. Максималното растојание меѓу произволни две од овие n точки е d. Докажи дека од точките може да се формираат најмногу n парови такви што растојанието меѓу точките во секој пар е еднакво на d.

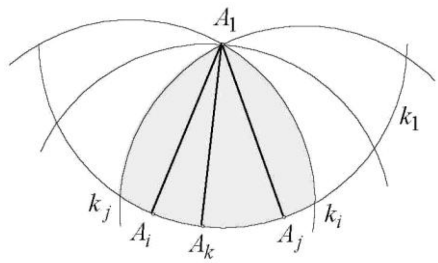
Решение. Доказот ќе го изведеме со математичка индукција. Најголемото растојание меѓу две од n дадени точки, го нарекуваме дијаметар и го означуваме со d.



а) Ако се дадени три точки тогаш бројот на дијаметри може да биде најмногу три, и тоа кога $\triangle A_1A_2A_3$ е рамностран.

б) Нека за некој $n \geq 3$ бројот на дијаметри е еднаков на n. Доволно е да докажеме дека $\{A_kA_l \mid \overline{A_kA_l} = d = \max\limits_{i,j=1,2,\ldots,n+1} \overline{A_iA_j}\}$ има најмногу $n+1$ елемент.

Ги повлекуваме сите дијаметри во множеството од $n+1$ точки $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n+1}$. Можни се два случаи.



1° Од секоја од дадените $n+1$ точки поаѓаат најмногу два дијаметри. Тогаш, најголемиот број на дијаметри е $2(n+1)\frac{1}{2} = n+1$, бидејќи секој дијаметар се брои два пати.

2° Од една точка, на пример од A_1, поаѓаат барем три дијаметри. Нека тие дијаметри се A_1A_i, A_1A_j и A_1A_k. Бидејќи $\overline{A_1A_i} = \overline{A_1A_j} = \overline{A_1A_k} = d$, точките A_i, A_j и A_k лежат на кружница со центар A_1 и радиус d. Бидејќи $\overline{A_iA_j}$, $\overline{A_iA_k}$, $\overline{A_jA_k} \leq d$, точките A_i, A_j и A_k се наоѓаат во кружен исечок со централен агол не поголем од 60°. Ако точката A_k е на кружниот лак A_iA_j $(\measuredangle A_jA_1A_i \leq 60^\circ)$, тогаш сите $n+1$ точки лежат во пресекот на кружниците k_1, k_i и k_j (k_i и k_j се кружници со радиуси d и со центри во точките A_i и A_j, соодветно). Тогаш A_1 е единствена точка од даденото множество точки која од A_k е на растојание d, т.е. од A_k поаѓа еден единствен дијаметар A_kA_1. Множеството од n точки $\{A_1, A_2, A_3, .., A_{n+1}\} \setminus \{A_k\}$ има, според индуктивната претпоставка, најмногу n дијаметри. Ако во тоа множество ја додадеме точката A_k, од која поаѓа само еден дијаметар, добиваме множество со $n+1$ точка кое има најмногу $n+1$ дијаметар.

Да ги разгледаме уште случаите кога овој број на дијаметри се достигнува. Ако n е непарен број доволно е да се земат темињата на правилен $n-$аголник. Ако n е парен, се земаат сите темиња на правилен $(n-1)-$аголник $A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}$ и на лакот на кружницата со центар во $A_{\frac{n}{2}}$ и дијаметар $d=\overline{A_{\frac{n}{2}}A_1}$ било која точка меѓу точките A_1 и A_{n-1}.

VIII олимпијада

1. На една олимпијада биле дадени три задачи A, B и C. Дваесет и пет учесници на натпреварот решиле барем една задача. Учесниците кои ја решиле задачата B, а не ја решиле задачата A, биле два пати повеќе од оние кои ја решиле задачата C, а не ја решиле задачата A. Учесниците кои ја решиле само задачата A, биле за еден повеќе од оние кои покрај задачата A, решиле и уште некоја друга задача. Половина од учениците кои решиле една задача, ја решиле само задачата A. Колку ученици ја решиле само задачата B.

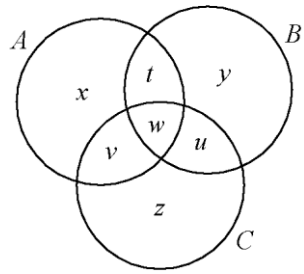
Решение. Нека x, y, z е бројот на ученици кои ја решиле само задачата A, B, C соодветно; t, u, v е бројот на ученици кои ги решиле само задачите A и B, B и C, A и C, соодветно, и нека w е бројот на ученици кои ги решиле сите три задачи. Имаме:

$$x+y+z+t+u+v+w=25 \qquad (1)$$

$$y+u=2(z+u) \qquad (2)$$

$$x-1=t+v+w \qquad (3)$$

$$x+y+z=2(y+z) \qquad (4)$$



Јасно, $x, y, z, t, u, v, w \in \mathbb{N}$. Од (1) и (3) следува

$$2x+y+z+u=26, \qquad (5)$$

а од (2) и (4) се добива

$$y-2z-u=0 \qquad (2')$$

$$-x+y+z=0 \qquad (4')$$

Сега од (5) , (2') и (4') добиваме

$$z=26-4y \qquad (6)$$

$$u=y-2(26-4y)=9y-52 \qquad (7)$$

Бидејќи y, z и u се природни броеви, од (6) добиваме $y \le 6$, а од (7) добиваме $y \ge 6$. Значи, ако постои решение, тогаш $y=6$.

Решение постои, на пример: $x=8, y=6, z=2, t=3, u=2, v=2, w=2.$

2. Нека a, b, c се должините на страните, а α, β, γ се соодветните агли наспроти страните на триаголникот. Докажи дека, ако $a+b=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta)$, тогаш триаголникот е рамнокрак.

Решение. Ако α, β, γ се аглите на триаголникот, тогаш

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

што значи дка даденото равенство е еквивалентно на равенството

$$a(1-\operatorname{tg}\alpha\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}})+b(1-\operatorname{tg}\beta\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}})=0\,.$$

Ако последното равенство го помножиме со $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\alpha\cos\beta$, добиваме

$$a\cos\beta(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\alpha-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\alpha)+b\cos\alpha(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\beta-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\beta)=0\,.$$

Последното равенство е еквивалентно на равенството

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}(a\cos\beta-b\cos\alpha)=0\,.$$

Значи, $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$, т.е. $\alpha=\beta$, па триаголникот е рамнокрак, или

$$a\cos\beta=b\cos\alpha\,.$$

Од синусната теорема имаме

$$a\sin\beta=b\sin\alpha\,,$$

па ако ги квадрираме последните две равенства и ги собиреме добиваме

$$a^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=b^2(\cos^2\beta+\sin^2\beta)\,,$$

од што следува $a=b$ т.е. триаголникот е рамнокрак.

3. Докажи дека збирот на растојанијата од центарот на сферата опишана околу правилен тетраедар до неговите темиња е помал од збирот на растојанијата од било која друга точка до темињата на тетраедарот.

Решение. Поставуваме координатен систем $Oxyz$ така што врвовите на тетраедарот, за некој $a>0$ се точките $A(-a,-a,-a)$, $B(a,a,-a)$, $C(a,-a,a)$ и $D(-a,a,a)$. (Лесно се проверува дека $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{DC}$). Збирот на растојанијата од точка (x,y,z) до темињата A, B, C, D е

$$f(x,y,z)=\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2+(z+a)^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2+(z+a)^2}$$
$$+\sqrt{(x-a)^2+(y+a)^2+(z-a)^2}+\sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2}\,.$$

Од неравенството меѓу квадратната и аритметичката средина следува

$$f(x,y,z)\geq\tfrac{2}{\sqrt{3}}[|x+a|+|y+a|+|z+a|+|a-x|+|a-y|+|a-z|]\,. \qquad (1)$$

За да се докаже дека $f(x,y,z)\geq 4\sqrt{3}a$, заради симетријата на изразот на десната страна на (1) доволно е да се докаже дека

$$|x+a|+|x-a|\geq 2a\,.$$

Последното неравенство едноставно се проверува.

За $x\geq a$ имаме $|x+a|+|x-a|\,x+a+x-a=2x\geq 2a$.

За $x\leq -a$ имаме $|x+a|+|x-a|=a+|x|+|x|-a=2|x|\geq 2a$.

За $|x|\leq a$ имаме $|x+a|+|x-a|=a-x+a+x=2a\geq 2a$.

Равенство важи ако и само ако $x=y=z=0$, т.е. ако и само ако точката (x,y,z) е центар на опишаната сфера околу тетраедарот.

4. Нека $n\in\mathbb{N}$ и $x\neq\frac{\lambda\pi}{2^k}$, каде $k\in\mathbb{N}_0$, $\lambda\in\mathbb{Z}$. Докажи дека

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+...+\frac{1}{\sin 2^n x}=\text{ctg}x-\text{ctg}2^n x .$$

Решение. Од $x\neq\frac{\lambda\pi}{2^k}$, $\lambda\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{N}_0$ следува $\sin 2^k x\neq 0$ и затоа постојат и $\text{ctg}2^k x$ и $\text{ctg}2^{k-1}x$. Според тоа, можеме да го користиме идентитетот

$$\text{ctg}\alpha-\text{ctg}2\alpha=\frac{1}{\sin 2\alpha} .$$

Равенството ќе го докажеме со математичка индукција. За $n=1$, тоа очигледно важи. Нека претпоставиме дека тоа важи за $n=m$, т.е.

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\frac{1}{\sin 6x}+...+\frac{1}{\sin 2^m x}=\text{ctg}x-\text{ctg}2^m x .$$

Тогаш, за $n=m+1$ имаме

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+...+\frac{1}{\sin 2^m x}+\frac{1}{\sin 2^{m+1} x}&=(\text{ctg}x-\text{ctg}2^m x)+(\text{ctg}2^m x-\text{ctg}2^{m+1}x)\\ &=\text{ctg}x-\text{ctg}2^{m+1}x,\end{aligned}$$

што значи дека равенството важи и за $n=m+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека равенството важи за секој $n\in\mathbb{N}$.

5. Реши го системот равенки

$$\begin{aligned}|a_1-a_2|x_2+|a_1-a_3|x_3+|a_1-a_4|x_4&=1\\ |a_2-a_1|x_1+|a_2-a_3|x_3+|a_2-a_4|x_4&=1\\ |a_3-a_1|x_1+|a_3-a_2|x_2+|a_3-a_4|x_4&=1\\ |a_4-a_1|x_1+|a_4-a_2|x_2+|a_4-a_3|x_4&=1\end{aligned}$$

каде a_1,a_2,a_3,a_4 се дадени реални броеви такви што $a_i\neq a_j$, за $i\neq j$.

Решение. Ако кои било два различни индекси $i,j\in\{1,2,3,4\}$ си ги заменат местата системот не го менува обликот. Затоа можеме да претпоставиме дека $a_1>a_2>a_3>a_4$. Тогаш

$$\begin{aligned}(a_1-a_2)x_2+(a_1-a_3)x_3+(a_1-a_4)x_4&=1\\ (a_1-a_2)x_1+(a_2-a_3)x_3+(a_2-a_4)x_4&=1\\ (a_1-a_3)x_1+(a_2-a_3)x_2+(a_3-a_4)x_4&=1\\ (a_1-a_4)x_1+(a_2-a_4)x_2+(a_3-a_4)x_3&=1\end{aligned}$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата, од третата ја одземеме втората и од четвртата равенка ја одземеме третата добиваме

$$(a_1-a_2)(-x_1+x_2+x_3+x_4)=0,$$

$$(a_2-a_3)(-x_1-x_2+x_3+x_4)=0,$$
$$(a_3-a_4)(-x_1-x_2-x_3+x_4)=0.$$

Дадениот систем е еквивалентен на системот:

$$x_1=x_2+x_3+x_4,$$
$$x_1+x_2=x_3+x_4,$$
$$x_1+x_2+x_3=x_4,$$
$$(a_1-a_4)x_1+(a_2-a_4)x_2+(a_3-a_4)x_3=1.$$

Од првите три равенки добиваме $x_2=x_3=0$ и $x_1=x_4$. Од последната равенка добиваме $x_1=\frac{1}{a_1-a_4}$.

6. Нека M,K,L се точки од страните AB,BC,CA од $\triangle ABC$, соодветно, такви што ниту една од нив не е негово теме. Докажи дека плоштината на барем еден од триаголниците AML,BKM,CLK не е поголема од $\frac{1}{4}$ од плоштината на $\triangle ABC$.

Решение. Нека $\overline{AM}:\overline{AB}=x$, $\overline{BK}:\overline{BC}=y$, $\overline{CL}:\overline{CA}=z$. Тогаш,

$$\overline{AM}=x\overline{AB},\ \overline{BM}=(1-x)\overline{AB},$$
$$\overline{BK}=y\overline{BC},\ \overline{CK}=(1-y)\overline{BC},$$
$$\overline{CL}=z\overline{CA},\ \overline{AL}=(1-z)\overline{CA},$$

и $x,y,z\in(0,1)$, па затоа

$$P_{AML}\cdot P_{BKM}\cdot P_{CLK}=\tfrac{1}{8}\overline{AB}^2\,\overline{AC}^2\,\overline{BC}^2x(1-x)y(1-y)z(1-z)\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$\leq\tfrac{1}{8}(\tfrac{1}{4})^3\overline{AB}^2\,\overline{AC}^2\,\overline{BC}^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=(\tfrac{P}{4})^3$$

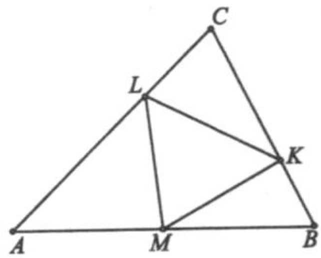
Значи,

$$\frac{4P_{AML}}{P}\cdot\frac{4P_{BKM}}{P}\cdot\frac{4P_{AML}}{P}\leq 1$$

па затоа барем еден од множителите од левата страна не е поголем од 1.

Во доказот е користено неравенството

$$\lambda(1-\lambda)\leq\tfrac{1}{4}\ \text{за}\ 0<\lambda<1.$$



IX олимпијада

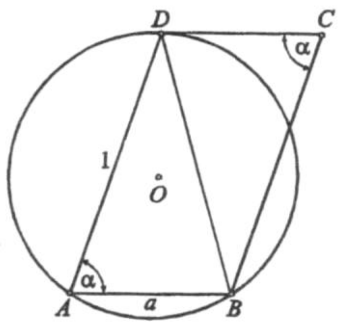
1. Во паралелограмот $ABCD$ триаголникот ABD е остроаголен. Нека $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=1$ и $\measuredangle DAB=\alpha$. Докажи дека кружниците K_A, K_B, K_C и K_D со радиус 1 и центри во A, B, C и D соодветно, го покриваат паралелограмот ако и само ако

$$a \le \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha .$$

Решение. Околу остроаголниот триаголник ABD опишуваме кружница, со центар во точката O која е во внатрешноста на триаголникот.

Ако точката C е внатре во кружницата, на спротивната страна на правата BD од точката A, тогаш $\measuredangle BCD \ge \pi-\alpha > \frac{\pi}{2}$, што противречи на претпоставката дека $\measuredangle DAB = \measuredangle BCD < \frac{\pi}{2}$. Значи, темето C е надвор од кружницата.

Сега ќе докажеме дека ако кружниците K_A, K_B, K_C и K_D го покриваат целиот паралелограм, тогаш радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABD не е поголем од 1. Нека претпоставиме дека $R=\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OD}>1$. Тогаш, кружниците K_A, K_B и K_D не ја покриваат точката O. Кружницата K_C исто така не ја покрива точката O, бидејќи $\overline{OC}>R>1$. Затоа $R\le 1$.



Нека $R \le 1$. Од точката O повлекуваме нормали на страните на $\triangle ABD$ кои го делат $\triangle ABD$ на шест правоаголни триаголници, со должини на хипотенузи R. Оддалеченоста на секоја точка од триаголникот до најблиското негово теме не е поголема од должината на хипотенузата на шесте правоаголни триаголници на кој е разбиен триаголникот. Значи, за секоја точка M од $\triangle ABD$, постои теме на триаголникот кое е оддалечено од неа на растојание помало или еднакво на R. Затоа кружницата со центар во тоа теме и радиус R ја покрива точката M. Според тоа $\triangle ABD$ е покриен со кружниците K_A, K_B и K_D. На ист начин се покажува дека $\triangle BCD$ е покриен со кружниците K_B, K_C и K_D.

Значи, кружниците K_A, K_B, K_C и K_D го покриваат целиот паралелограм ако и само ако $R \le 1$.

Ќе докажеме дека потребен и доволен услов за да кружниците K_A, K_B, K_C и K_D го покриваат паралелограмот е да е исполнето неравенството од условот на задачата.

Од $\overline{AD}=1$, $\overline{AB}=a$, $\measuredangle DAB=\alpha$, со примена на косинусната теорема добиваме

$$\overline{BD}=\sqrt{1+a^2-2a\cos\alpha}\,.$$

Понатаму, од

$$R=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BD}}{4P}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BD}}{2\overline{AB}\cdot\overline{AD}\sin\alpha}\ \text{ и }\ R\le 1$$

добиваме

$$\frac{\sqrt{1+a^2-2a\cos\alpha}}{2\sin\alpha}\le 1\,.$$

Решението на последната неравенка е

$$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha\le a\le\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha\,.$$

Левата страна на неравенството е исполнета бидејќи

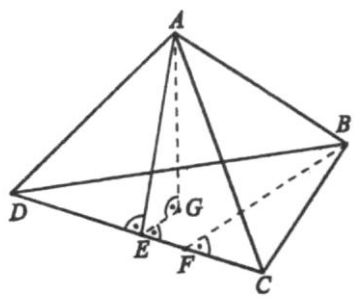
$$a=\overline{AB}>\overline{AD}\cos\alpha=\cos\alpha\,,\quad \overline{AD}=1$$

и $\triangle ABD$ е остроаголен. Според тоа, $\triangle ABD$ можеме да го покриеме со кружници K_A,K_B,K_D ако и само ако

$$a\le\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha\,.$$

2. Даден е тетраедар во кој должината на точно еден раб е поголема од 1. Докажи дека неговиот волумен е помал или еднаков на $\frac{1}{8}$.

Решение. Нека AB е работ со најголема должина, а AG е висина на тетраедарот (цртеж десно). Според тоа, должините на страните на триаголниците ACD и BCD не се поголеми од 1. Нека нивните висини се AE и BF. Должината на работ CD ја означуваме со x. Точката E ја дели отсечката CD на два дела од кои еден дел, на пример CE, има должина која не е помала од $\frac{x}{2}$. Тогаш



$$\overline{AE}^2=\overline{AC}^2-\overline{CE}^2\le 1-(\tfrac{x}{2})^2,$$

$$\overline{AG}\le\overline{AE}\le\sqrt{1-\tfrac{x^2}{4}}\,.$$

Исто така

$$\overline{BF}\le\sqrt{1-\tfrac{x^2}{4}}\,.$$

Волуменот на тетраедарот е

$$V=\tfrac{1}{3}P_{BCD}\cdot\overline{AG}\le\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}x(1-\tfrac{x^2}{4})=\tfrac{1}{24}x(4-x^2)\,.$$

Доволно е да докажеме дека $y = x(4-x^2) \le 3$. Од $y' = 4-3x^2 > 0$, кога $0 < x < 1$ следува дека функцијата $y = x(4-x^2)$ е растечка на интервалот $[0,1]$, па затоа $y \le y(1) = 3$.

Останува да докажеме дека постои тетраедар со волумен $\frac{1}{8}$, кој ги исполнува условите на задачата. Нека $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = 1$ и рамнината ACD е нормална на BCD. Тогаш

$$\overline{AB} = \sqrt{\tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} > 1,$$

а волуменот е

$$V = \tfrac{1}{24} \cdot 1 \cdot (4-1^2) = \tfrac{1}{8}.$$

3. Нека $k, m, n \in \mathbb{N}$ се такви што $m+k+1$ е прост број поголем од $n+1$. Ако $C_s = s(s+1)$, докажи дека производот

$$(C_{m+1} - C_k)(C_{m+2} - C_k)...(C_{m+n} - C_k)$$

е делив со производот $C_1 C_2 ... C_n$.

Решение. Од дефиницијата на C_s добиваме

$$C_p - C_q = p^2 + p - q^2 - q = (p-q)(p+q+1).$$

Со примена на овој идентитет дадениот производ можеме да го запишеме во обликот

$$\begin{aligned}
&(C_{m+1} - C_k)(C_{m+2} - C_k)...(C_{m+n} - C_k) = \\
&\quad = (m+1-k)(m+1+k+1) \cdot (m+2-k)(m+2+k+1)....(m+n-k)(m+n+k+1) \\
&\quad = [(m-k+1)(m-k+2)...(m-k+n)] \cdot [(m+k+2)(m+k+3)...(m+k+n+1)] \\
&\quad = A.
\end{aligned}$$

Од друга страна

$$C_1 C_2 ... C_n = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot ... \cdot n \cdot (n+1) = n!(n+1)! = B.$$

Според тоа, доволно е да се докаже дека

$$\begin{aligned}
\frac{A}{B} &= \frac{[(m-k+1)(m-k+2)...(m-k+n)]}{n!} \cdot \frac{[(m+k+2)(m+k+3)...(m+k+n+1)]}{(n+1)!} \\
&= \binom{m-k+n}{n} \binom{m+k+n+1}{n+1} \frac{1}{m+k+1}.
\end{aligned}$$

е природен број. Значи, доволно е да докажеме дека производот

$$\binom{m+k+n+1}{n+1} \frac{1}{m+k+1}$$

е природен број. Навистина, биномниот коефициент $\binom{m+k+n+1}{n+1}$ е делив со $m+k+1$, бидејќи $m+k+1$ е прост број поголем од $n+1$, па затоа е и заемно прост со $(n+1)!$.

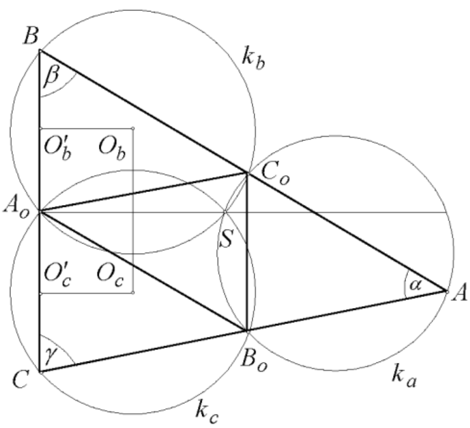
4. Дадени се остроаголни триаголници $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$. Конструирај $\triangle ABC$ кој е сличен со $\triangle A_1B_1C_1$ и е опишан околу $\triangle A_0B_0C_0$, таков што $C_0 \in AB,$ $A_0 \in BC,$, $B_0 \in CA$. Конструирај го триаголникот со наведените својства кој има максимална плоштина.

Решение. Бараниот триаголник ABC ги задоволува условите:

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, \tag{1}$$

$$A_0 \in BC, \quad B_0 \in CA, \quad C_0 \in AB. \tag{2}$$

Темињата на бараниот триаголник, A, B и C се наоѓаат на кружните лаци од кои отсечките B_0C_0, C_0A_0 и A_0B_0 се гледаат соодветно под острите агли α, β и γ кои се али на триаголникот $A_1B_1C_1$. Бидејќи сите триаголници ABC на кои темињата им се наоѓаат на овие кружни лаци и кои го задоволуваат вториот услов се слични меѓу себе, најголема плоштина ќе има оној кој има најголеми должини на страни. Ќе докажеме дека таков триаголник постои.



Нека ABC е триаголник кој ги задоволува условите (1) и (2). Ако постои барем еден таков триаголник, точките B и C мора да бидат на различни страни од точката A_0. Нека O_b и O_c се центри на кружниците k_b и k_c кои соодветствуваат на аглите β и γ. Јасно, кружниците k_a, k_b и k_c се сечат во точка S која е во внатрешноста на триаголникот $A_0B_0C_0$, што следува од $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, и фактот дека страните на триаголникот $A_0B_0C_0$ од секоја внатрешна точка се гледаат под тапи агли чиј збир е 360°. Нека O_b' и O_c' се ортогонални проекции на центрите O_b и O_c на кружниците k_b и k_c на правата BC. Бидејќи проекцијата на центарот на кружница ја полови тетивата, добиваме дека

$$\overline{BC} = \overline{BA_0} + \overline{A_0C} = 2\overline{O_b'A_0} + 2\overline{A_0O_c'} = 2\overline{O_b'O_c'}\,.$$

Според тоа, отсечката BC ќе има најголема должина кога проекцијата $O_b'O_c'$ е најголема, а тоа е кога $BC \parallel O_bO_c$, т.е. кога $\overline{O_bO_c} = \overline{O_b'O_b'}$. Треба уште да докажеме дека правата паралелна со O_bO_c ги сече кружниците k_b и k_c во точки B и C кои се на различна страна од точката A_0. Доволно е да

докажеме дека точките O_b и O_c се на различна страна во однос на отсечката SA_0 (која им е заедничка тетива). Аглите над SA_0 кај кружниците k_b и k_c се остри (тие се помали од острите агли β и γ, а аголот $\measuredangle C_0A_0B_0$ е остар по претпоставка). Од ова следи претходното тврдење.
Од досега изнесеното следува конструкцијата на бараниот триаголник. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

5. Дадена е низата $\{C_n\}$, определена со

$$C_1 = a_1 + a_2 + ... + a_8$$
$$C_2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_8^2$$
$$................................$$
$$C_n = a_1^n + a_2^n + ... + a_8^n$$
$$................................$$

каде $a_1, a_2, ..., a_8$ се реални броеви не сите еднакви на нула. Меѓу членовите на оваа низа постојат бесконечно многу кои се еднакви на нула. Определи ги сите природни броеви n за кои $C_n = 0$.

Решение. Бидејќи броевите $a_1, a_2, ..., a_8$ не се сите еднакви на нула, броевите $c_n = a_1^n + a_2^n + ... + a_8^n$ за $n = 2k$ се позитивни. Значи, c_n може да биде нула само за непарни индекси.
Ќе докажеме дека, ако меѓу броевите $c_{2n-1}, n \in \mathbb{N}$ има бесконечно многу кои се еднакви на нула, тогаш сите тие се еднакви на нула. Ќе докажеме дека тврдењето важи за парен број на собирци во членовите на низата (не мора да се 8).
Нека $a = \max\limits_{1 \le i \le 2k} |a_i|$. Понатаму, нека меѓу броевите a_i има точно p кои се позитивни и се еднакви на a и точно q кои се негативни и се еднакви на $-a$.
Нека $p \ne q$. Тогаш

$$c_{2n-1} = (p-q)a^{2n-1} + c'_{2n-1} \qquad (1)$$

каде c'_{2n-1} е збирот на преостанатите собирци. Максимумот на апсолутните вредности на овие броеви, кои ги има r е $b < a$. Тогаш

$$|c_{2n-1}| \ge |p-q| a^{2n-1} - rb^{2n-1}. \qquad (2)$$

Бидејќи $a > b$, за $2n-1 > \log_{\frac{a}{b}} \frac{r}{|p-q|}$ исполнето е $|c_{2n-1}| > 0$.

Според тоа, ако $p \ne q$ тогаш сите c_n по некој n се различни од нула, што е спротивно на претпоставката. Затоа мора да е исполнет условот $p = q$.
Значи, броеви a_i со апсолутна вредност a, ги има парен број и тие се појавуваат во парови, позитивен и негативен. Затоа, во сите збирови c_{2n-1} тие се

поништуваат. Преостанатиот дел од збирот има парен број на собирци, кој е помал од $2k$, па продолжувајќи ја постапката по конечен број на чекори добиваме дека броевите a_i се појавуваат во парови, позитивен и негативен, па затоа нивнит непарни степени се поништуваат.
Конечно, $c_{2n-1}=0$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

6. На натпревар кој траел n денови, се доделени m медали. Првиот ден се доделени еден медал и $\frac{1}{7}$ од преостанатите $m-1$ медали. Вториот ден се доделени два медала и уште $\frac{1}{7}$ од преостанатите (до тогаш) медали, итн. Конечно $n-$тиот ден се доделени преостанатите n медали. Колку денови траел натпреварот и колку медали се доделени?

Решение. Со x_k да го означиме бројот на медалите доделени k-тиот ден. Имаме

$$\begin{aligned}
&x_1=1+\tfrac{1}{7}(m-1),\\
&x_2=2+\tfrac{1}{7}(m-x_1-2),\\
&x_3=3+\tfrac{1}{7}(m-x_1-x_2-3),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_{n-1}=n-1+\tfrac{1}{7}(m-x_1-x_2-...-x_{n-2}-(n-1)),\\
&x_n=n.
\end{aligned}$$

Со помош на претходните рекурзивни формули добиваме

$$x_{k+1}-x_k=1-\tfrac{1}{7}(x_k+1).$$

Последната формула за $1\le k\le n-2$ ја запишуваме во обликот

$$x_{k+1}-6=\tfrac{6}{7}(x_k-6),$$

што значи дека x_k-6 се членови на геометриска прогресија со коефициент $\frac{6}{7}$, па затоа

$$x_{k+1}=\tfrac{6^k}{7^k}(x_1-36)+6,$$

и ако ја замениме вредноста за x_1 добиваме

$$x_{k+1}=\tfrac{6^k}{7^{k+1}}(m-36)+6,\ 0\le k\le n-2$$

(за $k=0$ точноста на формулата се проверува непосредно).
Од последната формула следува

$$x_1+x_2+...+x_{n-1}=6(n-1)+(1-\tfrac{6^{n-1}}{7^{n-1}})(m-36).$$

Сега од $x_n=n$ и $x_1+x_2+...+x_n=m$ следува

$$m = x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = 6(n-1) + (1 - \frac{6^{n-1}}{7^{n-1}})(m-36) + n.$$

Од овде следува

$$7^n(n-6) = 6^{n-1}(m-36) \Rightarrow \frac{n-6}{6^{n-1}} = \frac{m-36}{7^n}.$$

Бидејќи броевите 6 и 7 се заемно прости, за да важи последното равенство треба и на левата и на десната страна да се цели броеви. Но, ако $n > 6$, тогаш со индукција лесно се докажува дека $n - 6 < 6^{n-1}$, а ако $n = 1, 2, ..., 5$, тогаш $\frac{n-6}{6^{n-1}}$ не е цел број, па затоа единствена можност е $n = 6$. Во овој случај $m - 36 = 0$, т.е. $m = 36$. Според тоа, натпреварот траел 6 дена и се поделени 36 медали и тоа по 6 секој ден.

X олимпијада

1. Докажи дека постои само еден триаголник чии должини на страни се последователни природни броеви и еден од аглите е два пати поголем од еден од преостанатите два агли.

Решение. I *начин.* Од синусната теорема имаме $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$ и како $\beta=2\alpha$, $\gamma=\pi-3\alpha$, добиваме $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin 2\alpha}=\frac{c}{\sin 3\alpha}$. Затоа $b>a$.

Воведуваме ознака $\frac{a}{\sin\alpha}=\lambda$. Тогаш од равенствата

$$a^2=\lambda^2\sin^2\alpha\,,\; b^2=\lambda^2\sin^2 2\alpha\,, c^2=\lambda^2\sin^2 3\alpha$$

добиваме

$$b^2-a^2=\lambda^2(\sin^2 2\alpha-\sin^2\alpha)\,,\; ac=\lambda^2\sin\alpha\sin 3\alpha\,.$$

Од идентитетот

$$\sin^2 2\alpha-\sin^2\alpha=\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha\,,$$

следува дека за бараниот триаголник е исполнето равенството $b^2-a^2=ac$ или $b^2=a(a+c)$. Според тоа, можни се следните случаи:

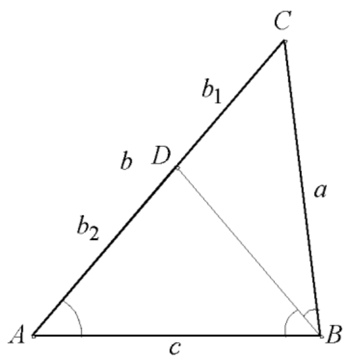
1) $a=n, b=n+1, c=n+2$. Тогаш $(n+1)^2=n(2n+2)$, т.е. $n^2-1=0$, од каде што $n=1$ и $a=1, b=2, c=3$, т.е. се добива дегенериран триаголник.

2) $a=n, b=n+2, c=n+1$. Тогаш $(n+2)^2=n(2n+1)$, т.е. $n=4$ и $a=4$, $b=6, c=5$, и тоа е решение на задачата.

3) $c=n, a=n+1, b=n+2$, од каде што $n^2-n+3=0$, а оваа равенка нема целобројни решенија.

Останува да докажеме дека триаголникот со должини на страни $a=4$, $b=6$, $c=5$ ги задоволува условите на задачата. Ќе покажеме дека $\beta=2\alpha$. Од косинусната теорема имаме $\cos\beta=\frac{1}{8}, \cos\alpha=\frac{3}{4}$ па затоа $\cos 2\alpha=\cos\beta$, т.е. $\beta=2\alpha$.

II *начин.* Нека $b>a$. Повлекуваме симетрала BD на аголот β и воведуваме ознаки $\overline{CD}=b_1$ и $\overline{DA}=b_2$. Тогаш $\triangle ABC\sim\triangle BDC$ и заради тоа $\frac{c}{b_2}=\frac{a}{b_1}=\frac{b}{a}$, од каде што добиваме $c=\frac{bb_2}{a}$, $a=\frac{bb_1}{a}$. Ако ги собереме последните две равенства добиваме



$$c+a=(b_1+b_2)\frac{b}{a}=\frac{b^2}{a}$$

каде $c+a$ е цел број.

Според условот на задачата, должините на страните мора да бидат последователни цели броеви, па затоа $b=a+1$ или $b=a+2$.

1) $b=a+1$, $\frac{b^2}{a}=\frac{a^2+2a+1}{a}=a+2+\frac{1}{a}$, па затоа $a=1, b=2, c=3$, и овој триаголник е дегенериран.

2) $b=a+2$, $\frac{b^2}{a}=\frac{a^2+4a+4}{a}=a+4+\frac{4}{a}$, па затоа $a\,|\,4$, т.е. $a=1$ или $a=2$ или $a=4$. Ако $a=1$, тогаш $b=3$ и $c=\frac{b^2}{a}-a=8$, а триаголник со такви страни не постои. Ако $a=2$, тогаш $b=4$ и $c=6$, и овој триаголник е дегенериран. Ако $a=4$, тогаш $b=6$ и $c=5$, што е решение на задачата.

Понатаму, решението на задачата е како при првиот начин на решавање.

2. Определи ги сите природни броеви x чиј производ на цифри (во декаден запис) е еднаков на $x^2-10x-22$.

Решение. Бидејќи производот на цифрите е ненегативен добиваме

$$x^2-10x-22\geq 0,$$

од што следува

$$x\geq 5+\sqrt{47}>11.$$

Понатаму, производот на цифрите на секој природен број не е поголем од самиот број. Имено, за секој $x=\overline{a_1a_2...a_n}$, важи

$$a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n\leq a_1\cdot 9^{n-1}<a_1\cdot 10^{n-1}\leq a_1\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot 10^{n-2}+...+a_n=x.$$

Според тоа

$$x^2-10x-22<x,$$

од што следува

$$x<\frac{11}{2}+\frac{\sqrt{209}}{2}<13.$$

Значи бројот x ги задоволува неравенствата $11<x<13$, па единствена можност е $x=12$. Со непосредна проверка се уверуваме дека бројот 12 ги задоволува условите на задачата.

3. Даден е системот равенки

$$\begin{aligned} &ax_1^2+bx_1+c=x_2\\ &ax_2^2+bx_2+c=x_3\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &ax_{n-1}^2+bx_{n-1}+c=x_n\\ &ax_n^2+bx_n+c=x_1 \end{aligned}$$

каде $a,b,c\in\mathbb{R}$ и $a\neq 0$. Докажи а) ако $(b-1)^2-4ac<0$, тогаш системот нема реално решение;

б) ако $(b-1)^2-4ac=0$, тогаш системот има точно едно реално решение;

в) ако $(b-1)^2-4ac>0$, тогаш системот има повеќе од едно реално решение.

Решение. Нека $y_k=x_{k+1}-x_k$, $i=1,2,...,n$, $x_{n+1}=x_1$. Тогаш

$$y_k=ax_k^2+(b-1)x_k+c \text{ и } \sum_{k=1}^{n} y_k=0$$

а) Ако $(b-1)^2-4ac<0$, тогаш полиномот $ax^2+(b-1)x+c$ нема реални корени и прима вредности со ист знак, т.е. $y_k<0$ или $y_k>0$, за секој $x\in\mathbb{R}$, па според тоа $\sum_{k=1}^{n} y_k\neq 0.$ Затоа системот нема реални решенија.

б) Ако $(b-1)^2-4ac=0$, полиномот $ax^2+(b-1)x+c$ има еден единствен корен и при тоа или сите $y_k\leq 0$ или сите $y_k\geq 0$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Бидејќи $\sum_{k=1}^{n} y_k=0$ добиваме

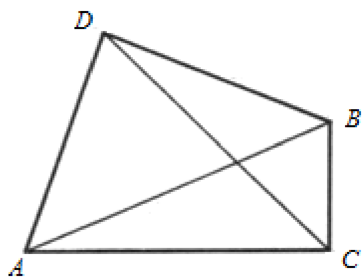
$$y_k=ax_k^2+(b-1)x_k+c=0\text{, за } k=1,2,...,n\text{, и } x_1=x_2=...=x_n=x_0,$$

каде што x_0 е единственото решение на равенката $ax^2+(b-1)x+c=0$. Значи, во овој случај системот има единствено решение $x_k=x_0$, $k=1,2,...,n$.

в) Ако $(b-1)^2-4ac>0$, тогаш системот има барем две различни решенија, $x_k=x_0^{'}$ и $x_k=x_0^{''}$, каде $x_0^{'},x_0^{''}$ се решенија на равенката $ax^2+(b-1)x+c=0$.

4. Докажи дека во секој тетраедар постои теме, такво што со рабовите кои излегуваат од него може да се конструира триаголник.

Решение. Нека $ABCD$ е дадениот тетраедар и нека AB е работ со најголема должина. Тогаш од несрвбенството на триаголник применето на триаголниците ABC и ABD следува



$$\begin{aligned}&(\overline{AC}+\overline{AD}-\overline{AB})+(\overline{BC}+\overline{BD}-\overline{BA})=\\&(\overline{AC}+\overline{CB}-\overline{AB})+(\overline{AD}+\overline{DB}-\overline{AB})>0\end{aligned}.$$

Од последнот неравенство следува дека $\overline{AC}+\overline{AD}>\overline{AB}$ или $\overline{BC}+\overline{BD}>\overline{BA}$. Според тоа, од рабовите AC, AD, AB или од рабовите $BC, BD.BA$ се формира триаголник (останатите неравенства за триаголник се исполнети бидејќи AB е работ со најголема должина).

5. Нека $a>0$ е реален број и $f(x)$ е реална функција дефинирана за секој $x\in\mathbb{R}$ таква што

$$f(x+a)=\tfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}\text{ , за секој } x\in\mathbb{R}.$$

а) Докажи дека функцијата f е периодична, т.е. дека постои реален број $b>0$ таков што за секое $f(x+b)=f(x)$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

б) За $a=1$ најди пример на таква функција f, $f\not\equiv\text{const}$.

Решение. а) За функцијата f исполнето е

$$\begin{aligned} f(x+2a)&=f[(x+a)+a]=\tfrac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-[f(x+a)]^2}\\ &=\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}-(\tfrac{1}{4}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}+f(x)-[f(x)]^2))^2\\ &=\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{4}-f(x)+[f(x)]^2}=\tfrac{1}{2}+|\,f(x)-\tfrac{1}{2}\,|.\end{aligned}$$

Но, бидејќи

$$f(x)=\tfrac{1}{2}+\sqrt{f(x-a)-[f(x-a)]^2}\geq\tfrac{1}{2}$$

тогаш $f(x+2a)=f(x)$, т.е. $b=2a$.

б) За $a=1$ $(b=2)$ дадениот услов го задоволува, на пример периодичната непрекината функција

$$f(x)=\tfrac{1}{2}(1+|\cos\tfrac{\pi x}{2}|).$$

Друга таква функција е

$$f(x)=\begin{cases}\tfrac{1}{2}+c(x-2n), & 2n\leq x<2n+1,\\ \tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{4}-c^2(x-2n-1)^2}, & 2n+1\leq x<2n+2,\end{cases}\qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

6. Нека $n\in\mathbb{N}$. Пресметај го збирот

$$[\tfrac{n+1}{2}]+[\tfrac{n+2}{2^2}]+[\tfrac{n+2^2}{2^3}]+\ldots+[\tfrac{n+2^k}{2^{k+1}}]+\ldots.$$

Решение. I *начин.* Прво ќе го докажеме идентитетот

$$[x+\tfrac{1}{2}]=[2x]-[x]. \tag{1}$$

Доказ. Секој реален број x може да се запише во облик $x=k+\alpha$ или $x=k+\frac{1}{2}+\alpha$ каде што $k\in\mathbb{Z}$ и $0\leq\alpha<\frac{1}{2}$.

Ако $x=k+\alpha$, тогаш

$$[k+\alpha+\tfrac{1}{2}]=k\,;\ [2k+2\alpha]=2k\,;\ [k+\alpha]=k\,,$$

т.е.

$$[x+\tfrac{1}{2}]=[2x]-[x].$$

Ако $x = k + \alpha + \frac{1}{2}$, тогаш

$$[k + \alpha + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}] = k + 1\,;\ [2k + 2\alpha + 1] = 2k + 1\,;\ [k + \alpha + \tfrac{1}{2}] = k\ ,$$

т.е.

$$[x + \tfrac{1}{2}] = [2x] - [x]\ .\ \blacksquare$$

Да го примениме идентитетот на бараниот збир. Имаме

$$[\tfrac{n}{2} + \tfrac{1}{2}] + [\tfrac{n}{4} + \tfrac{1}{2}] + ... + [\tfrac{n}{2^{k+1}} + \tfrac{1}{2}] + ... = [n] - [\tfrac{n}{2}] + [\tfrac{n}{2}] - [\tfrac{n}{4}] + ... + [\tfrac{n}{2^k}] - [\tfrac{n}{2^{k+1}}] + .. = n$$

бидејќи почнувајќи од $k = [\log_2 n] + 1$ сите собирци во разгледуваниот збир се еднакви на 0.

II *начин.* Нека $n = \overline{x_m x_{m-1} ... x_1 x_0} = \sum\limits_{k=0}^{m} 2^i x_i$, $x_i \in \{0.1\}$ е запис на бројот n во бинарен броен систем. Тогаш

$$[\tfrac{n+2^k}{2^{k+1}}] = [\tfrac{n}{2^{k+1}} + \tfrac{1}{2}] = [\sum_{k=0}^{m} 2^{i-k-1} x_i + 2^{-1}]\,,$$

па затоа важи

$$[\tfrac{n+2^k}{2^{k+1}}] = \begin{cases} \overline{x_m x_m .... x_{k+1}} + x_k\,, & k < m \\ x_m\,, & k = m \\ 0\,, & k > m \end{cases}$$

Ако го искористиме претходното равенство, добиваме:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} [\tfrac{n+2^k}{2^{k+1}}] &= (\overline{x_m x_{m-1} ... x_1} + x_0) + (\overline{x_m x_{m-1} ... x_2} + x_1) + ... + (x_m + x_{m-1}) + x_m \\ &= x_m (2^{m-1} + ... + 2^0 + 1) + x_{m-1}(2^{m-2} + ... + 2^0 + 1) + ... + x_1(2^0 + 1) + x_0 \\ &= 2^m x_m + 2^{m-1} x_{m-1} + ... + 2x_1 + x_0 = n.\end{aligned}$$

XI олимпијада

1. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви a такви што за секој $n\in\mathbb{N}$, бројот $z=n^4+a$ е сложен.

Решение. Нека $a=4k^4$, каде што $k\in\mathbb{N}$, $k>1$. Тогаш

$$z=n^4+a=n^4+4k^4=n^4+4n^2k^2+4k^4-4n^2k^2=(n^2+2k^2)-(2nk)^2$$
$$=(n^2+2k^2-2nk)(n^2+2k^2+2nk)$$

и притоа важи

$$n^2+2k^2-2nk=(n-k)^2+k^2\geq k^2>1;$$
$$n^2+2k^2+2nk=(n+k)^2+k^2>k^2>1.$$

Јасно, бројот z е сложен бидејќи може да се запише како производ на два природни броја поголеми од 1.

2. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се реални константи, x е реална променлива и

$$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{\cos(a_2+x)}{2}+\frac{\cos(a_3+x)}{2^2}+...+\frac{\cos(a_n+x)}{2^{n-1}}.$$

Ако $f(x_1)=f(x_2)=0$, тогаш $x_1-x_2=m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$. Докажи!

Решение. Имаме

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos(a_i+x)}{2^{i-1}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos[(a_i+x_1)+(x-x_1)]}{2^{i-1}}$$
$$=\cos(x-x_1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos(a_i+x_1)}{2^{i-1}}-\sin(x-x_1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin(a_i+x_1)}{2^{i-1}}$$
$$=\cos(x-x_1)f(x_1)-\sin(x-x_1)f(\tfrac{\pi}{2}+x_1).$$

Од условот на задачата имаме $f(x_1)=0$ и

$$f(-a_1)=\cos 0+\sum_{i=2}^{n}\frac{\cos(a_i-a_1)}{2^{i-1}}\geq 1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{2^{i-1}}=\frac{1}{2^n}>0.$$

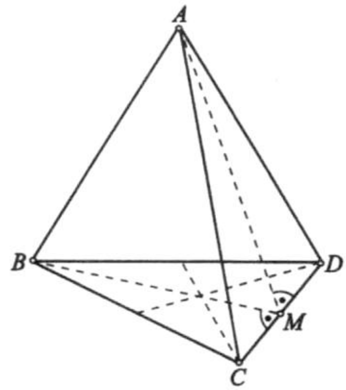
Значи, $f(x)\not\equiv 0$ и $f(\frac{\pi}{2}+x_1)\neq 0$.

Бидејќи $f(x_2)=0$, добиваме $\sin(x_2-x_1)=0$, т.е. $x_2-x_1=m\pi$.

3. За $k=1,2,3,4,5$ најди потребен и доволен услов кој го задоволува бројот $a>0$ за да постои тетраедар чии k рабови имаат должина a, а останатите $6-k$ рабови да имаат должина 1.

Решение. а) $k=1$. Нека $\overline{AB}=a$,

$$\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{CD}=1.$$



Точката M е средина на работ CD. Тогаш $\overline{AM}=\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Бидејќи $\overline{AB}<\overline{AM}+\overline{BM}$, мора да е исполнето $a<\sqrt{3}$. Овој услов е и доволен. Навистина, ако $a<\sqrt{3}$, тогаш постои триаголник ABM со должини на страни $\overline{AB}=a$, $\overline{AM}=\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Нека n е нормала на рамнината ABM во точката M, а C и D се точки на n такви што $\overline{MC}=\overline{MD}=\frac{1}{2}$. Тогаш

$$\overline{AB}=a \text{ и } \overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{CD}=1.$$

б) $k=2$. Постојат две можности.

1) Рабовите со должина a почнуваат во исто теме. Нека $\overline{AC}=\overline{AD}=a$ и $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{CD}=1$, а M е средина на работ CD. Тогаш $\overline{AM}=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}$ и $\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Од $\overline{AB}-\overline{BM}<\overline{AM}<\overline{AB}+\overline{BM}$, го добиваме неравенството

$$1-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}<1+\frac{\sqrt{3}}{2},$$

кое е еквивалентно на неравенството $\sqrt{2-\sqrt{3}}<a<\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Последното неравенство е и доволен услов. Во овој случај постои $\triangle ABM$ со страни $\overline{AB}=1$, $\overline{AM}=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}$, $\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Нека n е нормала на рамнината ABM во точката M, а точките C и D припаѓаат на n и $\overline{MC}=\overline{MD}=\frac{1}{2}$. Останува да се провери дека рабовите на тетраедарот ги исполнуваат условите $\overline{AC}=\overline{AD}=a$ и $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{CD}=1$.

2) Рабовите со должина a се разминувачки. Нека

$$\overline{AB}=\overline{CD}=a, \quad \overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=1$$

и точката M е средина на работ CD. Тогаш $\overline{MA}=\overline{MB}=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$. Неравенството $\overline{AB}<\overline{MA}+\overline{MB}$ е еквивалентно со неравенството $a<\sqrt{2}$.

Последниот неравенство е и доволен услов. Навистина, ако $a<\sqrt{2}$ тогаш постои триаголник ABM со страни $\overline{AB}=a$, $\overline{MA}=\overline{MB}=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$. Нека n е нормала на рамнината ABM во точката M, а C и D се такви точки на n, што $\overline{MC}=\overline{MD}=\frac{a}{2}$. Останува да се провери дека

$$\overline{AB}=\overline{CD}=a \text{ и } \overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=1.$$

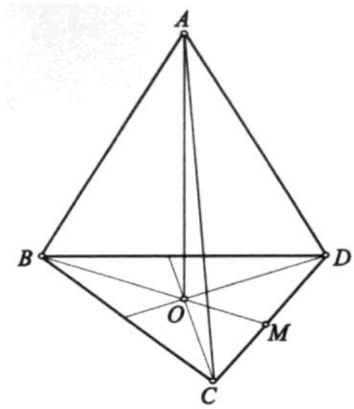
Значи, за $k=2$, потребен и доволен услов е $a<\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

в) $k=3$. Доволно е да се разгледаат следниве два случаи.

1) Рабовите со должина a излегуваат од исто теме. Ако

$$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=a \text{ и } \overline{BC}=\overline{BD}=\overline{CD}=1,$$

тогаш $\overline{AC}>\overline{CO}$ (бидејќи $\triangle AOC$ е правоаголен), каде O е средна точка на триаголникот BCD. Од $\overline{CO}=R=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $a>R$, следува $a>\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ова неравенство е и доволен услов. Нека BCD е рамностран триаголник со страна 1, а n е нормалата на рамнината BCD во точката O. Точката A припаѓа на нормалата n така што $\overline{OA}=\sqrt{a^2-\frac{1}{3}}$. Сега треба да се провери дали $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=a$.



2) Рабовите со должина a се страни на рамностран триаголник. Нека $\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{CD}=a$ и $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=1$. Како и во претходниот случај мора да е исполнето $\overline{AC}>\overline{CO}$, $\overline{CO}=R$, $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $R<1$, т.е. $\frac{a}{\sqrt{3}}<1$, $a<\sqrt{3}$.

Лесно се докажува дека овој услов е и доволен.

г) $k=4$. Во овој случај ќе разгледаме тетраедар сличен на дадениот со коефициент на сличност $k=\frac{1}{a}$. Новиот тетраедар има четири рабови со должина 1 и два раба со должина $\frac{1}{a}$. Според тоа потребен и доволен услов е $\frac{1}{a}<\sqrt{2+\sqrt{3}}$, т.е. $a>\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

д) $k=5$. Разгледуваме сличен тетраедар на дадениот со коефициент на сличност $\frac{1}{a}$. Тој има пет рабови со должина 1 и еден раб со должина $\frac{1}{a}$. Според тоа, потребен и доволен услов $\frac{1}{a}<\sqrt{3}$, т.е. $a>\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Нека отсечката AB е дијаметар на кружницата γ и $C\in\gamma$ е таква што $C\not\equiv A$ и $C\not\equiv B$. Точката D е ортогонална проекција на точката C врз отсечката AB. Трите кружници γ_1,γ_2 и γ_3 ја допираат AB така што γ_1 е впишана во триаголникот ABC, а γ_2 и γ_3 ја допираат отсечката CD и кружницата γ. Докажи дека γ_1,γ_2 и γ_3 имаат и друга заедничка тангента.

Решение. *Прв начин.* Нека O_2 е центар на γ_2, $O_2H_2\perp AB$ и H_2 е меѓу B и D. Радиусот на γ нека е R.

Ако воведеме ознаки $\overline{AD}=x$ и $\overline{O_2H_2}=r$ добиваме

$$\overline{AH_2}=r+x \text{ и } \overline{OO_2}=\sqrt{\overline{OH_2}^2+r^2}=\sqrt{(x+r-R)^2+r^2}.$$

Но, γ и γ_2 се допираат па е $\overline{OO_2}+\overline{O_2K}=R$, односно

$$\sqrt{(x+r-R)^2+r^2}=R-r \text{ т.е. } (x+r-R)^2=R^2-2Rr$$

и според тоа

$$\overline{AH_2}^2=(x+r)^2=[(x+r-R)+R]^2=2Rx.$$

Понатаму, од $\overline{AC}^2=\overline{AD}\cdot\overline{AB}=2Rx=\overline{AH_2}^2$, добиваме $\overline{AC}=\overline{AH_2}$.

Ако со O_3 го означиме центарот на γ_3 и $O_3H_3\perp AB$, тогаш аналогно се докажува дека $\overline{BC}=\overline{BH_3}$. Нека O_1 е средина на отсечката O_3O_2, $O_1H_1\perp AB$. Ќе покажеме дека O_1 е центар на γ_1. Бидејќи O_1H_1 е средна линија на трапезот $O_3H_3H_2O_2$, точно е равенството

$$\overline{O_1H_1}=\tfrac{1}{2}(\overline{O_3H_3}+\overline{O_2H_2}).$$

Понатаму, $\overline{O_3H_3}=\overline{H_3D}$, CD е тангента на γ_2 и γ_3, $\overline{O_2H_2}=\overline{H_2D}=r$. Според тоа

$$\overline{O_1H_1}=\tfrac{\overline{O_3H_3}+\overline{O_2H_2}}{2}=\tfrac{\overline{H_3D}+\overline{H_2D}}{2}=\tfrac{\overline{H_3H_2}}{2}=\tfrac{\overline{AH_2}+\overline{BH_3}-\overline{AB}}{2}=\tfrac{\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}}{2}$$

$$\overline{AH_1}=\tfrac{\overline{AH_3}+\overline{AH_2}}{2}=\tfrac{\overline{AH_2}+\overline{AB}-\overline{BH_3}}{2}=\tfrac{\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}}{2}.$$

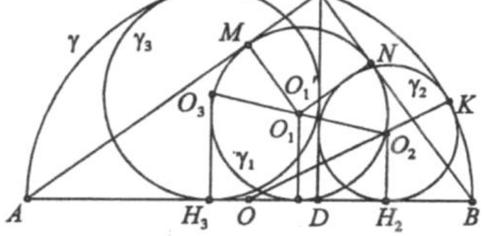
Нека $O_1^{'}$ е центар на γ_1, $O_1^{'}H_1^{'}\perp AB$, $O_1^{'}M\perp AC$, $O_1^{'}N\perp BC$ и $H_1^{'}, M, N$ се допирни точки на $\triangle ABC$ и γ_1. Тогаш

$$\begin{aligned}\overline{AH'_1}+\overline{AM}&=(\overline{AB}-\overline{BH_1^{'}})+(\overline{AC}-\overline{MC})=\overline{AC}+\overline{AB}-(\overline{MC}+\overline{BH_{11}^{'}})\\&=\overline{AC}+\overline{BC}-(\overline{CN}+\overline{BN})=\overline{AC}+\overline{AB}-\overline{BC}.\end{aligned}$$

бидејќи $\overline{MC}=\overline{CN}$ и $\overline{BH_1^{'}}=\overline{BN}$ (разгледај ги тангентите од точките B и C кон кружницата). Според тоа,

$$\overline{O_1^{'}H_1^{'}}=\overline{O_1^{'}M}=\overline{CM}=\tfrac{\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}}{2}=\overline{O_1H_1}.$$

Ако триаголникот ABC не е рамнокрак тогаш $O_2O_3 \nparallel AB$, од што следува дека точките O_1 и O'_1 се совпаѓаат. Ако триаголникот ABC е рамнокрак, тогаш радиусите на γ_1, γ_2 и γ_3 се еднакви на $(\sqrt{2}-1)R$.

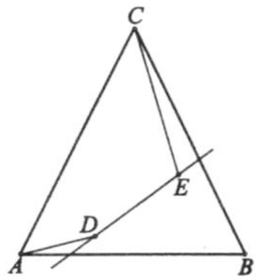


Докажавме дека O_1, O_2 и O_3 лежат на една права. Понатаму, правата која е симетрична на тангентата на кружница во однос на правата која минува низ центарот повторно е тангента на кружницата. Според тоа, правата симетрична со AB во однос на правата $O_1O_2 \equiv O_2O_3$ е бараната втора тангента.

5. Во рамнина се дадени $n, (n > 4)$ точки, меѓу кои не постојат три колинеарни точки. Докажи дека постојат најмалку $\binom{n-3}{2}$ конвексни четириаголници кои имаат темиња во четири од дадените точки.

Решение. *Лема.* Во рамнина се дадени пет точки, меѓу кои не постојат три колинеарни точки. Тогаш постојат четири точки кои се темиња на конвексен четириаголник.

Доказ. Ако конвексното затворање на дадените точки е петаголник, тогаш било кои четири точки се темиња на конвексен четириаголник. Ако конвексното затворање на дадените точки е четириаголник, тогаш тој е бараниот четириаголник. Нека конвексното затворање е триаголник и точките A, B, C од дадените се темиња на тој на триаголник. Две точки D и E од дадените, лежат во внатрешноста на тој триаголник, а правата DE сече две од страните на тој триаголник во внатрешни точки. Нека се тоа на пример AB и BC (цртеж десно). Тогаш точките A, C, D и E се темиња на конвексниот четириаголник. ■



Ги разгледуваме сите комбинации од по 5 точки. Нив ги има $\binom{n}{5}$. Секоја комбинација содржи подмножество од четири точки кои се темиња на конвексен четириаголник. Секое теме на четириаголникот е вклучено во $n-4$ комбинации. Значи, постојат барем $\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}$ конвексни четириаголници, кои припаѓаат на даденото множество точки. Останува да докажеме дека

$$\frac{1}{n-4}\binom{n}{5} \geq \binom{n-3}{2}.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(n-5)(n-6)(n+8) \geq 0.$$

кое е точно за секој $n > 4$. Знак за равенство важи ако и само ако $n = 5$ или $n = 6$.

6. Докажи дека, ако $x_1 > 0, x_2 > 0, x_1y_1 - z_1^2 > 0, x_2y_2 - z_2^2 > 0$, тогаш точно е неравенството

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1-z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2-z_2^2}.$$

Најди потребни и доволни услови при кои важи знак за равенство.

Решение. Од условот на задачата следува $y_1 > 0$, $y_2 > 0$. Воведуваме ознаки

$$u_1 = \sqrt{x_1 y_1} + z_1,\ u_2 = \sqrt{x_2 y_2} + z_2,\ v_1 = \sqrt{x_1 y_1} - z_1 \text{ и } v_2 = \sqrt{x_2 y_2} - z_2 .$$

При тоа u_1, u_2, v_1 и v_2 се позитивни реални броеви. Понатаму, од

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 &= (\sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2})^2 + (\sqrt{x_1 y_2} - \sqrt{x_2 y_1})^2 - (z_1 + z_2)^2 \\ &= (\sqrt{x_1 y_1} + z_1 + \sqrt{x_2 y_2} + z_2)(\sqrt{x_1 y_1} - z_1 + \sqrt{x_2 y_2} - z_2) + (\sqrt{x_1 y_2} - \sqrt{x_2 y_1})^2 \\ &= (u_1 + u_2)(v_1 + v_2) + (\sqrt{x_1 y_2} - \sqrt{x_2 y_1})^2\end{aligned}$$

следува

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 \ge (u_1 + u_2)(v_1 + v_2),$$

и знак за равенство важи ако и само ако $x_1 y_2 = x_2 y_1$.

Доволно е да се докаже неравенството $\frac{8}{(u_1+u_2)(v_1+v_2)} \le \frac{1}{u_1 v_1} + \frac{1}{u_2 v_2}$, односно

$$8 u_1 u_2 v_1 v_2 \le (u_1 + u_2)(v_1 + v_2)(u_1 v_1 + u_2 v_2)$$

Последното неравенствои е точно, бидејќи

$$2\sqrt{u_1 u_2} \le u_1 + u_2,\ 2\sqrt{v_1 v_2} \le v_1 + v_2 \text{ и } 2\sqrt{u_1 v_1 u_2 v_2} \le u_1 v_1 + u_2 v_2 .$$

Јасно, знак за равенство важи ако $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$.

Со тоа даденото неравенство е докажано.

Знак за равенство важи ако и само ако $x_1 y_2 = x_2 y_1$, $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$.

XII олимпијада

1. Даден е $\triangle ABC$. Нека M е внатрешна точка на страната AB, r_1, r_2, r се радиуси на кружниците впишани во триаголниците AMC, BMC и ABC, соодветно, а ρ_1, ρ_2, ρ се радиуси на кружниците кои:

а) лежат во аголот BCA, и

б) се припишани во триаголниците AMC, MBC и ABC.

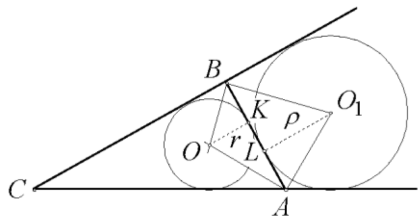
Докажи дека

$$\frac{r_1 r_2}{\rho_1 \rho_2} = \frac{r}{\rho}.$$

Решение. I *начин. Лема.* Нека $\measuredangle CAB = \alpha$ и $\measuredangle ABC = \beta$. Тогаш

$$\frac{r}{\rho} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Доказ. Нека O е центарот на впишаната кружница и K е точката во која таа ја допира страната AB. Точката O_1 е центар на припишаната кружница, а L е точка во која таа ја допира страната AB. Тогаш



$$\overline{AB} = \overline{AK} + \overline{KB} = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} + \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}) \text{ и } \overline{AB} = \overline{AL} + \overline{LB} = \rho(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}).$$

Сега тврдењето на лемата следува од претходните равенства. ■

Нека $\phi = \measuredangle AMC$. Од лемата следува

$$\frac{r_1}{\rho_1} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\phi}{2} \text{ и } \frac{r_2}{\rho_2} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi-\phi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\phi}{2}.$$

Ако ги помножиме овие равенства добиваме

$$\frac{r_1}{\rho_1}\frac{r_2}{\rho_2} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\rho},$$

што и требаше да се докаже.

II *начин.* Воведуваме ознаки: $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AM} = p$, $\overline{BM} = q$, $\overline{CM} = m$. Од формулите за плоштина на триаголник

$$P = \frac{a+b+c}{2} r \quad \text{и} \quad P = \frac{a+b-c}{2}\rho$$

добиваме

$$\frac{r}{\rho} = \frac{a+b-c}{a+b+c} = \frac{a+b-p-q}{a+b+p+q}.$$

Аналогно се докажува дека

$$\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{b+m-p}{b+m+p} \quad \text{и} \quad \frac{r_2}{\rho_2} = \frac{a+m-q}{a+m+q}.$$

Според тоа, равенството кое треба да се докаже е еквивалентно на равенството

$$\frac{a+b-p-q}{a+b+p+q}=\frac{b+m-p}{b+m+p}\cdot\frac{a+m-q}{a+m+q}$$

кое може да се запише во обликот

$$pa^2+qb^2=p^2q+pq^2+pm^2+qm^2.$$

Ако замениме $p+q=c$, добиваме $pa^2+qb^2=c(pq+m^2)$, а тоа е теоремата на Стјуарт за триаголник.

2. Нека a,b,n се природни броеви поголеми од 1. Броевите a и b се основи на два бројни системи. Нека броевите A_n и B_n имаат еднаков запис $x_n x_{n-1}\dots x_1 x_0$ во бројните системи со основи a и b, соодветно, при што $x_n\neq 0$ и $x_{n-1}\neq 0$. Да ги означиме со A_{n-1} и B_{n-1} броевите кои се добиваат кога првата цифра x_n се отстрани. Докажи дека $a>b$ ако и само ако важи $\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}
\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n} \quad&\Leftrightarrow\quad \frac{A_{n-1}}{x_n a^n+A_{n-1}}<\frac{B_{n-1}}{x_n b^n+B_{n-1}}\\
&\Leftrightarrow\quad x_n a^n B_{n-1}>x_n a^n A_{n-1}\\
&\Leftrightarrow\quad a^n\sum_{\nu=0}^{n-1}x_\nu b^\nu>b^n\sum_{\nu=0}^{n-1}x_\nu a^\nu\\
&\Leftrightarrow\quad \sum_{\nu=0}^{n-1}x_\nu(a^n b^\nu-b^n a^\nu)>0\\
&\Leftrightarrow\quad (a-b)\sum_{\nu=0}^{n-1}x_\nu a^\nu b^\nu\,\frac{a^{n-\nu}-b^{n-\nu}}{a-b}>0\\
&\Leftrightarrow\quad a-b>0\\
&\Leftrightarrow\quad a>b.
\end{aligned}$$

Последната еквиваленција е точна бидејќи

$$x_\nu a^\nu b^\nu\,\frac{a^{n-\nu}-b^{n-\nu}}{a-b}=x_\nu a^\nu b^\nu(a^{n-\nu-1}+a^{n-\nu-2}b+\dots+b^{n-\nu-2}a+b^{n-\nu-1})\geq 0,$$

за $\nu=0,1,2,\dots,n-2$ и

$$x_\nu a^\nu b^\nu\,\frac{a^{n-\nu}-b^{n-\nu}}{a-b}=x_{n-1}a^{n-1}b^{n-1}>0,$$

за $\nu=n-1$.

3. Низата реални броеви $a_0,a_1,\dots,a_n,\dots$ го задоволува условот

$$1=a_0\leq a_1\leq a_2\leq\dots\leq a_n\leq\dots, \tag{1}$$

а низата $b_1,b_2,\dots,b_n,\dots$ е определена со

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

Докажи дека:

а) $0 \le b_n < 2$, за секој $n \in \mathbb{N}$,

б) за дадено c, такво што $0 \le c < 2$, постои низа $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ која го задоволува условот (1) и при тоа $b_n > c$ за бесконечно многу вредности на индексот n.

Решение. а) Ако $0 < x \le y$, тогаш

$$(1-\tfrac{x}{y})\tfrac{1}{\sqrt{y}} \le 2(\tfrac{1}{\sqrt{x}} - \tfrac{1}{\sqrt{y}}) . \qquad (*)$$

Навистина,

$$\frac{y-x}{y\sqrt{y}} \le 2\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y-x}{y} \le 2\frac{y-x}{\sqrt{x}(\sqrt{y}+\sqrt{x})}$$

$$\Leftrightarrow \quad (y-x)(2y-\sqrt{x}\sqrt{y}-x) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (y-x)[(y-x)+\sqrt{y}(\sqrt{y}-\sqrt{x})] \ge 0 .$$

и како последното неравенство важи при $0 < x \le y$, добиваме дека неравенството (*) важи при $0 < x \le y$. Сега, заради (*), од неравенството (1) следува:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (1-\tfrac{a_{k-1}}{a_k})\tfrac{1}{\sqrt{a_k}} \le \sum_{k=1}^{n} 2(\tfrac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \tfrac{1}{\sqrt{a_k}}) = 2(\tfrac{1}{\sqrt{a_0}} - \tfrac{1}{\sqrt{a_n}}) < 2 .$$

б) Нека $a_n = q^n$, $q > 1$. Во овој случај е исполнет условот (1). Наоѓаме:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (1-\tfrac{q^{k-1}}{q^k})\tfrac{1}{\sqrt{q^k}} = (1-\tfrac{1}{q})\sum_{k=1}^{n} (\tfrac{1}{\sqrt{q}})^k = (1-\tfrac{1}{q})\tfrac{1}{\sqrt{q}}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{q^n}}}{1-\frac{1}{\sqrt{q}}} = \tfrac{\sqrt{q}+1}{q}(1-\tfrac{1}{\sqrt{q^n}}) .$$

Сега од $\lim\limits_{q\to 1} \frac{\sqrt{q}+1}{q} = 2$, следува дека $\frac{\sqrt{q}+1}{q} > c$ и како $\lim\limits_{q\to 1} b_n = \frac{\sqrt{q}+1}{q}$, заклучуваме дека скоро сите членови на низата $\{b_n\}$ се поголеми од c.

4. Определи ги сите природни броеви n, за кои множеството

$$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$$

може да се раздели на две множества такви што производот на сите елементи од едното множество е еднаков на производот на сите елементи од другото множество.

Решение. *Лема.* Меѓу шест последователни природни броеви постои еден кој е заемно прост со останатите.

Доказ. Меѓу шест последователни природни броеви постојат три последователни непарни броеви. Еден од нив е делив со три, а најмногу еден од нив е делив со 5. Според тоа, меѓу шест последователни природни броеви постои еден кој не е делив со два, три и пет. Тој број е заемно прост со останатите броеви, бидејќи најголем заеднички делител на два броја, за кои разликата меѓу нив не е поголема од пет може да биде само еден од броевите 1, 2, 3, 4 или 5. ■

Множеството $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ го делиме на две подмножества така што производот на броевите од едното подмножество е еднаков на производот на броевите од другото подмножество. Меѓу елементите од почетното множество постои еден кој е заемно прост со останатите. Тој е множител во еден од производите, и го дели другиот производ. Ова е можно само ако тој број е 1. Во множеството $\{1,2,3,4,5\}$ само еден број е делив со 5. Затоа еден од производите е делив со 5, а другиот не е, што не е можно, бидејќи тие треба да се еднакви.

Значи, во множеството природни броеви не постои број n кој што го има бараното својство.

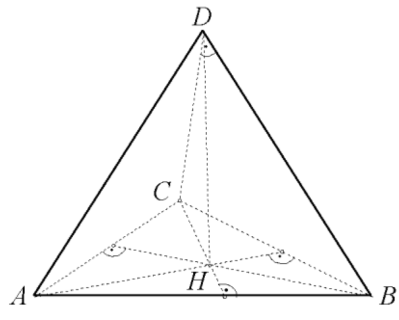
5. Во тетраедарот $ABCD$ важи $BD \perp CD$, а подножјето на висината повлечена од темето D се совпаѓа со ортоцентарот на триаголникот ABC. Докажи дека

$$(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})^2 \le 6(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2).$$

За кои тетраедри важи знак за равенство?

Решение. Најпрво ќе докажеме дека спротивните рабови на тетраедарот $ABCD$ се заемно нормални. Нека H е ортоцентар на триаголникот ABC. Проекцијата на правата CD во рамнината ABC е правата CH. Затоа $AB \perp CH$ и $AB \perp DH$, па според тоа $AB \perp CHD$, т.е. $AB \perp CD$. На сличен начин се покажува дека $BC \perp AD$ и $AC \perp BD$.

Ќе докажеме дека рамнинските агли кај темето D се прави. Аголот CDB е прав по претпоставка. Ако $CD \perp BD$ и $CD \perp AB$, тогаш $CD \perp ABD$. Според тоа, аголот ADC е прав агол. На сличен начин се докажува дека аголот BDA е прав.



Според Питагоровата теорема исполнети се равенствата:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2,\ \ \overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2,\ \ \overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2.$$

Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})^2 \le 3(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2)$$

кое пак е еквивалентно со

$$0 \le (\overline{AB}-\overline{BC})^2 + (\overline{BC}-\overline{AC})^2 + (\overline{AC}-\overline{AB})^2.$$

Последното неравенство е точно и знак за равенство важи ако и само ако

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} \,.$$

Јасно, ако

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} \,,$$

тогаш

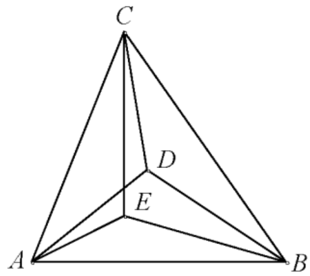
$$\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} \,.$$

6. Во рамнина се дадени 100 точки, меѓу кои не постојат три колинеарни точки. Да ги разгледаме сите триаголници со темиња во дадените точки. Докажи дека најмногу 70% од овие триаголници се остроаголни.

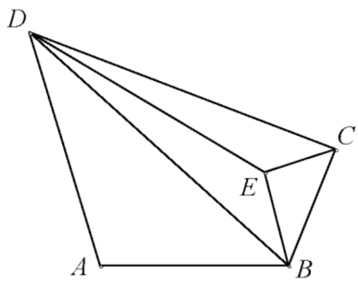
Решение. *Лема.* Во рамнина се дадени пет точки, такви што било кои три се неколинеарни. Тогаш постојат три триаголници со темиња во тие точки кои не се остроаголни.

Доказ. Ги разгледуваме трите можни случаи.

a) Конвексната обвивка на точките е триаголникот ABC. Меѓу аглите BDA, CDB и ADC барем два не се остри. Слично се гледа дека меѓу триаголниците BEA, CEB и AEC барем два не се остроаголни. Значи, во овој случај постојат барем четири триаголници кои не се остроаголни.



b) Конвексната обвивка на дадените точки е четириаголник $ABCD$. Јасно, барем еден триаголник со темиња во точките A, B, C, D не е остроаголен. Нека точката E е во триаголникот BCD (таа не може да припаѓа на дијагонала на четириаголникот $ABCD$, бидејќи било кои три точки се неколинеарни). Тогаш барем два од триаголниците BED, BCE и CDE не се остроаголни. Значи и во овој случај постојат барем три триаголници кои не се остроаголни.



c) Нека конвексната обвивка на дадените точки е конвексен петаголник. Ако четири агли од овој петаголник се остри, тогаш збирот на аглите би бил помал од $4 \cdot 90^\circ + 180^\circ = 540^\circ$, што не е можно. Претпоставувме дека острите агли се наоѓаат во темињата A, B и C. Барем еден од аглите на конвексниот четириаголник $ACDE$ не е остар. Затоа постојат барем три темиња кај кои аглите не се остри. ■

Од 100 точки може да се изберат $3\cdot\binom{100}{5}$ триаголници кои не се остроаголни. Еден ист триаголник се појавува во $\binom{97}{2}$ петорки темиња. Затоа бројот на триаголниците кои не се остроаголни е поголем или еднаков на $\frac{3\cdot\binom{100}{5}}{\binom{97}{2}}$. Но, бројот на сите триаголници е $\binom{100}{3}$, па затоа бројот на остроаголните триаголници е помал или еднаков на $\binom{100}{3}-\frac{3\cdot\binom{100}{5}}{\binom{97}{2}}$. Конечно, односот на бројот на остроаголни триаголници и вкупниот број на триаголници не може да биде поголем од $1-\frac{3\binom{100}{5}}{\binom{97}{2}\binom{100}{3}}=0,7$, што значи најмногу 70% од овие триаголници се остроаголни.

XIII олимпијада

1. Докажи дека тврдењето: за произволни реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ важи неравенството

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)...(a_1-a_n)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)...(a_2-a_n)+...$$
$$+(a_n-a_2)(a_n-a_3)...(a_n-a_{n-1})\geq 0,$$

е точно за $n=3$ и $n=5$, но тоа не е точно за било кој друг природен број $n, n>2$.

Решение. За $n=3$ левата страна на неравенството е еднаква на

$$\tfrac{1}{2}[(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+(a_2-a_3)^2]\geq 0 .$$

За $n=5$, заради симетричност на левата страна во однос на a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, можеме да претпоставиме дека $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5$. Бидејќи

$$a_1-a_3 \geq a_2-a_3,\ a_1-a_4 \geq a_2-a_4,\ a_1-a_5 \geq a_2-a_5,$$

добиваме

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\geq 0 .$$

Исто така

$$(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\geq 0 ,$$

како и

$$(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)+(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)\geq 0$$

што значи дека за $n=5$ неравенството е исполнето.

За $n=4$ можеме да земеме

$$a_1=0,\ a_2=a_3=a_4=1,$$

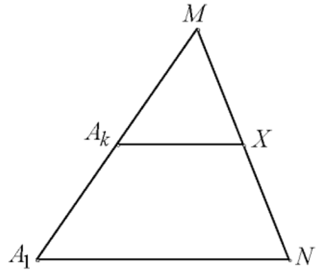
а за $n>5$,

$$a_1=a_2=...=a_{n-4}=0,\ a_{n-3}=a_{n-2}=a_{n-1}=2 \text{ и } a_n=1$$

и во секој од овие случаи неравенството не е исполнето.

2. Даден е конвексен полиедар P_1 со темиња $A_1, A_2, ..., A_9$. Нека $P_2, P_3, ..., P_9$ се полиедри кои се добиваат со транслации на полиедарот P_1 кои точката A_1 ја пресликуваат во точките $A_2, A_3, ..., A_9$, соодветно. Докажи дека најмалку два од полиедрите $P_1, P_2, P_3, ..., P_9$ имаат барем една заедничка внатрешна точка.

Решение. Со P да го означиме полиедарот кој е хомотетичен на полиедарот P_1 со центар на хомотетија A_1 и коефициент 2. Нека X е некоја од точките на полиедарот A_k, $k\in\{2,3,4,...,9\}$. Тогаш



$$\overrightarrow{A_1X} = \overrightarrow{A_1A_k} + \overrightarrow{A_kX} .$$

Нека M и N се точки во просторот такви што $\overrightarrow{A_1M} = 2\overrightarrow{A_1A_k}$ и $\overrightarrow{A_1N} = 2\overrightarrow{A_kX}$. Точките M и N припаѓаат на полиедарот P , при што точката X припаѓа на отсечката MN , па бидејќи полиедарот P е конвексен, таа припаѓа и на P . Од овде заклучуваме дека полиедарот P ги содржи сите 9 полиедри $P_1, P_2, ..., P_9$ а волуменот му е 8 пати поголем од волуменот на секој од нив. Сега, од принципот на Дирихле следува дека меѓу полиедрите $P_1, P_2, ..., P_9$, постојат два кои имаат заедничка точка.

3. Докажи дека низата $2^n - 3$, $n = 1, 2, 3, ...$ има бесконечно многу членови такви што секои два од нив се заемно прости.

Решение. Тврдењето во задачата ќе го докажеме користејќи математичка индукција.

Нека претпоставиме дека имаме k броеви

$$a_1 = 2^{n_1} - 3 , a_2 = 2^{n_2} - 3 , ..., a_k = 2^{n_k} - 3$$

такви што секои два од нив се заемно прости и $2 = n_1 < n_2 < ... < n_k$. Конструираме број од облик $a_{k+1} = 2^{n_{k+1}} - 3$, кој ќе биде земно прост со секој од овие броеви. Избираме $l = a_1a_2...a_k$. Меѓу $l+1$-те броеви $2^0, 2^1, ..., 2^l$ постојат барем два кои при делење со l даваат ист остаток. Нека 2^r и 2^s $(r > s)$ се тие броеви. Тогаш постои природен број p , таков што

$$pl = 2^r - 2^s = (2^{r-s} - 1) 2^s .$$

Бидејќи l е непарен, добиваме дека $2^{r-s} - 1$ е делив со l , т.е. за некој природен број q важи $2^{r-s} - 1 = ql$. Според тоа,

$$2^{r-s+2} - 3 = 4 \cdot 2^{r-s} - 3 = 4(ql + 1) - 3 = 4ql + 1$$

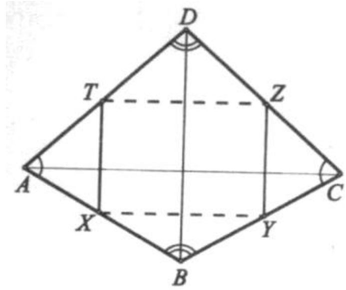
и овој број ќе гоземеме за бројот a_{k+1} , бидејќи тој нема заеднички делител поголем од 1 со било кој од броевите $a_1, a_2, ..., a_k$ и освен тоа $a_{k+1} > a_k$.

На опишаниот начин можеме да конструираме произволно многу броеви кои ги исполнуваат условите на задачата.

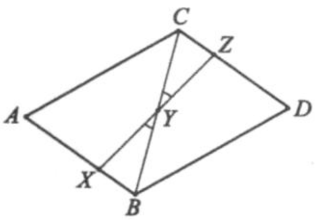
4. Секоја страна на тетраедарот $ABCD$ е остроаголен триаголник. Ги разгледуваме затворените полигонални линии $XYZTX$ определени на следниот начин: точката X е на работ AB и е различна од A и B . Аналогно Y, Z и T се на рабовите BC , CD и AD , соодветно. Докажи дека:

а) Ако $\measuredangle DAB + \measuredangle BCD \neq \measuredangle ABC + \measuredangle CDA$, тогаш меѓу овие полигонални линии нема најкратка.

б) Ако $\measuredangle DAB+\measuredangle BCD=\measuredangle ABC+\measuredangle CDA$, тогаш постојат бесконечно многу полигонални линии со најкратка должина и таа е еднаква на $2\overline{AC}\sin\frac{\alpha}{2}$, каде што $\alpha=\measuredangle CAB+\measuredangle DAC+\measuredangle DAB$.



Решение. а) Да претпоставиме дека постои најкратка искршена линија $XYZTX$ (цртеж десно). Триаголниците ABC и BCD ги поставуваме во една рамнина. Со тоа добиваме четириаголник $ABCD$ (цртеж лево). За линијата да има минимална должина, мора да е исполнето $\measuredangle BYX=\measuredangle CYZ$, бидејќи во спротивен случај би добиле помала должина на линијата со поместување на точката Y.



Аналогно се покажува дека мора да е исполнето

$$\measuredangle CZY=\measuredangle TZD,$$
$$\measuredangle DTZ=\measuredangle XTA,$$
$$\measuredangle AXT=\measuredangle YXB.$$

На тој начин добиваме

$$\begin{aligned}\measuredangle DAB+\measuredangle BCD&=180^\circ-\measuredangle AXT-\measuredangle XTA+180^\circ-\measuredangle CZY-\measuredangle CYZ\\&=180^\circ-\measuredangle YXB-\measuredangle BYX+180^\circ-\measuredangle DTZ-\measuredangle TZD\\&=\measuredangle ABC+\measuredangle ADC.\end{aligned}$$

што противречи на претпоставката.

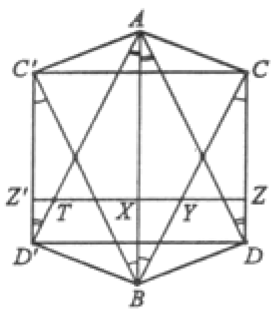
б) Нека претпоставиме дека е исполнет условот

$$\measuredangle DAB+\measuredangle BCD=\measuredangle ABC+\measuredangle ADC \tag{1}$$

Со $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ги означуваме збировите на аглите меѓу рабовите во темињата A,B,C,D. Тогаш

$$\begin{aligned}\alpha+\gamma&=\measuredangle DAB+\measuredangle CAB+\measuredangle DAC+\measuredangle BCA+\measuredangle ACD+\measuredangle BCD\\&=(\measuredangle ABC+\measuredangle CAB+\measuredangle BCA)+(\measuredangle CDA+\measuredangle DAC+\measuredangle ACD)=360^\circ.\end{aligned}$$

т.е. $\alpha+\gamma=360^\circ$. Аналогно се докажува дека $\beta+\delta=360^\circ$. Затоа, барем еден од аглите α,γ или од аглите β,δ не може да биде поголем од 180°. Нека се тоа аглите α и γ. Обвивката на тетраедарот $ABCD$ ја расечуваме по рабовите AC, CD, DB (овој избор на рабови зависи од изборот на аглите кои се помали или еднакви на 180°). Во рамнина формираме фигура $AC'D'BDC$ (цртеж десно) која се состои од триаголници $AC'D'$, $AD'B$, ABC и BDC. Од равен-



ството (1) добиваме

$$\measuredangle C'D'A + \measuredangle ABC = \measuredangle CDA + \measuredangle ABC, \ \measuredangle D'AB + \measuredangle BCD = \measuredangle DAB + \measuredangle BCD$$

од каде што

$$\measuredangle C'D'A + \measuredangle ABC = \measuredangle D'AB + \measuredangle BCD \qquad (2)$$

За да од отсечката $C'D'$ дојдеме до отсечката CD, прво треба отсечката $C'D'$ да ја ротираме за агол $\measuredangle C'D'A$ околу точката D' во негативна насока, потоа отсечката $D'A$ да ја ротираме за $\measuredangle D'AB$ околу точката A во позитивна насока, потоа отсечката AB за $\measuredangle ABC$ околу точката B, и конечно отсечката BC за агол $\measuredangle DCB$ околу точката C. Според (2) исполнето е $CD \| C'D'$ и отсечките CD и $C'D'$ се еднакво ориентирани. Затоа $DCD'C'$ е паралелограм. Од рамнокракиот триаголник ACC' добиваме

$$\overline{CC'} = 2\overline{AC}\sin\tfrac{\alpha}{2} = \overline{DD'}.$$

Бидејќи аголот α не е поголем од 180°, целиот паралелограм $DCC'D'$ е содржан во ликот $AC'D'BDC$ и на секоја отсечка ZZ' која е паралелна со CC', и е придружена искршена линија $XYZTX$ која има минимална должина.

5. Докажи дека за секој природен број m постои непразно конечно множество S од точки од рамнината со следното својство: секоја точка од множеството S е на единечно растојание од точно m други точки од S.

Решение. Тврдењето од задачата е точно за $m=1$. (Доволно е да се земат две точки на единечно растојание). Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за природниот број m. При тоа нека $S=\{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Околу секоја точка A_i, $i=1,2,...,n$, опишуваме единечна кружница. Овие кружници се сечат во конечно многу точки. Нека тоа се точките $Q_1, Q_2, ..., Q_r$. Нека $\vec{e}$ е единичен вектор различен од секој од векторите $\overrightarrow{A_iA_j}, \overrightarrow{A_iQ_k}$, за $i, j \in \{1,2,...,n\}$ и $k \in \{1,2,...,r\}$. При транслација за вектор $\vec{e}$ точката A_i се пресликува во точката B_i, $i \in \{1,2,...,n\}$.

Да го разгледаме множеството $S=\{A_1, A_2, ..., A_n, B_1, B_2, ..., B_n\}$. Секоја точка од ова множество е на единечно растојание од $m+1$ точка од тоа множество. Сега тврдењето на задачата следува од принципот на математичка индукција.

6. Разгледуваме квадратна таблица

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

која содржи ненегативни цели броеви и го има следното својство: ако $a_{ij} = 0$, тогаш збирот на елементите на $i-$тата редица и $j-$тата колона е

$$a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{in} + a_{1j} + a_{2j} + ... + a_{nj} \geq 0 .$$

Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq \frac{1}{2} n^2 .$$

Решение. Ги разгледуваме сите можни збирови по редици и колони. Нека p е најмалиот од сите тие збирови.

Ако $p \geq n$, тогаш збирот на сите елементи на таблицата не е помал од $n \cdot p \geq n \cdot n > \frac{1}{2} n^2$.

Нека $p < n$. Со замена на редиците и колоните збировите не се менуваат. Затоа можеме да претпоставиме дека збирот на елементите од првата колона е еднаков на p и собирците кои се еднакви на нула се наредени на најгорните неста на колоната, а останатите собирци се ненулти. Бидејќи $p < n$, во првата редица има најмалку $n-p$ нули. Збирот на елементите во секоја од првите $n-p$ колони е најмалку $n-p$, па затоа збирот на елементите во сите тие колони е поголем или еднаков на $(n-p)^2$. Во последните p колони збирот на елементите е најмалку p^2. Затоа збирот на сите елементи S_n го исполнуваат условот:

$$S_n \geq (n-p)^2 + p^2 = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} (n-p)^2 \geq \frac{1}{2} n^2 ,$$

што и требаше да се докаже.

XIV олимпијада

1. Докажи дека од секое множество од било кои десет различни двоцифрени природни броеви може да се одделат две дисјунктни подмножества такви што збировите на броевите во овие подмножества се еднакви.

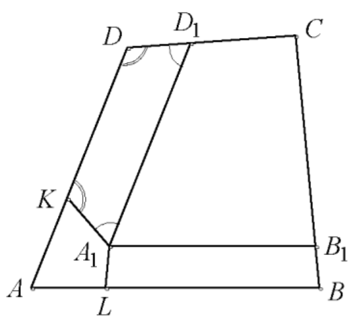
Решение. Да забележиме дека доволно е да докажеме дека постојат две различни подмножества кои имаат еднаков збир на елементите. Во тој случај се исфрлат заедничките елементи.

Разгледуваме на почеток колку различни подмножества има множество со 10 елементи. Секој број може но не мора да биде во бараното множество. Празното множество мораме да го исфрлиме, па затоа бројот на сите множества е $2^{10}-1=1023$. Секој број во групата може да има најголема вредност 99 па најголемиот збир не може да биде поголем од $99\cdot 10=990$, т.е. најмногу може да има 990 различни збирови. Според принципот на Дирихле меѓу 1023 подмножества мора да има две кои имаат еднаков збир.

2. Нека $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 4$. Докажи дека секој тетивен четириаголник може да се подели на n тетивни четириаголници.

Решение. Нека A е најмалиот агол на четириаголникот, а останатите темиња се B, C и D. Низ точката A, во внатрешноста на аголот $\measuredangle DAB$ повлекуваме полуправа. На таа полуправа постои точка A_1 таква што правите низ точката A_1 паралелни со страните AB и AD ги сечат страните BC и CD соодветно. Да ги означиме пресечните точки со B_1 и D_1. Четириаголникот $A_1B_1CD_1$ е тетивен, бидејќи има агли еднакви со соодветните агли на четириаголникот $ABCD$. Понатаму, бидејќи $\measuredangle DAB$ е најмалиот агол на четириаголникот $ABCD$ тогаш $\measuredangle DAA_1<\measuredangle D_1DA$. На страната AD постои точка K, таква што $\measuredangle DKA_1=\measuredangle D_1DK$. Слично, на страната AB постои точка L, таква што $\measuredangle A_1LB=\measuredangle LBB_1$. Четириаголникот ALA_1K е тетивен, бидејќи

$$\begin{aligned}\measuredangle ALA_1+\measuredangle A_1KA&=(\pi-\measuredangle ABC)+(\pi-\measuredangle CDA)\\&=2\pi-(\measuredangle ABC+\measuredangle CDA)=\pi.\end{aligned}$$



Четириаголникот A_1D_1DK е исто така тетивен, затоа што е рамнокрак трапез (како и LBB_1A_1).

Со тоа дадеиот четириаголник е разделен на четири тетивни четириаголници. За да тој биде разделен на $n\geq 4$ тетивни четириаголници, доволно е некој од рамнокраките трапези PBB_1A_1 или A_1D_1DQ да се поделат на $n-3$ рамнокраки трапези. Тоа може да се постиогне ако се повлечат $n-4$ прави паралелни со основите на трапезот.

3. Докажи дека

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \in \mathbb{N}, \text{ за секои } m,n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Ќе докажеме дека максималниот степен на простиот број p со кој е делив броителот на дадената дропка, не е помал од максималниот степен на бројот p со кој е делив именителот на дадената дропка. Тогаш задачата ќе биде решена.

Лема 1. Степенот на простиот број p во каноничната репрезентација на бројот $n!$, е еднаков на

$$[\tfrac{n}{p}]+[\tfrac{n}{p^2}]+[\tfrac{n}{p^3}]+\dots,$$

Доказ. Доволно е да се разгледа колку броеви има кои се деливи со p, $p^2, p^3, \dots$. ■

Лема 2. Нека $a, b \in \mathbb{R}^+$. Тогаш е исполнето неравенството

$$[2a]+[2b] \geq [a]+[b]+[a+b]$$

Доказ. Нека $a=[a]+\alpha$ и $b=[b]+\beta$, каде што $0 \leq \alpha < 1$ и $0 \leq \beta < 1$.
Ако $\alpha+\beta<1$, тогаш

$$[a+b]=[a]+[b]$$

и затоа

$$[2a]+[2b] \geq 2[a]+2[b]=[a]+[b]+[a+b]$$

Ако $\alpha+\beta \geq 1$, тогаш или $2\alpha \geq 1$ или $2\beta \geq 1$. Нека $2\alpha \geq 1$ (другиот случај се разгледува аналогно). Тогаш

$$[a+b]=[a]+[b]+1 \text{ и } [2a]=2[a]+1,$$

па според тоа

$$[2a]+[2b] \geq 2[a]+1+2[b]=[a]+[b]+[a+b]. \ ■$$

Нека p е прост број. Од лема 1, следува дека степенот на бројот p во броителот на дропката е

$$s=[\tfrac{2n}{p}]+[\tfrac{2n}{p^2}]+[\tfrac{2n}{p^3}]+\dots+[\tfrac{2m}{p}]+[\tfrac{2m}{p^2}]+[\tfrac{2m}{p^3}]+\dots,$$

а степенот на бројот p во именителот е

$$t=[\tfrac{n}{p}]+[\tfrac{n}{p^2}]+[\tfrac{n}{p^3}]+\dots+[\tfrac{m}{p}]+[\tfrac{m}{p^2}]+[\tfrac{m}{p^3}]+\dots+[\tfrac{m+n}{p}]+[\tfrac{m+n}{p^2}]+[\tfrac{m+n}{p^3}]+\dots.$$

Сега тврдењето на задачата следува од лема 2, за $a=\frac{n}{p^k}$, $b=\frac{m}{p^k}$, $k=1,2,3,\dots$.

4. Во множеството позитивни реални броеви реши го системот неравенки:

$$(x_1^2 - x_3x_5)\,(x_2^2 - x_3x_5) \le 0$$
$$(x_2^2 - x_4x_1)\,(x_3^2 - x_4x_1) \le 0$$
$$(x_3^2 - x_5x_2)\,(x_4^2 - x_5x_2) \le 0$$
$$(x_4^2 - x_1x_3)\,(x_5^2 - x_1x_3) \le 0$$
$$(x_5^2 - x_2x_4)\,(x_1^2 - x_2x_4) \le 0$$

Решение. Очигледно $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = a$, $a \in \mathbb{R}^+$ е решение на системот. Ќе докажеме дека тоа е единствено решение.

Нека претпоставиме дека постои друго решение на системот, во кое не се сите броеви x_i, $i = 1,2,3,4,5$ еднакви меѓу себе.

Бидејќи дадениот систем не се менува со циклична замена на променливите, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x_1 \ge x_i$, $i = 1,2,3,4,5$. Тогаш $x_1^2 - x_3x_5 \ge 0$ и $x_1^2 - x_2x_4 \ge 0$. Од првата и петтата неравенка добиваме $x_2^2 - x_3x_5 \le 0$ и $x_5^2 - x_2x_4 \le 0$.

Ако сите броеви x_2, x_3, x_4, x_5 се меѓу себе еднакви, тогаш од четвртата неравенка добиваме $(x_3 - x_1)^2 \le 0$, т.е. сите броеви x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 се еднакви меѓу себе, што противречи на претпоставката. Значи, сите броеви x_2, x_3, x_4, x_5 не се еднакви меѓу себе. Исто така, меѓу x_2, x_3, x_4, x_5 броевите x_2 и x_5 не можат да бидат најголеми, па затоа најголем е x_3 или x_4. Да претпоставиме дека x_3 е најголем меѓу x_2, x_3, x_4, x_5. Значи $x_1 \ge x_3 \ge x_i$, $i = 2,4,5$. Тогаш $x_1x_3 \ge x_4^2$ и $x_1x_3 \ge x_5^2$ и од четвртото неравенство следува

$$(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) = 0\,.$$

Значи, $x_4^2 = x_1x_3$ и $x_5^2 = x_1x_3$, т.е. $x_1 = x_3 = x_4$ или $x_1 = x_3 = x_5$. Во првиот случај, ако барем еден од броевите x_2 и x_5 е строго помал од $x_1 = x_3 = x_4$ добиваме противречност со третата неравенка. Во вториот случај x_5 е најголем меѓу x_2, x_3, x_4, x_5, а тоа е можно само ако тие четири броеви се еднакви. Но, $x_1 = x_3$, па затоа сите броеви се еднакви меѓу себе, што повторно е противречност.

Аналогно се разгледува случајот кога x_4 е најголем меѓу x_2, x_3, x_4, x_5.

Во двата случаи добиваме противречност, што значи дека единствено решение е $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = a$, $a \in \mathbb{R}^+$.

5. Нека $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и нека за секои $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)\,.$$

Докажи дека ако функцијата f не е идентична на нула и ако $|f(x)|\le 1$, за секој $x\in\mathbb{R}$, тогаш $|g(y)|\le 1$ за секој $y\in\mathbb{R}$.

Решение. Нека $M=\sup|f(x)|$, (т.е. нека M е најмалиот од сите броеви k за кои $|f(x)|\le k$ за секое x). Бројот M постои бидејќи $|f(x)|\le 1$ и $M\ne 0$, бидејќи функцијата f не е идентично еднаква на нула. Тогаш е исполнето

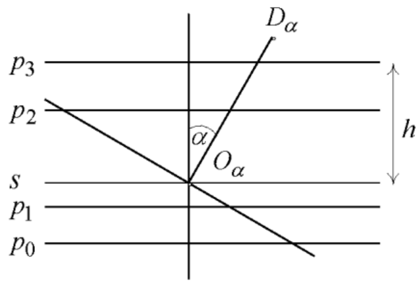
$$|2f(x)g(y)|=|f(x-y)+f(x+y)|\le|f(x-y)|+|f(x+y)|\le 2M$$

т.е. $|f(x)|\cdot|g(y)|\le M$ за секои x и y. Нека за некој y_0, $|g(y_0)|>1$. Тогаш за секој x, $|f(x)|\le\frac{M}{|g(y_0)|}<M$, па според тоа M не е супремум од $|f(x)|$, што противречи на претпоставката.

6. Дадени се четири различни паралелни рамнини. Докажи дека постои правилен тетраедар кој има по едно теме во секоја од дадените рамнини.

Решение. *Лема.* Нека во рамнина се дадени три паралелни прави. Тогаш постои единствен рамностран триаголник, таков што на секоја од правите се наоѓа по едно негово теме. Притоа должината на страната на рамностраниот триаголник зависи само од растојанието меѓу правите.

Доказ. Доволно е на една од правите да земеме произволна точка и една од другите две прави да ја ротираме за агол $\alpha=60^\circ$. Во пресекот со третата права го наоѓаме второто теме на рамностраниот триаголник. Сега лесно се конструира третото теме и се докажува тврдењето за должината на страната. ■



Нека π_0,π_1,π_2 и π_3 се дадени паралелни рамнини, при што претпоставуваме дека π_1,π_2 и π_3 се од иста страна на рамнината π_0, а нивните растојанија до π_0 ги означуваме со d_1,d_2 и d_3; ($0<d_1<d_2<d_3$). Земаме произволна рамнина ρ_α, таква што аголот меѓу нејзината нормала и нормалата на рамнината π_0 е α. Нејзините пресеци со рамнините π_0,π_1 и π_2 се паралелните прави $l_0^\alpha,l_1^\alpha,l_2^\alpha$. Ја применуваме лемата. Да забележиме дека растојанието од l_0^α до l_1^α и l_2^α е $\frac{d_1}{\sin\alpha}$ и $\frac{d_2}{\sin\alpha}$, соодветно. Нека $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ е рамностран триаголник чии темиња лежат на l_0^α,l_1^α и l_2^α, а должината на неговата страна е a_α. Со хомотетија во рамнината ρ_α, со центар во точката A_α и коефициент $k=\sin\alpha$ триаголникот $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ се пресликува во рамностран триаголник со должина на страната $a_\alpha\sin\alpha$ и со темиња на паралелни прави, од кои две се на растојание

d_1 и d_2 од третата права. Должината на страните на добиениот триаголник е еднозначно определена со големините d_1 и d_2 и таа е константна ако е фиксирана положбата на разгледуваните рамнини. Таа должина ќе ја означиме со a. Значи, $a = a_\alpha \sin\alpha$ или $a_\alpha = \frac{a}{\sin\alpha}$.

Ќе го пресметаме растојанието на тежиштето O_α на триаголникот $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ до рамнината π_0. Нека E_α е средина на страната $B_\alpha C_\alpha$. Ја разгледуваме рамнината која ја содржи правата $B_\alpha C_\alpha$ и е нормална на рамнината π_0. Растојанието меѓу точката E_α и рамнината π_0 е $\frac{d_1+d_2}{2}$. Ако низ правата $A_\alpha E_\alpha$ поставиме рамнина која е нормална на π_0, и земеме во предвид дека $\overline{A_\alpha O_\alpha} = \frac{2}{3}\overline{A_\alpha E_\alpha}$, добиваме дека растојанието од O_α до π_0 е $\frac{2}{3}\frac{d_1+d_2}{2} = \frac{d_1+d_2}{3}$, т.е. тоа не зависи од α. Тоа значи, дека тежиштата на сите можни рамнострани триаголници со темиња во рамнините π_0, π_1 и π_2 лежат во една рамнина σ која е на константно растојание од π_0, што значи и од π_3. Нека растојанието од σ до π_3 е h.

Конструираме правилен тетраедар $A_\alpha B_\alpha C_\alpha D_\alpha$, чија основа е конструираниот триаголник $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$, при што од двете можности за D_α ја бираме онаа за која D_α е подалеку од π_0. Должината на висината $D_\alpha O_\alpha$ на конструираниот тетраедар е $a_\alpha\sqrt{\frac{2}{3}}$. Разгледуваме рамнина низ правата $D_\alpha O_\alpha$ која е нормална на π_0. Тогаш (види цртеж) p_0, p_1, p_2, p_3 и s се пресеците на таа рамнина со рамнините $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ и σ, од каде D_α е од оддалечена од σ за $a_\alpha \cos\alpha\sqrt{\frac{2}{3}} = a\mathrm{ctg}\alpha\sqrt{\frac{2}{3}}$. За да точката D_α припаѓа на рамнината π_3 потребно и доволно е најденото растојание да е еднакво на h, т.е. $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{h}{a}\sqrt{\frac{3}{2}}$. Бидејќи таков агол α постои, доказот на тврдењето е завршен.

XV олимпијада

1. Дадена е права l и точка $O \in l$. Нека $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, ..., \overrightarrow{OP_n}$ се единечни вектори во иста рамнина на која и припаѓа правата l и такви што точките $P_1, P_2, ..., P_n$ се наоѓаат на иста страна од правата l. Докажи дека, ако n е непарен број, тогаш

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + ... + \overrightarrow{OP_n}| \geq 1.$$

Решение. Тврдењето на задачата ќе го докажеме со индукција по n. За $n = 1$ тврдењето очигледно е точно.

Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за некој непарен број точки n. Нека се дадени $n+2$ точки. Точките можеме да ги пренумерираме така што

$$\measuredangle(l, \overrightarrow{OP_1}) < \measuredangle(l, \overrightarrow{OP_2}) < \measuredangle(l, \overrightarrow{OP_3}) < ... < \measuredangle(l, \overrightarrow{OP_{n+2}}) < \pi.$$

Во рамнината во која се наоѓаат точките поставуваме координатен систем на следниот начин: $y-$оската е симетрала на аголот $\measuredangle P_{n+2}OP_1$, а $x-$оската минува низ точката O. Ако (x_i, y_i) се координати на точките P_i, во избраниот координатен систем, тогаш $y_i \geq 0$ и $x_1 = -x_{n+2}$, $y_1 = y_{n+2}$, па според тоа

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + ... + \overrightarrow{OP_{n+2}}|^2 &= (x_1 + x_2 + ... + x_{n+2})^2 + (y_1 + y_2 + ... + y_{n+2})^2 \\
&= (x_2 + x_3 + ... + x_{n+1})^2 + (y_1 + y_2 + ... + y_{n+2})^2 \\
&\geq (x_2 + x_3 + ... + x_{n+1})^2 + (y_2 + y_3 + ... + y_{n+1})^2 \\
&= |\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + ... + \overrightarrow{OP_{n+1}}|^2.
\end{aligned}$$

Од индуктивната претпоставка имаме

$$|\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + ... + \overrightarrow{OP_{n+1}}| \geq 1,$$

па затоа

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + ... + \overrightarrow{OP_{n+2}}| \geq 1.$$

2. Дали постои конечно множество од точки M во просторот кои што не лежат во иста рамнина, такви што за секои две точки A и B од M постојат други две точки C и D од M такви што правите AB и CD се паралелни и различни?

Решение. Во рамнина такво множество точки се темињата на правилниот шестаголник.

Последното множество точки ќе го искористиме за конструкција на бараното множество точки во просторот. Ги земаме темињата на два правилни шестаголници кои имаат ист центар на симетрија и не лежат во една рамнина. Ова множество точки ги има бараните својства. Ако точките A и B се темиња на ист шестаголник, тогаш за C и D се земаат точки кои се централно симетрични во однос на центарот на симетрија на шестаголникот. Нека сега точките A и B припаѓаат на различни шестаголници. Повторно можеме да земеме централно симетрични слики на точките A и B во однос на заедничкиот центар на симетрија, кои исто така припаѓаат на даденото множество точки.

3. Најди ја најмалата вредност на изразот a^2+b^2, $a,b\in\mathbb{R}$ за кои равенката

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

има барем едно реално решение.

Решение. Да претпоставиме дека равенката има решение $x>0$. За ова решение важи

$$x^4-|a|x^3-|b|x^2-|a|x+1\leq x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0\,,$$

или

$$x^4+1\leq|a|x^3+|b|x^2+|a|x\,.$$

Лесно се докажуваат неравенствата

$$x^4+1\geq 2x^2 \text{ и } x^4+1\geq x^3+x\,.$$

Од претходните неравенства имаме

$$x^4+1\leq|a|(x^4+1)+|b|\tfrac{x^4+1}{2}=(x^4+1)(|a|+\tfrac{|b|}{2})\,.$$

Според тоа, $|a|+\frac{|b|}{2}\geq 1$ т.е. $|b|\geq 2-2|a|$.

Ако $|a|\geq 1$, тогаш $a^2+b^2\geq 1$. Ако $|a|<1$, тогаш

$$a^2+b^2\geq|a|^2+(2-2|a|)^2=5(|a|-\tfrac{4}{5})^2+\tfrac{4}{5}\geq\tfrac{4}{5}\,.$$

Ако равенката има негативно решение x, тогаш $-x$ е позитивно решение на равенката

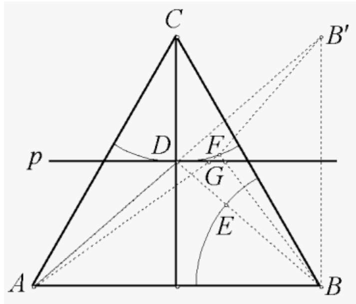
$$x^4-ax^3+bx^2-ax+1=0\,.$$

Сега на овој случај го применуваме претходниот заклучок. Не може да биде $x=0$.

Значи, во секој случај $a^2+b^2\geq\frac{4}{5}$. Знак за равенство важи за $a=-\frac{4}{5}$, $b=-\frac{2}{5}$.

4. Војник треба да провери дали во област која има облик на рамностран триаголник (вклучувајќи ја и неговата граница) има мини. Неговиот детектор има радиус на дејствување еднаков на половина од должината на висината на триаголникот. Војникот тргнува од едно теме на триаголникот. Како треба да се движи војникот за да ја исполни задачата, а притоа да помине пат со најмала можна должина.

Решение. Нека војникот поаѓа од темето A. За да ги испита темињата B и C, мора да дојде до кружните лаци со радиус $\frac{h}{2}$ (h е висина на триагол-



никот) и центри во B и C. Нека на почеток бил на лакот со центар во C, а потоа на лакот со центар во B. Ако на овој пат се додаде патот до темето B, задачата се сведува на барање на најкраток пат од A до B, при услов да дојде на лакот со центар во C. Ќе докажеме дека најкраток таков пат е патот $ADB,$ каде што D е средината на висината повлечена од темето C. Нека E е пресек на отсечката BD и лакот со центар во $B,$ а F е било која точка на лакот со центар во C. Низ D повлекуваме права $p \| AB$ и точката B ја пресликуваме симетрично во однос на таа права. Добиената точка ја означуваме со B', а со G го означуваме пресекот на отсечката FB и правата p. Тогаш

$$\overline{AF}+\overline{FB}=\overline{AF}+\overline{FG}+\overline{GB}\geq \overline{AB'}=\overline{AD}+\overline{DB}$$

(точките A, D, B' се на иста права). Значи, ADB е најкраткиот пат од A до B, па решение на задачата е патот ADE. (Сега не е тешко да се покаже дека може да се испита целата област).

5. Нека G е непразно множество реални функции од облик $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, кои ги задоволуваат условите:

1° ако $f,g\in G$, тогаш $g\circ f\in G$, каде $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

2° ако $f=ax+b$, тогаш инверзната функција $f^{-1}\in G$, каде $f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$;

3° за секоја $f\in G$ постои x_f, таков што $f(x_f)=x_f$.

Докажи дека постои $k\in\mathbb{R}$ таков што $f(k)=k$ за секоја $f\in G$.

Решение. Ако функцијата $f(x)=x+b$ припаѓа на множеството G, тогаш $b=0$ (според 2°), т.е. тогаш $f(x)=x$. Затоа можеме да претпоставиме дека постојат барем две функции $f_1(x)=a_1x+b_1$ и $f_2(x)=a_2x+b_2$, такви што $a_1\neq 1$ и $a_2\neq 1$. Тогаш, $x_{f_1}=\frac{b_1}{1-a_1}$ и $x_{f_2}=\frac{b_2}{1-a_2}$. Од 1° и 2° имаме

$$g=f_1\circ f_2\in G \quad \text{и} \quad h=f_2\circ f_1\in G \quad \text{и} \quad g\circ h^{-1}\in G .$$

Според тоа,

$$g(x)=a_1(a_2x+b_2)+b_1,\ h(x)=a_2(a_1x+b_1)+b_2,$$

$$h^{-1}(x)=\frac{x-a_2b_1-b_2}{a_1a_2},\ (a_1a_2\neq 0),\ g\circ h^{-1}(x)=x+[(a_1b_2+b_1)-(a_2b_1+b_2)].$$

Бидејќи $g\circ h^{-1}\in G$ и бидејќи коефициентот пред x во $g\circ h^{-1}$ е еднаков на 1, мора да е исполнето $(a_1b_2+b_1)-(a_2b_1+b_2)=0$. Значи, $\frac{b_1}{1-a_1}=\frac{b_2}{1-a_2}$ т.е. $x_{f_2}=x_{f_1}$, што и требаше да се докаже.

6. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се дадени позитивни реални броеви и $q\in\mathbb{R}$, $0<q<1$. Определи n реални броеви $b_1,b_2,...,b_n$ такви што

а) $a_k<b_k$, за $k=1,2,3,...,n$,

б) $q<\frac{b_{k+1}}{b_k}<\frac{1}{q}$, за $k=1,2,3,...,n-1$, и

в) $b_1+b_2+...+b_n<\frac{1+q}{1-q}(a_1+a_2+...+a_n)$.

Решение. Ќе докажеме дека броевите

$$b_k=a_1q^{k-1}+a_2q^{k-2}+a_3q^{k-3}+...+a_{k-1}q+a_k+a_{k+1}q+...+a_nq^{n-k}$$

ги задоволуваат условите а), б) и в).

Јасно, условот а) е исполнет. Ако $1\le k\le n-1,$ тогаш

$$qb_k-b_{k+1}=a_{k+1}(q^2-1)+...+a_nq^{n-k-1}(q^2-1)<0,$$

и аналогно $qb_{k+1}-b_k<0$, па според тоа и условот б) е исполнет. Конечно,

$$\begin{aligned}b_1+b_2+...+b_n &= a_1+a_2q+...+a_nq^{n-1}+\\ &\quad a_1q+a_2+a_3q+...+a_nq^{n-2}+\\ &\quad ....\\ &\quad +a_1q^{n-1}+a_2q^{n-2}+...+a_n\\ &< a_1(1+q+...+q^{n-1})+a_2(1+2q+q^2+...+q^{n-2})+\\ &\quad +a_3(1+2q+...+q^{n-3})+...+a_n(1+q+q^2+...+q^{n-1})\\ &< (a_1+...+a_n)(1+2q+2q^2+...+2q^{n-1})\\ &= (a_1+...+a_n)(1+2q\tfrac{1-q^{n-1}}{1-q})\\ &< (a_1+...+a_n)\tfrac{1+q}{1-q}.\end{aligned}$$

XVI олимпијада

1. Дадени се три карти и на секоја од нив е напишан по еден природен број. Овие броеви p, q и r го задоволуваат условот $0 < p < q < r$. Тројца играчи A, B и C играат игра во која еден круг се состои во следното: картите се мешаат и се делат така што секој играч добива по една карта и потоа секој играч добива онолку топчиња колку што е бројот запишан на неговата карта, по што картите се враќаат, а топчињата остануваат кај играчите. Играта има N кругови, $N \geq 2$. На крајот на играта, играчот A имал вкупно 20 топчиња, $B-10$ топчиња, а $C-9$ топчиња.

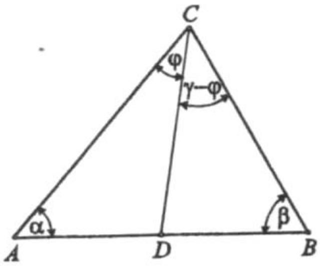
   Познато е дека во последниот круг играчот B добил r топчиња. Кој од играчите добил q топчиња во првиот круг?

   Решение. Вкупниот број на поделени топчиња во играта е
$$N(p+q+r) = 20+10+9 = 39\,.$$
   Бидејќи $N \geq 2$ и $p+q+r \geq 1+2+3 = 6$, мора да е $N = 3$ и $p+q+r = 13$. Играчот B во последниот круг добил r топчиња, а вкупно добил 10 топчиња и бидејќи $p+q+r = 13 > 10$, тој во првите два круга мора да добил по p топчиња. Тоа значи, дека C во првите два круга добил барем по q топчиња. Ако тој во еден круг добие r топчиња, тогаш вкупно би ги имал барем $r+q+p = 13$, што не е можно, бидејќи вкупно добил само 9 топчиња.

   Значи, распоредот на топчињата е:
$$A: r, r, q; \quad B: p, p, r; \quad C: q, q, p.$$
   Броевите p, q и r може да се одредат со следниот систем линеарни равенки:
$$\begin{aligned} q+2r &= 20 \\ 2p+r &= 10 \\ p+2q &= 9 \end{aligned}$$
   т.е. $p = 1, q = 4$ и $r = 8$.

2. Даден е $\triangle ABC$ со агли α, β, γ во темињата A, B, C. Докажи дека неравенството
$$\sin\alpha \cdot \sin\beta \leq \sin^2\frac{\gamma}{2}$$
   важи ако и само ако на страната AB постои точка D таква што должината на отсечката CD е геометриска средина на должините на отсечките AD и BD.

   Решение. *Прв начин.* Нека D е точка на страната AB на $\triangle ABC$. Со примена на синусната теорема за триаголниците ADC и DBC добиваме
$$\frac{\overline{AD}}{\sin\varphi} = \frac{\overline{CD}}{\sin\alpha} \text{ и } \frac{\overline{BD}}{\sin(\gamma-\varphi)} = \frac{\overline{CD}}{\sin\beta}$$



каде што $\varphi = \measuredangle DCA$, (цртеж десно). Според тоа

$$\overline{AD}\cdot\overline{BD} = \overline{CD}^2\,\frac{\sin\varphi\cdot\sin(\gamma-\varphi)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

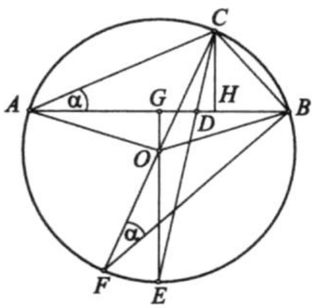
Значи, точка D која ги задоволува условите на задачата постои ако и само ако постои агол φ $(0<\varphi<\gamma)$, таков што

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \sin\varphi\cdot\sin(\gamma-\varphi).$$

Да претпоставиме дека таква точка постои. Тогаш е исполнето

$$\begin{aligned}\sin\alpha\cdot\sin\beta &= \sin\varphi\cdot\sin(\gamma-\varphi)\\ &\le [\tfrac{1}{2}(\sin\varphi+\sin(\gamma-\varphi))]^2\\ &= (\sin\tfrac{\gamma}{2}\cos\tfrac{\gamma-2\varphi}{2})^2 \le \sin^2\tfrac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

Од друга страна, ако $\sin\alpha\cdot\sin\beta \le \sin^2\frac{\gamma}{2}$, тогаш ја разгледуваме функција $f(x)=\sin x\cdot\sin(\gamma-x)$. Таа е непрекината на интервалот $[0,\frac{\gamma}{2}]$ и важи $f(0)=0$ и $f(\frac{\gamma}{2})=\sin^2\frac{\gamma}{2}$. Бидејќи, $f(0)<\sin\alpha\cdot\sin\beta\le f(\frac{\gamma}{2})$, тогаш мора да постои $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$, таков што $f(\varphi)=\sin\varphi\cdot\sin(\gamma-\varphi)=\sin\alpha\cdot\sin\beta$.



Втор начин. Нека O е центарот и r е радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, (цртеж десно). Нека D е произволна точка од страната AB и нека правата CD по втор пат ја сече опишаната кружница во точката E. Тогаш $\overline{AD}\cdot\overline{BD}=\overline{CD}\cdot\overline{DE}$. Значи отсечката CD е геометриска средина на отсечките AD и BD ако и само ако $\overline{CD}=\overline{DE}$, т.е. ако и само ако точката D е средина на отсечката CE. Лесно се гледа дека таква точка постои ако и само ако должината на висината CH не е поголема од должината на отсечката GE, т.е. $\overline{CH}\le\overline{GE}$. Нека CF ењ дијаметар на опишаната кружница. Затоа $\overline{CB}=2r\sin\alpha$ и $\overline{CH}=\overline{CB}\cdot\sin\beta=2r\sin\alpha\sin\beta$. Бидејќи $\measuredangle AOE=\measuredangle EOB=\gamma$ и $\measuredangle GOB=\pi-\gamma$, следува $\overline{GE}=r-r\cos\gamma=2r\sin^2\frac{\gamma}{2}$. Од условот $\overline{CH}\le\overline{GE}$ се добива неравенството кое требаше да се докаже.

3. Нека $n\in\mathbb{N}$. Докажи дека бројот $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}\cdot 2^{3k}$ не е делив со 5.

Решение. Од бинимната формула за изразот $(1+\sqrt{8})^{2n+1}$ добиваме

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{8})^{2n+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}\sqrt{8}^{2k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}\sqrt{8}^{2k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}8^{k} + \sqrt{8}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}8^{k}\\ &= a_n + b_n\sqrt{8},\end{aligned}$$

каде што $a_n, b_n \in \mathbb{N}$. Доволно е да докажеме дека ниту еден од броевите $b_1, b_2, \ldots$ не е делив со 5.

I *начин*. Ако ги помножиме равенствата

$$(1+\sqrt{8})^{2n+1} = a_n + b_n\sqrt{8} \quad \text{и} \quad (1-\sqrt{8})^{2n+1} = a_n - b_n\sqrt{8},$$

добиваме $a_n^2 + 7^{2n+1} = 8b_n^2$. Ако некој од броевите b_n е делив со 5, тогаш бројот $a_n^2 + 7^{2n+1}$ ќе биде делив со 10. Последното не е можно бидејќи цифрата на единиците на бројот a_n^2 може да биде 0, 1, 4, 6 или 9, а на бројот 7^{2n+1} само 3 или 7.

II *начин*. За $n \geq 0$ имаме

$$\begin{aligned}a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{8} &= (1+\sqrt{8})^{2n+3} = (1+\sqrt{8})^2(1+\sqrt{8})^{2n+1}\\ &= (9+2\sqrt{8})(a_n + b_n\sqrt{8})\\ &= (9a_n + 16b_n) + (2a_n + 9b_n)\sqrt{8},\end{aligned}$$

од каде што добиваме

$$a_{n+1} = 9a_n + 16b_n, \quad b_{n+1} = 2a_n + 9b_n, \quad (n = 0,1,2,\ldots).$$

Од $(1+\sqrt{8})^{2\cdot 0+1} = 1+\sqrt{8}$, $a_o = 1$ и $b_o = 1$, добиваме:

$$\begin{array}{ll}
a_0 \equiv 1 \pmod 5 & b_0 \equiv 1 \pmod 5\\
a_1 \equiv 0 \pmod 5 & b_1 \equiv 1 \pmod 5\\
a_2 \equiv 1 \pmod 5 & b_2 \equiv -1 \pmod 5\\
a_3 \equiv -2 \pmod 5 & b_3 \equiv -2 \pmod 5\\
a_4 \equiv 0 \pmod 5 & b_4 \equiv -2 \pmod 5\\
a_5 \equiv -2 \pmod 5 & b_5 \equiv 2 \pmod 5\\
a_6 \equiv -1 \pmod 5 & b_6 \equiv -1 \pmod 5\\
a_7 \equiv 0 \pmod 5 & b_7 \equiv -1 \pmod 5\\
a_8 \equiv -1 \pmod 5 & b_8 \equiv 1 \pmod 5\\
a_9 \equiv 2 \pmod 5 & b_9 \equiv 2 \pmod 5\\
a_{10} \equiv 0 \pmod 5 & b_{10} \equiv 2 \pmod 5\\
a_{11} \equiv 2 \pmod 5 & b_{11} \equiv -2 \pmod 5\\
a_{12} \equiv 1 \pmod 5 & b_{12} \equiv 1 \pmod 5
\end{array}$$

Сега тврдењето на задачата следува од $a_0, a_{12} \equiv 1(\bmod 5)$ и $b_0, b_{12} \equiv 1(\bmod 5)$, што значи дека

$$b_k = \sum_{k=}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k} \not\equiv 0(\bmod 5)$$

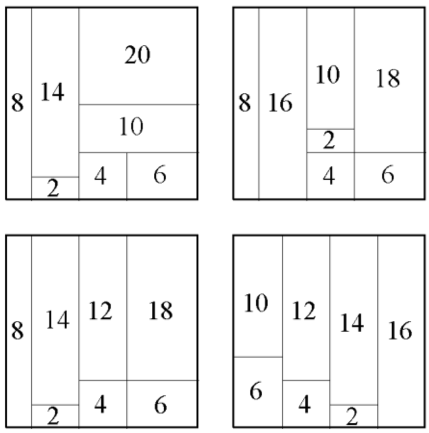
што и требаше да се докаже.

4. Разгледуваме поделби на шаховска 8×8 табла на p правоаголници кои немаат заеднички внатрешни точки, такви што секоја поделба ги задоволува условите:
а) Секој правоаголник се состои од еднаков број бели и црни полиња.
б) Ако со a_i го означиме бројот на бели полиња во $i-$тиот правоаголник, тогаш $a_1 < a_2 < a_3 < .... < a_p$.
Најди ја најголемата вредност на p за која ваква поделба е можна. За вака најденото p најди ги сите можни низи броеви $a_1, a_2, a_3, ..., a_p$.
Решение. Вкупниот број на бели полиња е $a_1 + a_2 + ... + a_p = 32$.
Бидејќи сите броеви a_i се различни меѓу себе исполнето е неравенството

$$a_1 + a_2 + ... + a_p \geq 1+2+3+...+p$$
$$= \frac{p(p+1)}{2},$$

од каде се добива $p \leq 7$. Бројот 32 може да се запише на следниве пет начини како збир од седум меѓусебно различни броеви:

$$32 = 1+2+3+4+5+6+11$$
$$= 1+2+3+4+5+7+10$$
$$= 1+2+3+4+5+8+9$$
$$= 1+2+3+4+6+7+9$$
$$= 1+2+3+5+6+7+8.$$



На првиот од овие начини не соодветствува ниту една поделба на шаховската табла, бидејќи на неа не може да се смести правоаголник со 22 полиња. На останатите случаи соодветствуваат поделби како на горните цртежи.

5. Нека a, b, c и d се произволни позитивни реални броеви. Најди го множеството можни вредности на изразот

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}.$$

Решение. Бидејќи броевите a, b, c, d се позитивни, точни се неравенствата

$$\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+d} < \frac{a}{a+b}$$
$$\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{a+b}$$
$$\frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{b+c+d} < \frac{c}{c+d}$$
$$\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{a+c+d} < \frac{d}{c+d}.$$

Ако овие неравенства ги собереме, добиваме $1 < S < 2$. Земаме $a=1$, $b=x$, $c=1-x$, $d=(1-x)x$, каде што $0<x<1$, и добиваме

$$S = f(x) = \frac{1}{1+2x-x^2} + \frac{x}{2} + \frac{1-x}{1+x-x^2} + \frac{x-x^2}{2-x^2}.$$

Функцијата $f(x)$ е непрекината за $0<x<1$ и притоа важи

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1.$$

Според тоа, бараното множество вредности е интервалот $(1,2)$.

6. Нека P е полином со целобројни коефициенти, различен од константа. Со $n(P)$ го означуваме бројот на различните цели броеви k за кои $[P(k)]^2=1$.

Докажи дека $n(P)-\deg(P)\le 2$, каде со $\deg(P)$ е означен степенот на полиномот P.

Решение. Да забележиме дека $[P(k)]^2=1$ ако и само ако $P(k)=1$ или $P(k)=-1$. Ако не постои цел број k таков што $[P(k)]^2=1$, тогаш тврдењето очигледно важи бидејќи $n(P)=0\le\deg(P)<\deg(P)+2$. Исто така тврдењето важи и ако постои цел број k за кој $P(k)=-1$, но не постои цел број k за кој $P(k)=1$. Навистина, полиномот не може да добива иста вредност поголем број пати отколку што е неговиот степен. Истото важи и за симетричниот случај кога постои k за кој важи $P(k)=1$, но не постои k таков што $P(k)=-1$.

Нека k_1 и k_2 се цели броеви такви што $P(k_1)=1$ и $P(k_2)=-1$. Тогаш, бидејќи P е полином со целобројни коефициенти, добиваме

$$P(k_1)-P(k_2)=(k_1-k_2)A$$

каде што $A\in\mathbb{Z}$, т.е. $2=(k_1-k_2)A$, па затоа $k_1-k_2\in\{1,-1,2,-2\}$. Тоа значи дека равенката $[P(k)]^2=1$ има најмногу 5 различни решенија: k_2 на $P(k_2)=-1$ и $k_1=k_2\pm1$, односно $k_1=k_2\pm 2$ на $P(k_1)=1$.

Ако $\deg(P)\ge 3$, тогаш $n(P)\le 5\le \deg P+2$, т.е. $n(P)-\deg(P)\le 2$.

Ако $\deg(P)=1$ или $\deg P=2$, тогаш $n(p)\le 2$ односно $n(P)\le 4$, па затоа и во двата случаја важи $n(P)-\deg(P)\le 2$.

XVII олимпијада

1. Нека $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ и нека

$$x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_n \ , \ y_1 \ge y_2 \ge ... \ge y_n .$$

Докажи дека за секоја пермутација $z_1, z_2, ..., z_n$ на броевите $y_1, y_2, ..., y_n$ важи:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 .$$

Решение. *Прв начин*. Лесно се докажува дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \le \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (1)$$

Неравенството (1) ќе го докажеме со на математичка индукција.

За $n = 1$ неравенството очигледно е точно.

Нека претпоставиме дека тоа е точно за некој природен број n. Ќе докажеме дека тоа е точно и за $n+1$. Разгледуваме две можности.

1) $z_{n+1} = y_{n+1}$. Во овој случај $z_1, z_2, ..., z_n$ е пермутација на броевите $y_1, y_2, ..., y_n$, па според индуктивната претпоставка следува дека важи неравенството (1). Ако на левата и десната страна додадеме $x_{n+1} y_{n+1}$ добиваме дека неравенството (1) е точно и за $n+1$ броеви.

2) $z_k = y_{n+1}$, $k \ne n+1$. Нека $z_1', z_2', ..., z_n', z_{n+1}'$ е пермутација на броевите $z_1, z_2, ..., z_n, z_{n+1}$ која што се добива со замена на $k-$тиот и $n+1-$от член. Тогаш

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i' - \sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i = x_k y_l + x_{n+1} y_{n+1} - x_k y_{n+1} - x_{n+1} y_l$$
$$= (x_k - x_{n+1})(y_l - y_{n+1}) \ge 0$$

каде што $y_l = z_{n+1}$. Бидејќи $\sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i \le \sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i'$ доволно е да се докаже дека

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i' \le \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i .$$

Последното неравенство е докажано во 1).

Втор начин. Точни се неравенствата

$$x_1 - x_2 \ge 0 , \ x_2 - x_3 \ge 0 , ..., \ x_{n-1} - x_n \ge 0 ;$$

$$z_1 \le y_1 , \ z_1 + z_2 \le y_1 + y_2 , ..., \ z_1 + z_2 + ... + z_n \le y_1 + y_2 + ... + y_n .$$

Даденото неравенство е еквивалентно на неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \le \sum_{i=1}^{n} x_i y_i ,$$

кое може да се докаже на следниот начин:

$$x_1z_1+x_2z_2+\ldots+x_nz_n=(x_1-x_2)z_1+(x_2-x_3)(z_1+z_2)+\ldots$$
$$+(x_{n-1}-x_n)(z_1+z_2+\ldots+z_n)+x_n(z_1+z_2+\ldots+z_n)$$
$$\le(x_1-x_2)y_1+(x_2-x_3)(y_1+y_2)+\ldots$$
$$+(x_{n-1}-x_n)(y_1+y_2+\ldots+y_n)++x_n(y_1+y_2+\ldots+y_n)$$
$$=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n.$$

2. Нека $a_1,a_2,a_3,\ldots$ е строго растечка низа природни броеви. Докажи дека низата содржи бесконечно многу членови a_m кои може да се претстават во облик

$$a_m=xa_p+ya_q$$

каде x и y се природни броеви и $p\ne q$.

Решение. Сите броеви од низата $\{a_i\}$ ги делиме во a_1 групи на следниот начин:

$$A_0=\{a_i\mid a_i\equiv 0(\mathrm{mod}\,a_1)\}$$
$$A_1=\{a_i\mid a_i\equiv 1(\mathrm{mod}\,a_1)\}$$
$$A_2=\{a_i\mid a_i\equiv 2(\mathrm{mod}\,a_1)\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{a_1-1}=\{a_i\mid a_i\equiv a_1-1(\mathrm{mod}\,a_1)\}.$$

Од овие множества барем едно е бесконечно, бидејќи во спротивно множеството вредности на низата би било конечно, што не е можно бидејќи низата строго монотоно расте. Нека A_r е бесконечно множество. Тогаш, за секои два елементи a_m и a_p ($a_m>a_p$) од тоа множество е исполнето

$$a_m=la_1+r\,,\ a_p=sa_1+r$$

од што следува

$$a_m-a_p=(l-s)a_1$$

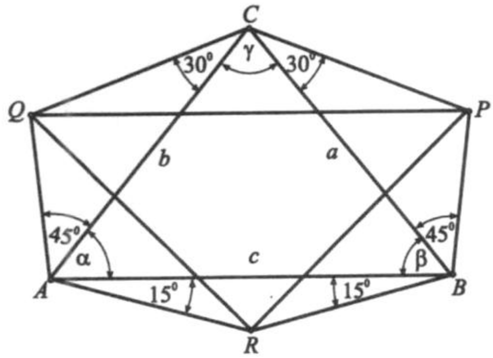
т.е. при ознака $l-s=y$, имаме $a_m=a_p+ya_1$. При тоа важи $a_q=a_1$ и $x=1$. Такви броеви a_m има бесконечно многу.

3. Над страните на произволен триаголникот ABC од надворешна страна се конструирани триаголници BPC, QAC и ARB такви што

$$\measuredangle CBP=\measuredangle QAC=45^\circ,$$
$$\measuredangle PCB=\measuredangle ACQ=30^\circ,$$
$$\measuredangle RBA=\measuredangle BAR=15^\circ.$$

Докажи дека $\measuredangle QRP=90^\circ$ и $\overline{QR}=\overline{RP}$.

Решение. Нека α, β, γ се аглите при темињата A, B, C ; a, b, c се спротивните страни на темињата и P е плоштината на $\triangle ABC$. Од синусната теорема добиваме



$$\overline{CP} = a\frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{a}{\sqrt{2}\cos 15^\circ},$$

$$\overline{CQ} = b\frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{b}{\sqrt{2}\cos 15^\circ},$$

па затоа од косинусната теорема следува

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= \overline{CP}^2 + \overline{CQ}^2 - 2\overline{CP}\,\overline{CQ}\cos(\gamma + 60^\circ)\\ &= \frac{a^2}{2\cos^2 15^\circ} + \frac{b^2}{2\cos^2 15^\circ} - 2\frac{ab}{2\cos^2 15^\circ}(\tfrac{1}{2}\cos\gamma - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\gamma)\\ &= \frac{a^2}{2\cos^2 15^\circ} + \frac{b^2}{2\cos^2 15^\circ} - \frac{a^2+b^2-c^2}{4\cos^2 15^\circ} + \frac{P\sqrt{3}}{\cos^2 15^\circ}\\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{4\cos^2 15^\circ} + \frac{P\sqrt{3}}{\cos^2 15^\circ}.\end{aligned}$$

Повторно од синусната теорема следува

$$\overline{AQ} = b\frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{b}{2\cos 15^\circ},\ \overline{AR} = c\frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{2\cos 15^\circ}.$$

па затоа

$$\begin{aligned}\overline{QR}^2 &= \overline{AQ}^2 + \overline{AR}^2 - 2\overline{AQ}\,\overline{AR}\cos(\alpha + 60^\circ)\\ &= \frac{b^2}{4\cos^2 15^\circ} + \frac{c^2}{4\cos^2 15^\circ} - 2\frac{bc}{4\cos^2 15^\circ}(\tfrac{1}{2}\cos\alpha - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha)\\ &= \frac{b^2}{2\cos^2 15^\circ} + \frac{c^2}{2\cos^2 15^\circ} - \frac{b^2+c^2-a^2}{8\cos^2 15^\circ} + \frac{P\sqrt{3}}{\cos^2 15^\circ}\\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{8\cos^2 15^\circ} + \frac{P\sqrt{3}}{2\cos^2 15^\circ}.\end{aligned}$$

На сличен начин се покажува дека

$$\overline{PR}^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{8\cos^2 15^\circ} + \frac{P\sqrt{3}}{2\cos^2 15^\circ}.$$

Од досега изнесеното следува дека

$$\overline{PR} = \overline{QR} \text{ и } \overline{PR}^2 + \overline{QR}^2 = \overline{PQ}^2,$$

што значи дека триаголникот PQR е рамнокрак и правоаголен со прав агол кај темето R.

4. Нека A е збирот на цифрите на бројот 4444^{4444} и B збирот на цифрите на бројот A. Определи го збирот на цифрите на бројот B.

(Сите броеви се запишани во декаден броен систем).

Решение. Нека C е збирот на цифрите на бројот B. Бидејќи $4444 < 10000$, важи

$$4444^{4444} < 10000^{4444}.$$

Бројот на цифрите на 10000^{4444} е еднаков на $1+4\cdot 4444 = 17777$. Според тоа, бројот на цифрите на 4444^{4444} е помал или еднаков на 17777, што значи дека е помал од 20000. Најголемиот број кој има 20000 цифри е бројот N кој има 20000 деветки. Збирот на цифрите на N е $20000\cdot 9 = 180000$, па затоа $A < 180000$. Бројот кој е помал од 180000 и има најголем збир на цифри е бројот 99999. Затоа за збирот на цифрите на бројот A е исполенто $B \leq 9\cdot 5 = 45$. Бројот кој е помал од 45 и има наголем збир на цифри е 39, па затоа $C \leq 3+9 = 12$. Понатаму, ако искористиме дека остатокот на бројот M при делење со 9 е еднаков на остатокот при делење на збирот на цифрите на бројот N со 9, добиваме дека

$$4444^{4444} \equiv A \equiv B \equiv C \pmod 9.$$

Ќе го определиме остатокот од делењето на бројот 4444^{4444} со 9. Од $4444 \equiv -2 \pmod 9$ следува

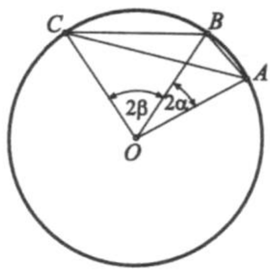
$$4444^{4444} \equiv (-2)^{4444} = 2^{3\cdot 1481+1} = 2\cdot 8^{1481} \equiv 2\cdot(-1)^{1481} \equiv -2 \equiv 7 \pmod 9.$$

Според тоа, $C \equiv 7 \pmod 9$. Природниот број C ги задоволува условите $C \leq 12$ и $C \equiv 7 \pmod 9$, па затоа $C = 7$.

5. Дали може на кружница со радиус 1 да се изберат 1975 точки, такви што растојанието меѓу секои две од нив да биде рационален број?

Решение. Нека A, B, C се три точки на дадената кружница со центар во точката O и $\measuredangle AOB = 2\alpha$, $\measuredangle BOC = 2\beta$. Тогаш $\measuredangle AOC = 2(\alpha+\beta)$ и

$$\overline{AB} = 2\sin\alpha,\ \overline{BC} = 2\sin\beta,\ \overline{AC} = 2\sin(\alpha+\beta).$$



Од $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, следува дека растојанијата меѓу точките A, B, C ќе бидат рационални броеви ако $\sin\alpha, \cos\beta, \cos\alpha, \sin\beta$ се рационални броеви. Ќе го користиме идентитетот

$$\left(\tfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)^2 + \left(\tfrac{2mn}{m^2+n^2}\right)^2 = 1$$

Земаме:

$$\sin\alpha = \tfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}, \quad \cos\alpha = \tfrac{2mn}{m^2+n^2},$$

а аналогно за аголот β.

Со замена на различни парови цели броеви m, n добиваме агли кои имаат рационален синус и косинус. Понатаму, земаме точка A на кружницата и нанесуваме два пати поголеми агли од најдените. Тогаш растојанието меѓу секои две од дадените точки е рационален број.

6. Определи ги сите хомогени полиноми од n-ти степен од две променливи такви што:

1° За секои три реални броеви a, b и c е исполнето

$$P(a+b,c)+P(b+c,a)+P(c+a,b)=0$$

2° $P(1,0)=1$.

Забелешка. Полином P е хомоген полином од n-ти степен ако за секои реални броеви t, x, y е исполнето $P(tx,ty)=t^n P(x,y)$, каде $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Ставаме $a=2x$, $b=c=-x$ и од условот 1° и дефиницијата на хомоген полином добиваме

$$2P_n(x,-x)+(-2)^n P_n(-x,x)=0 \tag{1}$$

Ставаме $a=x$, $b=-x$, $c=0$ и од $P_n(0,0)=0$ добиваме

$$P_n(x,-x)+P_n(-x,x)=0. \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме

$$P_n(x,-x)=P_n(-x,x)=0.$$

Значи, $P_n(x,y)=0$ за $y=-x$, па па затоа постои полином $Q_{n-1}(x,y)$ таков што

$$P_n(x,y)=(x+y)Q_{n-1}(x,y). \tag{3}$$

Го заменуваме (3) во условот 1° и добиваме

$$(a+b+c)[\,Q(a+b,c)+Q(b+c,a)+Q(c+a,b)]=0,$$

односно

$$Q(a+b,c)+Q(b+c,a)+Q(c+a,b)=0.$$

Да забележиме дека полиномот $Q_{n-1}(x,y)$ го има својството 1°, па според тоа заклучуваме дека и тој е делив со $x+y$ итн. се додека не дојдеме до полином од прв степен. Значи,

$$P_n(x,y)=(x+y)^{n-1}R_1(x,y). \tag{4}$$

Ако во условот 1° ставиме $a=b=c=y$, добиваме $P(2y,y)=0$, па според тоа $P(x,y)$ е делив со $x-2y$, односно

$$R_1(x,y)=k(x-2y).$$

Сега од (4) добиваме

$$P_n(x,y)=k(x-2y)(x+y)^{n-1}.$$

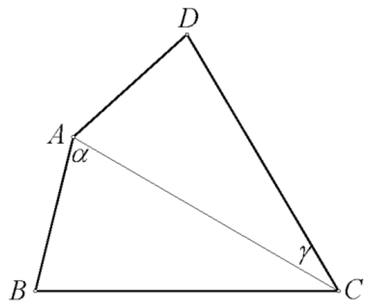
Бидејќи $P(1,0)=1$, добиваме $k=1$, што значи

$$P_n(x,y)=(x-2y)(x+y)^{n-1}.$$

Од доказот е јасно дека тоа е единствен полином од n-ти степен кој ги задоволува условите на задачата.

XVIII олимпијада

1. Даден е конвексен четириаголник со плоштина $32\,cm^2$ и збир на должините на две негови спротивни страни и една дијагонала, еднаков на $16\,cm$. Определи ги сите вредности кои може да ги има должината на другата дијагонала.



Решение. Нека во четириаголникот $ABCD$

$$\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{CD}=16\,. \qquad (1)$$

Неговата плоштина е еднаква на

$$2P=\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin\alpha+\overline{AC}\cdot\overline{CD}\sin\gamma\,,$$

каде што $\alpha=\measuredangle CAB$ и $\gamma=\measuredangle ACD$. Понатаму, точна е оценката

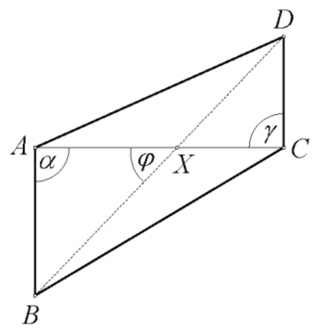
$$2P\le\overline{AB}\cdot\overline{AC}+\overline{AC}\cdot\overline{CD}=\overline{AC}(\overline{AB}+\overline{CD})\,,$$

па од (1) имаме

$$2P\le\overline{AC}(16-\overline{AC})\,,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\alpha=\gamma=90^\circ$. Изразот $x(16-x)$ прима најголема вредност 64 (за $x=8$), па затоа

$$2P\le 64\,. \qquad (2)$$



Според условот од задачата во (2) важи знак за равенство, па затоа $\overline{AC}=8$ и $\alpha=\gamma=90^\circ$. Понатаму, $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{CD}$, а тоа е можно ако аголот $\measuredangle AXB=\varphi$ меѓу AC и BD е еднаков на 45°. Тогаш

$$\overline{BD}=\overline{AB}\sqrt{2}+\overline{CD}\sqrt{2}=(\overline{AB}+\overline{CD})\sqrt{2}=8\sqrt{2}\,cm\,.$$

2. Нека

$$P_1(x)=x^2-2\,,\ P_k(x)=P_1(P_{k-1}(x))\,,\text{ за } k=2,3,...$$

Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ сите корени на равенката $P_n(x)=x$ се реални и меѓусебно различни броеви.

Решение. Лесно се забележува дека $P_n(x)$ е полином со степен 2^n. Ќе докажеме дека секое реално решение на $P_n(x)=x$ е од интервалот $(-2,2]$, за да потоа докажеме дека сите корени на разгледуваната равенка се реални и различни.

Нека $x>2$, т.е. $x=2+t$, за некој $t>0$. Тогаш, последователно добиваме

$$P_1(x) = 2+4t+t^2 > 2+4t$$
$$P_2(x) = [P_1(x)]^2 - 2 > (2+4t)^2 - 2 > 2+4^2 t$$
$$\vdots$$
$$P_n(x) = [P_{n-1}(x)]^2 - 2 > (2+4^{n-1}t)^2 - 2 = 2+4^n t > x,$$

За $x < -2$, т.е. $x = -2-t$ па $P_1(x) = 2+4t+t^2 > 2+4t > 2$. Како и погоре се докажува дека $P_n(x) > 2$. Затоа $x < -2$ не може да биде решение на равенката $P_n(x) = x$. За $x = -2$, $P_n(x) > 0$, па $x = -2$ не може да биде решение на равенката.

Сега можеме да претпоставиме дека $x = 2\cos\alpha,\ \alpha \in [0, \pi)$. Имаме

$$P_1(x) = x^2 - 2 = 4\cos^2\alpha - 2 = 2\cos 2\alpha$$
$$P_2(x) = P_1(P_1(x)) = 4\cos^2 2\alpha - 2 = 2\cos 2^2\alpha$$
$$\vdots$$
$$P_n(x) = P_1(P_{n-1}(x)) = 2\cos 2^n\alpha$$

што значи дека почетната равенка го добива обликот $\cos 2^n\alpha = \cos\alpha$.

Графикот на функцијата $f(\alpha) = \cos 2^n\alpha$ го сече графикот на функцијата $f(\alpha) = \cos\alpha$ на интервалот $[0,\pi)$ во 2^n различни точки α_i, $i = 1, 2, ..., 2^n$. На секоја од тие точки соодветствува по едно реално решение $x_i = 2\cos\alpha_i$. Такви решенија има 2^n и сите тие се реални и различни.

3. Кутија во облик на квадар може потполно да се исполни со коцки со должина на раб 1. Ако во неа се ставаат коцки чиј волумен е еднаков на 2, така што нивните рабови се паралелни со рабовите на кутијата, тогаш максималниот можен број на такви коцки потполнува точно 40% од волуменот на кутијата. Најди ги димензиите на сите кутии со тоа својство.

Решение. Очигледно е дека димензиите на секоја кутија со наведеното својство се природни броеви. Да ги означиме со m, n и p ($m \geq n \geq p$). Рабовите на коцка со волумен 2 се $\sqrt[3]{2}$ и во кутијата може да се сместат најмногу $[\frac{m}{\sqrt[3]{2}}][\frac{n}{\sqrt[3]{2}}][\frac{p}{\sqrt[3]{2}}]$ коцки. Волуменот на овие коцки е два пати поголем од бројот на коцките и тој е $0,4mnp$. На тој начи задачата се сведува на решавање во множеството природни броеви на равенката

$$2[\tfrac{m}{\sqrt[3]{2}}][\tfrac{n}{\sqrt[3]{2}}][\tfrac{p}{\sqrt[3]{2}}] = 0,4mnp,$$

т.е. на равенката $\frac{mnp}{[\frac{m}{\sqrt[3]{2}}][\frac{n}{\sqrt[3]{2}}][\frac{p}{\sqrt[3]{2}}]} = 5$, односно

$$f(m)f(n)f(p)=5,\ \ f(x)=\frac{x}{[\frac{x}{\sqrt[3]{2}}]}.$$

Непосредно се пресметува дека

$$f(2)=2,\ f(3)=\tfrac{3}{2},\ f(4)=\tfrac{4}{3},\ f(5)=\tfrac{5}{3},\ f(6)=\tfrac{3}{2},$$

а за $x>6$ добиваме

$$f(x)=\frac{x}{[\frac{x}{\sqrt[3]{2}}]}<\frac{x}{\frac{x}{\sqrt[3]{2}}-1}=\frac{x\sqrt[3]{2}}{x-\sqrt[3]{2}}<\frac{3}{2}=f(6).$$

Но, бидејќи $(\frac{3}{2})^3<5$, за производот $f(m)f(n)f(p)$ да биде 5, мора еден од множителите да биде 2 или $\frac{5}{3}$. Лесно се проверува дека едниот од множителите мора да биде 2 и тоа точно еднаш, а останатите два множители да се $\frac{5}{3}$ и $\frac{3}{2}$. Видовме дека $2=f(2), \frac{5}{3}=f(5)$ и $\frac{3}{2}=f(6)$, па затоа сите можни димензии се $2\times 3\times 5$ и $2\times 5\times 6$.

4. Најди го најголемиот производ на природни броеви чиј збир е еднаков на 1976.

Решение. Со N да го означиме најголемиот таков број. Нека

$$N=a_1a_2...a_n \text{ и } a_1+a_2+...+a_n=1976.$$

Ќе докажеме дека $a_i\le 4$. Ако за некој i е исполнето $a_i\ge 5$, тогаш наместо a_i можеме да земеме 2 или a_i-2, па во тој случај добиваме поголем производ, а збирот на множителите ќе остане непроменет. Последното следува од $2(a_i-2)>a_i$ и $2+(a_i-2)=a_i$. Исто така наместо четири земаме две двојки. Затоа $N=2^k3^l$ при што $2k+3l=1976$. Од $2^3<3^2$ и $2+2+2=3+3$, следува дека $k\in\{0,1,2\}$. Конечно, од $1976=3\cdot 658+2$, добиваме $k=1$ и $N=2\cdot 3^{658}$.

5. Даден е систем од p равенки со $q=2p$ непознати

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1q}x_q=0\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2q}x_q=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+...+a_{pq}x_q=0
\end{aligned}$$

во кој $a_{ij}\in\{-1,0,1\}$ $(i=1,2,...,p;\ j=1,2,...,q)$. Докажи дека постои решение $(x_1,x_2,...,x_q)$ на овој систем, такво што:

а) секој x_j $(j=1,2,...,q)$ е цел број,

б) барем за еден j $(1\le j\le q)$ важи $x_j\ne 0$, и

в) за секој $j=1,2,...,q$ важи $|x_j|\le q$.

Решение. За секоја $q-$торка $(y_1,y_2,...,y_q)$ цели броеви можеме да определиме $p-$торка цели броеви $(\beta_1,\beta_2,...,\beta_p)$ со формулите

$$\beta_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 ... + a_{iq}y_q\,,\ i=1,2,...,p\,. \tag{1}$$

При тоа, ако $|y_i|\le p$, тогаш

$$|\beta_i| \le |a_{i1}|\cdot|y_1| + |a_{i2}|\cdot|y_2| + ... + |a_{iq}|\cdot|y_q| \le |y_1| + |y_2| + ... + |y_q| \le qp\,.$$

Вкупниот број на $q-$торки $(y_1,y_2,...,y_q)$ од цели броеви такви што $|y_j|\le p$ (за $j=1,2,...,q$) е еднаков на

$$(2p+1)^q = (2p+1)^{2p} = (4p^2+4p+1)^p\,.$$

Бројот на сите $p-$торки $(\beta_1,\beta_2,...,\beta_p)$ такви што $|\beta_i|\le qp$ (за $i=1,2,...,p$) е еднаков на $(2pq+1)^p = (4p^2+1)^p$.

Бидејќи

$$(2p+1)^q = (4p^2+4p+1)^p > (4p^2+1)^p = (2pq+1)^p\,,$$

од принципот на Дирихле следува дека постојат две различни $q-$торки $(y_1,y_2,...,y_q)$ и $(z_1,z_2,...,z_q)$ кои со формулата (1) определуваат иста $p-$торка. Лесно се проверува дека $(x_1,x_2,...,x_q)$, $x_j = y_j - z_j$ е решение на дадениот систем кое ги задоволува условите (a), (b) и (c).

6. Низата $u_0,u_1,...$ е дефинирана со

$$u_0 = 2,\ u_1 = \tfrac{5}{2},\ \ u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1 \qquad (n=1,2,...)\,.$$

Докажи дека за секој $n=1,2,....$ важи

$$[u_n] = 2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}\,.$$

Решение. Ќе докажеме дека

$$u_n = 2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}} + 2^{-\frac{2^n-(-1)^n}{3}}\,,$$

за секој $n=0,1,...$ Равенството ќе го докажеме со математичка индукција по n.

За $n=0$ и $n=1$ тврдењето е точно. Ако тврдењето е точно за $n=k-1$ и $n=k$, тогаш

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= (2^{\frac{2^k-(-1)^k}{3}} + 2^{-\frac{2^k-(-1)^k}{3}})(2^{2\frac{2^{k-1}-(-1)^{k-1}}{3}} + 2^{-2\frac{2^{k-1}-(-1)^{k-1}}{3}}) - \tfrac{5}{2} \\ &= 2^{\frac{2^k-(-1)^k+2^k-2(-1)^{k-1}}{3}} + 2^{\frac{2^k-(-1)^k-2^k+2(-1)^{k-1}}{3}} + \\ &\quad + 2^{\frac{-2^k+(-1)^k+2^k-2(-1)^{k-1}}{3}} + 2^{\frac{-2^k+(-1)^k-2^k+2(-1)^{k-1}}{3}} - \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

$$=2^{\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}}+2^{(-1)^{k+1}}+2^{-(-1)^{k+1}}+2^{\frac{-2^{k+1}+(-1)^{k+1}}{3}}-\frac{5}{2}$$
$$=2^{\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}}+2^{-\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}},$$

бидејќи $2^{(-1)^{k+1}}+2^{-(-1)^{k+1}}=\frac{5}{2}$, т.е. тврдењето е точно и за $n=k+1$.

За $n>0$ вториот собирок во

$$u_n=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}+2^{-\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$$

е помал од еден и $2^n-(-1)^n\equiv 0\,(\bmod 3)$, па затоа $[u_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$

XIX олимпијада

1. Во внатрешноста на квадрат $ABCD$ се конструирани рамнострани триаголници ABK, BCL, CDM и DAN. Докажи дека средините на отсечките KL, LM, MN, $NK, AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN$, се темиња на правилен дванаесетаголник.

Решение. *Прв начин.* Нека $X_1, X_2, ..., X_{12}$ се средини на отсечките LM, AN, $BL, MN, BK, CM, KN, CL, DN, KL, DM, AK$, соодветно.

Триаголникот PMX_3 е правоаголен, а X_2 е средина на хипотенузата MP. Имено, точката X_3 е средина на заемно нормалните отсечки BL и CM, а триаголникот MX_3X_2, заради симетрија на X_2 и X_3 во однос на правата KM е рамностран.

Точките P и X_1 лежат на дијагоналата AC (заради симетрија на M и L, односно B и D), па според тоа MPX_1 е правоаголен триаголник.

Четириаголникот X_1MX_3P е тетивен и $\measuredangle X_3PM = 30^\circ$, па затоа $\measuredangle MPX_1 = \frac{1}{2}\measuredangle MPL = 75^\circ$; $\measuredangle X_1X_2P = 30^\circ$ (агол спроти основа на рамнокрак триаголник) и $\measuredangle X_1X_2X_3 = 150^\circ$ е еднаков на збир на $\measuredangle X_1X_2P$ и $\measuredangle PX_2X_3$.

Со помош на симетрија во однос на правите KL, LN, AC и BD заклучуваме дека сите страни на дванаесетаголникот $X_1X_2...X_{12}$ се еднакви и дека секој агол во темињата $X_2, X_3, X_5, X_6, X_8, X_9, X_{11}, X_{12}$ е еднаков на 150°, а аглите во темињата X_1, X_4, X_7, X_{10} се меѓу себе еднакви. Збирот на внатрешните агли во дванаесетаголник е $10\cdot 180^\circ$, па затоа

$$\measuredangle X_{12}X_1X_2 = \measuredangle X_3X_4X_5 = \measuredangle X_6X_7X_8 = \measuredangle X_9X_{10}X_{11} = 150^\circ .$$

Втор начин. Поставуваме координатен систем така што координатниот почеток да биде во центарот на квадратот, со оски паралелни на неговите страни. Нека должините на страните на квадратот се еднакви на 2. Тогаш координатите на точките се:

$A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$,

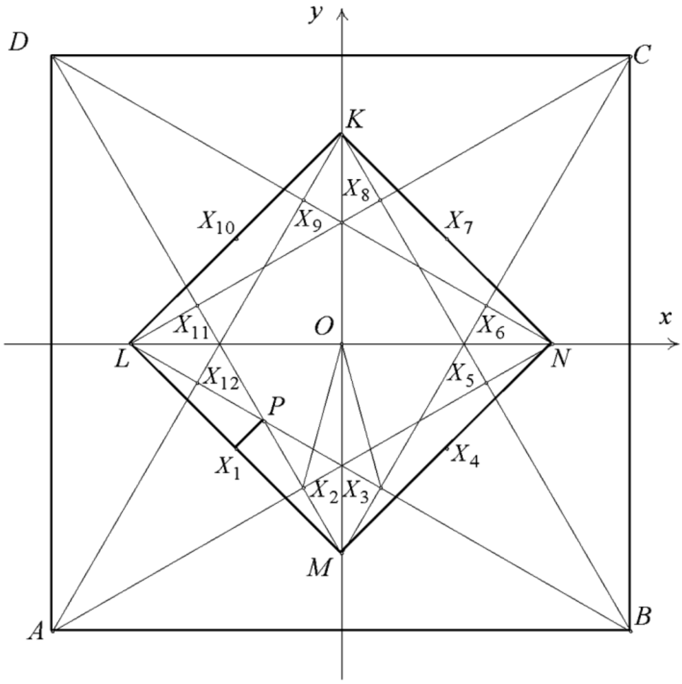
$K(0,\sqrt{3}-1)$, $L(-\sqrt{3}+1,0)$, $M(0,-\sqrt{3}+1)$, $N(\sqrt{3}-1,0)$,

$X_1(\frac{-\sqrt{3}+1}{2},\frac{-\sqrt{3}+1}{2})$, $X_4(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{-\sqrt{3}+1}{2})$, $X_7(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2})$, $X_{10}(\frac{-\sqrt{3}+1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2})$,

$X_2(-1+\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$, $X_3(1-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$, $X_5(\frac{1}{2},-1+\frac{\sqrt{3}}{2})$, $X_6(\frac{1}{2},1-\frac{\sqrt{3}}{2})$,

$X_8(1-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$, $X_{11}(-\frac{1}{2},1-\frac{\sqrt{3}}{2})$, $X_9(-1+\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$, $X_{12}(-\frac{1}{2},-1+\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Јасно,



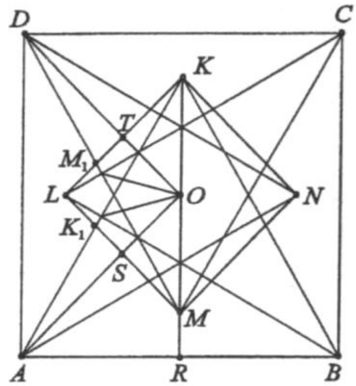
$$\overline{OX_i} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\,,\ i = 1, 2, 3, ..., 12,$$

т.е. темињата на дванаесетаголникот лежат на иста кружница. Понатаму,

$$\overline{X_i X_{i+1}}^2 = 7-4\sqrt{3}\,,\ \text{т.е. } \overline{X_i X_{i+1}} = 2-\sqrt{3}\,,\ (X_{13} = X_1).$$

Значи, сите точки се на иста кружница и растојанието меѓу две соседни темиња е исто, па затоа тие се темиња на правилен дванаесетаголник.

Трет начин. Нека $\overline{AB} = a$, $AB \cap KM = R$, $LM \cap AO = S$, $LK \cap OD = T$ и нека K_1 и M_1 се средини на отсечките AK и DM, а O е центар на квадратот $ABCD$ (цртеж десно). Заради симетрија доволно е да докажеме дека $\overline{SO} = \overline{K_1O} = \overline{M_1O}$ и



$$\measuredangle SOK_1 = \measuredangle K_1OM_1 = \measuredangle M_1OT = 30^\circ.$$

Имаме

$$\overline{KO} = \overline{KR} - \overline{OR} = \tfrac{a\sqrt{3}}{2} - \tfrac{a}{2} = \tfrac{a}{2}(\sqrt{3}-1).$$

Од косинусната теорема применета на $\triangle K_1OK$ следува

$$\overline{K_1O}^2 = \tfrac{a^2}{4} + \tfrac{a^2(\sqrt{3}-1)^2}{4} - \tfrac{a^2(\sqrt{3}-1)}{2}\cos 30^\circ = \tfrac{a^2(2-\sqrt{3})}{4},$$

односно $\overline{K_1O} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$.

Поради симетричност $\overline{OK} = \overline{OM}$, па од рамнокракиот правоаголен $\triangle SOM$ следува $\overline{OS} = \overline{MS} = \frac{\overline{OM}}{\sqrt{2}} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$. Значи, $\overline{K_1O} = \overline{OS}$. Поради симетрија ќе важи $\overline{M_1O} = \overline{TO} = \overline{SO} = \overline{K_1O}$, што и тртебаше да се докаже.

Од $\triangle AOK_1$, со примена на косинусната теорема се добива

$$\cos\measuredangle AOK_1 = \frac{\overline{K_1O}^2 + \overline{AO}^2 - \overline{AK_1}^2}{2\cdot\overline{K_1O}\cdot\overline{AO}} = \frac{\frac{a^2(2-\sqrt{3})}{4} + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}}{2\cdot\frac{a(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

па затоа $\measuredangle AOK_1 = 30^\circ$. Заради симетрија имаме $\measuredangle TOM_1 = 30^\circ$. Оттука следува дека $\measuredangle K_1OM_1 = 90^\circ - 2\cdot 30^\circ = 30^\circ$, што и требаше да се докаже.

2. Во конечна низа реални броеви збирот на било кои седум последователни членови е негативен, а збирот на било кои единаесет последователни членови е позитивен. Колку најмногу членови може да има оваа низа?

Решение. *Прв начин.* Да претпоставиме дека таква низа има барем 17 членови и нека првите 17 се $x_1, x_2, x_3, ..., x_{17}$. Бидејќи

$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + ... + x_{i+10} > 0 \quad \text{и} \tag{1}$$

$$x_{i+4} + x_{i+5} + x_{i+6} + ... + x_{i+10} < 0, \tag{2}$$

за секој $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$, добиваме

$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} > 0 \text{ за } i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}. \tag{3}$$

Од (3) и од

$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + ... + x_{i+6} < 0,\ i = 1, 2, 3, ..., 11, \tag{4}$$

следува

$$x_{i+4} + x_{i+5} + x_{i+6} < 0 \text{ за } i = 1, 2, 3, ..., 7$$

односно

$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} < 0 \text{ за } i = 5, 6, 7, ..., 11. \tag{5}$$

Од (3) и (5) добиваме

$$x_{i+3} > 0 \text{ за } i = 5, 6, 7 \text{ , т.е. } x_8 > 0,\ x_9 > 0,\ x_{10} > 0,$$

што противречи на (5) за $i = 8$.

Следниот пример покажува дека 16 е максималниот број на членови на таква низа:

$$5,\ 5, -13,\ 5,\ 5,\ 5, -13,\ 5,\ 5, -13,\ 5,\ 5,\ 5, -13,\ 5,\ 5\ . \tag{6}$$

Втор начин. Како и во првиот начин на решавање пример на низа со 16 членови кои го задоволуваат условот на задачата е даден со (6).

Да претпоставиме дека во конечната низа која го задоволува условот на задачата им 17 членови: $x_1, x_2, x_3, ..., x_{17}$. Тогаш од условот на задачата следува

$$\begin{aligned}0>&(x_1+x_2+x_3+...+x_7)+\\&+(x_2+x_3+x_4+...+x_8)+\\&.......................................\\&+(x_{11}+x_{12}+x_{13}+...+x_{17}),\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}0>&(x_1+x_2+x_3+...+x_{11})+\\&+(x_2+x_3+x_4+...+x_{12})+\\&.......................................\\&+(x_7+x_8+x_9+...+x_{17}).\end{aligned}\tag{8}$$

Лесно се проверува дека десните страни на равенствата (7) и (8) се еднакви, а тоа е противречност.

3. Даден е природен број n поголем од 2. Нека V_n е множество броеви од облик $1+kn$, $k\in\mathbb{N}$. За бројот $m\in V_n$ велиме дека е неразложлив во V_n ако не постојат броеви $p,q\in V_n$, такви што $m=pq$.

Докажи дека постои број $r\in V_n$ кој на повеќе од еден начин, може да се претстави како производ неразложливи множители во V_n. (Разложувањата кои се разликуваат само во редоследот на множителите во V_n ги сметаме за еднакви).

Решение. *Прв начин*. Нека за секој $n>2$ важи

$$(n-1)^2,(2n-1)^2,\ (n-1)(2n-1)\in V_n.$$

Ставаме

$$r=(n-1)^2\,(2n-1)^2.$$

Тогаш, $r\in V_n$. Броевите $(n-1)^2$ и $(2n-1)^2$ не може да се разложат во V_n. Во спротивно,

$$(n-1)^2=pq\ge(n+1)^2 \text{ или}$$

$$(2n-1)^2=pq=(n+1)^2 \text{ или}$$

$$(2n-1)^2=(n+1)(2n+1),$$

што не е можно. Го претставуваме бројот r на друг начин како производ на два броја од V_n:

$$r=[(n-1)(2n-1)][(n-1)(2n-1)].$$

Доволно е да забележиме дека $(n-1)^2$ не е делител на $(n-1)(2n-1)$. Затоа оваа факторизација на бројот r е различна од претходната.

Втор начин. Нека p е било кој прост делител на бројот $n-1$. Тогаш p не е делител на n и $p\ne1$. Нека s е најмалиот природен број за кој

$$p^s \equiv 1 \,(\bmod n)\,,$$

(според теоремата на Ојлер $s \leq \varphi(n)$) и тогаш $p^s \in V_n$. Единствени делители на бројот p^s, поголеми од 1 и помали од p^s, се од облик p^k, $0 < k < s$. Ниту еден од тие броеви не припаѓа на множеството V_n и затоа p^s не е разложлив во V_n. Нека

$$r = p^s[(p^{s-1}+n)(p+n)]\,.$$

Значи, $r \in V_n$ и ова е едно од претставувањата на тој број во облик на производ на неразложливи броеви p^s и $(p^{s-1}+n)(p+n)$ од V_n. Сега ќе го запишеме бројот r како друг производ на неразложливи броеви од V_n. Еден од множителите во горниот запис е делив со p^s. Меѓутоа во претставувањето

$$r = (p^s + np)(p^s + np^{s-1})\,,$$

двата множители се од V_n и се неразложливи, и ниту еден од нив не е делив со p^s.

Трет начин. Ќе ја користиме теоремата на Дирихле: Ако $\mathrm{NZD}(a,b)=1$, тогаш постојат бесконечно многу прости броеви од видот $ak+b,\, k \in \mathbb{N}$.

Од теоремата на Дирихле следува дека прости броеви од видот $nk-1$ има бесконечно многу. Производот на било кои два броја од множеството $U_n = \{nk-1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ припаѓа на множеството $V_n = \{nk+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$, бидејќи

$$(nk_1-1)(nk_2-1) = n(nk_1k_2-k_1-k_2)+1\,.$$

Ако $p_1 = nk_1 - 1$ и $p_2 = nk_2 - 1$ се два прости броја од множеството U_n, тогаш бројот $p_1p_2 \in V_n$ и е неразложлив во V_n. Според тоа, и квадратот на секој прост број од U_n припаѓа на V_n и е неразложлив во V_n. Да го разгледаме бројот $r = (p_1p_2)^2$. Овој број може да се претстави на два начина

$$r = (p_1p_2)(p_1p_2) \text{ и } r = p_1^2p_2^2\,.$$

Броевите p_1^2 и p_2^2 припаѓаат на множеството V_n и се неразложливи во V_n, а исто така и бројот p_1p_2 припаѓа на V_n и е неразложлив во V_n. Според тоа, бројот $r = p_1^2p_2^2$, каде p_1 и p_2 се прости броеви од видот $nk-1$ се разложува на два различни начини како производ од неразложливи броеви во V_n

4. Нека $a,b,A,B \in \mathbb{R}$. Да ја разгледаме функцијата

$$f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x\,.$$

Докажи дека, ако $f(x) \geq 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$, тогаш

$$a^2+b^2\le 2 \text{ и } A^2+B^2\le 1.$$

Решение. Функцијата $f(x)$ можеме да ја запишеме во обликот

$$f(x)=1-\sqrt{a^2+b^2}\left(\tfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\tfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)-$$
$$-\sqrt{A^2+B^2}\left(\tfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos 2x+\tfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin 2x\right),$$

односно во обликот

$$f(x)=1-\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi)-\sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\psi),$$

каде што $\sin\phi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\psi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

а) Нека $x_0+\phi=\frac{\pi}{4}$, $x_1+\phi=\frac{3\pi}{4}$. Тогаш

$$f(x_0)=1-\sqrt{\tfrac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{A^2+B^2}\sin(\psi+\tfrac{\pi}{2}-2\phi)\ge 0 \text{ и}$$

$$f(x_1)=1-\sqrt{\tfrac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{A^2+B^2}\sin(\psi+\tfrac{3\pi}{2}-2\phi)\ge 0.$$

Бидејќи третите собироци имаат различен знак (аргументите им се разликуваат за π) добиваме $1-\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge 0$, односно $a^2+b^2\le 2$.

б) Неравенството $A^2+B^2\le 1$ се добива на сличен начин. Треба да се изберат x_0 и x_1 така што

$$2x_0+\psi=\tfrac{\pi}{2},\quad 2x_1+\psi=\tfrac{5\pi}{2}.$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

5. Нека $a,b\in\mathbb{N}$ и при делење на a^2+b^2 со $a+b$ се добива количник q и остаток r. Определи ги сите парови (a,b) за кои е $q^2+r=1977$.

Решение. Броевите a,b,q и r мора да ги задоволуваат условите:

$$a^2+b^2=(a+b)q+r$$
$$0\le r<a+b$$
$$q^2+r=1977.$$

Од $q^2\le 1977$ следува $q\le 44$, што значи

$$a^2+b^2<44(a+b)+(a+b)=45(a+b)$$

и бидејќи $(a+b)^2\le 2a^2+2b^2$, добиваме

$$(a+b)^2\le 90(a+b), \text{ т.е. } a+b\le 90.$$

Според тоа $r<90$. Од

$$q^2 = 1977 - r > 1977 - 90 = 1887$$

добиваме $q > 43$ и како $q \le 44$ имаме $q = 44$ и $r = 41$.

Останува уште да ги определиме природните броеви a и b кои ја задоволуваат равенката

$$a^2 + b^2 = 44(a+b) + 41 \text{ , т.е. } (a-22)^2 + (b-22)^2 = 1009 .$$

Да ги определиме целобројните решенија на равенката $x^2 + y^2 = 1009$ кои го задоволуваат условот $0 \le x \le y$. Од $x^2 \le 1009$, следува $x \le 31$, а од $2y^2 \ge 1009$ следува $y \ge 23$. Со непосредна проверка наоѓаме дека единствено решение е: $x = 15$, $y = 28$.

Според тоа, треба во $\mathbb{N}$ да ги решиме следните системи равенки

$$|a-22| = 15,\ |b-22| = 28 \text{; и}$$

$$|a-22| = 28,\ |b-22| = 15.$$

Првиот систем има решенија $(a,b) = (37,50)$ и $(a,b) = (7,50)$, а вториот $(a,b) = (50,37)$ и $(a,b) = (50,7)$, и тоа се единствените парови природни броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

6. Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Докажи дека ако за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $f(n+1) > f(f(n))$, тогаш $f(n) = n$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Решение. На почеток со индукција по n ќе докажеме дека $f(k) \ge n$ ако $k \ge n$. За $n = 1$ тврдењето очигледно е точно. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за некој $n \in \mathbb{N}$. Нека $k \ge n+1$. Од $k-1 \ge n$ и од индуктивната претпоставка следува $f(k-1) \ge n$, па затоа $f(f(k-1)) \ge n$. Бидејќи $f(k) > f(f(k-1))$ добиваме $f(k) \ge n+1$, т.е. тврдењето е точно и за $k+1$.

Како последица од претходно докажаното следува $f(n) \ge n$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Нека претпоставиме дека за некој $n \in \mathbb{N}$ важи $f(n) > n$. Ставаме

$$f(m) = \min_{k>n} f(k) .$$

Од $m-1 \ge n$ следува $f(m-1) > n$ (за $m-1 > n$, неравенството следува од $f(m-1) \ge m-1$, а за $m-1 = n$ од $f(n) > n$).

Нека $l = f(m-1)$ и $f(l) > f(m)$. Од $f(m) > f(f(m-1))$ следува $f(m) > f(l)$. Со тоа покажавме дека не постои $f(m) = \min\limits_{k>n} f(k)$, што не е можно бидејќи множеството $\{f(k) \mid k > n\}$ не е празно. Оттука следува дека не постои $n \in \mathbb{N}$ таков што $f(n) > n$. Конечно, бидејќи $f(n) \ge n$, за секој $n \in \mathbb{N}$ заклучуваме дека $f(n) = n$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

XX олимпијада

1. Нека $m, n \in \mathbb{N}$ се такви што $n > m \geq 1$ и последните три цифри на броевите 1978^m и 1978^n (во декаден броен систем) се еднакви.
Определи ги броевите m и n за кои збирот $m+n$ е најмал.

Решение. *Прв начин*. Според условот на задачата бројот $1978^m(1978^{n-m}-1)$ е делив со $1000 = 8 \cdot 125$. Бидејќи бројот $1978^{n-m}-1$ е непарен, а 1978 е парен добиваме

$$8 \,|\, 1978^m \quad \text{и} \quad 125 \,|\, (1978^{n-m}-1)\,.$$

Но, $1978 = 2 \cdot 989$ па од првиот услов следува $m \geq 3$, а од вториот услов

$$1978^{n-m} \equiv (-2)^{n-m} \equiv 1 (\bmod 5)\,.$$

Ова е можно само за $n - m = 4k$, $k \geq 1$. Останува да се определи најмалиот природен број k, таков што бројот $1978^{4k}-1$ е делив со 125. Од

$$1978^4 \equiv 6 (\bmod 125)$$

добиваме $6^k \equiv 1 (\bmod 125)$. Најмалиот таков број е 25, па решението на задачата е $m = 3$, $n = 103$.

Втор начин. *Лема* 1. Нека $\text{NZD}(a,n) = 1$ и $d \in \mathbb{N}$ е најмал број, таков што $a^d \equiv 1 (\bmod n)$. Ако $a^k \equiv 1 (\bmod n)$, тогаш $d \,|\, k$.

Доказ. Нека $a^k \equiv 1 (\bmod n)$ и $k = sd + r$, каде $0 \leq r < d$. Имаме

$$a^k = (a^d)^s \cdot a^r \equiv a^r (\bmod n)\,.$$

По претпоставка $a^k \equiv 1 (\bmod n)$, па затоа $a^r \equiv 1 (\bmod n)$. Бидеји $0 \leq r < d$ и d е најмал природен број таков што $a^d \equiv 1 (\bmod n)$, добиваме $r = 0$, т.е. $d \,|\, k$. ■

Лема 2. Најмалиот природен број $x > 0$, таков што

$$1978^x \equiv 1 (\bmod 5^n)$$

е $x = \varphi(5^n)$, каде φ е Ојлеровата функција.

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. Покрај тоа ќе докажеме дека $1978^x \not\equiv 1 (\bmod 5^{n+1})$, каде $x = \varphi(5^n)$.

Нека $n = 1$. Лесно се гледа дека $1978^x \equiv 3^x \not\equiv 1 (\bmod 5)$ за $x = 1, 2, 3$ и дека

$$1978^4 \equiv 3^4 \equiv 1 (\bmod 5)\text{, но } 1978^4 \equiv 3^4 \not\equiv 1 (\bmod 5^2)\,.$$

Нека за $n = k$ бројот $x = \varphi(5^k)$ е најмалиот природен број, таков што

$$1978^x \equiv 1 (\bmod 5^k) \text{ и } 1978^x \not\equiv 1 (\bmod 5^{k+1})\,.$$

Природниот број y нека задоволува $1978^y \equiv 1(\bmod 5^{k+1})$. Од лема 1 следува $y = tx$, па затоа $1978^{tx} - 1 \equiv 0(\bmod 5^{k+1})$, односно

$$(1978^x - 1)(1978^{x(t-1)} + 1978^{x(t-2)} + \ldots + 1978^x + 1) \equiv 0(\bmod 5^{k+1}) .$$

Бидеќи $1978^x - 1$ е делив со 5^k, а не е делив со 5^{k+1} се добива

$$1978^{x(t-1)} + 1978^{x(t-2)} + \ldots + 1978^x + 1 \equiv 0(\bmod 5)$$

$$(1978^{x(t-1)} - 1) + (1978^{x(t-2)} - 1) + \ldots + (1978^x - 1) + t \equiv 0(\bmod 5).$$

Броевите $1978^{xm} - 1$, $m = 1, 2, \ldots, t-1$ се деливи со 5, бидејќи $5^k \mid 1978^x - 1$ и $1978^x - 1 \mid 1978^{xm} - 1$. Според тоа, $t \equiv 0(\bmod 5)$. Најмалиот природен број t кој е делив со 5 е $t = 5$. Значи,

$$y = 5x = 5 \cdot \varphi(5^k) = 5 \cdot 4 \cdot 5^{k-1} = 4 \cdot 5^k = \varphi(5^{k+1})$$

и

$$1978^y \not\equiv 1(\bmod 5^{k+2})$$

бидејќи

$$(1978^{4x} - 1) + (1978^{3x} - 1) + (1978^{2x} - 1) + (1978^x - 1) + 5 \not\equiv 0(\bmod 5^2) .$$

Со тоа доказот на лемата е завршен. ■

Со помош на горните леми ќе ја генерализираме почетната задача.

Нека m и n се природни такви што $n > m \geq 1$. Последните k цифри на бројот 1978^m се еднакви, соодветно, на последните k цифри на бројот 1978^n (во декаден запис). Определи ги m и n така што $m + n$ има најмала можна вредност.

Решение. Бројот $1978^n - 1978^m$ завршува на k нули, па затоа

$$1978^m(1978^{n-m} - 1) \equiv 0(\bmod 5^k),$$

од каде што следува

$$1978^{n-m} \equiv 1(\bmod 5^k) .$$

Од лема 2 и лема 1 следува дека

$$n - m = s\varphi(5^5) = 4 \cdot 5^{k-1} s, \ (s \neq 0) .$$

Исто така мора да важи

$$1978^m(1978^{n-m} - 1) \equiv 0(\bmod 2^k) .$$

Бидејќи $1978^{n-m} - 1$ е непарен број, следува дека $2^m \cdot 989^m \equiv 0(\bmod 2^k)$, од каде што следува дека $m \geq k$.

Збирот $n + m = 4 \cdot 5^{k-1} s + 2m$, при услов $m \geq k$ ќе биде најмал за $s = 1$ и $m = k$, па затоа бараните броеви се $m = k$ и $n = 4 \cdot 5^{k-1} + k = k + \varphi(5^k)$.

2. Нека P е дадена внатрешна точка на сферата S, а A, B и C се произволни точки на S такви што правите PA, PB и PC се заемно нормални. Со Q да го означиме темето на паралелопипедот определен со PA, PA, PC кое е дијагонално спротивно на темето P.
Најди го геометриското место на точката Q, за сите можни положби на точките A, B и C.

Решение. Ги воведуваме векторите $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{PC}$, $\vec{\rho} = \overrightarrow{OP}$ и $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$, каде што O е центарот на сферата. Тогаш имаме

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0, \quad \vec{q} = \vec{\rho} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \quad (\vec{\rho} + \vec{a})^2 = (\vec{\rho} + \vec{b})^2 = (\vec{\rho} + \vec{c})^2 = R^2,$$

каде R е радиусот на сферата. Според тоа,

$$\begin{aligned} \vec{q}^{\,2} &= \vec{\rho}^{\,2} + \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + \vec{c}^{\,2} + 2\vec{a} \cdot \vec{\rho} + 2\vec{b} \cdot \vec{\rho} + 2\vec{c} \cdot \vec{\rho} \\ &= (\vec{\rho} + \vec{a})^2 + (\vec{\rho} + \vec{b})^2 + (\vec{\rho} + \vec{c})^2 - 2\vec{\rho}^{\,2} = 3R^2 - 2p^2, \end{aligned}$$

каде $p = |\vec{\rho}|$. Бидејќи точката P е во внатрешноста на сферата добиваме $p < R$, па според тоа $q = |\vec{q}| = \sqrt{3R^2 - 2p^2} > R$.
Значи, точката Q се наоѓа на сфера која е концентрична на дадената сфера, чиј радиус е $\sqrt{3R^2 - 2p^2}$. Ќе докажеме дека оваа сфера е бараното геометриско место на точки.
За дадената точка Q за која $\overline{OQ} = \sqrt{3R^2 - 2p^2}$ конструираме сфера чиј радиус е $\overline{PQ}$. Бидејќи $\overline{OQ} > R > \overline{OP}$ таа ја сече дадената сфера. Со C означуваме една од пресечните точки, а со X дијагонално спротивното теме на правоаголникот определен со CP и CQ. Векторски се докажува дека е исполнето равенството $\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OX}^2$, па добиваме

$$\overline{OX}^2 = \overline{OP}^2 + (3R^2 - 2\overline{OP}^2) - R^2 = 2R^2 - p^2 > R^2,$$

т.е. X е надвор од дадената сфера. Пресекот на рамнината α, која минува низ точката P и е нормална на PC е кружница k, при што точката P е на таа кружница, а X е надвор од неа. Кружница со радиус $\overline{PX}$ во рамнината α ја сече кружницата k во точка B. Нека A е теме на правоаголник $PBXA$ спротивно на темето B. Ако B е на дадената сфера, добиваме

$$\overline{OA}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OX}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{OP}^2 + 2R^2 - \overline{OP}^2 - R^2 = R^2,$$

т.е. A е исто така на дадената сфера и сите услови се исполнети.

3. Множеството природни броеви е запишано како унија на две дисјунктни подмножества: $\{f(1), f(2), ..., f(n), ...\}, \{g(1), g(2), ..., g(n), ...\}$ такви што

$$f(1) < f(2) < \ldots < f(n) < \ldots,\ g(1) < g(2) < \ldots < g(n) < \ldots$$

и

$$g(n) = f(f(n)) + 1,\ \text{за секој } n \geq 1$$

Определи го бројот $f(240)$.

Решение. *Прв начин.* Бидејќи $g(n) = f(f(n)) + 1$ и $f(f(n))$ е член на низата f, постојат точно $n-1$ членови на низата g кои што се помали од $f(f(n))$. Според тоа

$$f(f(n)) = f(n) + n - 1. \tag{1}$$

Бидејќи $g(1) = f(f(1)) + 1 > 1$ добиваме $f(1) = 1$ и $g(1) = f(1) + 1 = 2$. Да забележиме уште дека бројот кој што претходи на членот на низата g мора да припаѓа на низата f, т.е. не може два последователни броја да бидат членови на низата g. Навистина, ако за некој n важи $g(n+1) = g(n) + 1$, тогаш според условот на задачата ќе важи $f(f(n+1)) = f(f(n)) + 1$, па од (1) ќе следува

$$f(f(n)) + 1 = f(n) + n - 1 \text{ и } f(f(n+1)) = f(n+1) + n,$$

т.е. $f(n) = f(n+1)$, што противречи на условот на задачата .

Од досега изнесеното и од формулата (1) добиваме:

$$\begin{aligned}
&f(2) = 3,\\
&f(3) = f(f(2)) = f(2) + 1 = 4,\\
&f(4) = f(f(3)) = f(3) + 2 = 6,\\
&f(6) = f(f(4)) = f(4) + 3 = 9,\\
&f(9) = 9 + 5 = 14,\\
&f(14) = 22,\\
&f(22) = 35,\\
&f(35) = 56,\\
&f(56) = 90,\\
&f(90) = 145,\\
&f(145) = 234,\\
&f(234) = 378.
\end{aligned}$$

Понатаму, од $f(35) = 56$ следува $91 = f(f(35)) + 1 = g(35)$, па според тоа $f(57) = 92$. Сега повторно со примена на (1) добиваме:

$$f(92) = 148, \quad f(148) = 239, \quad f(239) = 386.$$

Конечно, $378 = f(f(148)) + 1 = g(148)$, па според тоа $f(240) = 388$.

Втор начин. Нека M е множеството од сите природни броеви од 1 до $g(n)$, каде што n е произволен природен број. Споиред условот на задачата бројот

$g(n)$ е еднаков на збирот од кардиналниот број на подмножеството броеви во M од обликот $f(k)$ и кардиналниот број на подмножеството броеви во M од обликот $g(k)$.

Броевите од обликот $g(k)$ во множеството M очигледно ги има n, а броевите од обликот $f(k)$ ги има $f(n)$, бидејќи најголемиот број од тој облик е $f(f(n)) = g(n) - 1$.

Според тоа, за секој природен број n ќе важи $g(n) = f(n) + n$.

За секој природен број ќе ги определиме вредностите на $f(n)$ и $g(n)$. За таа цел ќе ја користиме следнава теорема.

Теорема (*Бети*). За произволен позитивен ирационален број α и број $\beta > 0$ такви што $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, множествата

$$\{[\alpha],[2\alpha],...,[n\alpha],...\} \text{ и } \{[\beta],[2\beta],...,[n\beta],...\}$$

се дисјунктни, а нивната унија е множеството природни броеви $\mathbb{N}$ и $[k\alpha] \neq [n\alpha]$ и $[k\beta] \neq [n\beta]$ за различни природни броеви k и n.

Доказ. Го оставаме на читателот за вежба. ■

Според условот на задачата теоремата на Бети асоцира дека $f(n) = [n\alpha]$ и $g(n) = [n\beta]$, за некои α, $\beta > 0$. За да ги определиме α и β треба да го решиме системот равенки

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \text{ и } \beta - \alpha = 1,\ \alpha,\ \beta > 0.$$

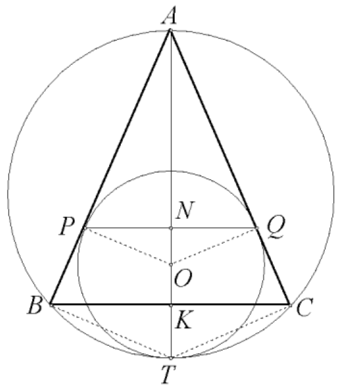
Решение на овој систем е $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Забележуваме дека α и β се ирационални броеви. Користејќи ја горната теорема за да докажеме дека $f(n) = [\frac{1+\sqrt{5}}{2} n]$ и $g(n) = [\frac{3+\sqrt{5}}{2} n]$ доволно е да докажеме дека $[\frac{3+\sqrt{5}}{2} n] - [\frac{1+\sqrt{5}}{2} n] = n$.

Навистина, од својствата на функцијата $[\cdot]$ следува

$$\begin{aligned}[\tfrac{3+\sqrt{5}}{2} n] - [\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} n] &= [(1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{2})n] - [\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} n] = [n + \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} n] - [\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} n] \\ &= n + [\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} n] - [\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} n] = n.\end{aligned}$$

4. Даден е рамнокрак триаголник ABC, $\overline{AB} = \overline{AC}$. Кружницата, која одвнатре ја допира опишаната кружница околу $\triangle ABC$, ги допира страните AB и AC во точки P и Q, соодветно. Докажи дека средината на отсечката PQ е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$.

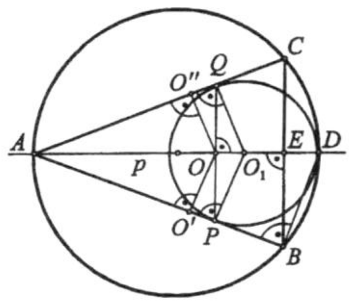
Решение. *Прв начин.* Нека O е центар на дадената кружница, а T е нејзина допирна точка со опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Добиената фигура е симетрична во однос на правата која што минува низ A, O, T и средината K на отсечката BC при што таа е нормална на BC. Хомотетија со центар во точката A која ја пресликува T во K, ја пресликува дадената кружница во впишаната кружница на $\triangle ABC$, па значи точката O ја пресликува во центарот U на таа кружница.



Центарот на опишаната кружница на $\triangle ABC$ е исто така на споменатата права, па $\measuredangle ABT = \measuredangle ACT = 90^\circ$. Четириаголниците $ABTC$ и $APOQ$ се слични, што значи дека со оваа хомотетија точката O се пресликува во средината на отсечката PQ.

Според тоа, средината на отсечката PQ е центар на впишаната кружница на $\triangle ABC$.

Втор начин. Нека правата p е симетрала на аголот α при темето A и нека таа ја сече опишаната кружница k околу триаголникот ABC во точката D. Бидејќи триаголникот ABC е рамнокрак, AD е дијаметар на опишаната кружница, па важи $\measuredangle ABD = 90^\circ$. Нека $O = PQ \cap AD$. Со O' и O'' да ги означиме проекциите на точката O врз правите AB и AC (цртеж десно).



Нека O_1 е центарот на кружницата која што ги допира k, AB и AC и нека $E = AD \cap BC$. Триаголниците $AO'E$ и APD се слични бидејќи $\measuredangle DAB = \frac{\alpha}{2}$ им е заеднички и

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{AO'}}{\overline{AO}} \cdot \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AO'}}{\overline{AP}}.$$

Оттука следува $O'E \parallel PD$. Покрај тоа важи $OO' \parallel O_1P$, па затоа $\triangle OEO' \sim \triangle O_1DP$. Бидејќи $\triangle O_1DP$ е рамнокрак, следува дека и $\triangle OEO'$ е рамнокрак, односно $\overline{OO'} = \overline{OE}$. Триаголникот ABC е рамнокрак, па ќе важи $\overline{OO''} = \overline{OO'} = \overline{OE}$. Понатаму, $\measuredangle AO''O = \measuredangle AO'O = \measuredangle BEC = 90^\circ$, па затоа точката O како средина на PQ е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$.

5. Нека $(a_k), k=1,2,...,n,...$ е низа од различни природни броеви. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ е точно неравенството

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ .$$

Решение. Ако низата $(a_1, a_2, ..., a_n)$ не е растечка, тогаш постои j таков што $a_j > a_{j+1}$ $(1 \leq j < n)$. Во овој случај е исполнето неравенството

$$\frac{a_j}{j^2} + \frac{a_{j+1}}{(j+1)^2} > \frac{a_{j+1}}{j^2} + \frac{a_j}{(j+1)^2} \ .$$

Навистина последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(a_j - a_{j+1})((j+1)^2 - j^2) > 0 \ ,$$

кое очигледно е исполнето. Тоа значи, дека збирот

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}$$

е поголем од соодветниот збир кога членовите на низата a_j и a_{j+1} ќе ги заменат местата. Последното значи, дека по конечен број чекори низата $(a_k), k=1,2,...,n,...$ можеме да ја трансформираме во низа $(b_1, b_2, ..., b_n)$, за која ќе важи $b_1 < b_2 < ... < b_n$ и збирот $\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}$. Понатаму, бидејќи $b_k \geq k$ за $k=1, 2, ..., n$ добиваме

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ .$$

6. На еден меѓународен собир имало учесници од шест земји. Вкупниот број на учесници бил 1978, а секој учесник бил нумериран со број од 1 до 1978. Докажи дека постои барем еден учесник чиј број е еднаков на збирот на броевите на два члена од неговата земја, или е два пати поголем од бројот на некој член од неговата земја.

Решение. Бидејќи $1978 = 329 \cdot 6 + 4$, од принципот на Дирихле следува дека од една од државите, да ја наречеме A, има барем 330 членови на собирот. Нека нивните броеви се

$$a_1 < a_2 < ... < a_{330} \ .$$

Разгледуваме 329 разлики $a_{330} - a_i$ $(i = 1, 2, ..., 329)$. Ако некоја од овие разлики е еднаква на бројот на некој од членовите на собирот од A, тогаш тврдењето од задачата е докажано.

Нека секој разлика $a_{330} - a_i$ $(i = 1, 2, ..., 329)$ не е еднаква на некој број на член на собирот од државата A. Тоа значи дека тие припаѓаат на членовите на останатите пет држави. Сега, бидејќи $329 = 65 \cdot 5 + 4$, повторно од принципот на Дирихле меѓу горните разлики има 66 учесници на собирот, $b_1 < b_2 < ... < b_{66}$ кои припаѓаат на иста држава, на пример B. Тогаш, или некоја од разликите $b_{66} - b_i$ $(i = 1, 2, ..., 65)$ припаѓа на некоја од државите A и B (во тој случај тврдењето е докажано) или ниту една не припаѓа на некоја од тие држави.

Да претпоставиме дека тврдењето на задачата не е точно. Продолжувајќи ја постапката, бидејќи $65 = 4 \cdot 16 + 1$ добиваме дека 17 од тие разлики припаѓаат на членови кои се од иста држава, на пример C, потоа бидејќи $16 = 3 \cdot 5 + 1$ следува дека од шеснаесетте нови разлики, шест од нив се во иста држава D; од петте наредни разлики три се во E. На крај, двете нови разлики мора да бидат во преостанатата држава F. (Да забележиме дека секоја разлика е од облик $a_p - a_q$). Нивната разлика не може да биде во ниту една држава A, B, C, D, E, F. (Таа не може да биде во F бидејќи разликата на два броја не може да биде еднаква на некој од тие броеви). Ова, меѓутоа, не е можно бидејќи секој природен број помал од 1978 мора да биде во некоја од шесте разгледувани држави. Затоа претпоставката не е точна, т.е. исполнето е тврдењето од задачата.

XXI олимпијада

1. Нека $p, q \in \mathbb{N}$ и $\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$. Докажи дека $1979 \mid p$.

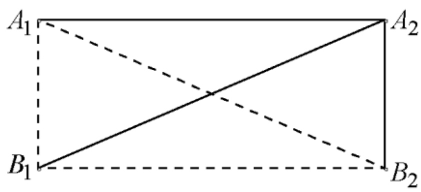
Решение. Нека $A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{1319}$ и $B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{1318}$. Тогаш е исполнето

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} = A - B = (A+B) - 2B &= 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{1319} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - ... - \frac{1}{659}\\ &= \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + ... + \frac{1}{1319} = (\frac{1}{660} + \frac{1}{1319}) + ... + (\frac{1}{989} + \frac{1}{990})\\ &= \frac{1979}{660 \cdot 1319} + \frac{1979}{661 \cdot 1318} + ... + \frac{1979}{989 \cdot 990} = \frac{1979N}{660 \cdot 661 \cdot ... \cdot 1319}.\end{aligned}$$

Бидејќи 1979 е прост број, тој не може да се скрати со ниту еден од множителите од именителот. Затоа броителот на добиената дропка е делив со 1979.

2. Дадена е петстрана призма со основи $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$. Сите рабови на основите и сите отсечки A_iB_j $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$ се обоени со црвена или зелена боја, така што во секој триаголник чии темиња се во темињата на основите на призмата, постојат две страни обоени со различна боја. Докажи дека сите десет рабови на основите на призмата се обоени со иста боја.

Решение. 1° Ќе докажеме дека, ако некој раб од некоја од основите е обоен со една боја, тогаш за секое теме кое е крајна точка на тој раб постојат барем три отсечки кои го поврзуваат со темињата на другата основа и кои се обоени со друга боја.



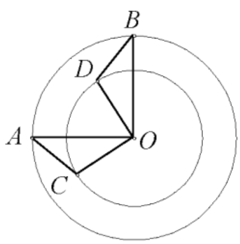
Претпоставуваме дека, на пример работ A_1A_2 е обоен со зелена боја, и спротивно на тврдењето, барем три од отсечките A_2B_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ се исто така обоени со зелена боја. Нека се тоа отсечките A_2B_j, A_2B_k, A_2B_m. Од три темиња на петаголникот барем две се соседни. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $j = 1$, $k = 2$. Тогаш отсечките A_2A_1, A_2B_1 и A_2B_2 се обоени зелено (на цртежот се означени со полна линија). Според условот на задачата, отсечките A_1B_1, A_1B_2 и B_1B_2 се обоени црвено, т.е. $\triangle A_1B_1B_2$ е еднобоен, што противречи на претпоставката. Со тоа е покажано дека барем три отсечки A_2B_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ се обоени црвено.

2° Ќе докажеме дека петаголниците при основите се еднобојни. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека во некој од нив постојат рабови со различна боја. Нека на пример, работ A_1A_2 е зелен, а работ A_2A_3 е црвен. Според 1°, најмалку три од отсечките A_2B_i, $i=1,2,3,4,5$ се црвени, а најмалку три се зелени, што не е можно.

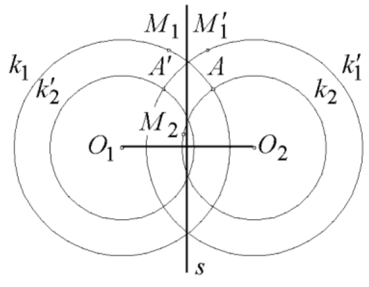
3° Да претпоставиме дека сите страни на основата $A_1A_2A_3A_4A_5$ се зелени, а сите страни на основата $B_1B_2B_3B_4B_5$ се црвени. Ако 1° го примениме на страните на основата $A_1A_2A_3A_4A_5$, добиваме дека од дваесет и петте отсечки A_iB_j, $i,j=1,2,3,4,5$ има најмалку $5\cdot 3=15$ црвени. Аналогно, од петаголникот $B_1B_2B_3B_4B_5$ заклучуваме дека меѓу тие отсечки барем 15 се зелени. Бидејќи ова не е можно, сите десет рабови на основите на призмата се обоени со иста боја.

На крајот да забележиме дека призма со саканите својства постои. Дади пример!

3. Во рамнина се дадени кружници k_1 и k_2, за кои една пресечна точка е точката A. По кружниците k_1 и k_2, тргнувајќи од точката A истовремено почнуваат да се движат точки M_1 и M_2. Точките се движат во ист правец со еднакви аголни брзини и повторно се сретнуваат во точката A. Докажи дека во рамнината постои неподвижна точка P која во секој момент е еднакво оддалечена од точките M_1 и M_2.



Решение. *Прв начин*. Ќе го користиме следното тврдење, чиј доказ го оставаме на читателот за вежба: *Ако AB и CD се лаци на кружници со заеднички центар O и ако $\measuredangle AOB=\measuredangle COD$, тогаш $\overline{AC}=\overline{BD}$.*
Нека O_1 и O_2 се центри на дадените кружници k_1 и k_2, s е симетрала на отсечката O_1O_2 и ϕ е симетрија во однос на правата s. Ги воведуваме ознаките $A'=\phi(A)$, $k_1'=\phi(k_1)$, $k_2'=\phi(k_2)$. Јасно, $A'\in k_1'\cap k_2'$. Кружниците k_1' и k_2 се концентрични, како и кружниците k_2' и k_1.



Ќе докажеме дека A' е точка која ги задоволува условите од задачата. Нека во некој момент првата точка се наоѓа во $M_1\in k_1$, а втората во $M_2\in k_2$.
Од условот на задачата следува
$\measuredangle M_1O_1A=\measuredangle M_2O_2A$. Ако $M_1'=\phi(M_1)$, тогаш $\overline{AM_1'}=\overline{A'M_1}$. Исто така

$$\measuredangle A'O_2M_1'=\measuredangle M_1O_1A=\measuredangle M_2O_2A,$$

од каде што следува $\overline{A'M_2} = \overline{AM_1'}$. Значи, $\overline{A'M_1} = \overline{A'M_2}$, т.е. точката A' е еднакво оддалечена од точките M_1 и M_2.

4. Дадена е рамнина π, точка P во таа рамнина и точка Q надвор од неа. Определи ги сите точки R од π за кои количникот $\frac{\overline{PQ}+\overline{PR}}{\overline{QR}}$ е максимален.

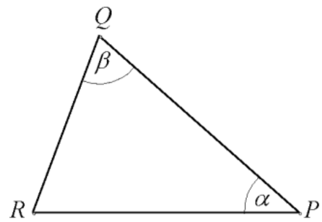
Решение. Нека R е точка во рамнината π, различна од P и $\measuredangle RPQ = \alpha$, $\measuredangle PQR = \beta$. Од триаголникот PQR добиваме

$$\frac{\overline{QR}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{PQ}}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\overline{PR}}{\sin\beta},$$

од каде што

$$\frac{\overline{PQ}+\overline{PR}}{\overline{QR}} = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin(\alpha+\frac{\beta}{2})}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\alpha+\frac{\beta}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

За даден агол α, овој количник е најголем ако $\sin(\beta+\frac{\alpha}{2}) = 1$, т.е. $\beta+\frac{\alpha}{2} = 90^\circ$. Последното равенство е исполнето ако и само ако $\triangle QRP$ е рамнокрак , т.е. $\overline{PR} = \overline{PQ}$.



Бидејќи $0 < \alpha < 180^\circ$, т.е. $0 < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$, а функцијата sin е растечка на $(0, 90^\circ)$, дадениот однос има најголема вредност кога α е најмал.

Ако правата PQ е нормална на рамнината π, множеството точки кои ги задоволуваат условите на задачата е кружница со центар во P и радиус $\overline{PQ}$. Ако правата PQ не е нормална на π, тогаш постои само една точка која ги задоволува условите од задачата и тоа е точката која припаѓа на рамнината нормална на π, што ја содржи правата PQ, при што растојанието меѓу точките R и P е еднакво на $\overline{PQ}$, а $\measuredangle RPQ$ е остар. Со овие услови точката R е еднозначно определена.

5. Најди ги сите реални броеви a за кои постојат ненегативни броеви x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, кои ги задоволуваат релациите

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^2, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = a^3.$$

Решение. Да претпоставиме дека бројот a ги задоволува условите на задачата. Тогаш

$$a^3=\sum_{k=1}^{5}k^5x_k\,,\qquad a^3=a\sum_{k=1}^{5}k^3x_k\,,\qquad a^3=a^2\sum_{k=1}^{5}kx_k\;.$$

Ако го помножиме второто од овие равенства со -2 и ако сите ги собереме равенствата, добиваме

$$0=\sum_{k=1}^{5}k\,x_k(k^4-2ak^2+a^2)=\sum_{k=1}^{5}k\,x_k(k^2-a)^2\;.$$

Сите собирци од последниот збир се ненегативни, па според тоа

$$k\,x_k(k^2-a)^2=0\,,\text{ за }k=1,2,3,4,5\,.$$

Ако $a=0$ единствено решение е $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$. Ако некој $x_k\neq 0$ тогаш $a=k^2$. Таков a исто така ги задоволува условите на задачата за

$$x_k=k\,,\;x_j=0\;\;(j\neq k,1\le j\le k)\,.$$

Значи, бараните броеви се $0,1,4,9,16,25$.

6. Нека A и E се две спротивни темиња на правилен осумаголник. На темето A се наоѓа жаба. Од секое теме на осумаголникот, освен од темето E, жабата може да скокне на соседно теме. Кога ќе дојде на темето E жабата останува на него. Со a_n да го означиме бројот на начините на кои жабата може да дојде од темето A на темето E скокнувајќи точно n пати. Докажи дека

$$a_{2n-1}=0,\quad a_{2n}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1}-y^{n-1}),\quad n=1,2,3,...$$

каде $x=2+\sqrt{2}$ и $y=2-\sqrt{2}$.

(Жабата може да дојде од темето A во темето E скокнувајќи точно n пати ако скока по низа од темиња $(P_0,P_1,P_2,...,P_n)$ така што се исполнети условите:

(i) $P_0=A,P_n=E$;

(ii) за секој $i,0\le i\le n-1$, $P_i\neq E$;

(iii) за секој $i,0\le i\le n-1$, P_i и P_{i+1} се соседни темиња на осумаголникот.)

Рдшение. Ги означуваме последователно темињата на осумаголникот со броевите $-3,-2,-1,0,1,2,3,4$ така што темето A е означено со бројот 0, а темето E со бројот 4. Во секој скок жабата ја менува парноста на темето на кое се наоѓа. За пат од 0 до 4 и требаат парен број скокови. Значи $a_{2n-1}=0$ за $n=1,2,\dots$.

Нека u_{2n} е бројот на патиштата со должина $2n$ (т.е. бројот на патиштата кои се состојат од $2n$ скокови) од точката 0 до точката 0, кои не минуваат низ точката 4; v_{2n} е бројот на патишта со должина $2n$ од 0 до 2, кои не минуваат низ 4. Тогаш, и бројот на патишта со должина $2n$ од 0 до -2 кои не минуваат низ 4 е еднаков на v_{2n}.

Секој пат со должина $2n+2$ од точката 0 до точката 4 кој ги задоволува условите на задачата се состои од некој пат со должина $2n$ од 0 до 2 (или од 0 до -2), а такви патишта има $2v_{2n}$ и пат со должина 2 од 2 (односно -2) до 4, таков пат е само еден. Затоа

$$a_{2n+2}=2v_{2n}\text{, за } n=1,2,... \tag{1}$$

Ќе докажеме дека

$$u_{2n+2}=u_{2n}+2v_{2n} \text{ за } n=1,2,... \tag{2}$$

Имено, секој пат со должина $2n+2$ од точката 0 до точката 0 кој не минува низ 4 се состои од:

- некој пат со должина $2n$ од точката 0 до точката 0 кој не минува низ 4 (такви патишта има u_{2n}) и пат со должина 2 од 0 до 0 (такви патишта се $(0,1,0)$ и $(0,-1,0)$) или
- некој пат со должина $2n$ од 0 до 2 (или до -2) кој не минува низ 4 (такви патишта има $2v_{2n}$) и пат со должина 2 од 2 (односно -2) до 0 (таков е само еден пат).

На сличен начин се докажува дека

$$v_{2n+2}=u_{2n}+2v_{2n} \text{ за } n=1,2,... \tag{3}$$

Од (2) и (3) добиваме

$$\begin{aligned}v_{2n+4}&=u_{2n+2}+2v_{2n+2}=2u_{2n}+2v_{2n}+2v_{2n+2}\\&=2(v_{2n+2}-2v_{2n})+2v_{2n}+2v_{2n+2}=4v_{2n+2}-2v_{2n}.\end{aligned}$$

Од последното равенство и од (1) добиваме

$$a_{2n+4}-4a_{2n+2}+2a_{2n}=0 \text{ за } n=1,2,... \tag{4}$$

Ако ставиме $y_n=a_{2n}$ ја добиваме диференцната равенка

$$y_{n+2}-4y_{n+1}+2y_n=0 \tag{5}$$

со почетни услови $y_1=a_2=0$ (бидејќи нема патишта со должина 2 од 0 до 4) и $y_2=a_4=2$ (бидејќи постојат два пата со должина 4 од 0 до 4: $(0,1,2,3,4)$ и $(0,-1,-2,-3,-4)$).

Карактеристичната равенка на диференцната равенка (5) е $\lambda^2-4\lambda+2=0$, и нејзини решенија се $\lambda_1=2+\sqrt{2}$ и $\lambda_2=2-\sqrt{2}$. Според тоа, општо решение на диференцната равенка (5) е дадено со

$$y_n=C_1(2+\sqrt{2})^n+C_2(2-\sqrt{2})^n,$$

каде константите се одредуваат од почетните услови, при што добиваме $C_1=\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ и $C_2=-\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$, па затоа

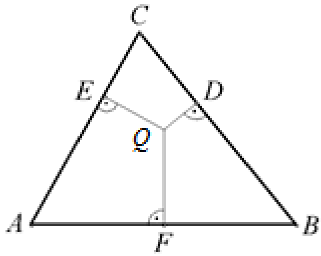
$$a_{2n}=y_n=\tfrac{1}{\sqrt{2}}[(2+\sqrt{2})^{n-1}-(2-\sqrt{2})^{n-1}],\ n=1,2,....$$

XXII олимпијада

1. Нека Q е внатрешна точка во $\triangle ABC$ е нека D, E и F се нејзините ортогонални проекции на правите BC, CA и AB, соодветно. Најди ги сите точки Q за кои збирот

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{QD}}+\frac{\overline{CA}}{\overline{QE}}+\frac{\overline{AB}}{\overline{QF}}$$

има најмала вредност.



Решение. *Прв начин*. Ако ги воведеме ознаките $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$, $c=\overline{AB}$, тогаш треба да го определиме минимумот на изразот

$$S=\frac{a}{\overline{QD}}+\frac{b}{\overline{QE}}+\frac{c}{\overline{QF}}.$$

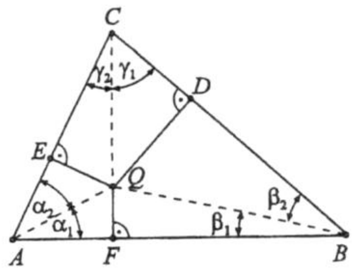
Ако со P ја означиме плоштината на триаголникот ABC, тогаш

$$2P=a\cdot\overline{QD}+b\cdot\overline{QE}+c\cdot\overline{QF}$$

па според тоа

$$\begin{aligned}2PS&=a^2+b^2+c^2+bc\left(\frac{\overline{QF}}{\overline{QE}}+\frac{\overline{QE}}{\overline{QF}}\right)+ca\left(\frac{\overline{QD}}{\overline{QF}}+\frac{\overline{QF}}{\overline{QD}}\right)+ca\left(\frac{\overline{QD}}{\overline{QE}}+\frac{\overline{QE}}{\overline{QD}}\right)\\&\geq a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab)\\&=(a+b+c)^2.\end{aligned}$$

Равенство е исполнето ако и само ако $\overline{QD}=\overline{QE}=\overline{QF}$, т.е. ако Q е центар на кружницата впишана во $\triangle ABC$. Тогаш дадениот израз има минимална вредност



$$S_{\min}=\frac{(a+b+c)^2}{2P}.$$

Втор начин. При ознаки како на цртежот десно имаме

$$\begin{aligned}\frac{\overline{BC}}{\overline{QD}}+\frac{\overline{CA}}{\overline{QE}}+\frac{\overline{AB}}{\overline{QF}}&=\frac{\overline{BD}+\overline{DC}}{\overline{QD}}+\frac{\overline{CE}+\overline{EA}}{\overline{QE}}+\frac{\overline{AF}+\overline{FB}}{\overline{QF}}\\&=\operatorname{ctg}\alpha_1+\operatorname{ctg}\beta_1+\operatorname{ctg}\beta_2+\operatorname{ctg}\gamma_1+\operatorname{ctg}\gamma_2+\operatorname{ctg}\alpha_2\\&=\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}+\frac{\sin(\beta_1+\beta_2)}{\sin\beta_1\sin\beta_2}+\frac{\sin(\gamma_1+\gamma_2)}{\sin\gamma_1\sin\gamma_2}\\&=\frac{2\sin\alpha}{\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\cos\alpha}+\frac{2\sin\beta}{\cos(\beta_1-\beta_2)-\cos\beta}+\frac{2\sin\gamma}{\cos(\gamma_1-\gamma_2)-\cos\gamma}.\end{aligned}$$

Последниот израз ќе биде минимален ако секој од собирците е монимален, т.е. секој од изразите

$$\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\cos\alpha, \cos(\beta_1-\beta_2)-\cos\beta, \cos(\gamma_1-\gamma_2)-\cos\gamma$$

е максимален, од што следува $\cos(\alpha_1-\alpha_2)=\cos(\beta_1-\beta_2)=\cos(\gamma_1-\gamma_2)=1$. Значи, $\alpha_1=\alpha_2, \beta_1=\beta_2, \gamma_1=\gamma_2$, т.е. Q е ценаторт на впишаната кружница во триаголникот ABC.

2. Дадени се броевите n и r $(1\le r\le n)$. Ги формираме сите подмножества од $\{1,2,...,n\}$ со r елементи и за секое подмножество го наоѓаме најмалиот елемент. Со $f(n,r)$ ја означуваме аритметичката средина на сите така добиени броеви. Докажи дека $f(n,r)=\frac{n+1}{r+1}$.

Решение. Бројот на сите $r-$ подмножества од множеството $\{1,2,...,n\}$ е $\binom{n}{r}$. Едно од тием подмножества е $\{n-r+1, n-r+2,...,n\}$ и најмалиот елемент во него е $n-r+1$. Овој број е поголем од сите најмали броеви на другите подмножества. Бројот $k\,(=1,2,...,n-r+1)$ е минимален елемент во $\binom{n-k}{r-1}$ $r-$ подмножествата од множеството $\{1,2,...,n\}$, па затоа

$$\begin{aligned} f(n,r) &= \frac{1}{\binom{n}{r}}\sum_{k=1}^{n-r+1} k\binom{n-k}{r-1} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{r}}\Big(\sum_{k=1}^{n-r+1}\binom{n-k}{r-1}+\sum_{k=2}^{n-r+1}\binom{n-k}{r-1}+...+\binom{n-k}{r-1}\Big). \end{aligned}$$

Користејќи го равенството

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m+i}{m}=\binom{m+k+1}{m+1},$$

добиваме

$$f(n,r)=\frac{1}{\binom{n}{r}}\Big(\binom{n}{r}+\binom{n-1}{r}+...+\binom{r}{r}\Big)=\frac{1}{\binom{n}{r}}\binom{n+1}{r+1}=\frac{n+1}{r+1}.$$

3. Нека $m,n\in\mathbb{N}$, $(1\le m\le 1981, 1\le n\le 1981)$ се такви што ја задоволуваат равенката

$$(n^2-mn-m^2)^2=1.$$

Определи ја најголемата вредност на збирот m^2+n^2.

Решение. Прво во множеството природни броеви ќе ја решиме равенката $|n^2-mn-m^2|=1$. Ако $m=n$ добиваме $m=n=1$. Ако парот (m,n), $m\ne n$ е решение на горната равенка тогаш важи

$$n^2-mn-m^2=1 \text{ или } m^2+mn-n^2=1.$$

Од $n^2=m^2+mn+1$ следува дека $n>m$. Од втората равенка следува

$$n-m=\frac{mn-1}{m+n}>0 \text{ т.е. } n>m.$$

Значи, во секој случај постои $k>0$ таков што $n=m+k$ и ако замениме во $n^2-mn-m^2=1$ добиваме дека $k^2+km-m^2=1$, т.е. паротот (k,m) е решение на равенката. Според тоа, ако парот $(m,k+m)$ е решение на равенката, тогаш и парот (k,m) е решение на равенката. Важи и обратното, што значи дека ако парот (k,m) е решение на горната равенка, тогаш и парот $(m,k+m)$ е решение на оваа равенка. Ова значи дека парот $(n-m,m)$ индуцира нов пар (m,n). Сега, парот (1,1) е решение на равенката, па затоа последователно добиваме дека паровите

(1,1), (1,2), (2,3), (3,2), (5,8), (8,13), ..., (987, 1597), (1597, 2584), ...

се решенија на дадената равенка.

Според тоа, решенија на дадената равенка се паровите составени од последователните членови на низата на Фибоначи. Јасно, најголемата вредност на изразот m^2+n^2 при дадените услови е 987^2+1597^2.

4. а) Определи ги сите природни броеви n, $n\geq 3$ за кои постои множество од n последователни природни броеви со следното својство: најголемиот од овие броеви е делител на најмалиот заеднички содржател на останатите $n-1$ броеви.

б) За кои природни броеви n, $n\geq 3$ постои точно едно множество со ова својство?

Решение. Нека низата

$$a-n+1, a-n+2, a-n+3, ..., a-1, a \qquad (1)$$

природни броеви ги задоволува условите на задачата, т.е. нека

$$a \mid \mathrm{NZS}(a-n+1,...,a-1)$$

Нека $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$ е канонична факторизација на бројот a на прости множители ($p_1<p_2<...<p_r$, $\alpha_j>0$ за $j=1,2,...,r$). Тогаш за секој $j\in\{1, 2,...,r\}$ постои $m\in\{1,2,...,n-1\}$, таков што $p_j^{\alpha_j} \mid (a-m)$. Бидејќи $p_j^{\alpha_j} \mid a$, добиваме дека $p_j^{\alpha_j}\leq n-1$ за секој $j\in\{1,2,...,r\}$. Ако $r=1$, тогаш

$$n\leq a=p_1^{\alpha_1}\leq n-1,$$

што не е можно. Значи, $r\geq 2$. Според тоа, постојат барем два прости броја помали од n, од што следува дека $n\geq 4$.

Ќе докажеме дека за секој $n\geq 4$ постои низа (1) која што ги задоволува условите на задачата, а за $n\geq 5$ постојат барем две такви низи. Според тоа, одговор на прашањето под а) е $n\geq 4$, а одговор на прашањето под б) е $n=4$.

Ако $n=4$, тогаш $p_1^{\alpha_1} \le 3$, $p_2^{\alpha_2} \le 3$, па затоа важи $r=2$, $p_1=2$, $p_2=3$, $\alpha_1=\alpha_2=1$, т.е. низа од облик (1) која што ги задоволува условите на задачата е 3, 4, 5, 6.

За $n=5$ постојат две такви низи: 2, 3, 4, 5, 6 и 8, 9, 10, 11, 12.

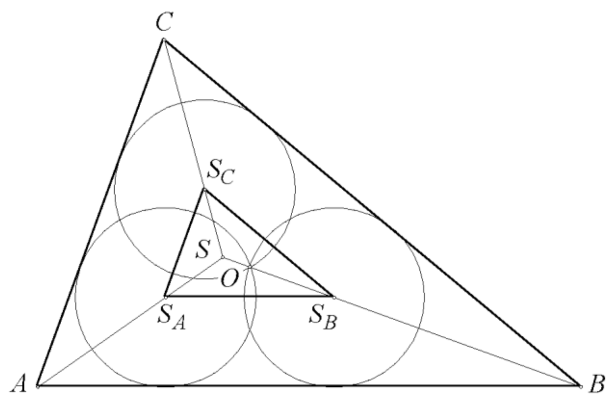
Нека $n \ge 6$. Со r, s, t да ги означиме природните броеви кои ги исполнуваат неравенствата $2^r \le n-1 < 2^{r+1}$, $3^s \le n-1 < 3^{s+1}$, $5^t \le n-1 < 5^{t+1}$. Нека во низата (1) $a = 2^r 3^s$, односно $a = 2^r 5^t$. Тогаш

$$n-1 < 2^{r+1} < 2^r 3 \le 2^r 3^s = a$$
$$n-1 < 2^{r+1} < 2^r 5 \le 2^r 5^t = a$$

Јасно, низите (1) за вака избран број a ги задоволуваат условите на задачата.

5. Низ точката O, која се наоѓа во внатрешноста на $\triangle ABC$, минуваат три кружници со еднакви радиуси, при што секоја од нив допира по две страни од $\triangle ABC$. Докажи дека точката O и центрите на опишаната и впишаната кружница на $\triangle ABC$ лежат на иста права.

Решение. Нека S_A, S_B, S_C се центрите на дадените кружници, така што S_A лежи на симетралата на аголот A од триаголникот ABC, итн. Тогаш, $S_AS_B \parallel AB$, $S_BS_C \parallel BC$, $S_CS_A \parallel CA$ и симетралите на аглите на $\triangle ABC$ се воедно симетрали и на аглите на $\triangle S_AS_BS_C$. Овие два триаголника имаат ист центар на впишана кружница, кој го означуваме со S. Точката S е центар на хомотетија χ која го пресликува $\triangle S_AS_BS_C$ во $\triangle ABC$.



Точката O е подеднакво оддалечена од S_A, S_B, S_C, т.е. таа е центар на кружницата опишана околу триаголникот $\triangle S_AS_BS_C$. Хомотетијата χ ја пресликува точката O во центарот S на кружницата опишана околу на триаголникот ABC. Затоа точката O, центарот на опишаната и центарот на впишаната кружница на $\triangle ABC$ лежат на една права.

6. Функцијата $f(x,y)$ ги задоволува условите

(1) $f(0,y)=y+1$,

(2) $f(x+1,0)=f(x,1)$ и

(3) $f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y))$

за секои x, $y\in\mathbb{N}_0$. Определи го $f(4,1981)$.

Решение. Од (1) и (2) добиваме $f(1,0)=f(0,1)=2$. Од последното равенство и од (1) и (3) при $x=0$ добиваме

$$f(1,y+1)=f(0,f(1,y))=f(1,y)+1,\text{ за } y\geq 0,$$

од што со индукција добиваме

$$f(1,y)=y+2,\text{ за } y\geq 0. \tag{4}$$

Од (2) и (4) следува $f(2,0)=f(1,1)=3$. Од (3) за $x=1$ и (4) се добива

$$f(2,y+1)=f(1,f(2,y))=f(2,y)+2,\text{ за } y\geq 0.$$

Користејќи ги овие два резултати со помош на математичка индукција добиваме

$$f(2,y)=2y+3,\text{ за } y\geq 0. \tag{5}$$

Ако во (3) ставиме $x=2$, тогаш од (5) добиваме

$$f(3,y+1)=f(2,f(3,y))=2f(3,y)+3,\text{ за } y\geq 0.$$

Од последното равенство и од равенството $f(3,0)=f(2,1)=5=2^3-3$ и со примена на индукција добиваме

$$f(3,y)=2^{y+3}-3,\text{ за } y\geq 0. \tag{6}$$

Ако во (3) ставиме $x=3$, тогаш од (6) добиваме

$$f(3,y+1)=f(3,f(4,y))=2^{f(4,y)+3}-3,\text{ за } y\geq 0.$$

Бидејќи $f(4,0)=f(3,1)=2^4-3$, со индукција добиваме

$$f(4,y)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3\ (\,y+3\text{ двојки) за } y\geq 0,$$

односно

$$f(4,1981)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3\qquad(1984\text{ двојки}).$$

XXIII олимпијада

1. Дадена е функцијата $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}_0$, за која важи:

   1) за секои m и n, $f(m+n)-f(m)-f(n)=0$ или 1,

   2) $f(2)=0$,

   3) $f(3)>0$,

   4) $f(9999)=3333$.

   Пресметај $f(1982)$.

   Решение. За $m=n=1$ според 1) и 2) добиваме $0=f(2)=2f(1)$ или $0=2f(1)+1$. Вториот случај не е можен бидејќи функцијата прима ненегативни вредности. Затоа $f(1)=0$.

   За $m=2,n=1$ важи $f(3)=f(2)+f(1)=0$ или $f(3)=f(2)+f(1)+1=1$, што според 3) значи $f(3)=1$.

   Јасно, $f(3n+3)\geq f(3n)+f(3)=f(3n)+1$, од каде со индукција се докажува дека $f(3n)\geq n$. Ако за некој n важи строго неравенство, тогаш тоа е исполнето и за секој број поголем од n. Бидејќи $f(9999)=3333$, заклучуваме дека $f(3n)=n$, за секој $n\leq 3333$. Во нашиот случај важи

   $$1982=f(3\cdot 1982)\geq f(2\cdot 1982)+f(1982)\geq 3f(1982),$$

   па според тоа

   $$661>\tfrac{1982}{3}\geq f(1982)\geq f(1980)+2=660.$$

   Значи, $f(1982)=660$.

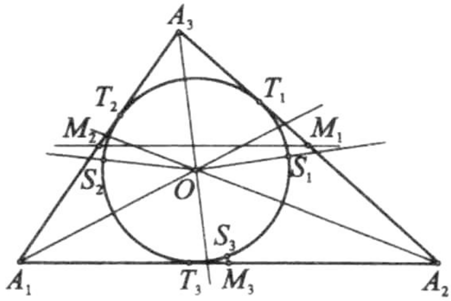
   Забелешка. Функцијата $f(n)=[\frac{n}{3}]$ ги задоволува условите на задачата.

2. Даден е разностран $\triangle A_1A_2A_3$ со должина на страните a_1,a_2,a_3 (a_i е должина на страна спроти темето A_i). Нека M_i е средината на страната a_i, T_i е точка во која впишаната кружница во триаголникот ја допира страната a_i, а S_i е симетрична точка на точката T_i во однос на симетралата на внатрешниот агол кај темето A_i $(i=1,2,3)$. Докажи дека правите M_1S_1, M_2S_2 и M_3S_3 се сечат во една точка.

   Решение. *Прв начин.* Точките S_1, S_2 и S_3 припаѓаат на впишаната кружница. Осната симетрија во однос на симетралата на аголот A_1 го пресликува лакот T_3S_1 на впишаната кружница во лакот T_2T_1, а осната симетрија во однос на симетралата на аголот A_2 лакот T_3S_2 го пресликува во лакот T_1T_2. Затоа

$$T_3S_1 = -T_2T_1 = T_1T_2 = -T_3S_2$$

(при што ознаките $T_3S_1, -T_2T_1, T_1T_2, -T_3S_2, ...$ се ознаки за ориентирани лаци на впишаната кружница). Од овде следува дека $S_1S_2 \parallel A_1A_2$ и заради тоа $S_1S_2 \parallel M_1M_2$. Слично се докажува дека $S_1S_3 \parallel M_1M_3$ и $S_2S_3 \parallel M_2M_3$. Значи, триаголниците $M_1M_2M_3$ и $S_1S_2S_3$ имаат паралелни страни па затоа постои хомотетија или транслација со која едниот се пресликува во другиот. Транслација не постои бидејќи опишаната кружница околу $\triangle M_1M_2M_3$ има поголем радиус од опишаната кружница околу $\triangle S_1S_2S_3$ (т.е. впишаната кружница на $\triangle A_1A_2A_3$, бидејќи $\triangle A_1A_2A_3$ е разностран). Затоа



постои хомотетија и нејзин центар е заедничката точка на правите M_1S_1, M_2S_2 и M_3S_3. (Овие прави постојат бидејќи $M_i \neq S_i$, а триаголникот $\triangle A_1A_2A_3$ е разностран).

Втор начин. Поставуваме координатен систем така што координатниот почеток да биде во центарот O на кружницата впишана во $\triangle A_1A_2A_3$, а радиусот на впишаната кружница да е еднаков на 1. Со мали букви ги означуваме комплексните броеви (афиксите) кои соодветствуваат на дадените точки означени со големи букви. Точни се равенствата $t_1\overline{t_1} = t_2\overline{t_2} = t_3\overline{t_3} = 1$. Тетивите $\overline{T_2T_3}$ и $\overline{T_1S_1}$ на дадената кружница се паралелни, бидејќи и двете се нормални на симетралата на аголот A_1, па затоа $t_2t_3 = t_1s_1$, односно $s_1 = t_2t_3\overline{t_1}$. Аналогно, $s_2 = t_1t_3\overline{t_2}$ и $s_3 = t_1t_2\overline{t_3}$. Според тоа,

$$s_3 - s_2 = t_1(t_2\overline{t_3} - t_3\overline{t_2}).$$

Бројот во заградата е имагинарен, како разлика на два коњугирано комплексни броеви, што значи $OT_1 \perp S_2S_3$ па затоа правите A_2A_3 и S_2S_3 се паралелни.

Понатаму решавањето е исто како и во првиот начин.

3. Ги разгледуваме низите позитивни реални броеви $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ со својство

$$1 = x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \geq ...$$

а) Докажи дека за секоја низа со тоа својство постои $n \in \mathbb{N}$ таков што

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+...+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geq 3.999 .$$

б) Определи низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ со тоа својство, при што е исполнето

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+...+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}<4 .$$

Решение. а) Воведуваме ознаки

$$\frac{x_{i-1}}{x_i}=k_i\ (\,i=1,2,...\,).$$

Тогаш,

$$\frac{x_0^2}{x_1}=x_0k_1=k_1 \text{ и } x_1=\frac{1}{k_1},$$

$$\frac{x_1^2}{x_2}=x_1k_2=\frac{k_2}{k_1} \text{ и } x_2=k_1\frac{x_1^2}{k_2}=\frac{1}{k_1k_2},$$

$$\frac{x_2^2}{x_3}=x_2k_3=\frac{k_3}{k_1k_2} \text{ и } x_3=k_1k_2\frac{x_2^2}{k_3}=\frac{1}{k_1k_2k_3}, \text{ итн.}$$

За општиот член на низата добиваме

$$S_n=\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\frac{x_3^2}{x_4}...+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}=k_1+\frac{k_2}{k_1}+\frac{k_3}{k_1k_2}+...+\frac{k_n}{k_1k_2...k_{n-1}}$$
$$=k_1+\frac{1}{k_1}(k_2+\frac{1}{k_2}(k_3+...+\frac{1}{k_{n-2}}(k_{n-1}+\frac{k_n}{k_{n-1}})...)).$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува дека за секои $a,c>0$ важи $x+\frac{a}{x}\geq 2\sqrt{a}$. Со повеќекратна примена на ова неравенство добиваме

$$S_n=k_1+\frac{1}{k_1}(k_2+\frac{1}{k_2}(k_3+...+\frac{1}{k_{n-2}}(k_{n-1}+\frac{k_n}{k_{n-1}})...))$$
$$\geq k_1+\frac{1}{k_1}(k_2+\frac{1}{k_2}(k_3+...+\frac{1}{k_{n-3}}(k_{n-2}+\frac{2}{k_{n-2}})...))$$
$$\geq k_1+\frac{1}{k_1}\cdot 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{...\sqrt{2}}}}\geq 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{...\sqrt{2}}}}=y_n .$$

За да најдеме $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, изразот го запишуваме во облик $y_n=2\sqrt{y_{n-1}}$, од што следува $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=4$, со што е докажано тврдењето.

б) Низата $x_n=2^{-n}$ го задоволува дадениот услов:

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\frac{x_3^2}{x_4}...+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}=2^1+2^0+...+2^{-n+2}=4-2^{-n+2}<4,$$

за секој $n\in\mathbb{N}$.

4. Дадена е равенката

$$x^3-3xy^2+y^3=n .$$

Ако $n \in \mathbb{N}$ е таков што дадената равенка има целобројно решение (x, y), докажи дека тогаш равенката има барем три целобројни решенија. Докажи дека за $n = 2891$ оваа равенка нема ниту едно целобројно решение.

Решение. Левата страна на равенката ја запишуваме во облик

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = (y-x)^3 - 3(y-x)x^2 + (-x)^3 = (-y)^3 - 3y(x-y)^2 + (x-y)^3 .$$

Јасно, ако парот (x, y) е решение на равенката, тогаш и паровите $(y-x, -x)$ и $(-y, x-y)$, исто така се решенија на дадената равенка и притоа било кои два од овие три пара $(x, y), (y-x, -x)$, $(-y, x-y)$ не се еднакви меѓу себе, бидејќи во спротивно добиваме $x = y = 0$, што не е можно заради претпоставката $n \neq 0$.

За да докажеме дека за за $n = 2891$ оваа равенка нема ниту едно целобројно решение, истата ќе ја запишеме во видот

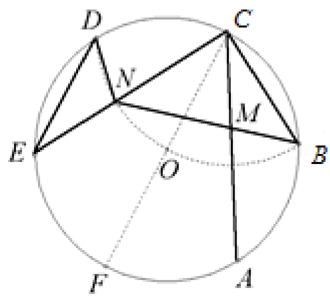
$$(x+y)^3 - 3xy(x+2y) = 2891. \qquad (1)$$

При делење на трети степени на цели броеви со 9 се добиваат остатоци 0 и ± 1. При делење на $xy(x+2y)$ се добива остаток 0, освен во случај кога $x = 3k+1$, $y = 3m+2$, кога остатокот е 2. Во тој случај $(x+y)^3$ е делив со 9. Од друга страна $2891 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 9)$, од каде следува дека равенката (1) нема решение во множеството цели броеви.

5. На дијагоналите AC и CE на правилниот шестаголник $ABCDEF$ се избрани внатрешни точки M и N, такви што $\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CE}} = \lambda$. Пресметај го λ, ако се знае дека точките B, M и N лежат на иста права.

Решение. *Прв начин.* Од $\overline{CM} = \overline{EN}$, следува дека триаголниците BCM и DEN се складни, па затоа $\measuredangle NBC = \measuredangle NDE$. Освен тоа $\measuredangle BCE = 90^\circ$, $\measuredangle DEC = 30^\circ$, па затоа

$$\begin{aligned} \measuredangle DNB &= \measuredangle CNB + \measuredangle DNC \\ &= (90^\circ - \measuredangle NBC) + (\measuredangle DEC + \measuredangle NDE) \\ &= 120^\circ. \end{aligned}$$

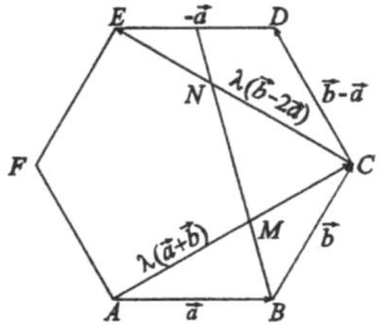


Тоа значи дека отсечката BD се гледа од точката N под ист агол како и од центарот O на кружницата опишана околу правилниот шестаголник. Затоа N лежи на кружница со центар во C, и радиус $\overline{CD} = \overline{CB}$, т.е. $\overline{CN} = \overline{CB}$. Конечно,

$$\lambda = \frac{\overline{CN}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{CB}}{CE} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

бидејќи во правоаголниот триаголник BCE, $\measuredangle EBC = 60^\circ$.

Втор начин. Ако ги воведеме ознаки $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, добиваме $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\overrightarrow{CE} = \vec{b} - 2\vec{a}$. Од $\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CE}} = \lambda$ имаме



$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AC} = \lambda(\vec{a} + \vec{b}) \text{ и}$$

$$\overrightarrow{CN} = \lambda\overrightarrow{CE} = \lambda(\vec{b} - 2\vec{a}).$$

Точките B, M и N се колинеарни и затоа

$$\overrightarrow{BM} = \mu\overrightarrow{BN} \qquad (1)$$

за некој μ. Ги изразуваме $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BN}$ со помош на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \lambda(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a},$$
$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \vec{b} + \lambda(\vec{b} - 2\vec{a}),$$

и ако замениме во (1) добиваме

$$\vec{a}(\lambda - 1 + 2\lambda\mu) + \vec{b}(\lambda - \mu - \lambda\mu) = 0,$$

Бидејќи $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се линеано независни вектори, добиваме:

$$\lambda - 1 + 2\lambda\mu = 0$$
$$\lambda - \mu - \lambda\mu = 0$$

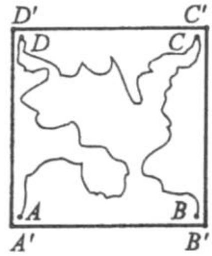
од каде што наоѓаме $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. Даден е квадрат S со должина на страната 100. Нека $L = A_0A_1A_2...A_n$ е полигонална линија во S која самата себе не се допира и не се пресекува, таква што $A_0 \neq A_n$. Нека за секоја точка P од страните на квадратот S постои точка од линијата L чија што оддалеченост од P не е поголема од $\frac{1}{2}$.

Докажи дека на L постојат две точки X и Y меѓу кои растојанието не е поголемо од 1, а должината на линијата L меѓу тие точки не е помала од 198.

Решение. Според условите, полигоналната линија L навлегува во појас со ширина $\frac{1}{2}$ по должината на сите страни на квадратот $A'B'C'D'$. Притоа линијата L мора да ги посети околините на точките A, B, C и D (види ги цртежите), така што ќе се приближи и до темињата на квадратот на растојание $d \leq \frac{1}{2}$. Зависно од редоследот по кој се посетуваат точките A, B, C, D, односно нивната околина, линијата L може да биде во облик на буквата N или во облик на буквата U. Во двата случаја точката C на линијата L се наоѓа меѓу точките A и B.

До точките од страната $A'B'$ линијата L се доближува или со нејзиниот дел од A до C или со нејзиниот дел од C до B. Врз основа на ова точките од страната $A'B'$ ги делиме на две множества од конечен број интервали. Пресекот на овие две множества не може да биде празно множество. Затоа постои точка P од страната $A'B'$ што е на растојание помало од $\frac{1}{2}$ од некоја точка X на делот на линијата меѓу точките A и C и што е истовремено на растојание помало од $\frac{1}{2}$ од некоја точка Y што припаѓа на делот на L меѓу C и B.



Од неравенството на триаголник и $d(P,X)<\frac{1}{2}$, $d(P,Y)<\frac{1}{2}$ следува $d(X,Y)<1$. Истовремено должината на линијата меѓу точките X и C не е помала од 99, бидејќи точките X и C се на растојание кое не е помало од $\frac{1}{2}$ од $A'B'$ и $D'C'$, соодветно. Од исти причини и должината на линијата меѓу точките C и Y не е помала од 99. Конечно, од претходно изнесеното следува дека должината на линијата меѓу точките X и Y не е помала од 198.

XXIV олимпијада

1. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ за кои се исполнети условите

(1) $f(xf(y)) = yf(x)$, за секои $x, y \in \mathbb{R}^+$, и

(2) $f(x) \to 0$ кога $x \to +\infty$.

Решение. Ако во релацијата (1) ставиме $y = x$ добиваме дека постојат реални броеви z, такви што $f(z) = z$. На пример, таков е секој број од облик $xf(x)$, $x > 0$. Нека z е било кој таков број. Тогаш,

$$f(z^2) = f(zf(z)) = zf(z) = z^2,$$

и со индукција се докажува дека

$$f(z^n) = z^n, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}. \qquad (3)$$

За $z \neq 0$, од $z = f(z) = f(1 \cdot f(z)) = zf(1)$, добиваме $f(1) = 1$, па од

$$zf(\tfrac{1}{z}) = f(\tfrac{1}{z} f(z)) = f(1) = 1,$$

следува $f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z}$. Сега, повторно со индукција се докажува дека

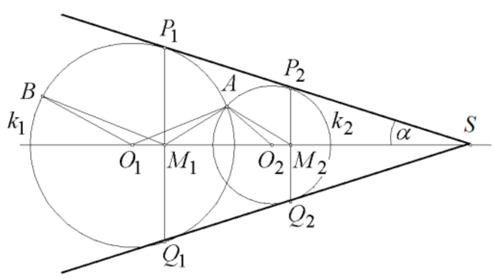
$$f(\tfrac{1}{z^n}) = \tfrac{1}{z^n}, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}. \qquad (4)$$

Ако $z > 1$, тогаш од (2) и (3) следува $0 = \infty$, што не е можно. Слично, од (4) следува дека не е можно и $z < 1$. Затоа $z = f(z)$, само ако $z = 1$. Но, ова својство го има секој број од облик $xf(x)$, па затоа $f(x) = \frac{1}{x}$, за секој $x > 0$. Непосредно се проверува дека оваа функција ги има својствата (1) и (2).

2. Во рамнина се дадени две кружници k_1 и k_2 со различни радиуси и центри O_1 и O_2. Кружниците k_1 и k_2 се сечат и нека A е една нивна пресечна точка. Една од заедничките тангенти ја допира k_1 во P_1 и k_2 во P_2, а другата заедничка тангента ја допира k_1 во Q_1 и k_2 во Q_2. Нека M_1 и M_2 се средини на P_1Q_1 и P_2Q_2, соодветно. Да се докаже дека $\measuredangle O_1AO_2 = \measuredangle M_1AM_2$.

Решение. *Прв начин*. Доволно е да докажеме дека

$$\measuredangle O_1AM_1 = \measuredangle O_2AM_2.$$



Нека S е пресекот на заедничките тангенти на кружниците k_1 и k_2 и нека правата SA ја сече кружницата k_1 во уште една точка B. Бидејќи кружниците k_1 и k_2 се хомотетични во однос на S, важи

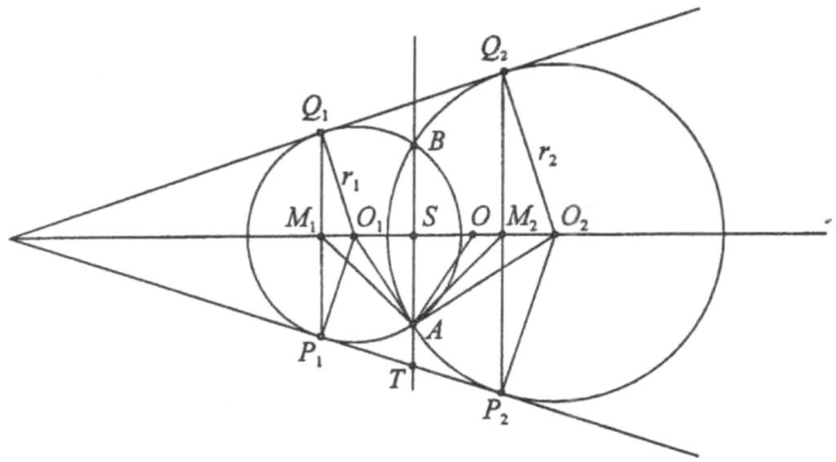
$$\measuredangle O_2AM_2 = \measuredangle O_1BM_1 .$$

Значи, останува да докажеме дека $\measuredangle O_1AM_1 = \measuredangle O_1BM_1$, а за тоа доволно е да докажеме дека точките A, B, O_1 и M_1 се наоѓаат на една кружница. Последниот услов е исполнет бидејќи

$$\overline{SA}\cdot\overline{SB} = \overline{SP_1}\cdot\overline{SP_1} = \overline{SO_1}\cos\alpha\,\frac{\overline{SM_1}}{\cos\alpha} = \overline{SO_1}\cdot\overline{SM_1}$$

каде што $\alpha = \measuredangle P_1SO_1$.

Втор начин. Втората пресечна точка на k_1 и k_2 да ја означиме со B (види цртеж). Нека $T = AB \cap P_1P_2$. Од $\overline{TP_1}^2 = \overline{TA}\cdot\overline{TB} = \overline{TP_2}^2$ следува $\overline{TP_1} = \overline{TP_2}$.



Затоа $\overline{SM_1} = \overline{SM_2}$, каде $S = AB \cap O_1O_2$. При осна симетрија во однос на правата AB точката M_1 се пресликува во M_2 и нека O_1 се пресликува во O. Забележуваме дека важи

$$\frac{\overline{O_2M_2}}{\overline{OM_2}} = \frac{\overline{O_2M_2}}{\overline{O_1M_1}} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\overline{AO_2}}{\overline{AO}} .$$

Сега од теоремата за симетрала на агол следува дека AM_2 е симетрала на $\measuredangle O_2AO$, па затоа

$$\measuredangle O_2AM_2 = \measuredangle M_2AO = \measuredangle M_1AO_1 ,$$

т.е.

$$\measuredangle M_1AM_2 = \measuredangle M_1AO_1 + \measuredangle O_1AM_2 = \measuredangle O_2AM_2 + \measuredangle O_1AM_2 = \measuredangle O_1AO_2 .$$

3. Нека $a, b, c \in \mathbb{N}$ се такви што било кои два се заемно прости. Докажи дека

$$2abc - ab - bc - ca$$

е најголемиот цел број кој не може да се претстави во облик

$$xca + yca + zab$$

каде што x, y, z се ненегативни цели броеви.

Решение. На почеток ќе докажеме дека секој број $n > 2abc - ab - bc - ac$ може да се претстави во облик $n = abz + bcx + acy$, каде x, y и z се природни броеви, а потоа дека бројот $n = 2abc - ab - bc - ac$ не може да се претстави во тој облик.
Нека (x_0, y_0, z_0) е некое целобројно решение на равенката

$$abz + bcx + acy = n,$$

кое сигурно постои за секој цел број n бидејќи

$$\mathrm{NZD}(a,b) = \mathrm{NZD}(b,c) = \mathrm{NZD}(c,a) = 1.$$

Доволно е да докажеме дека може да се избере ненегативно решение, т.е. такво што $x \geq 0$, $y \geq 0$ и $z \geq 0$. Со одземање на равенствата добиваме

$$ab(z - z_0) + bc(x - x_0) + ac\,(y - y_0) = 0.$$

Од $\mathrm{NZD}(a,b) = \mathrm{NZD}(c,a) = 1$ добиваме $a \,|\, (x - x_0)$ т.е. $x - x_0 = as$, $s \in \mathbb{Z}$. Ако замениме во претходното равенство добиваме

$$b(z - z_0) + bcs + c(y - y_0) = 0.$$

Од $\mathrm{NZD}(c,a) = 1$ следува $b \,|\, (y - y_0) = bt$, $t \in \mathbb{Z}$. Ако замениме во претходното равенство добиваме $cs + ct + z - z_0 = 0$, т.е. $z - z_0 = -c(s + t)$.
Во релациите $x = x_0 + as$ и $y = y_0 + bt$ броевите s и t можат да се изберат така што $0 \leq x \leq a - 1$ и $0 \leq y \leq b - 1$. Тогаш

$$abz = n - bcx - acy > (2abc - ab - bc - ca) - bc(a - 1) - ca(b - 1) = -ab,$$

од каде што добиваме $z > -1$, т.е. $z \geq 0$. Аналогно се добива и за x и y, со што го докажавме првиот дел од тврдењето.
За да го докажеме вториот дел, претпоставуваме дека

$$2abc - ab - bc - ca = bcx + cay + abz,\ \ x, y, z \geq 0.$$

Тогаш,

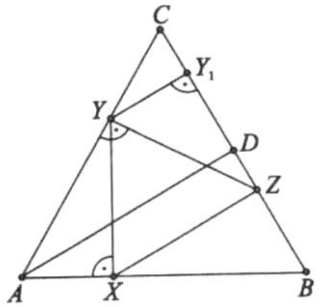
$$bc(x + 1) + ca(y + 1) + ab(z + 1) = 2abc,$$

при што $x + 1 \geq 1$, $y + 1 \geq 1$, $z + 1 \geq 1$. Од $\mathrm{NZD}(a,b) = \mathrm{NZD}(c,a) = 1$ следува $a \,|\, (x + 1)$, па затоа $a \leq x + 1$. Слично добиваме $b \leq y + 1$ и $c \leq z + 1$, па според тоа

$$bca + cab + abc \leq bc(x + 1) + ca(y + 1) + ab(z + 1) = 2abc,$$

т.е. $3abc \leq 2abc$, што не е можно бидејќи a, b, c се природни броеви.

4. Даден е рамностран $\triangle ABC$. Нека E е множеството од сите точки од отсечките AB, BC и CA (вклучувајќи ги и A, B и C). Дали е точно дека за било која поделба на множеството E на две дисјунктни подмножества постои правоаголен триаголник за кој сите три темиња припаѓаат на едно исто од тие подмножества?
Решение. Ќе докажеме дека одговорот на прашањето е позитивен.



Нека X е точка на AB таква што $\overline{AX}:\overline{XB}=1:2$, Y е точка од AC таква што $XY \perp AB$ и Z е точка од BC таква што $YZ \perp AC$ (цртеж десно). Ќе докажеме дека $XZ \perp BC$.

Од $\overline{AY}=2\overline{AX}$ и $\overline{AX}=\frac{1}{3}\overline{AC}$ следува $\overline{AX}=\overline{YC}$. Значи, $\triangle AXY \cong \triangle CYZ$ (како правоаголни триаголници кај кои една катета е еднаква и аглите во темињата A и C се еднакви). Значи, $\overline{XY}=\overline{YZ}$. Освен тоа, $\measuredangle XYZ=60^\circ$, па затоа $\triangle XYZ$ е рамностран, т.е. $\overline{XZ}=\overline{XY}$.

Како што покажавме дека $\overline{AX}=\overline{YC}$, аналогно се докажува дека $\overline{ZB}=\overline{YC}$. Сега од $\overline{AX}=\overline{ZB}$, $\overline{XZ}=\overline{XY}$ и $\measuredangle XAY=\measuredangle ZBX=60^\circ$ следува дека $\triangle AXY \cong \triangle BZX$, па затоа $\measuredangle BZX=\measuredangle AXY=90^\circ$.

Нека е дадена произвона поделба E, $E=S\cup T$, при што $S\cap T=\varnothing$. Две од точките X,Y,Z припаѓаат на исто подмножество. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $X,Z\in S$. Тогаш, ако постои точка $A_1\in BC$, таква што $A_1\in S$ и $A_1\not\equiv Z$, задачата е решена, затоа што бараниот правоаголен триаголник е XZA_1. Затоа сите точки од отсечката BC (освен Z) нека припаѓаат на T. Ако $Y\in T$, тогаш задачата е решена бидејќи триаголникот YY_1C, каде што Y_1 е проекција на Y врз BC, е правоаголен и $Y,Y_1,C\in T$. Затоа, да претпоставиме дека $Y\in S$. Ако некоја точка $C_1\in AB$ и $C_1\not\equiv X$ припаѓа на S, тогаш триаголникот YXC_1 е правоаголен и $Y,X,C_1\in S$ и задачата е решена. Затоа, да претпоставиме дека сите точки на отсечката AB, освен X, припаѓаат на T. Тогаш триаголникот ABD, каде што D е проекцијата на точката A врз отсечката BC, е правоаголен и $A,B,D\in T$.

5. Докажи го или негирај го тврдењето: Во множеството природни броеви $\{1,2,3,...,10^5\}$ постои подмножество од 1983 елементи, кое не содржи ниту една тројка броеви кои се последователни членови на некоја аритметичка прогресија.

Решение. Ќе докажеме дека тврдењето во задачата е точно. Со T_n го означуваме множеството природни броеви чиј запис во систем со основа 3 има најмногу n цифри, во кој запис сите цифри се различни од 2. Бројот на елементите на тоа множество е 2^n, а неговиот најголем елемент е

$$\underbrace{11...1}_{n} = 3^0 + 3^1 + ... + 3^{n-1} = \tfrac{1}{2}(3^n - 1).$$

Множеството T_n не содржи ниту една аритметичка тројка. Имено, ако $x, y, z \in T_n$ и $2y = x + z$, тогаш записот бројот $2y$ во систем со основа 3 ќе ги содржи само цифрите 0 или 2, а бројот $x + z$ (ако x и y се различни броеви од T_n) мора барем на едно место да има цифра 1.

За $n = 11$ добиваме

$$2^{11} = 2048 > 1983, \text{ а } \tfrac{1}{2}(3^{11} - 1) = 88573 < 100000.$$

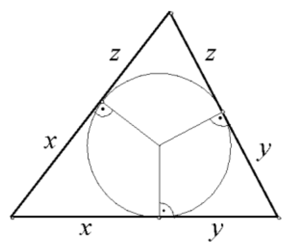
Според тоа, за првите 1983 броеви од множеството T_n тврдењето на задачата е точно.

6. Нека a, b, c се должини на страни на $\triangle ABC$. Докажи го неравенството

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. *Прв начин.* За секој триаголник со должини на страни a, b, c секогаш може да се изберат ненегативни броеви x, y, z, такви што $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ (цртеж десно). Ако овие равенства ги замениме во даденото неравенство, по средувањето го добиваме еквивалентното неравенство



$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xyz(x + y + z). \tag{1}$$

Последното неравенство следува од неравенството на Коши-Шварц-Буњаковски за ненегативни реални броеви a_1, a_2, a_3:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

применето на броевите:

$$a_1 = \sqrt{z}, a_2 = \sqrt{x}, a_3 = \sqrt{y} \text{ и } b_1 = \sqrt{xy^3}, b_2 = \sqrt{yz^3}, b_3 = \sqrt{zx^3},$$

при што знак за равенство е исполнет ако и само ако $\frac{xy^3}{z} = \frac{yz^3}{x} = \frac{zx^3}{y}$, т.е. ако и само ако $x = y = z$, односно $a = b = c$.

Втор начин. На потполно ист начин како погоре го добиваме неравенството (1), кое е квивалентно на очигледното неравенство

$$(x-z)^2 zy + (z-y)^2 yx + (y-x)^2 xz \geq 0. \tag{2}$$

Во неравенството (2) знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z$, т.е. ако и само ако $a = b = c$.

XXV олимпијада

1. Нека x, y и z се ненегативни реални броеви за кои е исполнето равенството $x+y+z=1$. Докажи ги неравенствата

$$0 \le xy+yz+zx-2xyz \le \tfrac{7}{27}.$$

Решение. Левата страна на неравенството ќе ја запишеме во облик

$$xy+yz+zx-2xyz = xy(1-z)+yz(1-x)+zx \ge 0.$$

Последното неравенство е исполнето бидејќи броевите x, y, z се позитивни и $x+y+z=1$.

Ако броевите $\frac{1}{2}-x, \frac{1}{2}-y$ и $\frac{1}{2}-z$ се ненегативни тогаш од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина следува

$$[(\tfrac{1}{2}-x)(\tfrac{1}{2}-y)(\tfrac{1}{2}-z)]^{\frac{1}{3}} \le \tfrac{1}{3}[(\tfrac{1}{2}-x)+(\tfrac{1}{2}-y)+(\tfrac{1}{2}-z)].$$

Значи,

$$(\tfrac{1}{2}-x)(\tfrac{1}{2}-y)(\tfrac{1}{2}-z) \le [\tfrac{1}{3}(\tfrac{3}{2}-(x+y+z))]^3 = (\tfrac{1}{6})^3, \qquad (1)$$

односно

$$\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{4}(x+y+z)+\tfrac{1}{2}(xy+yz+zx)-xyz \le \tfrac{1}{216}$$

и конечно

$$xy+yz+zx-2xyz \le \tfrac{7}{27}. \qquad (2)$$

Ако еден од броевите $\frac{1}{2}-x, \frac{1}{2}-y$ и $\frac{1}{2}-z$ е негативен, тогаш неравенството (1) е точно, па на потполно ист начин се добива неравенство (2). Два од трите броеви $\frac{1}{2}-x, \frac{1}{2}-y$ и $\frac{1}{2}-z$ не може да се негативни. Имено, $\frac{1}{2}-x<0$ и $\frac{1}{2}-y<0$, тогаш ако ги собереме последните неравенства добиваме $1<x+y$, што противречи на $x,y,z \ge 0$ и $x+y+z=1$.

2. Определи природни броеви a и b за кои:

1) производот $ab(a+b)$ не е делив со 7,

2) бројот $(a+b)^7-a^7-b^7$ е делив со 7^7.

Решение. Изразот $A=(a+b)^7-a^7-b^7$, го трансформираме на следниот начин:

$$\begin{aligned} A &= 7ab[(a^5+b^5)+3ab(a^3+b^3)+5a^2b^2(a+b)] \\ &= 7ab(a+b)(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4) \\ &= 7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2. \end{aligned}$$

Бидејќи $ab(a+b)$ не е делив со 7 тогаш $7^3|(a^2+ab+b^2)$, односно

$$a^2+ab+b^2=7^3k.$$

За $k=1$ и $b=1$ добиваме $a^2+a+1=343$, т.е. $(a-18)(a+19)=0$, од каде што добиваме $a=18$. Паротот $a=18$ и $b=1$ ги задоволува условите од задачата.

3. Во рамнината се дадени две различни точки O и A. За секоја точка X во рамнината, различна од O, со $\alpha(X)$ ја означуваме големината на аголот AOX изразена во радијани ($0\le\alpha(X)<2\pi$ и аголот се мери од кракот AO во насока обратна од движењето на стрелките на часовникот) и со $C(X)$ ја означуваме кружницата со центар во O и радиус $\overline{OX}+\frac{\alpha(X)}{\overline{OX}}$. Точките од рамнината се обоени со конечно многу бои. Докажи дека во рамнината постои точка Y за која $\alpha(Y)>0$ и таква што на кружницата $C(Y)$ се наоѓа точка обоена со истата боја како и Y.

Решение. Разгледуваме произволни кружници $R=(O,r)$ и $S=(O,s)$. На кружницата R земаме точка X со $\alpha(X)=r(s-r)$. За да $0\le\alpha(X)<2\pi$ доволно е да земеме $0<r<s<1$. Кружницата $C(X)$ има радиус

$$\overline{OX}+\frac{\alpha(X)}{\overline{OX}}r+\frac{r(s-r)}{r}=s,$$

т.е. таа се совпаѓа со кружницата $S=(O,s)$.

Нека претпоставиме дека бојата на точката X не се појавува на кружницата S, т.е. дека множеството бои на кружницата R е различно од множеството бои на кружницата S. Тоа повлекува дека секои две кружници со радиус помал од единица се обоени со различни множества бои. Според тоа, на секоја кружница $S=(O,s_\nu), 0<\nu<1$, а нив ги има бесконечно многу, постои боја што ја нема на кружницата R. Последното противречи на условот на задачата дека обојувањето на рамнината е со конечно многу бои.

4. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник, за кој правата CD е тангента на кружницата со дијаметар AB. Докажи дека правата AB е тангента на кружницата со дијаметар CD ако и само ако правите BC и AD се паралелни.

Решение. Ако правите AB и CD се паралелни, бидејќи отсечката CD е тангента на кружницата со дијаметар AB, следува дека растојанието меѓу паралелните прави е $\frac{\overline{AB}}{2}$. За да биде правата што минува низ точките A и B тангента на кружницата со дијаметар CD треба $\frac{\overline{CD}}{2}=\frac{\overline{AB}}{2}$. Тоа значи дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм и $AD\,||\,BC$. Важи и обратното, ако

$AD \parallel BC$, тогаш полукружниците над дијаметрите AB и CD од паралелограмот $ABCD$ ги допираат страните CD и AB, соодветно.

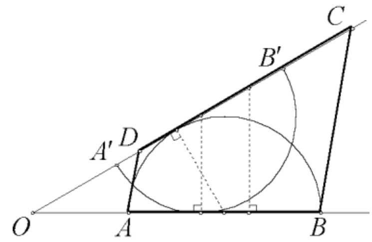
Нека правите AB и CD се сечат во точката O. На правата CD определуваме точки A' и B', така што $\overline{OA} = \overline{OA'}$ и $\overline{OB} = \overline{OB'}$.

Заради симетрија, правата AB ја допира кружницата со дијаметар $A'B'$. Затоа е исполнето: правата AB е тангента на кружницата со дијаметар CD

$\Leftrightarrow$ постои хомотетија таква што

$\overline{OD} = k \cdot \overline{OA'}$ и $\overline{OC} = k \cdot \overline{OB'}$

$\Leftrightarrow \frac{\overline{OD}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow AD \parallel BC$.

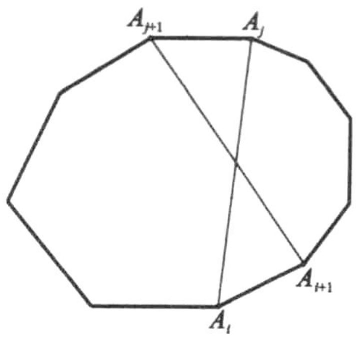


5. Со d да го означиме збирот на должините на дијагоналите на рамнински конвексен $n-$аголник, ($n > 3$), а со p неговиот периметар. Докажи дека

$$n-3 < \frac{2d}{p} < [\tfrac{n}{2}][\tfrac{n+1}{2}] - 2.$$

Решение. Темињата на n - аголникот ги означуваме со $A_1, A_2, ..., A_n$. Нека B е пресек на A_iA_j и $A_{i+1}A_{j+1}$. Од неравенството на триаголник следува (цртеж десно):

$$\overline{A_iB} + \overline{BA_{i+1}} > \overline{A_iA_{i+1}},$$
$$\overline{A_jB} + \overline{BA_{j+1}} > \overline{A_jA_{j+1}},$$

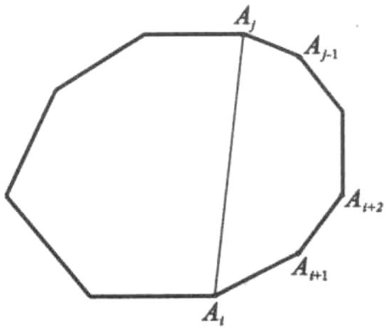


од каде што

$$\overline{A_iA_j} + \overline{A_{i+1}A_{j+1}} > \overline{A_iA_{i+1}} + \overline{A_jA_{j+1}}.$$

Последоното неравенство важи за сите парови соседни темиња и ако ги собереме овие неравенства, на левата страна ќе се појави двојниот збир на должините на сите дијагонали, а на десната страна $n-3$ пати се среќава должината на секоја страна на многуаголникот. Затоа

$$2d > (n-3)p, \text{ т.е. } n-3 < \frac{2d}{p}.$$



За секоја дијагонала го применуваме неравенството

$$\overline{A_iA_j} < \sum_{k=i}^{j-1} \overline{A_kA_{k+1}} \qquad (2)$$

(цртеж лево).

На десната страна од неравенството (2)

секогаш ја земаме онаа половина на ликот која има помалку страни, а потоа ќе направиме збир по сите дијагонали ($1 \le i < j-1 \le n-2$). Нека $n = 2m+1$ и нека ги разгледаме дијагоналите $A_1A_3, A_1A_4, ..., A_1A_{m+1}$. Тогаш

$$\sum_{j=3}^{m+1} \overline{A_1A_j} < (m-1)\overline{A_1A_2} + (m-1)\overline{A_2A_3} + (m-2)\overline{A_3A_4} + (m-3)\overline{A_4A_5} + \overline{A_{m-1}A_m} . \quad (3)$$

На истиот начин се формираат неравенствата за $\sum_{k=i+2}^{m+i} \overline{A_iA_k}$, за $i = 2,...,n$, при што земаме $A_{n+i} = A_i$. Збирот на должините на сите дијагонали е даден со $d = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i+2}^{m+i} \overline{A_iA_k}$, па со примена на (3) добиваме

$$d < (1+2+3+...+(m-1)+(m-1))p = (\tfrac{m(m+1)}{2} - 1)p ,$$

односно

$$\tfrac{2d}{p} < m(m+1) - 2 = [\tfrac{n}{2}][\tfrac{n+1}{2}] - 2 .$$

Ако $n = 2m$, тогаш на сличен начин се добива

$$d < (1+2+3+...+(m-2)+(m-2)+\tfrac{m}{2})p = (\tfrac{m(m-1)}{2} - 1 + \tfrac{m}{2})p = (\tfrac{m^2}{2} - 1)p$$

т.е.

$$\tfrac{2d}{p} < m^2 - 2 = [\tfrac{n}{2}][\tfrac{n+1}{2}] - 2 .$$

6. Нека a, b, c и d се непарни природни броеви за кои:

(1) $0 < a < b < c < d$,

(2) $ad = bc$ и

(3) $a + d = 2^k$, $b + c = 2^m$ за некои природни броеви k и n .

Докажи дека $a = 1$.

Решение. Ќе докажеме дека $k > m$. Од $ad = bc$ следува $ad - bd = bc - bd$, т.е. $d(b-a) = b(d-c)$ и бидејќи $b < d$ добиваме $d - c > b - a$, односно $a + d > b + c$, што значи $2^k > 2^m$ од што следува $k > m$.

Од условите (2) и (3) следува

$$a(2^k - a) = b(2^m - b) \text{, т.е. } (b-a)(b+a) = 2^m(b - 2^{k-m}a) .$$

Ако $b-a$ и $b+a$ се деливи со 4, тогаш $2b$ е делив со 4, што не е можно бидејќи b е непарен број. Значи, $2^{m-1} | (b-a)$ или $2^{m-1} | (b+a)$.

Во првиот случај имаме:

$$2^{m-1} | (b-a) \quad \Rightarrow \quad b - a \ge 2^{m-1} \quad \Rightarrow$$

$$c - a \ge 2^{m-1} \quad \Rightarrow \quad b + c - 2^m > 2a \quad \Rightarrow \quad 0 > a$$

што противречи на условот на задачата.

Во вториот случај имаме:

$$2^{m-1}\,|(b+a) \quad \text{и} \quad b+a<b+c=2^m \quad \Rightarrow \quad b+a=2^{m-1}.$$

Бидејќи a и b се непарни природни броеви, добиваме дека $\mathrm{NZD}(a,b)=1$. Од равенствата $a+b=2^{m-1}$ и $b+c=2^m$ следува равенството $c-a=2^{m-1}$ односно $\mathrm{NZD}(a,c)=1$. Според тоа, $\mathrm{NZD}(a,c)=1$, $\mathrm{NZD}(a,b)=1$ и како $ad=bc$, следува дека $a=1$.

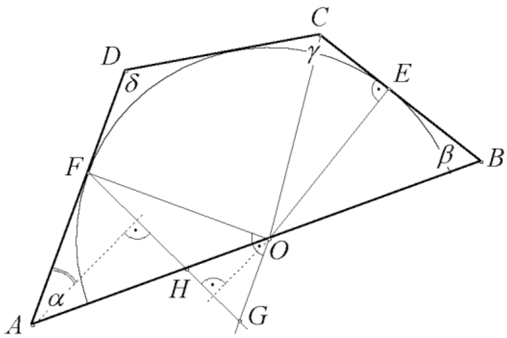
XXVI олимпијада

1. Дадена е кружница со центар на страната AB на тетивниот четириаголник $ABCD$. Преостанатите три страни ја допираат кружница. Докажи дека
$$\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}.$$

Решение. *Прв начин.* За четириаголник важи
$$\alpha+\gamma=\pi, \quad \beta+\delta=\pi.$$

Центарот O на кружницата е пресек на симетралите на аглите γ и δ. Нека FHG е нормала на симетралите на аглите $\measuredangle FAH=\measuredangle GOH=\alpha$. Значи,
$$\overline{AH}=\overline{AF} \text{ и } \overline{HO}=\overline{GO} \qquad (1)$$

Од $\measuredangle OFG=\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}=\measuredangle COE$ и $\overline{OE}=\overline{OF}$ следува $\triangle FGO\cong\triangle OCE$, т.е.
$$\overline{GO}=\overline{CE} \qquad (2)$$



Од (1) и (2) добиваме
$$\overline{AO}=\overline{AH}+\overline{HO}=\overline{AF}+\overline{CE} \qquad (3)$$
Аналогно добиваме
$$\overline{BO}=\overline{BE}+\overline{DF}. \qquad (4)$$
Од (3) и (4) добиваме
$$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BC}.$$

Втор начин. Нека O е центар на кружницата, r е нејзин радиус, а E и F се точки во кои таа ги допира страните BC и AD. Тогаш
$$\overline{BE}=r\,\text{ctg}\beta, \quad \overline{EC}=r\,\text{ctg}\frac{\gamma}{2}, \quad \overline{DF}=r\,\text{ctg}\frac{\delta}{2},$$
$$\overline{FA}=r\,\text{ctg}\alpha, \quad \overline{OB}=\frac{r}{\sin\beta}, \quad \overline{OA}=\frac{r}{\sin\alpha}.$$

Равенството $\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}$ е еквивалентно со секое од равенставата
$$r(\text{ctg}\alpha+\text{ctg}\frac{\delta}{2})+r(\text{ctg}\beta+\text{ctg}\frac{\gamma}{2})=\frac{r}{\sin\alpha}+\frac{r}{\sin\beta},$$
$$\text{ctg}\frac{\gamma}{2}+\text{ctg}\frac{\delta}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}, \text{ т.е. } \text{ctg}\frac{\gamma}{2}+\text{ctg}\frac{\delta}{2}=\text{tg}\frac{\alpha}{2}+\text{tg}\frac{\beta}{2},$$

при што последното равенство непосредно следува од равенствата $\alpha+\gamma=\pi$, $\beta+\delta=\pi$.

2. Нека $n,k\in\mathbb{N}$, $\text{NZD}(n,k)=1$, $1\le k\le n-1$ и $M=\{1,2,3,...,n-1\}$. Секој елемент од M е обоен со една од две бои, бела или сина така што:
(i) за секој i од M, броевите i и $n-i$ имаат иста боја;
(ii) за секој $i\in M, i\ne k$, броевите i и $|i-k|$ имаат иста боја.

Докажи дека сите елементи од M се обоени во иста боја.

Решение. Сите природни броеви ќе ги обоиме така што за броевите $i \in \{1,...,n-1\}$, броевите од облик $i+qn$ имаат иста боја. Нека сите броеви од облик qn се обоени како и k. Ако докажеме дека сите броеви $k, 2k, 3k$, ..., pk,... се исто обоени, тогаш сме докажале дека и сите броеви $i \in \{1,...,$ $n-1\}$ се исто обоени. Имено, бидејќи k и n се заемно прости, за секој број i постои $p \in \{1,2,...,n-1\}$ таков што $pk \equiv i \,(\mathrm{mod}\, n)$, т.е. $pk = qn+i$. Значи, броевите i и pk се исто обоени, па според тоа и сите броеви од множеството M се исто обоени.

Ќе го докажеме претходното тврдење. Постојат две можности:

1° $pk < qn < (p+1)k$,

2° $qn < pk < (p+1)k$.

Ознаката "$i \leftrightarrow j$" означува дека „броевите i и j имаат иста боја“. Во првиот случај

$$(p+1)k = qn+i \leftrightarrow i \text{ (по деф.) } \leftrightarrow k-i \text{ (заради } ii)) \leftrightarrow n-k+i \text{ (заради } i))$$
$$\leftrightarrow qn-k+i = pk \text{ (по деф.).}$$

Во вториот случај

$$(p+1)k = qn+j \leftrightarrow j \text{ (по деф)} \leftrightarrow k-i \text{ (заради } ii))$$
$$\leftrightarrow qn-k+i = pk \text{ (по деф.).}$$

3. За полиномот $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, $a_i \in \mathbb{Z}, i = 0,1,2,...,n$ со $w(P)$ го означуваме бројот на непарните коефициенти a_j. Нека за секој ненегативен цел број i е $Q_i = (1+x)^i$. Докажи дека ако $i_1, i_2, ..., i_n \in \mathbb{N}_0$ се такви што $0 \le i_1 < i_2 < ... < i_n$, тогаш

$$w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + ... + Q_{i_n}) \ge w(Q_{i_1}).$$

Решение. За $m = 2^s$ добиваме

$$(1+x)^m = 1 + R(x) + x^m$$

каде R е полином со парни коефициенти. Ако степенот на полиномот P е помал од $m = 2^s$, тогаш

$$w(P \cdot Q_m) = 2w(P). \tag{1}$$

Доказот се добива со индукција по i_n. За $i_n = 0$ или 1 тврдењето е точно. Нека тврдењето е точно за секој

$$i_n < 2^s \ (s \ge 1).$$

Нека $i_1, i_2, ..., i_n$ е низа за која

$$2^s \le i_n < 2^{s+1}.$$

Разгледуваме два случаи:

1° $i_1 \ge 2^s = k$. Тогаш од (1) и индуктивната претпоставка следува

$$\begin{aligned} w(Q_{i_1}+Q_{i_2}+...+Q_{i_n}) = w(Q_kP) = 2w(P) \\ = 2w(Q_{i_1-k}+...+Q_{i_n-k}) \\ \ge 2w(Q_{i_1-k}) = w(Q_{i_1-k}\cdot Q_k) \\ = w(Q_{i_1}). \end{aligned}$$

2°. $i_1 < 2^s = k$. Тогаш ($i_n < 2^{s+1} = 2k$)

$$\begin{aligned} Q_{i_1}(x)+Q_{i_2}(x)+...+Q_{i_n}(x) &= (1+x)^{i_1}+(1+x)^{i_2}+...+(1+x)^{i_n} \\ &= a_0+a_1x+...+a_{k-1}x^{k-1}+(1+x)^k(b_0+b_1x+...+b_{i_n-k}x^{i_n-k}) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} a_ix^i + \sum_{i=0}^{i_n-k} b_ix^i + x^k\sum_{i=0}^{i_n-k} b_ix^i + R(x), \end{aligned}$$

каде R е полином со парни коефициенти. Го пресметуваме бројот на непарни коефициенти на добиениот полином. Вториот и третиот собирок во последниот збир се полиноми кои немаат членови со исти степени. Ако некој од непарните коефициенти a_i биде поништен заради непарноста на соодветниот коефициент b_j, во конечниот збир би се појавил непарен коефициент b_j во собирокот b_jx^{j+m}. Конечно, од индуктивната претпоставка следува

$$w(Q_{i_1}+Q_{i_2}+...+Q_{i_n}) \ge w(\sum_{i=0}^{k-1} a_ix^i) \ge w(Q_{i_1})$$

со што доказот е завршен.

4. Дадено е множество M од 1985 различни природни броеви, такви што ниту еден од нив нема прост делител поголем од 26. Докажи дека од множеството M може да се изберат четири меѓусебно различни броеви чиј производ е четврти степен на природен број.

Решение. Секој број $x_j \in M$ е од облик

$$x_j = \prod_{i=1}^{9} p_i^{a_{ij}}\ ,\ j = 1,2,...,1985,\ 0 \le a_{ij}$$

каде $p_1, p_2, ..., p_9$ се сите прости броеви помали од 26, т.е. $p_i \in \{2,3,5,7,11,13,17,19,23\}$. Производот x_jx_k е точен квадрат ако и само ако

$$a_{ij}+a_{ik} \equiv 0\ (\bmod 2)\ ,\ i = 1,...,9.$$

Бројот на различни производи $x_j x_k$ по модул 2 е $2^9 = 512$. Секое подмножество од M кое содржи барем 513 елементи содржи два броја чиј производ е полн квадрат. Со елиминација на таквите парови се добиваат $\frac{1985-511}{2} = 737$ парови , такви што производот на членовите на секој пар е полн квадрат. Множеството производи е $\{y_1^2, ..., y_{737}^2\}$. Ако направиме аналогна постапка како претходната на множеството $\{y_1^2, ..., y_{737}^2\}$, добиваме дека постои пар y_r, y_s таков што $y_r y_s$ е полн квадрат. Значи $y_r y_s = y^2$, за некој $y \in \mathbb{N}$. Бидејќи

$$y_r^2 = x_j x_k, \; y_s^2 = x_m x_n,$$

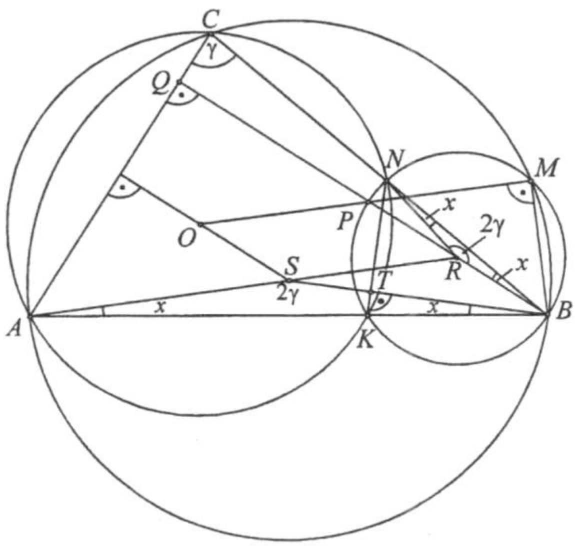
добиваме

$$x_j x_k x_m x_n = y_r^2 y_s^2 = y^4,$$

каде x_j, x_k, x_m, x_n се различни природни броеви од множеството M .

5. Дадени се $\triangle ABC$ и кружница со центар во точка O која минува низ точките A и C и по втор пат ги сече страните AB и BC во различни точки K и N, соодветно. Кружниците опишани околу триаголниците ABC и KBN имаат точно две заеднички точки B и M . Докажи дека $\measuredangle BMO = 90^\circ$.

Решение. Кружницата опишана околу триаголникот ABC има центар S. $\measuredangle BCA$ е периферен агол над тетивата AB, а $\measuredangle BSA$ е централен агол над истата тетива, па според тоа $\measuredangle BSA = 2\gamma$. Четириаголникот $AKNC$ е тетивен, па затоа $\measuredangle KNC = \pi - \alpha \Rightarrow \measuredangle BNK = \alpha$ и слично $\measuredangle NKB = \gamma$.



Значи, $\triangle ABC$ е сличен со $\triangle NBK$. Ако R е центар на кружницата опишана околу триаголникот NBK, тогаш $\measuredangle NRB = 2\gamma$. Од рамнокраките триаголници ABS и BNR добиваме

$$x = \measuredangle ABS = \tfrac{\pi}{2} - \gamma$$

па според тоа триаголниците BCQ и BTK се правоаголни. Бидејќи $OS \perp AC$, од триаголникот BCQ добиваме

$$BR \parallel OS. \qquad (1)$$

Бидејќи $OR \perp NK$ (O и R се наоѓаат на симетралата на отсечката NK) и $SB \perp NK$, од триаголникот BTK, добиваме

$$SB \parallel OR. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека четириаголникот $OSBR$ е паралелограм. Нека точката P е симетрична на точката B во однос на R. Тогаш и четириаголникот $OSRP$ е паралелограм. Бидејќи S и R лежат на симетралата на отсечката BM добиваме $SR \perp BM$ и $OP \perp BM$. Сега од Талесовата теорема следува $PM \perp BM$, т.е. $OM \perp BM$, па затоа $\measuredangle BMO$ е прав.

6. За секој реален број x_1 дефинирана е низа $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ со

$$x_{n+1} = x_n(x_n + \tfrac{1}{n}), \text{ за секој } n \geq 1.$$

Докажи дека постои еден и само еден број x_1 за кој

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1, \text{ за секој } n \geq 1.$$

Решение. Дефинираме низа функции со

$$f_1(t) = t, \quad f_{n+1}(t) = f_n(t)(f_n(t) + \tfrac{1}{n}), \quad n \geq 1.$$

Доволно е да докажеме дека постои еден и само еден број $a > 0$ таков што

$$0 < f_n(a) < f_{n+1}(a) < 1, \text{ за секој } n \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

односно

$$1 - \tfrac{1}{n} < f_n(a) < 1, \text{ кога } n \geq 1 \qquad (2)$$

Секоја од функциите f_n е полином со позитивни коефициенти, па затоа таа монотоно расте на интервалот $(0, +\infty)$.

Дефинираме низи s_n и t_n

$$f_n(s_n) = 1 - \tfrac{1}{n}, \quad f_n(t_n) = 1 \qquad (3)$$

Јасно е дека $t_n \leq 1$ и $s_n \geq 1 - \frac{1}{n}$. Ако $t_n > 1$, тогаш $f_1(n) > 1$, ... , $f_n(t_n) > 1$, што противречо на (3). Ако $s_n < 1 - \frac{1}{n}$, тогаш

$$f_1(s_n) < 1 - \tfrac{1}{n},\ f_2(s_n) = f_1(s_n)(f_1(s_n) + \tfrac{1}{n}) = (s_n + \tfrac{1}{n})s_n < 1 - \tfrac{1}{n}, ..., f_n(s_n) < 1 - \tfrac{1}{n}.$$

Од ова и од (3) следува

$$0 < t_n - s_n < f_n(t_n) - f_n(s_n) = \tfrac{1}{n} \tag{4}$$

Од

$$f_{n+1}(s_n) = 1 - \tfrac{1}{n} < 1 - \tfrac{1}{n+1} = f_{n+1}(s_{n+1})$$

и монотоноста на функцијата f_{n+1} добиваме

$$s_n < s_{n+1}, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}$$

и аналогно

$$f_{n+1}(t_n) = 1 + \tfrac{1}{n} > 1 = f_{n+1}(t_{n+1})$$

па според тоа

$$t_{n+1} < t_n, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}.$$

Значи, низата s_n е монотоно растечка и е ограничена од горе, $s_n < t_n < 1$, а низата t_n е монотоно опаѓачка низа и ограничена од долу, $t_n > 0$.

Од (4) следува $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} t_n = a$.

Ќе докажеме дека низата $x_n = f_n(a)$ ги има бараните својства. Имаме:

$$1 - \tfrac{1}{n} = f_n(s_n) < f_n(a) < f_n(t_n) = 1.$$

Останува да докажеме дека постои единствена низа со овие својства. За $t \neq a$ постои $s_n \in (t, a)$ или $t_n \in (a, t)$, па според тоа

$$f_n(t) < f_n(s_n) = 1 - \tfrac{1}{n} \quad \text{или} \quad f_n(t) > f_n(t_n) = 1$$

т.е. не е исполнет условот (2).

XXVII олимпијада

1. Нека d е природен број различен од 2, 5, 13. Докажи дека од множеството $\{2,5,13,d\}$ може да се изберат два различни броја a и b така што $ab-1$ не е точен квадрат на цел број.

Решение. Доволно е да докажеме дека за било кој природен број d барем еден од броевите $2d-1$, $5d-1$, $13d-1$ не е точен квадрат. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека постојат цели броеви x, y, z такви што

$$2d = x^2+1,\ \ 5d = y^2+1,\ \ 13d = z^2+1.$$

Според тоа x е непарен, т.е. $x = 2x'+1$, па $2d = 4x'^2+4x'+2$, што значи дека d е непарен; но тогаш y и z се парни. Нека u и v се цели броеви такви што $y = 2u$, $z = 2v$. Од $8d = z^2 - y^2$ добиваме $2d = (u-v)(u+v)$. За десната страна да е делива со 2 мора u и v да се со иста парност, но тогаш таа е делива и со 4, а левата не е делива со 4, што е противречност.

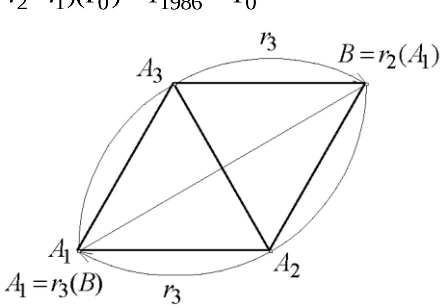
2. Во рамнина е даден $\triangle A_1A_2A_3$ и точка P_0. Ставаме $A_s = A_{s-3}$ за секој цел број $s \geq 4$. Конструираме низа точки $P_0, P_1, P_2, ...$ таква што секоја точка P_{k+1} се добива со ротација на точката P_k околу точката A_{k+1} за агол од 120° во насока на насоката на движењето на стрелките на часовникот.
Докажи дека, ако $P_{1986} = P_0$, тогаш $\triangle A_1A_2A_3$ е рамностран.

Решение. *Прв начин.* Нека r_i е ротација околу A_i за 120° во насока на движењето на стрелките на часовникот. Композицијата $r_3 \circ r_2 \circ r_1$ е транслација за некој вектор $\vec{v}$, бидејќи збирот на аглите на ротација на r_1, r_2, r_3 е 360°. Според тоа, $r_{1986} \circ r_{1985} \circ ... \circ r_3 \circ r_2 \circ r_1$ е транслација за $662\vec{v}$, па затоа

$$(r_{1986} \circ r_{1985} \circ ... \circ r_3 \circ r_2 \circ r_1)(P_0) = P_{1986} = P_0$$

е можно ако и само ако $\vec{v} = \vec{o}$, т.е. $r_3 \circ r_2 \circ r_1 = e$ е идентичното пресликување, кое ќе го примениме на A_1. При тоа важи:

$$r_1(A_1) = A_1;\quad r_2r_1(A_1) = r_2(A_1)$$



и нека последната точка ја означиме со B, т.е. $r_2(A_1) = B$. Тогаш,

$$A_1 = r_3r_2r_1(A_1) = r_3(B).$$

Значи,

$$A_1 = r_3(B)\,, \quad r_2(A_1) = B\,.$$

Рамнокраките триаголници A_1A_2B и BA_3A_1 имаат исти агли ($\measuredangle A_2 = \measuredangle A_3 = 120^\circ$) и заедничка страна A_1B, па според тоа се складни. Значи, $A_1A_2BA_3$ е ромб со агли 60° и 120°, па според тоа триаголникот $A_1A_2A_3$ е рамностран.

Втор начин. Дадената рамнина ја разгледуваме како комплексна и притоа претпоставуваме дека координатниот почеток е во P_0. Нека на точките $A_1, A_2, A_3, \ldots$ соодветствуваат комплексните броеви $z_1, z_2, z_3, \ldots$ и притоа важи

$$z_1 = z_4 = z_7 = \ldots,\ z_2 = z_5 = z_8 = \ldots,\ z_3 = z_6 = z_9 = \ldots \qquad (1)$$

и нека на точките $P_0, P_1, P_2, \ldots$ соодветствуваат комплексните броеви $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$. Фактот дека точката P_{k+1} се добива со ротација на точката P_k околу точката A_{k+1} за агол од 120° во насока на насоката на движењето на стрелките на часовникот се запишува како

$$\omega_{k+1} = z_{k+1} + (\omega_1 - z_{k+1})\varepsilon,\ k = 0,1,2,3,\ldots,$$

каде што $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}$. Значи,

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = (1-\varepsilon)z_1,\\
&\omega_2 = (1-\varepsilon)z_2 + \varepsilon\omega_1,\\
&\omega_3 = (1-\varepsilon)z_3 + \varepsilon\omega_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\omega_{1986} = (1-\varepsilon)z_{1986} + \varepsilon\omega_{1985},
\end{aligned}$$

па оттука

$$0 = \omega_{1986} = (1-\varepsilon)(z_{1986} + \varepsilon z_{1985} + \varepsilon^2 z_{1984} + \ldots + \varepsilon^{1985} z_1)\,.$$

Бидејќи $\varepsilon \neq 1$, а имајќи ја предвид (1) се добива

$$z_3 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_1 = 0\,.$$

Во последната равенка заменуваме $\varepsilon = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и добиваме

$$z_3 - z_1 = (\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3})(z_2 - z_1)\,,$$

што значи дека векторот $\overrightarrow{A_1A_3}$ се добива од векторот $\overrightarrow{A_1A_2}$ со ротација околу A_1 за агол $\frac{\pi}{3}$ во насока спротивна од насоката на движењето на стрелките на часовникот. Последното значи дека $\triangle A_1A_2A_3$ е рамностран.

3. На темињата на правилен петаголник им се придружени цели броеви, чиј збир е природен број. Ако на три последователни темиња им соодветствуваат броевите x, y, z и $y < 0$, тогаш се врши следнава операција:

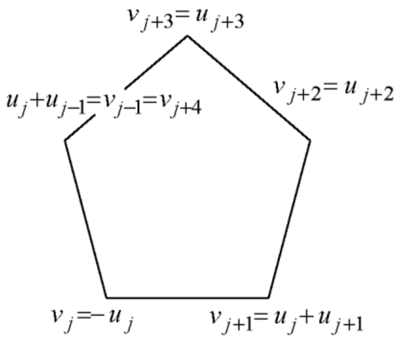
броевите x, y, z се заменуваат со $x+y, -y, z+y$, соодветно.

Оваа операција се изведува се додека барем еден од петте броеви е негативен. Дали постапката ќе заврши по конечно многу чекори?

Решение. Нека $u_1,..., u_5$ се цели броеви и барем еден од нив е негативен. Еден од овие броеви да го означиме со u_j.

Нека $v_1,..., v_5$ се цели броеви добиени од $u_1,..., u_5$ со примена на операцијата од задачата, така што $x=u_{j-1}$, $y=u_j$, $z=u_{j+1}$ (применето е циклично индексирање $u_i=u_{i+5}$), т.е. $v_{j-1}=u_{j-1}+u_j$, $v_j=-u_j$, $v_{j+1}=u_{j+1}+u_j$. Значи, работиме со подредени петорки

$$U=(u_1,...,u_5)\,, V=(v_1,...,v_5)\,.$$



Ја разгледуваме функцијата F која на секоја петорка $X=(x_1,...,x_5)$ и придружува број $\sum_{i=1}^{5}(x_i-x_{i-1})^2$ (секаде се применува циклично индексирање).

$$
\begin{aligned}
F(V) &= \sum_{i=j}^{j+4}(v_{i+1}-v_{i-1})^2 \\
&= (u_j+u_{j+1}-u_j-u_{j-1})^2+(u_{j+2}+u_j)^2+ \\
&\quad +(u_{j+3}-u_j-u_{j+1})^2+(u_j+u_{j-1}-u_{j+2})^2+(-u_j-u_{j+3})^2 \\
&= (u_{j+1}-u_{j-1})^2+(u_{j+2}+u_j)^2+(u_{j+3}-u_{j+1}-u_j)^2+ \\
&\quad +(u_{j-1}-u_{j+2}+u_j)^2+(u_j+u_{j+3})^2 \\
&= F(U)+[(u_{j+2}+u_j)^2-(u_{j+2}-u_j)^2]+ \\
&\qquad +[(u_{j+3}-u_{j+1}-u_j)^2-(u_{j+3}-u_{j+1})^2]+ \\
&\qquad +[(u_{j-1}-u_{j+2}+u_j)^2-(u_{j-1}-u_{j+2})^2]+ \\
&\qquad +[(u_j+u_{j+3})^2-(u_j-u_{j+3})^2] \\
&= F(U)+u_j(4\,u_{j+2}-2\,u_{j+3}+2\,u_{j+1}+u_j+2\,u_{j-1}-2\,u_{j+2}+u_j+4\,u_{j+3}) \\
&= F(U)+u_j(2\,u_{j+2}+2\,u_{j+1}+2\,u_j+2\,u_{j+3}+2\,u_{j-1}) \\
&= F(U)+2\,u_jS\,,
\end{aligned}
$$

при што $S=u_1+...+u_5=v_1+...+v_5$ (т.е. во секој чекор се појавува исто S). Бидејќи $S>0$, $F(V)<F(U)$, па според тоа вредностите на F образуваат строго опаѓачка низа ненегативни цели броеви. Секоја таква низа е конечна.

4. Нека A и B се соседни темиња на правилен $n-$аголник со центар во O, $n \geq 5$. Триаголникот XYZ, кој е складен со триаголникот OAB, на почеток е поставен така што точките X, Y, Z се совпаѓаат со точките O, A, B, соодветно. Потоа $\triangle XYZ$ се движи во рамнината на $n-$аголникот, така што темињата Y и Z остануваат на страните на $n-$аголникот. Каква фигура ќе опише точката X кога точката Y еднаш ќе го помине целиот $n-$аголник?

Решение. Нека A, B, C се три последователни темиња на $n-$аголникот. Разгледуваме што се случува со X кога Y се движи од A до B, а Z од B до C. Кога Y се совпаѓа со A или B јасно е дека X се совпаѓа со O. Затоа ќе го разгледаме случајот кога Y е внатрешна точка на отсечката AB, а Z е внатрешна точка на отсечката BC.

Бидејќи

$$\measuredangle ZXY + \measuredangle YBZ = \measuredangle BOA + \measuredangle ABO + \measuredangle OAB = 180^\circ,$$

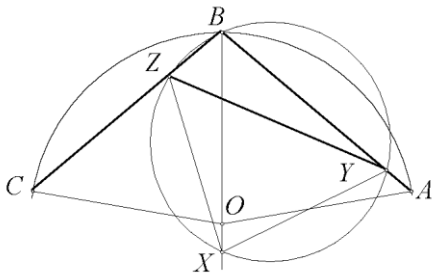
кружницата опишана околу триаголникот XYZ минува низ B. Радиусот на таа кружница го пресметуваме од триаголникот OAB, бидејќи

$$\measuredangle A = \measuredangle B = \frac{(n-2)\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}.$$

Воведуваме ознака $R = \overline{OA}$ и добиваме

$$2r = \frac{R}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n})} = \frac{R}{\cos\frac{\pi}{n}},$$

каде r е радиус на опишаната кружница околу триаголникот OAB .



Со α го означуваме аголот со големина $\frac{\pi}{n}$. Аглите XYZ и XBZ се еднакви како агли над ист лак. Затоа

$$\measuredangle OBZ = \measuredangle OBC = \measuredangle XYZ = \measuredangle XBZ$$

што значи дека точките X, O, B се колинеарни. BX е тетива на кружницата и како B се наоѓа меѓу Y и Z, добиваме дека таа е подолга од BO, а најдолга е кога се спвпаѓа со дијаметарот на таа кружница. Максимална должина OX достигнува кога Y и Z се симетрични во однос на BO и изнесува

$$d = 2r - R = R(\frac{1}{\cos\alpha} - 1).$$

Бараното множество е правилна ѕвезда која се состои од n сегменти со должина d, при што секој почнува од O и е насочен кон теме од $n-$аголникот.

5. Определи ги сите функции f дефинирани на множеството ненегативни реални броеви, со ненегативни реални вредности, за кои важи

(i) $f[xf(y)]f(y)=f(x+y)$, за секои $x,y\geq 0$;

(ii) $f(2)=0$;

(iii) $f(x)\neq 0$, за секој $0\leq x<2$.

Решение. Да претпоставиме дека f ги задоволува условите на задачата. Тогаш за $z\geq 2$ добиваме

$$f(z)=f[(z-2)+2]=f[(z-2)f(2)]f(2)=0.$$

Заради тоа (земајќи го во предвид (iii))

$$f(z)=0 \text{ ако и само ако } z\geq 2.$$

Ако $f(u)=0$, тогаш $u\geq 2$. Ќе го направиме тоа за различни погодно избрани u. Нека $0\leq y<2$. За $x=2-y$ добиваме

$$f[(2-y)f(y)]f(y)=f(2)=0$$

и бидејќи $f(y)\neq 0$, добиваме

$$f[(2-y)f(y)]=0 \Rightarrow (2-y)f(y)\geq 2 \Rightarrow f(y)\geq \tfrac{2}{2-y}.$$

Ако ставиме $x=\frac{2}{f(y)}$, добиваме

$$0=f(2)f(y)=f(\tfrac{2}{f(y)}+y) \text{ и } \tfrac{2}{f(y)}+y\geq 2 \text{ односно } f(y)\leq \tfrac{2}{2-y}.$$

Значи, бараната функција мора да е од облик

$$f(y)=\begin{cases}\frac{2}{2-y}, & 0\leq y<2\\ 0, & y\geq 2.\end{cases}$$

Лесно се проверува дека таа навистина ги задоволува условите на задачата. Ако $xf(y)\geq 2$, тогаш $y<2$ и $f(y)=\frac{2}{2-y}$, па според тоа $\frac{2x}{2-y}\geq 2$ што значи $x+y\geq 2$, па според тоа $f(x+y)=0$, а исто како и $f[xf(y)]f(y)=0$ бидејќи $f[xf(y)]=0$.

Ако $xf(y)<2$ и $y\geq 2$, тогаш $f(y)=0$, па според тоа $f[xf(y)]f(y)=0$, а иста како и $f(x+y)=0$, (бидејќи $x+y\geq 2$).

Ако $xf(y)<2$ и $y<2$ тогаш $f(y)=\frac{2}{2-y}$, па затоа $\frac{2x}{2-y}<2$ што значи $x+y<2$, па според тоа

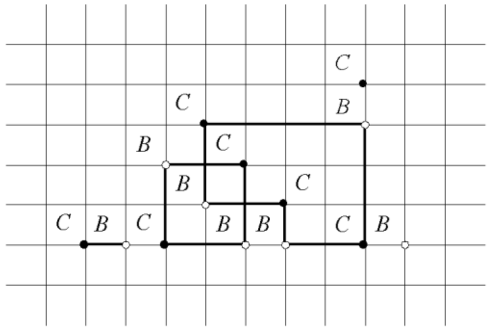
$$f[xf(y)]f(y)=f(\tfrac{2x}{2-y})f(y)=\frac{2}{2-\frac{2x}{2-y}}\cdot\frac{2}{2-y}=\frac{2}{2-x-y}=f(x+y).$$

6. Дадено е конечно множество точки во рамнината, такво што секоја точка има целобројни координати. Дали е можно некои точки од тоа множество да се обојат со црвена боја, а преостанатите со бела боја, така што за секоја права L која е паралелна со било која од координатните оски, разликата меѓу бројот на белите и бројот на црвените точки на L да биде -1 ,0 или 1?

Решение. Одговорот е позитивен, т.е. секогаш е можно на бараниот начин да се обојат точките.

Нека L е произволна права паралелна со една од координатните оски која го пресекува множеството A. Нека $P_1, P_2, ...$ се точки од $A \cap L$ подредени така што слободните координати им растат (т.е. ако L е паралелна со $x-$оска, сите точки имаат иста $y-$координата и точките $P_1, P_2, ...$ ги подредуваме така што $x-$координатите им растат; аналогно и во случајот кога L е паралелна со $y-$оската).

Ги поврзуваме P_1 со P_2, P_3 со P_4 итн. со отсечки, при што евентуално ќе остане една слободна точка. Тоа го правиме со секоја таква права L. Бидејќи A е конечно множество имаме конечно многу такви прави. На тој начин добивме фамилија од отсечки, со тоа што секоја точка од A припаѓа најмногу на две од тие отсечки. Унијата на овие отсечки се распаѓа на полигонални криви (затворени или незатворени) без заеднички темиња и определн број изолирани точки).



Затворените полигонални линии содржат парен број отсечки бидејќи две последователни отсечки се нормални меѓу себе. Ги боиме точките на секоја полигонална линија редоследно: црвено, бело, црвено, бело итн. (што е можно согласно со парноста во случај на затворени криви), а преостанатите изолирани точки по желба. Таквиот начин на боење е саканиот: на секоја права L точките се во парови, во кои се обоени различно, и постои најмногу една точка без свој пар.

XXVIII олимпијада

1. Нека $S_n=\{1,2,...,n\}$. Со $P_n(k)$ го означуваме бројот на пермутации на множеството S_n кои имаат точно k фиксни точки $(k\geq 0, n\geq 1)$. Докажи дека

$$\sum_{k=0}^{n} kP_n(k)=n!$$

Забелешка. j е фиксна точка за пермутацијата f ако $f(j)=j$.

Решение. *Прв начин*. Јасно, $P_n(k)=\binom{n}{k}P_{n-k}(0)$, за $0\leq k\leq n$, при што ставаме $P_0(0)=1$. Тогаш,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kP_n(k) &= \sum_{k=1}^{n} kP_n(k)=\sum_{k=0}^{n} k\tbinom{n}{k}P_{n-k}(0)\\ &=\sum_{k=0}^{n} k\tfrac{n!}{k!(n-k)!}P_{n-k}(0)\\ &=n\sum_{k=1}^{n}\tfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}P_{(n-1)-(k-1)}(0)\\ &=n\sum_{j=0}^{n}\tfrac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!}P_{n-1-j}(0)\\ &=n\sum_{j=0}^{n-1}P_{n-1}(j)=n(n-1)!=n!.\end{aligned}$$

Втор начин. На секоја пермутација од множеството S_n ѝ придружуваме $n-$ торка $(a_1,a_2,a_3,...,a_n)$ при што $a_i=1$ ако i е фиксна точка за таа пермутација и $a_i=0$ ако i не е фиксна точка. Од дефиницијата на бројот $P_n(k)$ следува дека постојат точно $P_n(k)$ $n-$ торки во кои има точно k координати кои се еднакви на 1. Според тоа, збирот $\sum_{k=0}^{n} kP_n(k)$ е еднаков на бројот на единиците во сите можни $n!$ пермутации. Да фиксираме произволен број $i, 1\leq 1\leq n$. Меѓу сите $n!$ пермутации, бројот на оние за кои $a_i=1$ е $(n-1)!$. Затоа вкупниот број на сите единици во сите $n!$ пермутации изнаесува $n(n-1)!$, т.е. $\sum_{k=0}^{n} kP_n(k)=n!$.

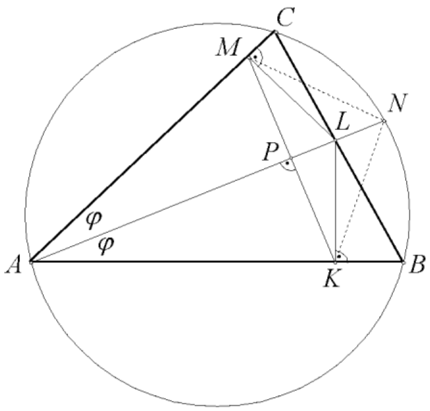
Забелешка. Може да се докаже дека

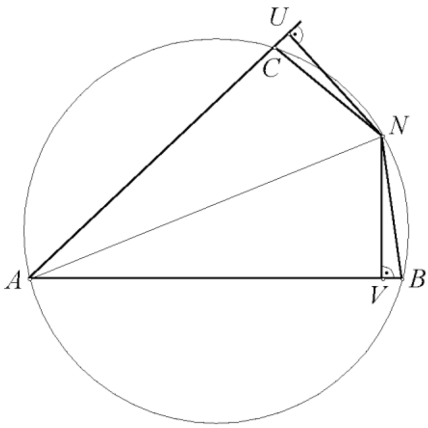
$$P_n(k)=\tfrac{n!}{k!}(1-\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}-...+(-1)^{n-k}\tfrac{1}{(n-k)!}).$$

2. Низ темето A на остроаголниот $\triangle ABC$ повлечена е симетрала на аголот, која ја сече страната BC во точка L, а кружницата опишана околу триаголни-

кот ABC во точки A и N. Од L на AB и на AC се спуштени нормали LK и LM, соодветно, при што $K \in AB$, $M \in AC$. Докажи дека плоштината на четириаголникот $AKNM$ е еднаква на плоштината на $\triangle ABC$.

Решение. *Прв начин.* Нека точките се означени како на долниот лев цртеж. Имаме, $LM \perp AC$, $LK \perp AB$; $\triangle ALM \cong \triangle ALK$ па според тоа $\overline{ML} = \overline{LK}$. Тоа значи





$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABL} + P_{\triangle ALC} = \tfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{LK} + \tfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{LM} = \tfrac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})\cdot\overline{LK}$$

$$P_{AKNM} = P_{\triangle AKN} + P_{\triangle ANM} = \tfrac{1}{2}\overline{AN}\cdot\overline{KP} + \tfrac{1}{2}\overline{AN}\cdot\overline{MP} = \overline{AN}\cdot\overline{KP}$$

$$= \overline{AN}\cdot\overline{AK}\sin\phi = \overline{AN}\cdot\overline{AL}\sin\phi\cos\phi = \overline{AN}\cdot\overline{LK}\cos\phi.$$

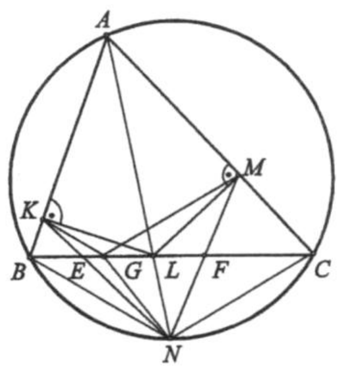
Значи,

$$P_{\triangle ABC} = P_{AKNM} \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}) = \overline{AN}\cos\phi.$$

Ова е точно бидејќи $\triangle NVB \cong \triangle NUC$, (цртеж десно горе), па според тоа

$$\tfrac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}) = \tfrac{1}{2}(\overline{AV}+\overline{VB}+\overline{AU}-\overline{UC}) = \overline{AV} = \overline{AN}\cos\phi.$$

Втор начин. Нека $KN \cap BC = E$ и $MN \cap BC = F$ (цртеж десно). Четириаголникот $AKLM$ е тетивен бидејќи $\measuredangle AKL = \measuredangle AML = 90^\circ$. Кружницата опишана околу $AKLM$ ја сече правата BC освен во точката L уште и во точката G. Ако оваа кружница ја допира правата BC, тогаш $G \equiv L$. Ќе претпоставиме (види цртеж) дека точката G е меѓу точките B и L. Случаите кога G е меѓу L и C или кога $G \equiv L$ се разгледуваат аналогно.



Од условот на задачата и изборот на точката G следува

$$\measuredangle MGL = \measuredangle MAL = \measuredangle BAN = \measuredangle BCN.$$

Затоа $GM \parallel NC$ и четириаголникот $MGNC$ е трапез. Исто така

$$\measuredangle KGB = 180^\circ - \measuredangle KGL = \measuredangle KAL = \measuredangle NAC = \measuredangle CBN ,$$

па затоа $KG \parallel BN$ и четириаголникот $KGNB$ е трапез. Од тоа што четириаголникот $MGNC$ е трапез следува $P_{\triangle GNF} = P_{\triangle CMF}$, а од тоа што четириаголникот $KGNB$ е трапез следува $P_{\triangle NGE} = P_{\triangle KBE}$. Од овие две равенства следува равенството $P_{\triangle ABC} = P_{AKNM}$.

3. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се реални броеви такви што $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$. Докажи дека за секој природен број $k \geq 2$ постојат цели броеви $a_1, a_2, ..., a_n$, не сите еднакви на нула и такви што $| a_i | \leq k-1$ за $i = 1, 2, ..., n$ и

$$| a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n | \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1} .$$

Решение. *Прв начин*. Доволно е да го разгледаме случајот кога сите $x_i \geq 0$ (бидејќи ако најдеме такви a_i кои ги задоволуваат условите за $(| x_1 |,| x_2 |,...,$ $| x_n |)$, ќе добиеме соодветни за $(x_1, x_2, ..., x_n)$ со промена на знакот на a_i за негативните x_i). Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$\sum_{i=1}^{n} | x_i | \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{n} .$$

Бидејќи $| a_i | \leq k-1$ за $i = 1, 2, ..., n$ добиваме дека

$$\sum_{i=1}^{n} | a_i x_i | \leq (k-1) \sum_{i=1}^{n} | x_i | \leq (k-1)\sqrt{n} ,$$

што значи, сите збирови од облик $\sum_{i=1}^{n} | a_i x_i |$ за $a_i \in \{0, 1, 2, .., k-1\}$, $i = 1, 2, ..., n$ припаѓаат на интервалот $[0, (k-1)\sqrt{n}]$. Овој интервал го делиме на $k^n - 1$ интервали со еднакви должини. Според принципот на Дирихле, бидејќи збирови од горниот облик има k^n , два од добиените збирови за различни $n-$торки $(a_1, a_2, ..., a_n)$ мора да се наоѓаат во ист интервал. Нека тоа се збировите $\sum_{i=1}^{n} | a_i x_i |$ и $\sum_{i=1}^{n} | b_i x_i |$, за кои важи

$$0 < \left| \sum_{i=1}^{n} | b_i x_i | - \sum_{i=1}^{n} | a_i x_i | \right| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1} ,$$

$$0 < \left| \sum_{i=1}^{n} (| b_i | - | a_i |) | x_i | \right| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1} .$$

Дефинираме броеви $c_i, i=1,2,...,n$ на следниов начин:

$$c_i=\begin{cases}|b_i|-|a_i|, & x_i\geq 0,\\ |a_i|-|b_i|, & x_i<0.\end{cases}$$

Броевите $c_i, i=1,2,...,n$ се цели, не се сите еднакви на нула и $|c_i|\leq k-1$. Освен тоа, $c_ix_i=|(|b_i|-|a_i|)|x_i||$, па затоа важ- неравенството

$$|c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n|\leq \tfrac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.$$

Втор начин. Ако претпоставиме дека $|a_i|\leq k-1$ за $i=1,2,...,n$ и земеме предвид дека $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=1$, тогаш од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\sum_{i=1}^{n}|a_ix_i|\leq \sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2\leq (k-1)\sqrt{n}.$$

Понатаму продолжуваме како при првиот начин на решавање на задачата.

4. Докажи дека не постои функција $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ таква што

$$f(f(n))=n+1987\text{, за секој } n\in\mathbb{N}_0.$$

Решение. Ако постои таква функција f, тогаш

$$f(n+1987)=f(f(f(n)))=f(n)+1987,$$

од што со индукција добиваме

$$f(n+1987k)=f(n)+1987k\text{, за } k,n\in\mathbb{N}_0.$$

Од множеството $\{0,1,2,...,1986\}$ избираме произволен број m и нека

$$f(m)=1987q+r,\ q,r\in\mathbb{N}_0, r\leq 1986.$$

Тогаш

$$f(f(m))=f(1987q+r)=f(r)+1987q \text{ и } f(f(m))=m+1987,$$

па затоа

$$f(r)+1987q=m+1987.$$

Но, $m\leq 1986$, па затоа $q=0$ или $q=1$. Ако $q=1$, тогаш $f(m)=1987+r$ и $f(r)=m$, па не е можно да биде $r=m$. Ако $q=0$, тогаш $f(m)=r$ и $f(r)=m+1987$ и пак не е можно да биде $r=m$. Значи, множеството $\{0,1,2,...,1986\}$ е поделено на парови (r,m) такви што $r\neq m$ и

$$f(m)=1987+r \text{ и } f(r)=m \text{ или } f(m)=r \text{ и } f(r)=m+1987.$$

Последното противречи на фактот дека множеството $\{0,1,2,...,1986\}$ има непарен број елементи.

5. Докажи дека за секој природен број $n\geq 3$ во рамнината постојат n точки, такви што

а) растојанието меѓу било кои две од нив е ирационален број,
б) секои три точки определуваат недегенериран триаголник (т.е. се неколинеарни) и тој триаголник има рационална плоштина.

Решение. *Прв начин*. Произволно избираме n точки во јазлите на целобројна решетка, такви што било кои три од нив не се колинеарни, кои ги означуваме со $T_i=(x_i,y_i)$, $i=1,2,...,n$. Тогаш, плоштината на секој триаголник $T_iT_jT_k$ е цел број или половина од цел број. Навистина, секоја од нив е разлика на плоштина на правоаголник и плоштини на правоаголни триаголници чии должини на катети се природни броеви.

Нека $S=\{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2\,|\,i\neq j;i,j=1,2,...,n\}$. Избираме прост број $p>\max S$. Земаме хомотетија χ со центар во еден од јазлите на решетката и коефициент $k=\sqrt{p}$, и ги разгледуваме точките $\chi(T_i), i=1,2,...,n$. Плоштините на новодобиените триаголници се рационални броеви, бидејќи старите плоштини се зголемуваат p пати. Должините на сите отсечки сега се зголемуваат $\sqrt{p}$ пати, т.е. тие припаѓаат на множеството $\{\sqrt{ps}\,|\,s\in S\}$. Според изборот на бројот p бројот sp е делив со p, но не е делив со p^2. Значи, sp не е точен квадрат, па $\sqrt{sp}$ и ирационален број за секој $s\in S$.

Јасно, сликите при разгледуваната хомотетија на вака избраните n точки ги задоволуваат условите на задачата.

Втор начин. Во координатната рамнина избираме точки $T_i(i,i^2), i=1,2,...,n$. Очигледно дека плоштината на секој триаголник $T_iT_jT_k$ е рационален број лесно се докажува дека

$$|T_iT_k|=\sqrt{(k-i)^2+(k^2-i^2)^2}=(k-i)\sqrt{1+(i+k)^2}$$

за $i<k$ е ирационален број.

6. Даден е природен број $p, p\geq 2$. Докажи дека ако бројот k^2+k+p е прост за секој $k\in\mathbb{N}_0$ таков што $0\leq k\leq\sqrt{\frac{p}{3}}$, тогаш k^2+k+p е прост за секој $k\in\mathbb{N}_0$ таков што $0\leq k\leq p-2$.

Решение. Нека $f(x)=x^2+x+p$ и нека y е најмалиот природен број таков што $y\leq p-2$ и $f(y)$ не е прост број и q е најмалиот прост делител на $f(y)$. Ќе докажеме дека $q>2y$.

Да го претпоставиме спротивното, т.е. $q\leq 2y$. Од

$$f(y)-f(x)=(y-x)(y+x+1),$$

следува дека кога x се менува од 0 до $y-1$, $y-x$ се менува од 1 до y, а $y+x+1$ се менува од $y+1$ до $2y$. Ако $q \le 2y$, тогаш ќе постои x, $0 \le x \le y-1$, таков што $q | f(y)-f(x)$. Меѓутоа $f(x)$ е прост број и $q | f(y)$, па затоа мора да е $f(x)=q$. Сега од

$$y-x \le p-2 < p+x+x^2 = f(x)=q \text{ и}$$

$$y+x+1 \le p+x-1 < p+x+x^2 = f(x)=q$$

следува дека $f(x)=q \nmid (y-x)(y+x+1)$, што е противречност. Од добиената противречност следува дека $q > 2y$.

Бројот q е најмал прост делител на $f(y)$ па затоа $q \le \sqrt{f(y)}$, т.е. $f(y) \ge q^2$. Затоа

$$y^2+y+p \ge (2y+1)^2 = 4y^2+4y+1,$$

односно $y < \sqrt{\frac{p}{3}}$, што противречни на претпоставката. Затоа x^2+x+p е прост број за секој цел број k таков што $0 \le k \le p-2$.

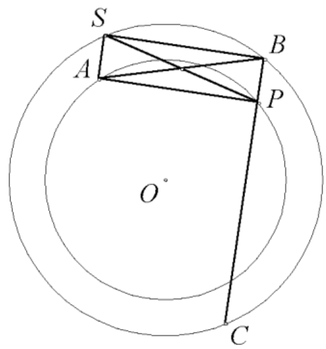
XXIX олимпијада

1. Во рамнина дадени се две кружници со радиуси R и r ($R>r$) со заеднички центар. Нека P е фиксна точка на помалата кружница, а точката B се движи по поголемата кружница. Правата BP повторно ја сече поголемата кружница во точката C. Нормалата l на BP во P, повторно ја сече помалата кружница во A, (ако l е тангента на кружницата во точката P, тогаш $A=P$).

а) Определи го множеството вредности на изразот $\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}^2$.

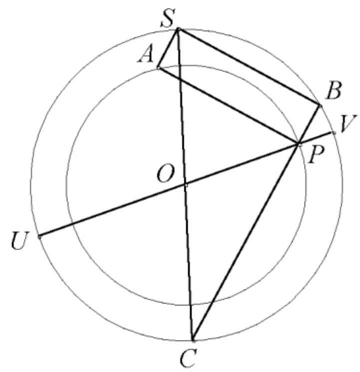
б) Определи го геометриското место на точки на средините на отсечката AB.

Решение. *Прв начин.* б) Го дополнуваме триаголникот APB до правоаголник $APBS$ (цртеж десно). Ако разгледаме осна симетрија со оска, симетралата на отсечката AP, добиваме дека точката S лежи на поголемата кружница. Во специјален случај, кога $A\equiv P$, земаме $S\equiv B$.



Во секој случај средината на отсечката AB се совпаѓа со средината на отсечката SP, и кога точката B минува низ сите точки од големата кружница, истото важи и за точката S, и обратно. Значи, бараното множество точки е еднакво на множеството од сите средини на отсечките PS, кога S се движи по големата кружница. Со други зборови, тоа е слика на големата кружница при хомотетија со центар P и коефициент $\frac{1}{2}$, а тоа е кружница со центар во средината на отсечката OP и радиус $\frac{R}{2}$.

а) За да го решиме првиот дел од задачата, ќе го користиме истиот правоаголник. Забележуваме дека OC е радиус на поголемата кружница, бидејќи аголот CBS е прав (цртеж десно). Затоа



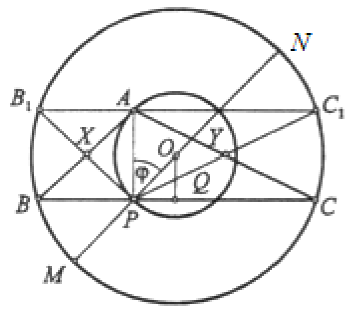
$$\overline{AP}^2=\overline{SB}^2=\overline{SC}^2-\overline{BC}^2=4R^2-\overline{BC}^2,$$

$$\overline{AB}^2=\overline{AP}^2-\overline{BP}^2,\quad \overline{AC}^2=\overline{AP}^2+\overline{CP}^2.$$

Од добиените равенства и степенот на точка во однос на кружница, добиваме

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}^2&=2\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{BC}^2\\&=8R^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2-\overline{BC}^2\\&=8R^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2-(\overline{BP}+\overline{CP})^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 8R^2 - 2\overline{BP}\cdot\overline{CP}\\ &= 8R^2 - 2\overline{UP}\cdot\overline{VP}\\ &= 8R^2 - 2(R+r)(R-r)\\ &= 6R^2 + 2r^2.\end{aligned}$$



Значи, бараното множество е $\{6R^2 + 2r^2\}$.

Втор начин. а) Нека O е центарот на кружниците и нека OP ја сече поголемата кружница во точките M и N (цртеж десно). Средината на BC да ја означиме со Q и нека $\varphi = \measuredangle OPA$. Тогаш

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 &= (\overline{BP} + \overline{PC})^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PA}^2\\ &= 2(\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{BP}\cdot\overline{PC}).\end{aligned} \quad (1)$$

Понатаму,

$$\begin{aligned}&\overline{PA} = 2r\cos\varphi,\\ &\overline{PB} = \overline{BQ} - \overline{QP} = \sqrt{R^2 - r^2\cos^2\varphi} - r\sin\varphi,\\ &\overline{PC} = \overline{CQ} + \overline{QP} = \sqrt{R^2 - r^2\cos^2\varphi} + r\sin\varphi,\\ &\overline{PB}\cdot\overline{PC} = \overline{PM}\cdot\overline{PN} = (R-r)(R+r) = R^2 - r^2,\end{aligned}$$

па ако замениме во (1), по средувањето на изразот добиваме

$$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = 6R^2 + 2r^2.$$

б) Нека средината на AB е точката X, а средината на AC е точката Y. Со централна симетрија со центар во O точките B и C нека се пресликаат во C_1 и B_1, соодветно. Отсечката B_1C_1 минува низ A, а четириаголниците AB_1BP и AC_1CP се правоаголници. Затоа точките X и Y се средини на отсечките PB_1 и PC_1, соодветно, односно $\overrightarrow{PX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PB_1}$ и $\overrightarrow{PY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PC_1}$. Оттука следува дека бараното геометриско место на средините на AB е кружница хомотетична на поголемата кружница со центар на хомотетија P и коефициент $\frac{1}{2}$, па нејзиниот радиус е $\frac{R}{2}$, а центарот ѝ е во средината на отсечката OP.

2. Нека $n \in \mathbb{N}$ и нека $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ се подмножества од некое множество B, такви што

а) секое множество A_i има точно $2n$ елементи

б) секој пресек $A_i \cap A_j$, $(1 \le i < j \le 2n+1)$ содржи точно еден елемент, и в) секој елемент од B се содржи барем во две множества A_i.

За кои вредности на n можеме на секој елемент од B да му придружиме еден од броевите 1 или 0 на начин таков што за секое множество A_i бројот на неговите елементите на кои им е придружена нула е еднаков на n.

Решение. Ќе докажеме дека такво означување на елементите на B со 0 или 1 е можно ако и само ако n е парен број.

Најпрво ќе докажеме дека секој елемент на B припаѓа точно на две од множествата A_i. Ќе докажеме дека за секој фиксен $j, 1\leq j\leq 2n+1$, важи

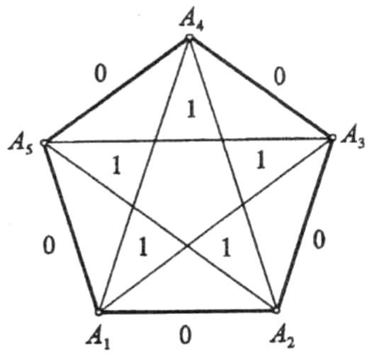
$$A_j=\bigcup_{i\neq j}(A_i\cap A_j). \tag{1}$$

Навистина $A_i\cap A_j\subseteq A_j$, па затоа $\bigcup_{i\neq j}(A_i\cap A_j)\subseteq A_j$. Обратно, нека $x\in A_j$. Тогаш според в) постои индекс $i\neq j$ таков што $x\in A_i$. Затоа $x\in A_i\cap A_j$, од што следува $A_j\subseteq\bigcup_{i\neq j}(A_i\cap A_j)$, со што равенството (1) е докажано. Да претпоставиме дека некој $x\in B$ е содржан барем во три множества A_i. Нека на пример $x\in A_1, x\in A_2, x\in A_3$. Тогаш од условот б) следува дека секое од множествата $(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3), A_1\cap A_4,..., A_1\cap A_{2n+1}$ содржи точно еден елемент, што противречи на условот а). Значи, секој елемент на B припаѓа точно на две множества A_i.

Множествата $A_1, A_2,..., A_{2n+1}$ може да ги претставиме како темиња на конвексен $(2n+1)-$аголник. Сега задачата се сведува на следнава поедноставна задача: За кои природни броеви n е можно страните и дијагоналите на $(2n+1)-$аголникот да се обележат со 0 и 1, така што од секое теме да излегуваат n отсечки со 0 и n отсечки со 1? Ако е можно такво означување, тогаш вкупниот број страни и дијагонали $1+2+...+2n=n(2n+1)$ мора да биде парен број, бидејќи колку што има отсечки означени со 0, точку има отсечки означени со 1. Затоа n мора да е парен број. Обратно, ако n е парен број, $n=2k$, тогаш отсечката што ги поврзува A_i и A_j ја означуваме со 9 ако

$$0<|i-j|(\mathrm{mod}\,2n+1)\leq k$$

и ја означуваме со 1 во спротивен случај. На пример, за $n=2$ сите страни се означуваат со 0, а сите дијагонали со 1 (цртеж десно).



3. Функцијата $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е дефинирана со

$$f(1)=1,\ f(3)=3,\ f(2n)=f(n),\ f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n),$$
$$f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n),\ \text{за секој}\ n\in\mathbb{N}.$$

Определи го бројот на сите броеви $n\in\mathbb{N}$, помали или еднакви на 1988, за кои $f(n)=n$.

Решение. Ќе пресметаме неколку први членови на низата:

$f(1)=1$	$f(11)=3f(5)-2f(2)=13$
$f(2)=f(1)=1$	$f(12)=f(6)=3$
$f(3)=3$	$f(13)=2f(7)-f(3)=11$
$f(4)=f(2)=1$	$f(14)=f(7)=7$
$f(5)=2f(3)-f(1)=5$	$f(15)=3f(7)-2f(3)=15$
$f(6)=f(3)=3$	$f(16)=f(8)=1$
$f(7)=3f(3)-2f(1)=7$	$f(17)=2f(9)-f(4)=17$
$f(8)=f(4)=1$	$f(18)=f(9)=9$
$f(9)=2f(5)-f(2)=9$	$f(19)=3f(9)-2f(4)=25$
$f(10)=f(5)=5$	$f(20)=f(10)=5$.

На прв поглед претходните равенства не ни даваат никаква информација за функцијата f. Но овие равенства да ги запишеме во бинарен броен систем

$f(1)=1$	$f(1011)=1101$
$f(10)=01$	$f(1100)=0011$
$f(11)=11$	$f(1101)=1011$
$f(100)=001$	$f(1110)=0111$
$f(101)=101$	$f(1111)=1111$
$f(110)=011$	$f(10000)=00001$
$f(111)=111$	$f(10001)=10001$
$f(1000)=0001$	$f(10010)=01001$
$f(1001)=1001$	$f(10011)=11001$
$f(1010)=0101$	$f(10100)=00101$

Ќе докажеме дека функцијата f секој број n го пресликува во број чиј бинарен запис се добива од бројот n, ако цифрите ги запишеме во обратен редослед.

Тврдењето ќе го докажеме со индукција.

Јасно, тоа е точно за $n=1,2,...,20$.

Ќе докажеме дека тоа е точно за секој природен број, ако е точно за сите броеви помали од него. За бројот n можни се следниве случаи: $n=2k$,

$n=4k+3$ и $n=4k+3$. Користејќи ја индуктивната претпоставка, како и дадената дефиниција на f се добива:

$$
\begin{aligned}
f(\overline{a_k...a_1 0}_{(2)}) &= f(\overline{10}_{(2)}\cdot\overline{a_k...a_1 0}_{(2)}) = f(\overline{a_k...a_1}_{(2)})\\
&= \overline{a_k...a_1}_{(2)} = \overline{0a_1...a_k}_{(2)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(\overline{a_k...a_2 01}_{(2)}) &= f(\overline{100}_{(2)}\cdot\overline{a_k...a_1 0}_{(2)}+1)\\
&=\overline{10}_{(2)}\cdot f(\overline{10}_{(2)}\cdot\overline{a_k...a_2}_{(2)}+1)-f(\overline{a_k...a_2}_{(2)})\\
&=\overline{10}_{(2)}\cdot f(\overline{a_k...a_2 1}_{(2)})-f(\overline{a_k...a_2}_{(2)})\\
&=\overline{10}_{(2)}\cdot\overline{1a_2...a_k}_{(2)}-\overline{a_2...a_k}_{(2)}=\overline{10a_2...a_k}_{(2)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(\overline{a_k...a_2 11}_{(2)}) &= f(\overline{100}_{(2)}\cdot\overline{a_k...a_1}_{(2)}+\overline{11}_{(2)})\\
&=\overline{11}_{(2)}\cdot f(\overline{10}_{(2)}\cdot\overline{a_k...a_2}_{(2)}+1)-\overline{10}_{(2)}\cdot f(\overline{a_k...a_2}_{(2)})\\
&=\overline{11}_{(2)}\cdot f(\overline{a_k...a_2 1}_{(2)})-\overline{10}_{(2)} f(\overline{a_k...a_2}_{(2)})\\
&=\overline{11}_{(2)}\cdot\overline{1a_2...a_k}_{(2)}-\overline{10}_{(2)}\cdot\overline{a_2...a_k}_{(2)}=\overline{11a_2...a_k}_{(2)}.
\end{aligned}
$$

Од досега изнесенот следува дека треба да се пребројат оние природни броеви $n,\ n<1988$, кои имаат симетричен запис во бинарен броен систем, во литературата познати како полиндроми.

Јасно, број со $2k$ цифри во бинарен запис е полиндром ако и само ако има облик $\overline{1a_{k-1}...a_2a_1a_1a_2...a_{k-1}1}_{(2)}$, каде $a_1,a_2,...,a_k\in\{0,1\}$. Такви броеви има 2^{k-1}.

Исто така број кој во бинарен систем има $2k+1$ цифра е таков ако и само ако е од облик $\overline{1a_{k-1}...a_2a_1a_2...a_{k-1}1}_{(2)}$ каде што $a_1,a_2,...,a_k\in\{0,1\}$, и такви има 2^k.

Имајќи предвид дека дека $2^{10}<1988<2^{11}$, броевиу помали од $2^{11}=2048$ кои во бинарен запис се симетрични има

$$2^0+2^0+2^1+2^1+2^2+2^2+2^3+2^3+2^4+2^4+2^5=94.$$

Меѓу нив има точно два броја поголеми од $1988=11111000100_2$. Тоа се броевите 11111011111_2 и 11111111111_2. Затоа бараниот број е $94-2=92$.

4. Докажи дека множеството од сите реални броеви x за кои е важи

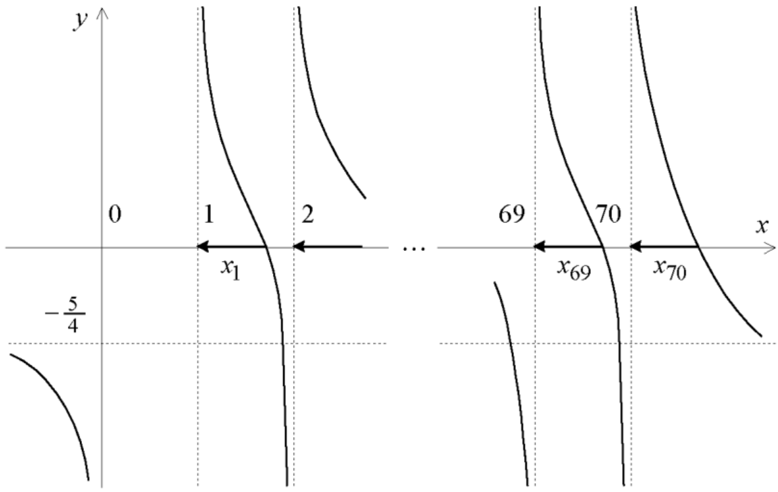
$$\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}\geq\frac{5}{4}$$

е унија од дисјунктни полуотворени интервали, со збир на должини 1988.

Решение. Ја разгледуваме функцијата

$$f(x)=\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}-\frac{5}{4}.$$

Задачата сега гласи: докажи дека множеството од сите решенија на неравенката $f(x)\ge 0$ е унија на дисјунктни полуотворени интервали, чиј збир на должини е 1988.



Графиците на поединечните собироци од $f(x)$ се хиперболи, т.е. кривите $y=\frac{k}{x-k}$, $k=1,2,...,70$. Ако ги пресметаме границите на f во бесконечност и во точките $1,2,...,70$ заклучуваме:

1. f строго опаѓа на интервалите

$$(-\infty,1),(1,2),(2,3),...,(69,70),(70,+\infty)$$

2. $f(x)\to -\frac{5}{4}$, кога $x\to +\infty$ или $x\to -\infty$;
3. $f(x)\to +\infty$, кога $x\to 1,2,3,...,70$ од десно;
4. $f(x)\to -\infty$, кога $x\to 1,2,3,...,70$ од лево.

Од овде гледаме дека постојат броеви

$$x_1\in(1,2),x_2\in(2,3),...,x_{69}\in(69,70),\quad x_{70}\in(70,+\infty)$$

такви што

$$f(x)\ge 0 \iff x\in(1,x_1]\cup(2,x_2]\cup...\cup(69,x_{69}]\cup(70,x_{70}]$$

(види ја скицата на графикот на функцијата f на горниот цртеж). Притоа $x_1,x_2,...\ ...,x_{69},x_{70}$ се нули на функцијата. Но, равенката $f(x)=0$ е еквивалентна со равенката $P(x)=0$, каде P е полиномот

$$P(x)=\prod_{j=1}^{70}(x-j)-\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70}k\prod_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{70}(x-j)$$

(бидејќи ниту еден од броевите $1,2,...,69,70$ не е нула на полиномот P). Збирот на должините на интервалите изнесува

$$(x_1-1)+(x_2-2)+...+(x_{70}-70)=x_1+x_2+...+x_{70}-(1+2+...+70)\,.$$

Според Виетовите формули $x_1+x_2+...+x_{70}$ е коефициентот пред x^{69} во нормираниот полином $P(x)$, со променет предзнак, т.е.

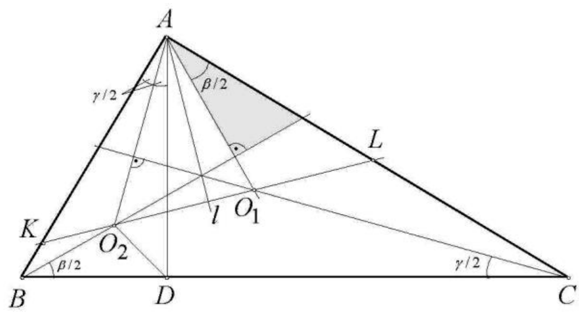
$$x_1+x_2+...+x_{70}=-(-1-2-3-...-70)-(-\tfrac{4}{5})(1+2+...+70)\,.$$

Конечно, бараниот збир на должини е еднаков на

$$\tfrac{4}{5}(1+2+...+70)=\tfrac{4}{5}\tfrac{70\cdot 71}{2}=1988\,.$$

5. Даден е $\triangle ABC$ со прав агол во темето A. Висината повлечена од темето A ја сече спротивната страна во точката D. Правата која минува низ центрите на впишаните кружници во триаголниците ABD и ACD ги сече страните AB и AC во точките K и L, соодветно. Нека S и T се плоштините на триаголниците ABC и AKL. Докажи дека $S\geq 2T$.

Решение. *Прв начин.* Нека O_1 и O_2 се центри на кружниците впишани во триаголниците ABD и ADC (цртеж десно), β и γ се агли кај темињата B и C соодветно. Пресметувајќи ги аглите во осенчениот триаголник, заклучуваме дека



правата $BO_2\perp AO_1$; слично $CO_1\perp AO_2$. Затоа симетралата на аголот A во триаголникот ABC (ја означуваме со l), лежи на висината на триаголникот AO_2O_1, т.е. $l\perp O_2O_1$. Значи, точката L е симетрична на точката K во однос на правата l, т.е. $\overline{AK}=\overline{AL}$ и

$$\measuredangle AKO_2=\measuredangle ALO_1=45^\circ\,.$$

Бидејќи DO_2 е симетрала на аголот D во триаголникот ABD добиваме $\measuredangle ADO_2=45^\circ$, имаме $\triangle ADO_2\cong\triangle AKO_2$, од што се добива $\overline{AK}=\overline{AD}$. Понатаму, од $\overline{AD}=\frac{bc}{a}$, добиваме

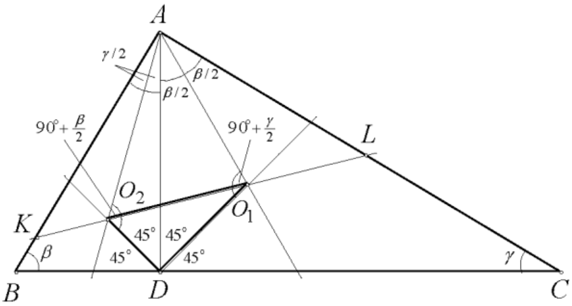
$$2T=\overline{AD}^2\leq S=\tfrac{1}{2}bc\;\Leftrightarrow\;2bc\leq a^2=b^2+c^2\;\Leftrightarrow\;(b-c)^2\geq 0\,,$$

($a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$, $c=\overline{AB}$). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако триаголникот е рамнокрак.

Втор начин. При истите ознаки како и во претходниот начин на решавање имаме,

$$\frac{\overline{DO_1}}{\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{\overline{AD}}{\sin(90^\circ+\frac{\gamma}{2})}=\frac{\overline{AD}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

(синусна теорема за триаголникот ADO_1, цртеж десно)



Слично, $\frac{\overline{DO_2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{\overline{AD}}{\cos\frac{\beta}{2}}$ и затоа $\frac{\overline{DO_2}}{\overline{DO_1}}=\mathrm{tg}\beta$.

Од досега изнесеното имаме $\measuredangle DO_2O_1=\beta$, и затоа $\measuredangle DO_1O_2=\gamma$. Добиваме

$$\measuredangle AO_2O_1=\measuredangle AO_2D-\measuredangle DO_2O_1=90^\circ-\frac{\beta}{2},$$

па затоа $\measuredangle KO_2A=90^\circ+\frac{\beta}{2}$. Аналогно се добива $\measuredangle LO_1A=90^\circ+\frac{\gamma}{2}$. Според тоа, $\triangle KO_2A\cong\triangle DO_2A$ и $\triangle DO_1A\cong\triangle LO_1A$, од што следува $\overline{AK}=\overline{AD}=\overline{AL}$.

Останатите пресметување можат да се изведат со помош на тригонометрија, бидејќи $\overline{AD}=b\sin\gamma$, $\overline{AB}=b\,\mathrm{tg}\gamma$. Затоа неравенството го добива обликот $2\sin\gamma\cos\gamma\le 1$, односно $\sin 2\gamma\le 1$, кое очигледно е точно. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\gamma=45^\circ$, т.е. ако и само ако триаголникот е рамнокрак.

6. Нека $a,b\in\mathbb{N}$ и $(ab+1)\,|\,(a^2+b^2)$. Докажи дека $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ е точен квадрат.

Решение. Нека $\frac{a^2+b^2}{1+ab}=k$ не е точен квадрат. Ако $a=b$, тогаш

$$k=(2-k)a^2\ge 0,$$

за $k\le 2$, и тоа е можно само за $k=1$, кој е точен квадрат. Нека (a,b) е решение на Диофантовата равенка $x^2+y^2=k(1+xy)$, во множеството $\mathbb{N}$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a>b$ и дека a е најмал меѓу сите такви решенија, т.е.

$$a=\min\{x\in\mathbb{N}\,|\,\exists y\in\mathbb{N}, x>y, x^2+y^2=k(1+xy)\}.$$

Равенката

$$a^2+b^2=k(1+ab)$$

ја разгледуваме како квадратна равенка со непозната a. Нека a' е другото нејзино решение. Тогаш, $a+a'=kb$, т.е. $a'\in\mathbb{Z}$ и a' не е нула, бидејќи во спротивно $k=a^2$, односно k е точен квадрат. Понатаму, од

$$k(a'b+1)=a'^2+b^2$$

следува $a' \geq 0$, т.е. $a' \in \mathbb{N}$. Освен тоа

$$aa' = b^2 - k < b^2 < ab,$$

па затоа $a' < b$. Значи парот (b, a') е решение на разгледуваната Диофантова равенка, во множеството $\mathbb{N}$, $b > a'$ и $b < a$, што противречи на минималноста на бројот a.

Од досега изнесеното следува дека ако a и b ги задоволуваат условите на задачата, тогаш $\frac{a^2+b^2}{1+ab}$ е точен квадрат.

XXX олимпијада

1. Докажи дека множеството $\{1,2,...,1989\}$ може да се подели на 117 дисјунктни подмножества $A_1, A_2,..., A_{117}$ за кои е исполнето:

(a) A_i има 17 елементи за $i = 1,2,3,...,117$;

(b) во секое множество A_i, $i = 1,2,3,...,117$ збирот на елементите е еднаков.

Решение. Множеството $\{1,2,...,1989\}$ да го претставиме како унија од множествата $P = \{1,2,...,351\}$ и

$$M_s = \{351+234s+1, 352+234s+2,..., 351+234s+234\},\ s = 1,2...,6\ .$$

Множеството P го делиме на 117 дисјунктни подмножества со по три елементи $P_i, i = 1,2,...,117$ така што збирот на броевите во секое подмножество е еднаков. Една таква поделба е следнава:

$$P_i = \{i, 175+i, 353-2i\}, i = 1,2,...,59,$$
$$P_k = \{59+k, 117+k, 352-2k\},\ k = 1,2,...,58.$$

Секое од мноижествата M_s може да се подели на 117 дисјунктни подмножества $M_{s_1}, M_{s_2},..., M_{s_{117}}$ со по два броја, така што збирот на броевите во секое од тие подмножества ќе биде еднаков. Тогаш баранаа поделба на множеството $\{1,2,...,1989\}$ ќе биде следнава:

$$A_i = P_i \cup (\bigcup_{i=0}^{6} M_{s_i}),\ i = 1,2,...,117\ .$$

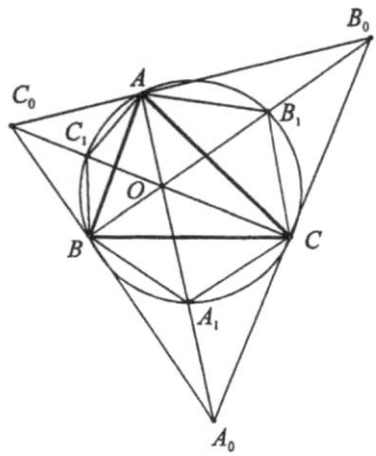
2. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ во кој симетралите на внатрешните агли во темињата A, B, C ја сечат опишаната кружница и во точки A_1, B_1, C_1, соодветно. Нека A_0 е пресечна точка на правата AA_1 со симетралите на надворешните агли кај темињата B и C. Точките B_0 и C_0 се одредени аналогно. Докажи дека

а) плоштината на триаголникот $A_0B_0C_0$ е два пати поголема од плоштината на шестаголникот $AC_1BA_1CB_1$;

б) плоштината на триаголникот $A_0B_0C_0$ е најмалку четири пати поголема од плоштината на триаголникот ABC.

Решение. а) Нека O е центарот на впишаната кружница на триаголникот ABC (види цртеж). Ќе докажеме дека $\overline{OA_1} = \overline{A_1A_0}$. Правите BO и BA_0 се соодветно симетрали на внатрешниот и надворешниот агол во темето B на триаголникот ABC, па затоа тие се заемно нормални. Значи $\measuredangle OBA_0 = 90^\circ$. Освен тоа важи

$$\measuredangle A_1OB = \measuredangle A_1AB + \measuredangle B_1BA$$
$$= \measuredangle A_1AC + \measuredangle B_1BC$$
$$= \measuredangle A_1BC + \measuredangle B_1BC = \measuredangle OBA_1,$$



па затоа $\overline{OA_1} = \overline{BA_1}$, односно триаголникот OBA_1 е рамнокрак. Освен тоа, бидејќи $\measuredangle OBA_0 = 90^\circ$, добиваме

$$\measuredangle A_1BA_0 = 90^\circ - \measuredangle OBA_1$$
$$= 90^\circ - \measuredangle A_0OB = \measuredangle A_1A_0B,$$

од каде што следува дека $\overline{BA_1} = \overline{A_1A_0}$. Затоа $\overline{OA_1} = \overline{A_1A_0} = \overline{BA_1}$. Користејќи дека A_1 е средина на OA_0 добиваме

$$P_{\triangle OBA_0} = 2P_{\triangle OBA_1} \text{ и } P_{\triangle OCA_0} = 2P_{\triangle OCA_1}.$$

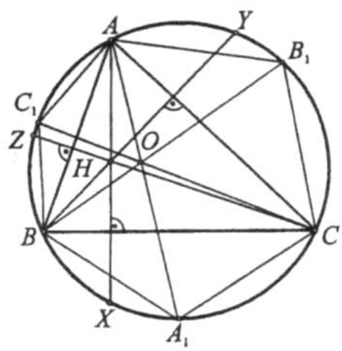
Аналогно важи

$$P_{\triangle OBC_0} = 2P_{\triangle OBC_1} \text{ и } P_{\triangle OAC_0} = 2P_{\triangle OAC_1},$$
$$P_{\triangle OCB_0} = 2P_{\triangle OCB_1} \text{ и } P_{\triangle OAB_0} = 2P_{\triangle OAB_1}.$$

Ако ги собереме последните шест равенства добиваме

$$P_{\triangle A_0B_0C_0} = 2P_{AC_1BA_1CB_1}.$$

б) Нека H е ортоцентарот на триаголникот ABC и нека правите AH, BH и CH ја сечат опишаната кружница околу триаголникот ABC во точките X, Y и Z, соодветно. Ќе докажеме дека точката X е симетрична на H во однос на правата BC (цртеж десно). Навистина, $\measuredangle CBX = \measuredangle CAX$ како периферни агли над тетивата CX, а освен тоа



$$\measuredangle CAX = 90^\circ - \measuredangle BCA = \measuredangle HBC.$$

Значи, $\measuredangle CBX = \measuredangle CBH$ и бидејќи $HX \perp BC$ добиваме дека точката X е симетрична на H во однос на правата BC.

Бидејќи AA_1 е симетрала на $\measuredangle BAC$, точката A_1 е средина на лакот BC, па затоа $P_{\triangle BA_1C} \geq P_{\triangle BXC} = P_{\triangle BHC}$. Според тоа,

$$\tfrac{1}{2}P_{\triangle A_0B_0C_0} = P_{AC_1BA_1CB_1} \geq P_{AZBXCY} = 2(P_{\triangle BHC} + P_{\triangle CHA} + P_{\triangle AHB}) = 2P_{\triangle ABC}.$$

3. Нека $n, k \in \mathbb{N}$ и S е множество од n точки од рамнината такви што:
   а) било кои три точки од S не се колинеарни,

b) за секоја точка P од S постојат најмалку k различни точки од S кои се еднакво оддалечени од P.

Докажи дека

$$0 < k < \tfrac{1}{2} + \sqrt{2n}\,.$$

Решение. Да го претпоставиме спротивното, т.е. $k \geq \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$. Разгледуваме точка P од S. Постојат барем k точки од S, кои се еднакво оддалечени од P, па затоа постојат барем $\binom{k}{2}$ парови точки A, B за кои важи $\overline{AP} = \overline{BP}$. Бидејќи ова важи за секоја точка P од S, постојат барем $n\binom{k}{2}$ парови точки A, B такви што на симетралата на отсечката AB се наоѓа барем една точка од S. Притоа еден пар точки (A, B), односно (B, A) може да биде броен повеќе пати, по еднаш за секоја точка $Q \in S$ таква што $\overline{AQ} = \overline{BQ}$.

Од претпоставката $k \geq \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$ добиваме

$$\begin{aligned} n \cdot \tbinom{k}{2} &= n\frac{k(k-1)}{2} \geq \frac{n}{2}(\sqrt{2n} + \tfrac{1}{2})(\sqrt{2n} - \tfrac{1}{2}) \\ &= \frac{n}{2}(2n - \tfrac{1}{4}) = n(n - \tfrac{1}{8}) \\ &> n(n-1) = 2\tbinom{n}{2}. \end{aligned}$$

Меѓу точките од S има точно $\binom{n}{2}$ различни парови, па затоа ќе постои еден пар точки A, B кој што е броен барем три пати, односно постојат различни точки $P_1, P_2, ..., P_m$, $m > 2$ такви што $\overline{AP_i} = \overline{BP_i}$, $i = 1, 2, ..., m$. Тие лежат на симетралата на отсечката AB. Овие точки $P_1, P_2, ..., P_m$, $m > 2$ се колинеарни што противречи на условот а) на задачата.

4. Даден е конвексниот четириаголник $ABCD$ со следните својства:

a) $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BC}$,

b) во внатрешноста на четириагоникот $ABCD$ постои точка P која од правата CD е на растојание h, таква што $\overline{AP} = h + \overline{AD}$ и $\overline{BP} = h + \overline{BC}$.

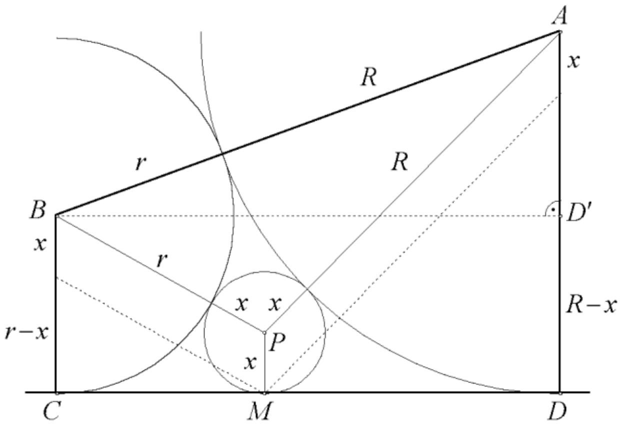
Докажи дека

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{\overline{AD}}} + \frac{1}{\sqrt{\overline{BC}}}\,.$$

Решение. Јасно h е максимално ако CD е тангента на кружница со центар во A и радиус $R = \overline{AD}$ и тангента на кружница со центар B и радиус $r = \overline{BC}$ (види цртеж).

Нека $h_{\max} = x$. Од Питагоровата теорема следува

$$\overline{CD} = \overline{BD'} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD'}^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr} \qquad (1)$$



$$\overline{CD}=\overline{CM}+\overline{MD}=\sqrt{(r+x)^2-(r-x)^2}+\sqrt{(R+x)^2-(R-x)^2}$$
$$=2\sqrt{Rx}+2\sqrt{rx}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме $2\sqrt{Rr}=2\sqrt{Rx}+2\sqrt{rx}$. Значи,

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\geq\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{r}+\sqrt{R}}{\sqrt{Rr}}=\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{r}}\ .$$

5. Докажи дека за секој природен број n постојат n последователни природни броеви такви што ниту еден не е степен на прост број.

Решение. *Прв начин.* Да забележиме дека ако a и b се природни броеви такви што $b\neq1$ и $a\geq2b$, тогаш $m=a!+b$ не е степен на прост број. Од овде следува дека условот на задачата е исполнет за следниве броеви:

$$(2n^2)!+n,\ (2n^2)!+n+1,\ \dots,\ (2n^2)!+2n-1.$$

Втор начин. Нека n е природен број и да ставиме $k=(n+1)!^2+1$. Ќе докажеме дека ниту еден од броевите $k+1,k+2,...,k+n$ не е степен на прост број. Забележуваме дека за секој $j\in\{1,2,...,n\}$ бројот $k+j=(n+1)!^2+j+1$ е делив со $j+1$. Да претпоставиме дека за некој $j\in\{1,2,...,n\}$ важи $k+j=p^m$, каде што p е прост број и m е природен број. Тогаш $1+j=p^s$ за некој природен број $s, s<m$. Тогаш $p^{s+1}\,|\,(n+1)!^2$ и $p^{s+1}\,|\,k+j$, односни $p^{s+1}\,|\,k-1$ и $p^{s+1}\,|\,k+j$. Затоа, $p^{s+1}\,|\,k+j-(k-1)=j+1$, што е противречност.

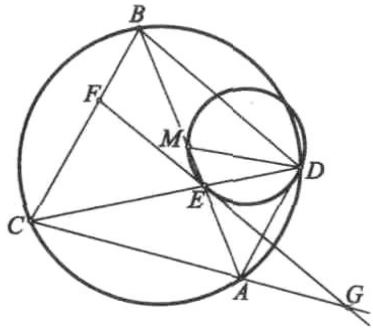
6. Нека $n\in\mathbb{N}$. За пермутацијата $\{x_1,...x_{2n}\}$ на множеството $\{1,...,2n\}$ ќе велиме дека го има својството P ако $|x_i-x_{i+1}|=n$, за некој $i\in\{1,2,...,2n-1\}$.

Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$, бројот на пермутации кои го имаат својството P е поголем од бројот на пермутации кои го немаат тоа својство.

Решение. Соседните броеви x_i, x_{i+1} од некоја пермутација ги нарекуваме близнаци ако $|x_i - x_{i+1}| = n$. Со A го означуваме множеството од сите пермутации кои немаат близнаци, а со B множеството од сите пермутации кои имаат барем еден пар близнаци. Дефинираме пресликување $f : A \to B$ кое на секоја пермутација $(x_1, x_2, ..., x_{2n})$ од A и ја придружува пермутацијата $(x_2, ..., x_{k-1}, x_1, x_k, ..., x_{2n})$ од B, така што x_1 и x_k се близнаци. Вака дефинираното пресликување е добро дефинирано бидејќи ако x_1 не е близнак со x_2, ќе постои единствено x_k, $k > 2$ таков што x_1 е близнак со x_k. Тогаш $(x_2, ..., x_{k-1}, x_1, x_k, ..., x_{2n}) \in B$. Ова пресликување е инјекција, но не е сурјекција бидејќи во $f(A)$ нема пермутација со повеќе од еден пар близнаци. Значи, множеството B има повеќе елементи од множеството A.

XXXI олимпијада

1. Тетивите AB и CD се сечат во точката E во внатрешноста на дадената кружница. Нека M е внатрешна точка на отсечката BE. Тангентата во точката E на опишаната кружница околу триаголникот DEM ги сече правите BC и AC во точките F и G, соодветно. Пресметај $\frac{\overline{EG}}{\overline{EF}}$, ако $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=t$.



Решение. Бидејќи аголот меѓу тангентата и секантата низ допирната точка е еднаков на аголот над тетивата која припаѓа на секантата добиваме

$$\measuredangle GEA=\measuredangle EDM\ .$$

Значи, (цртеж десно):

$$\begin{aligned}\measuredangle GEC&=\measuredangle AEC+\measuredangle GEA\\&=\measuredangle MED+\measuredangle EDM\\&=180^\circ-\measuredangle DME\\&=\measuredangle BMD.\end{aligned}$$

Исто така $\measuredangle DBM=\measuredangle ECA$ (како агли над иста тетива AD), па триаголниците BDM и CGE имаат еднакви агли кај темињата B и C, односно, M и E, од каде следува дека тие се слични. Од сличноста на триаголниците BDM и CGE следува:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{DM}}{\overline{EG}}\quad\Rightarrow\quad \overline{BM}\cdot\overline{EG}=\overline{DM}\cdot\overline{CE}\ . \tag{1}$$

Понатаму, $\measuredangle FCE=\measuredangle MAD$ (како агли над иста тетива) и

$$\measuredangle CEF=180^\circ-(\measuredangle AEC+\measuredangle GEA)=180^\circ-(180^\circ-\measuredangle DME)=\measuredangle DME=\measuredangle DMA\,,$$

што значи дека триаголниците CEF и AMD се слични, па затоа

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{DM}}\quad\Rightarrow\quad \overline{AM}\cdot\overline{EF}=\overline{DM}\cdot\overline{CE}\ . \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме $\overline{AM}\cdot\overline{EF}=\overline{BM}\cdot\overline{EG}$, а оттука

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{EG}}{\overline{EF}}\quad\Rightarrow\quad\frac{\overline{EG}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}-\overline{AM}}=\frac{1}{\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}}-1}=\frac{t}{1-t}\ .$$

2. На кружница е дадено множество E од $2n-1\,(n\geq 3)$ различни точки, меѓу кои точно k точки се обоени со црна боја. За боењето на точките велиме дека е „добро“ ако постојат две црни точки такви што во внатрешноста на еден од соодветните лаци кои тие точки ги определуваат се наоѓаат точно n точки од E. Определи го најмалиот број k за кој секое боење на множеството E е „добро“.

Решение. *Прв начин.* Да ги означиме точките со броеви $1,2,...,2n-1$. Ќе го определиме најголемиот број k таков што постои боење кое не е „добро". Тогаш $k+1$ е решение на задачата.
Нека на некој лак меѓу точките со броеви p и q постојат точно n точки од E (таквите точки ќе ги наречеме „соседни"). Тогаш:

$$|p-q| \equiv n+1 (\operatorname{mod} 2n-1).$$

Да ги разгледаме броевите од облик

$$a_i \equiv p+i(n+1)\ (\operatorname{mod} 2n-1) \qquad (*)$$

каде $i, a_i \in \{0,1,2,...,2n-2\}$. Секои два последователни члена од оваа низа се парови соседни точки (бидејќи $a_{i+1}-a_i \equiv n+1 (\operatorname{mod} 2n-1)$).
Ако боењето не е добро, соседните точки не смеат истовремено да бидат црни. Доволно е точките да се прикажат со помош на членови од низата (*) и да се констатира дека соседните членови не се црни, па обоени се најмногу половина од членовите на низата.
Според Евклидовиот алгоритам важи

$$\mathrm{NZD}(2n-1,n+1) = \mathrm{NZD}(n+1,n-2) = \mathrm{NZD}(n-2,3) \in \{1,3\}.$$

па затоа разликуваме два случаи:
а) $\mathrm{NZD}(n+1,2n-1)=1$. Нека $a_i \equiv 1+i(1+n)\ (\operatorname{mod} 2n-1)$. Броевите a_i формираат полн систем на остатоци по модул $2n-1$. Од тука следува дека може да бидат обоени најмногу

$$[\tfrac{2n-1}{2}] = [n-\tfrac{1}{2}] = n-1$$

членови на низата. Сега бараниот број е еднаков на n.
б) $\mathrm{NZD}(n+1,2n-1)=3$. Нека

$$a_i \equiv 1+i(n+1)\ (\operatorname{mod} 2n-1),\ \ b_i \equiv 2+i(n+1)\ (\operatorname{mod} 2n-1),$$

$$c_i \equiv 3+i(n+1)\ (\operatorname{mod} 2n-1), \quad i=0,1,...,\tfrac{2n-1}{3}-1.$$

Низите a_i, b_i, c_i имаат различни членови. Слично како во предходниот случај можеме да обоиме најмногу

$$[\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2n-1}{3}] = [\tfrac{n-2}{3}+\tfrac{1}{2}] = \tfrac{n-2}{3}$$

членови на низата. Значи можеме да обоиме најмногу $3\cdot\frac{n-2}{3} = n-2$ точки, а притоа боењето да не биде добро. Решението во овој случај е $n-1$.
Втор начин. Со M да го означиме множеството на тетиви на дадената кружница со крајни точки во множеството E, при што еден од кружните лаци што го определува таа тетива содржи точно n точки од E не сметајќи ги крајните точки на лаците. На кружницата избираме насока, на пример насоката на движење на стрелките на часовникот. Од произволна точка се движиме по избраната насока и ја одделуваме $(n+1)-$та точка по ред во E. Тетивата што ги поврзува овие точки припаѓа на M. Затоа секоја од тетиви-

те во M е страна на еден многуаголник впишан во кружницата и со темиња во множеството E. Да го пресметаме бројот на тие многуаголници. Бидејќи

$$\mathrm{NZD}(2n-1,n+1)=\mathrm{NZD}(n+1,n-2)=\mathrm{NZD}(n-2,3)\in\{1,3\},$$

ќе разгледаме два случаја:

а) Ако $2n-1$ не е делив со 3, тогаш $\mathrm{NZD}(2n-1,n+1)=1$ па секој многуаголник ќе минува низ некое теме. Значи, во овој случај бројот на многуаголниците е 1. Во овој случај најмалата вредност за бројот k со бараното својство е

$$[\tfrac{2n-1}{2}]+1=[n-\tfrac{1}{2}]+1=n.$$

Навистина, ако обоиме само $n-1$ точка, може да обоиме $n-1$ последователни точки и тогаш бараниот услов не е исполнет. Ако обоиме барем n точки од E, тогаш ќе постои тетива во множеството M за која крјните точки се обоени.

б) Ако $2n-1$ е делив со 3, тогаш $\mathrm{NZD}(2n-1,n+1)=3$. Во овој случај бројот на впишаните многуаголници е 3, а секој од нив има $\frac{2n-1}{3}$ темиња. Затоа во овој случај минималната вредност за бројот k е

$$3\cdot[\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2n-1}{3}]+1=3\cdot[\tfrac{n-2}{3}+\tfrac{1}{2}]+1=3\cdot\tfrac{n-2}{3}+1=n-1,$$

бидејќи меѓу k обоени точки мора да има повеќе од половина темиња на еден од тие многуаголници.

3. Определи ги сите природни броеви n, $n>1$, такви што $\frac{2^n+1}{n^2}\in\mathbb{N}$.

Решение. Јасно бројот 3 е решение на задачата. Ќе докажеме дека тој е единствено решение. Нека $n=3^k d$, каде $k\geq 0$, $\mathrm{NZD}(d,3)=1$ е решение, т.е. $(3^k d)^2\mid(2^{3^k d}+1)$, при што d е непарен број. Ќе го користиме идентитетот

$$x^{3^k}+1=(x+1)\prod_{i=0}^{k-1}(x^{2\cdot 3^i}-x^{3^i}+1),$$

кој се докажува со едноставна математичка индукција. За $x=2^d$ имаме:

$$2^{3^k d}+1=(2^d+1)\prod_{m=0}^{k-1}(2^{2\cdot 3^m d}-2^{3^m d}+1) \qquad (1)$$

Ако t е непарен број, тогаш

$$2^{2t}-2^t+1\equiv 3(\bmod 9), \qquad (2)$$

што лесно се докажува со индукција по t. Заменуваме $t=3^m d$ и добиваме дека:

$$3^k\mid\prod_{m=0}^{k-1}(2^{2\cdot 3^m d}-2^{3^m d}+1) \quad \text{и} \quad 3^{k+1}\nmid\prod_{m=0}^{k-1}(2^{2\cdot 3^m d}-2^{3^m d}+1).$$

Но, 3^{2k} треба да се содржи во десната страна на (1), а тоа е еквивалентно со $3^k \mid (2^d+1)$. Бидејќи d е непарен број, $3 \mid (2^d+1)$, но $9 \nmid (2^d+1)$, (имено, $9 \mid (2^d+1)$ ако и само ако $d=3+6r$ што не е можно, бидејќи $\mathrm{NZD}(d,3)=1$). Затоа

$$3^{k+1} \mid (2^{3^k d}+1), \quad \text{но} \quad 3^{k+2} \nmid (2^{3^k d}+1).$$

Бидејќи $(3^k)^2$ е делител на $2^{3^k d}+1$, следува дека $k+1 \geq 2k$, т.е. $k=0$ или $k=1$. Ќе докажеме дека $d=1$, од што непосредно ќе следува дека $k=1$ и $n=3$.

Нека $d>1$ и p е најмалиот прост делител на d. Бројот d е непарен и $\mathrm{NZD}(d,3)=1$, па затоа $p \geq 5$, $p \mid (2^n+1)$, т.е. $2^n \equiv -1 \pmod p$, односно $2^{2n} \equiv 1 \pmod p$. Од малата теорема на Ферма следува $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Понатаму, со помош на Евклидовиот алгоритам може да се докаже дека ако $j=\mathrm{NZD}(2n, p-1)$, тогаш $2^j \equiv 1 \pmod p$. Бројот j е делив со 2 бидејќи $2n$ и p се парни броеви, но не е делив со 4 бидејќи n е непарен број. Исто така j може да е делив со 3, но не и со 9, бидејќи $2n$ не е делив со 9. Освен тоа ако се има предвид дека $\frac{j}{2} \mid d$ и $\frac{j}{2} \mid p-1$, а p е најмалиот прост делител на d, добиваме дека j може да биде 2 или 6. Бидејќи $p \mid (2^j-1)$, следува дека p е делител на еден од броевите 3 или 63. Бидејќи $p \geq 5$, добиваме $p=7$. Но бројот 7 не е делител на бројот 2^m+1, за ниту еден цел број m, што противречи на претпоставката $p \mid (2^n+1)$.

Според тоа, единствената можност за $n=3^k d$ е $k=1$ и $d=1$, т.е. $n=3$.

4. Определи барем една функција $f:\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$, таква што

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}, \tag{1}$$

за секои $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

Решение. Ако $f(y_1)=f(y_2)$ за $y_1, y_2 \in \mathbb{Q}^+$, тогаш од дадената функционална равенка за произволен $x \in \mathbb{Q}^+$ добиваме

$$\frac{f(x)}{y_1} = f(xf(y_1)) = f(xf(y_2)) = \frac{f(x)}{y_2}, \tag{2}$$

т.е. $y_1=y_2$, што значи дека f е инјекција. Ако земеме $y=1$ и искористиме дека f е инјекција од (1) добиваме $f(1)=1$.

За $x=1$ имаме

$$f(f(y))=\frac{1}{y}, \tag{3}$$

за секој $y\in\mathbb{Q}^+$. Ако f ја примениме на равенството (3), добиваме $f(\frac{1}{y})=\frac{1}{f(y)}$, за секој $y\in\mathbb{Q}^+$. Конечно, ако во (1) ставиме $y=f(\frac{1}{t})$, тогаш од (3) добиваме

$$f(xt)=f(x)f(t), \tag{4}$$

за секои $x,t\in\mathbb{Q}^+$.

Обратно, нека функцијата f ги задоволува условите (3) и (4) за секои $x,y,t\in\mathbb{Q}^+$. Тогаш за $x,y\in\mathbb{Q}^+$ добиваме

$$f(xf(y))=f(x)f(f(y))=f(x)\frac{1}{y}=\frac{f(x)}{y},$$

што значи дека f е решение на (1).

Останува да се конструира функција $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ за која важат (3) и (4).

Нека p_i е $i-$тиот прост број. Дефинираме $f(1)=1$ и

$$f(p_k)=\begin{cases} p_{k+1}, & \text{ако } k \text{ е непарен број,} \\ \frac{1}{p_{k-1}}, & \text{ако } k \text{ е парен број .}\end{cases} \tag{5}$$

Ако $n=p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_k^{n_k}$, каде што $n_i\ge 0, i=1,2,...,k$ дефинираме

$$f(p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_k^{n_k})=(f(p_1))^{n_1}(f(p_2))^{n_2}\dots(f(p_k))^{n_k},$$

и на крајот ако $\frac{m}{n}$, каде што $m,n\in\mathbb{N}$, е рационален број дефинираме $f(\frac{m}{n})=\frac{f(m)}{f(n)}$. Може да се провери дека оваа функција е добро дефинирана, т.е. ако $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$, тогаш $\frac{f(m)}{f(n)}=\frac{f(p)}{f(q)}$. Сега непосредно следува дека условот (4) е исполнет. Од дефиницијата на $f(p_k)$ следува дека $f(f(p_k))=\frac{1}{p_k}$.

Со индукција по s се докажува дека

$$f(n_1n_2...n_s)=f(n_1)f(n_2)...f(n_s) \tag{6}$$

ако $n_1,n_2,...,n_s\in\mathbb{N}$. Затоа за секој природен број $n=p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_k^{n_k}$ добиваме

$$\begin{aligned} f(f(n)) &= f((f(p_1))^{n_1}(f(p_2))^{n_2}\dots(f(p_k))^{n_k}) \\ &= [f(f(p_1))]^{n_1}[f(f(p_2))]^{n_2}\dots[f(f(p_k))]^{n_k} \\ &= (\tfrac{1}{p_1})^{n_1}(\tfrac{1}{p_2})^{n_2}...(\tfrac{1}{p_k})^{n_k}=\tfrac{1}{n}. \end{aligned}$$

Сега, за секој $\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}^+$ добиваме

$$f(f(\tfrac{m}{n})) = f(\tfrac{f(m)}{f(n)}) = \frac{f(f(m))}{f(f(n))} = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n}} = (\tfrac{m}{n})^{-1}.$$

Со тоа докажавме дека вака конструираната функција ги исполнува условите (3) и (4).

5. Нека $n_0 \in \mathbb{N}$. Играчите A и B наизменично избираат цели броеви $n_1, n_2, n_3, \ldots$ според следниве правила:

- играчот A го знае бројот n_{2k} и избира природен број n_{2k+1} таков што

$$n_{2k} \le n_{2k+1} \le n_{2k}^2,$$

- играчот B го знае бројот n_{2k+1} и може да избере природен број n_{2k+2} таков што $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ е позитивен степен на прост број или на бројот 1.

Играчот A победува ако го избере бројот 1990, а играчот B победува ако го избере бројот 1. За кое n_0

а) играчот A може да победи,
б) играчот B може да победи, и
в) ниту еден од играчите нема победничка стратегија?

Решение. Со W да го означиме множеството од сите природни броеви n_0 такви да играчот A може да победи започнувајќи ја играта со n_0. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека m и s се природни броеви за кои важи:

1) $m \le 1990$, $s \le 1990$,
2) $\{m, m+1, \ldots, 1990\} \subseteq W$,
3) За секој прост делител p на s важи $\frac{s}{p^r} \ge m$, каде што r е природен број таков што $p^r \mid s$ и $p^{r+1} \nmid s$.

Тогаш сите природни броеви n_0, за кои што важи $\sqrt{s} \le n_0 < m$, се содржани во W.

Доказ. Ако $n_0 = 1990$, тогаш A го избира тој број и со тоа победува. Нека сега $\sqrt{s} \le n_0 < m$. Играчот A може да избере $n_1 = s$. Тогаш, според условот на задачата, играчот B мора да, избере број $n_2 \in W$, таков што

$$m \le \frac{s}{p^r} \le n_2 < s \le 1990.$$

Бидејќи $n_2 \in \{m, m+1, \ldots, 1990\} \subseteq W$ играчот A може сигурно да победи. Со тоа лемата е докажана. ■

Бидејќи $45^2 = 2025 > 1990$, сите n_0 такви што $45 \le n_0 \le 1990$ се наоѓаат во W. Понатаму, броевите $m = 45$ и $s = 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ ги задоволуваат условите 1), 2) и 3) од лемата и $\sqrt{420} < 21 \leq 45,$ од каде се добива дека $\{21, 22, ..., 44\} \subset W.$ Користејќи ја лемата за $m = 21$ и $s = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7,$ се добива дека $\{13, 14, ..., 20\} \subset W.$ За $m = 13$ и $s = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7,$ од лемата се добива дека $\{11, 12\} \subset W.$ Земајќи $m = 11$ и $s = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5,$ од лемата следува дека $\{8, 9, 10\} \subset W.$ Со тоа докажавме дека

$$\{8, 9, ..., 1990\} \subset W.$$

За $n_0 > 1990$ играчот *A* може да најде природен број $r > 7$ таков што

$$2^r \cdot 3^2 < n_0 \leq 2^{r+1} \cdot 3^2 < n_0^2$$

и тогаш избира

$$n_1 = 2^{r+1} \cdot 3^2.$$

Сега независно од изборот на играчот B мора $n_2 = 2^{r+1} \geq 8$ или $n_2 = 3^2 \geq 8$, т.е. $8 \leq n_2 < n_0$. По конечен број на чекори ќе биде $8 \leq n_{2k} \leq 1990,$ а тогаш играчот *A* победува во играта.

Да го разгледаме сега случајот $n_0 \leq 5.$ Бидејќи најмалиот производ на три различни прости броеви е еднаков на $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 > 5^2,$ играчот *A* мора да избере број од облик $n_1 = p^r q^s$, каде p е прост број, q е прост број или 1, $p^r > q^s$ и $r, s \geq 1$. Тогаш играчот B може да избере $n_2 = q^s = \frac{n_1}{p^r} < \sqrt{n_1} \leq n_0.$

По конечен број на чекори, играчот B ќе добие $n_{2k} = 1$ и победува.

За $n_0 = 6$ или $n_0 = 7,$ играчот *A* мора да избере $n_1 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ или $n_1 = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7,$ па играчот B мора да избере $n_2 = 6$. Понатаму *A* и *B* мораат да бираат 30, 6, 30, 6, ... наизменично, за да избегнат пораз и никој нема да победи.

6. Да се докаже дека постои конвексен 1990-аголник со следните својства:
а) сите агли на многуаголникот се еднакви, и
б) должините на страните на многуаголникот се еднакви на $1^2, 2^2, ..., 1989^2$, 1990^2 во некој редослед.

Решение. Да претпоставиме дека 1990-аголникот $A_0 A_1 ... A_{1989}$ ги има својствата а) и б). Да го поставиме многуаголникот во комплексна рамнина, со координатен почеток во точката A_0, а полуправата $A_0 A_1$ да биде позитивен дел од реалната оска. Сега секој вектор $\overrightarrow{A_r A_{r+1}}$ можеме да претставиме со комплексен број

$$n_r e^{ir\alpha}, \quad \text{каде} \quad \alpha = \frac{2\pi}{1990}, \quad r \in \{0, 1, 2, ..., 1989\},$$

а со A_{1990} е означено A_0. Тогаш $(n_0, n_1, ..., n_{1989})$ е пермутација на броевите ($1^2, 2^2, ..., 1990^2$). Проблемот сега може да се преформулира на следниот начин: да се одреди пермутација $(n_0, n_1, ..., n_{1989})$ на броевите ($1^2, 2^2, ..., 1989^2$), така што важи

$$\sum_{r=0}^{1989} n_r e^{ir\alpha} = 0 .$$

Прво, дадените 1990 броеви да ги поделиме на 995 пара

$$(1^2, 2^2), (3^2, 4^2), ..., (1989^2, 1990^2),$$

и да го поставиме секој пар на крајните точки на некој $\overline{A_k A_{k+995}}$, при што на k -тиот пар $((2k-1)^2, (2k)^2)$ му соодветствуваат броевите $(2k-1)^2 e^{ik\alpha}$ и $(2k)^2 e^{i(k\alpha+\pi)}$. На збирот на овие два комплексни броеви соодветствува бројот

$$(2k)^2 - (2k-1)^2 = 4k - 1 .$$

Сега е доволно тие 995 броеви да се постават во темињата на правилен 995-аголник, така што збирот биде еднаков на 0. Бидејќи $995 = 5 \cdot 199$ овие броеви ќе ги поделиме на 199 групи од по 5 броеви на следниот начин:

(3, 7, 11, 15, 19), (23, 27, 31, 35, 39), ... , (3963, 3967, 3971, 3975, 3979). (*)

Нека $\beta = \frac{2\pi}{199}, \gamma = \frac{2\pi}{5}$. Со F_1 да го означиме петаголникот со темиња: $1, e^{i\gamma}, e^{2i\gamma}, e^{3i\gamma}, e^{4i\gamma}$, а со F_{k+1} петаголникот $e^{ki\beta} F_1$. Ставајќи пет броеви од $(k+1)-$та група од броевите (*) во темињата на петаголникот F_{k+1}, добиваме $(k+1)-$ва група на комплексни броеви

$$(20k+3)e^{ki\beta}, \quad (20k+7)e^{i(k\beta+\gamma)}, \quad (20k+11)e^{i(k\beta+2\gamma)},$$
$$(20k+15)e^{i(k\beta+3\gamma)}, \quad (20k+19)e^{i(k\beta+4\gamma)},$$

каде k =0, 1, 2, ... ,198. Збирот на овие броеви е

$$\sum_{k=0}^{198} \sum_{l=0}^{4} (20k+4l+3)\, e^{i(k\beta+l\gamma)} = \sum_{k=0}^{198} \sum_{l=0}^{4} [(10k+2l+2)^2 - (10k+2l+1)^2] e^{i(k\beta+l\gamma)}$$
$$= \sum_{k=0}^{198} \sum_{l=0}^{4} \sum_{m=1}^{2} (10k+2l+m)\, e^{i(k\beta+l\gamma+m\pi)} = 0.$$

Бидејќи k прима вредности од $\{0,1,2,...,198\}$, l од $\{0,1,2,3,4\}$, и m од $\{1,2\}$, изразот $10k+2l+m$ прима вредности од 1, 2, ... , 1990, при што секоја вредност ја зема точно еднаш, добиваме дека $e^{i(k\beta+l\gamma+m\pi)} = e^{i\frac{10k+398l+995m}{1990}\pi}$ ги прима вредностите 1, $e^{i\alpha}, ..., e^{1989i\alpha}$, и тоа секоја по еднаш.

Останува уште да се докаже дека вака конструираниот $1990-$аголник е конвексен. Ќе докажеме дека за секоја страна на многуаголникот сите останати негови темиња се наоѓаат од една страна на правецот на кој што е избрана страната на многуаголникот. Избираме произволна страна на многуаголникот и ја означуваме со A_0A_1, а $1990-$аголникот со $A_0A_1...A_{1989}$. Бидејќи

$$\mathrm{Im}(A_k)=\begin{cases}\sum\limits_{m=0}^{k-1} n_m \,\mathrm{Im}(e^{mi\alpha}) \geq n_1 \sin\frac{2\pi}{1990} > 0, & 2 \leq k \leq 995;\\ -\sum\limits_{m=k}^{1989} n_m \,\mathrm{Im}(e^{im\alpha}) \geq n_{1989} \sin\frac{2\pi}{1990} > 0, & 996 \leq k \leq 1989,\end{cases}$$

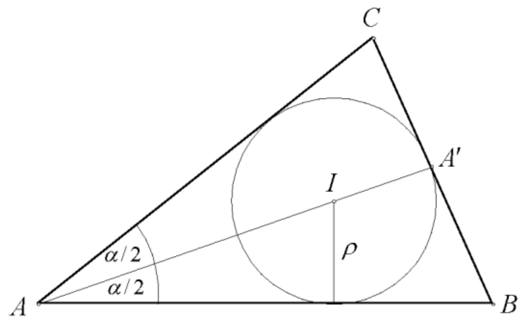
добиваме дека сите A_k, $(k=2,3,...,1989)$ се од иста страна на правата A_0A_1.

XXXII олимпијада

1. Даден е триаголник ABC. Нека A', B', C' се пресечните точки на симетралите на аглите CAB, ABC и BCA, со страните BC, CA и AB, соодветно, а I е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Докажи дека

$$\frac{1}{4} < \frac{\overline{AI}\cdot\overline{BI}\cdot\overline{CI}}{\overline{AA'}\,\overline{BB'}\,\overline{CC'}} \leq \frac{8}{27}.$$

Решение. Нека ρ е радиусот на впишаната кружница, а P плоштина на триаголникот ABC. Отсечката $\overline{AA'}$ го дели триаголникот на два триаголника ABA' и ACA'. Добиваме:



$$\overline{AI} = \frac{\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{2P}{a+b+c}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{2P_{ABA'}+2P_{ACA'}}{(a+b+c)\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{(b+c)\overline{AA'}}{a+b+c}.$$

Аналогно се докажува дека

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{BB'}} = \frac{c+a}{a+b+c}, \quad \frac{\overline{CI}}{\overline{CC'}} = \frac{a+b}{a+b+c}.$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{c+a}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}\right) \geq \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}}$$

од каде следува точноста на десната страна на неравенството.

Нека $s = a+b+c$. Тогаш

$$\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{s^3} = \frac{1}{8}\left(1+\frac{b+c-a}{s}\right)\left(1+\frac{c+a-b}{s}\right)\left(1+\frac{a+b-c}{s}\right)$$

$$> \frac{1}{8}\left(1+\frac{b+c-a}{s}+\frac{c+a-b}{s}+\frac{a+b-c}{s}\right) = \frac{1}{4},$$

па важи и левата страна од неравенството.

Забелешка. Равенството $\frac{\overline{AI}}{\overline{AA'}} = \frac{b+c}{a+b+c}$ може да се докаже на следниов начин. Бидејќи A' е симетрала на $\measuredangle BAC$, следува дека $\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{c}{b}$. Од друга страна имаме $\overline{BA'}+\overline{A'C} = a$, па затоа $\overline{BA'} = \frac{ac}{b+c}$. Бидејќи BI е симетрала на $\measuredangle A'BA$ следува $\frac{\overline{AI}}{\overline{A'I}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BA'}} = \frac{b+c}{a}$. Од тука се добива $\frac{\overline{AI}}{\overline{AA'}} = \frac{b+c}{a+b+c}$. Аналогно се докажуваат равенствата $\frac{\overline{BI}}{\overline{BB'}} = \frac{c+a}{a+b+c}$ и $\frac{\overline{CI}}{\overline{CC'}} = \frac{a+b}{a+b+c}$, а понатаму задачата се решава како погоре.

2. Нека $n\in\mathbb{N}$, $n>6$ и $a_1,a_2,...,a_k$ се природните броеви кои што се помали од n и се заемно прости со n. Докажи дека, ако
$$a_2-a_1=a_3-a_2=...=a_k-a_{k-1}>0,$$
тогаш n е или прост број или е степен на бројот 2.

Решение. Пред се, мора да биде $a_1=1,\ a_2=p,$ каде p е најмалиот прост број кој не е делител на n и $a_k=n-1.$ Константната разлика a_j-a_{j-1} да ја означиме со $r=p-1$.

Ако n е непарен број, тогаш $a_2=2,\ r=1$ и низата е $1,2,...,n-1,$ и како секој од овие броеви е заемно прост со n, n мора да биде прост број.

Ако n е парен број, тогаш $p\geq 3$. Ако $p=3,$ тогаш $r=2,$ па низата е $1,3,5,...,n-1.$ Значи, секој непарен број помал од n е заемно прост со n, т.е. n нема непарни делители, па $n=2^m$, за некој $m\in\mathbb{N}$.

Ако $p>3$, тогаш $3\,|\,n$. Но, $a_s=a_1+r(s-1),\ s=2,3,\dots,k,$ па затоа
$$n-1=1+(p-1)(k-1),$$
од што следува дека $(p-1)\,|\,(n-2)$. Нека q е прост број, таков што $q\,|\,(p-1)$. Тогаш $q\,|\,(n-2)$. За секој број $q<p$, важи $q\,|\,n$, па затоа $q\,|\,2$, т.е. $q=2$, $p-1=2^l,\ p=2^l+1$ за некој $l\geq 2$. Бидејќи p е прост број и $3\,|\,(2^{2j-1}+1),$ $j\in\mathbb{N}$, следува дека $l=2j,\ j\in\mathbb{N}$. Но, тогаш
$$a_3=a_1+2r=1+2\left(p-1\right)=2p-1=2^{2j+1}+1,$$
па значи дека $3\,|\,a_3$, што противречи на $3\,|\,n$. Со тоа доказот е завршен.

3. Нека $S=\{1,2,3,...,280\}$. Определи го најмалиот природен број n, таков што во секое n елементно подмножество од множеството S постојат 5 броеви, такви што секои два се заемно прости.

Решение. Нека
$$A_1=\{k\in S:2\,|\,k\},\ A_2=\{k\in S:3\,|\,k\},\ A_3=\{k\in S:5\,|\,k\},$$
$$A_4=\{k\in S:7\,|\,k\}\ \text{и}\ \ A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4.$$
Тогаш

$\lvert A_1\rvert=140,$	$\lvert A_2\rvert=93,$
$\lvert A_3\rvert=56,$	$\lvert A_4\rvert=40,$
$\lvert A_1\cap A_2\rvert=46,$	$\lvert A_1\cap A_3\rvert=28,$
$\lvert A_1\cap A_4\rvert=20,$	$\lvert A_2\cap A_3\rvert=18,$
$\lvert A_2\cap A_4\rvert=13,$	$\lvert A_1\cap A_2\cap A_3\rvert=9,$
$\lvert A_3\cap A_4\rvert=8,$	$\lvert A_1\cap A_2\cap A_4\rvert=6,$

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 4, \qquad |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 2,$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1.$$

Од принципот на вклучување и исклучување, следува

$$|A| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$$
$$= 140 + 93 + 56 + 40 - 46 - 28 - 20 - 18 - 13 - 8 + 9 + 6 + 4 + 2 - 1 = 216.$$

За било кои 5 броеви од A постојат два од нив кои се содржани во исто множество A_j, за некој $j \in \{1,2,3,4\}$, па тие не се заемно прости. Од овде следува дека $n > 216$. Ќе докажеме дека $n = 217$.

Нека

$$B_1 = A \setminus \{2,3,5,7\},$$
$$B_2 = \{11^2, 11\cdot 13, 11\cdot 17, 11\cdot 19, 11\cdot 23, 13^2, 13\cdot 17, 13\cdot 19\}$$
$$P = S \setminus (B_1 \cup B_2).$$

Тогаш $|P| = |S| - |B_1| - |B_2| = 60$ и P ги содржи 1 и сите прости броеви од S. Нека T е подмножество од S такво што $|T| = 217$. Јасно, треба да се разгледува само случајот кога $|T \cap P| \le 4$. Во овој случај $|T \cap (S \setminus P)| = |T \setminus (T \cap P)| \ge 217 - 4 = 213$, т.е. меѓу сите сложени броеви од S (ги има вкупно $|S \setminus P| = 220$) постојат најмногу 7 броеви кои не се во T. Нека:

$$M_1 = \{2\cdot 23, 3\cdot 19, 5\cdot 13, 7\cdot 13, 11^2\},$$
$$M_2 = \{2\cdot 29, 3\cdot 23, 5\cdot 19, 7\cdot 17, 11\cdot 13\},$$
$$M_3 = \{2\cdot 31, 3\cdot 29, 5\cdot 23, 7\cdot 19, 11\cdot 17\},$$
$$M_4 = \{2\cdot 37, 3\cdot 31, 5\cdot 29, 7\cdot 23, 11\cdot 19\},$$
$$M_5 = \{2\cdot 41, 3\cdot 37, 5\cdot 31, 7\cdot 29, 11\cdot 23\},$$
$$M_6 = \{2\cdot 43, 3\cdot 41, 5\cdot 37, 7\cdot 31, 13\cdot 17\},$$
$$M_7 = \{2\cdot 47, 3\cdot 43, 5\cdot 41, 7\cdot 37, 13\cdot 19\},$$
$$M_8 = \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 13^2\}.$$

Сега $M_i \subset S \setminus P, i = 1,2,...,8$. Но, видовме дека постојат најмногу 7 сложени броеви кои не припаѓаат на T. Затоа според принципот на Дирихле постои барем еден индекс $i_0 \in \{1,2,...,8\}$, такво што $M_{i_0} \subset T$. Секои два броја од множеството M_{i_0} се заемно прости, што значи дека $n = 217$.

4. Даден е сврзан граф со k ребра. Докажи дека неговите ребра може да се нумерираат со броевите $1,2,3,...,k$ така што за секое теме ν од графот кое е поврзано со ребро со барем две други темиња, важи: најголемиот заеднички

делител на сите броеви со кои се нумерирани ребрата кои излегуваат од ν е 1.

(Граф G се состои од множество точки, кои се нарекуваат темиња и фамилија отсечки што поврзуваат некои парови различни темиња, кои се нарекуваат ребра. Графот G е поврзан ако за секој пар различни темиња x, y постои низа темиња $x=\nu_0,\nu_1,...,\nu_m=y$ такви што секој пар (ν_i,ν_{i+1}), $i=1,2,...,m-1$ е поврзан со ребро од G.)

Решение. Да почнеме од некое теме γ_0 и да ги поминеме по ред ребрата на графот нумерирајќи ги со 1, 2, ... се додека можеме да ја продолжиме оваа постапка, т.е. се додека не дојдеме до теме за кое се нумерирани сите ребра кои што излегуваат од него. Нека последното ребро сме го нумерирале со r.

Ако сега во тој граф постои некое ребро кое не е нумерирано, тогаш заради сврзаноста на графот, меѓу темињата кои сме ги поминале, постои барем едно од кое излегува ребро кое не е нумерирано. Го нумерираме тоа ребро со $r+1$, следното со $r+2$ и продолжувајќи ја оваа постапка ќе ги нумерираме сите ребра.

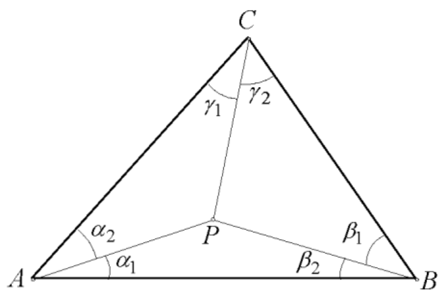
За секое теме $\nu\neq\nu_0$ од кое што излегуваат барем две ребра, постојат две од тие ребра кои се нумерирани со последователни броеви, а од темето γ_0 излегува ребро кое е нумерирано со 1. Ваквата нумерација ги задоволува условите на задачата.

5. Нека P е внатрешна точка во триаголникот ABC. Докажи дека барем еден од аглите PAB, PBC, PCA е помал или еднаков на 30°.

Решение. Нека

$\measuredangle PAB=\alpha_1$, $\measuredangle PBC=\beta_1$, $\measuredangle PCA=\gamma_1$,

$\measuredangle PAC=\alpha_2$, $\measuredangle PBA=\beta_2$, $\measuredangle PCB=\gamma_2$.



Од синусната теорема, следува:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_2}=\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}},\ \frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma_2}=\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}},\ \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha_2}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}},$$

од каде што следува

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha_2}=\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}=1$$

т.е.

$$\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1=\sin\alpha_2\sin\beta_2\sin\gamma_2\,. \tag{1}$$

Да претпоставиме дека $\alpha_1>30^\circ$, $\beta_1>30^\circ$ и $\gamma_1>30^\circ$. Од $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1<180^\circ$, следува $\alpha_1<120^\circ$, $\beta_1<120^\circ$ и $\gamma_1<120^\circ$, па затоа

$$\sin\alpha_1\cdot\sin\beta_1\cdot\sin\gamma_1>\sin^3 30^\circ=\tfrac{1}{8}\,. \tag{2}$$

Од друга страна, користејќи го неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина, конвексноста на синусната функција на $[0^\circ, 180^\circ]$ и неравенството $\alpha_2+\beta_2+\gamma_2<90^\circ$, добиваме:

$$\sin\alpha_2\cdot\sin\beta_2\cdot\sin\gamma_2 \le \left(\frac{\sin\alpha_2+\sin\beta_2+\sin\gamma_2}{3}\right)^3 \le \left(\sin\frac{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}{3}\right)^3 < \sin^3 30^\circ = \frac{1}{8},$$

што противречи на (1) и (2). Од овде следува дека $\min\{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\}\le 30^\circ$.

6. Низата $x_0, x_1, \ldots$ е ограничена, ако постои константа C таква што $|x_i|<C$, за секое $i\ge 0$. Нека $a\in\mathbb{R}$, $a>1$. Најди ограничена бесконечна низа реални броеви $x_0, x_1, \ldots$ таква што

$$|x_i-x_j|\cdot|i-j|^a\ge 1, \text{ за секои } i, j\in\mathbb{N},\ i\ne j.$$

Решение. Ако $a>1$, тогаш од $|i-j|\ge 1$ следува

$$|x_i-x_j|\cdot|i-j|^a\ge|x_i-x_j|\cdot|i-j|,$$

па доволно е да се конструира низа $x_0, x_1, \ldots$ таква што

$$|x_i-x_j|\cdot|i-j|\ge 1. \qquad (1)$$

Ќе докажеме дека низата $x_i=4\{i\sqrt{2}\}$, каде што $\{x\}=x-[x]$ е функцијата *децимален дел од* x, го задоволува условот (1). Нека $i>j$. Тогаш

$$\begin{aligned} r=[i\sqrt{2}]-[j\sqrt{2}] &< i\sqrt{2}-j\sqrt{2}+1\le i\sqrt{2}-j\sqrt{2}+i-j \\ &=(\sqrt{2}+1)(i-j)<(4-\sqrt{2})(i-j). \end{aligned}$$

Освен тоа, ако за природните броеви m и n важи $m<(4-\sqrt{2})n$, тогаш

$$4n|\sqrt{2}n-m|=\frac{4n|2n^2-m^2|}{\sqrt{2}n+m}\ge\frac{4n}{\sqrt{2}n+m}>1.$$

Користејќи ги овие неравенства добиваме

$$\begin{aligned} |x_i-x_j|\cdot|i-j| &= |4\{i\sqrt{2}\}-4\{j\sqrt{2}\}|\cdot|i-j| \\ &=4|i-j|\cdot|(i-j)\sqrt{2}-r| \\ &=4n|\sqrt{2}n-r|>1. \end{aligned}$$

XXXIII олимпијада

1. Определи ги сите природни броеви a, b, c такви што
$$1 < a < b < c \text{ и } (a-1)(b-1)(c-1) \mid (abc-1).$$

Решение. Нека $R(a,b,c) = \frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$, $1 < a < b < c$, каде a, b и c се цели броеви. Горниот израз може да се запише во обликот
$$R(a,b,c) = 1 + \frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{(a-1)(b-1)} + \frac{1}{(b-1)(c-1)} + \frac{1}{(c-1)(a-1)}.$$
Од овде се гледа дека $R(a,b,c) > 1$ и ако $a \geq a' > 1, b \geq b' > 1, c \geq c' > 1$, тогаш $R(a,b,c) \leq R(a',b',c')$.

Понатаму, да забележиме дека ако a, b и c се непарни, $abc-1$ е парен , а ако a, b и c се парни, $(a-1)(b-1)(c-1)$ е непарен. Како $R(a,b,c)$ прима целобројни вредности, тоа значи дека сите a, b, c се или парни или непарни.

Ако $a \geq 4$, тогаш $1 < R(a,b,c) \leq R(4,6,8) = \frac{4\cdot 6\cdot 8-1}{3\cdot 5\cdot 7} = \frac{191}{105} < 2$, па во овој случај $R(a,b,c)$ не може да биде цел број, т.е. во овој случај задачата нема решение.

За $a = 3$, имаме $1 < R(3,b,c) \leq R(3,5,7) = \frac{3\cdot 5\cdot 7-1}{2\cdot 4\cdot 6} = \frac{104}{48} < 3$. Сега
$$R(3,b,c) = \frac{3bc-1}{2(b-1)(c-1)} = 2,$$
па се добива дека $(b-4)(c-4) = 11$ и $b = 5$, $c = 15$.

За $a = 2$, имаме $1 < R(2,b,c) \leq R(2,4,6) = \frac{2\cdot 4\cdot 6-1}{1\cdot 3\cdot 5} = \frac{47}{15} < 4$, па се добива дека $R(2,b,c) = 2$ или $R(2,b,c) = 3$. Во првиот случај $2bc-1 = 2(b-1)(c-1)$, што не е можно бидејќи левата страна е непарен, а десната парен број. Во вториот случај $2bc-1 = 3(b-1)(c-1)$, т.е. $(b-3)(c-3) = 5$ и тогаш $b = 4$, $c = 8$, бидејќи 5 е прост број и $4 \leq b < c$.

Значи, постојат две решенија и тие се (3,5,15) и (2,4,8).

2. Определи ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што
$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2, \text{ за секои } x, y \in \mathbb{R}.$$

Решение. *Прв начин.* Нека
$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2, \text{ за секои } x, y \in \mathbb{R} \qquad (1)$$
Нека $s = f(0)$. Од (1) за $x = 0$ добиваме
$$f(f(y)) = y + s^2, \text{ за секој } y \in \mathbb{R} \qquad (2)$$
Во (1) ставаме $y = 0$ и добиваме
$$f(x^2 + s) = (f(x))^2, \text{ за секој } x \in \mathbb{R} \qquad (3)$$
Ако во (3) ставиме $x = 0$ добиваме

$$f(s)=s^2, \tag{4}$$

и сега од (3) и (4) следува

$$s^2+f(x^2+s)=(f(x))^2+f(s).$$

Од (1), (2) и (4) со примена на функцијата f на двете страни добиваме

$$x^2+s+s^4=s+(x+s^2)^2,$$

од каде што следува дека

$$s=0 \tag{5}$$

Користејќи го (5), од (2) и (3) следува

$$f(f(y))=y,\ \text{за секој}\ y\in\mathbb{R} \tag{6}$$

$$f(x^2)=(f(x))^2,\ \text{за секој}\ x\in\mathbb{R} \tag{7}$$

Од (7) следува

$$f(x)\geq 0,\quad x\geq 0 \tag{8}$$

Ако $f(x)=0$ за некој x, тогаш

$$0=(f(x))^2=f(x^2)=f(x^2+f(x))=x+(f(x))^2=x,$$

па затоа

$$f(x)>0,\quad x>0 \tag{9}$$

Ако во (1) замениме y со $f(y)$, користејќи (6) добиваме

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\quad x\geq 0, y\in\mathbb{R} \tag{10}$$

За $x>y$, од (10) имаме

$$f(x)=f((x-y)+y)=f(x-y)+f(y)>f(y) \tag{11}$$

бидејќи според (9) имаме $f(x-y)>0$.

Ако $f(x)>x$ тогаш $x=f(f(x))>f(x)$, заради (11) и (6). Понатаму, ако $f(x)<x$ на истиот начин се заклучува дека $f(x)>x$.

Конечно, $f(x)=x$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

Втор начин. Прво ќе докажеме дека функцијата f е биекција. Нека $b\in\mathbb{R}$. Заменувајќи $y=b-(f(x))^2$ добиваме $f(x^2+f(y))=b$, што значи дека функцијата е сурјекција. Нека $f(y_1)=f(y_2)$. Тогаш последователно добиваме

$$\begin{aligned}
&x^2+f(y_1)=x^2+f(y_2),\\
&f(x^2+f(y_1))=f(x^2+f(y_2)),\\
&y_1+f(x)^2=y_2+f(x)^2,\\
&y_1=y_2,
\end{aligned}$$

т.е. f е инјекција, па затоа е биекција.

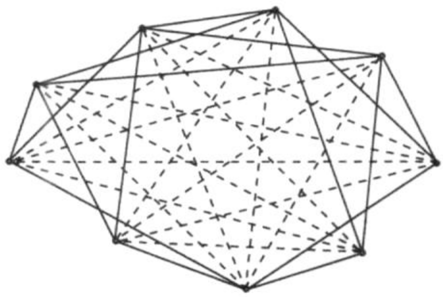
Нека $f(x) < x$ за некој x. Тогаш постои y таков што $x = f(x) + y^2$, од каде што следува $f(x) = f(f(x) + y^2) = x + f(y)^2 \geq x$, што е противречност.
Нека $f(x) > x$ за некој x. Тогаш, бидејќи f е биекција постои број y таков што $f(x) = x + (f(y))^2$. Од последното равенство следува

$$f(x) = x + (f(y))^2 = f(y^2 + f(x)),$$

па како f е биекција добиваме $x = y^2 + f(x) \geq f(x)$, што е противречност.
Конечно, од претходните разгледувања следува $f(x) = x$, за секој $x \in \mathbb{R}$.

3. Во просторот се дадени девет точки, такви што било кои четири не лежат во иста рамнина. Секои две точки се поврзани со отсечка и секоја од нив е обоена со сина или со црвена боја или не е обоена. Определи го најмалиот број n таков што при било какво боење на избраните n отсечки, меѓу нив постојат три еднакво обоени кои се страни на триаголник.

Решение. Ако $n = 32$, тогаш може да се изберат и обојат отсечките така да не постои ниту еден триаголник, обоен со иста боја, како што е покажано на цртежот десно. Притоа со полна линија се претставени отсечките обоени со сина боја, а со испрекинаталинија се претставени отсечките обоени со црвена боја.

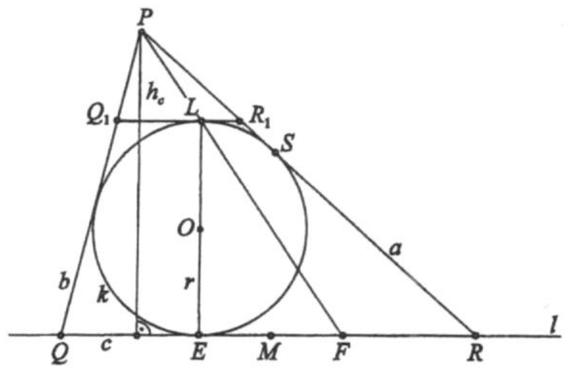


Меѓу деветте точки има $\frac{9\cdot 8}{2} = 36$ отсечки. Да претпоставиме дека сме избрале 33 обоени отсечки. Тогаш, само три отсечки се необоени.
Сека можеме да отстраниме 3 темиња така што преостанатите 6 бидат поврзани сите со обоени отсечки. Да земеме некое теме, на пример A_1. Тоа е поврзано со останатите 5 точки со обоени отсечки, па затоа постојат три исто обоени отсечки, на пример сини отсечки $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}$. Ако ниту еден од триаголниците $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$ и $A_1A_3A_4$ не е обоен во сина боја, тогаш триаголникот $A_2A_3A_4$ е обоен во црвена боја.
Според тоа, ако избереме 33 обоени отсечки, секогаш ќе постои триаголник така што сите негови страни се обоени со иста боја. Значи, најмалата вредност за n со бараните својства е $n = 33$.

4. Нека t е тангента на кружницата k и точката M припаѓа на t. Определи го геометриското место на точки P за кои постојат точки Q и R на t такви

што M е средина на отсечката QR, а кружницата k е впишана во триаголникот PQR

Решение. Нека E е допирната точка на тангентата t со кружницата k, чијшто центар е O, а EL е дијаметарот на кружницата.



Земаме точка P и соодветно точки Q и R на тангентите, така да кружницата биде впишана во триаголникот PQR. Триаголниците PFR и PLR_1 се хомотетични со коефициент на хомотетија

$$k=\frac{h_c}{h_c-2r}=\frac{\frac{2P}{c}}{\frac{2P}{c}-\frac{2P}{s}}=\frac{s}{s-c},$$

(P е плоштината на триаголникот PQR, $s=\frac{a+b+c}{2}$, r е радиусот на кружницата впишана во триаголникот PQR) и $\overline{QE}=s-a$.

Правата PL ја сече тангентата во точка F, па имаме

$$\overline{FR}=k\overline{LR_1}=k\overline{R_1S}=k(\overline{PR}-\overline{PR_1}-\overline{SR})=k\overline{PR}-\overline{PR}-k(s-b)$$
$$=(k-1)\overline{PR}-k(s-b)=\frac{c}{s-c}a-\frac{s}{s-c}(s-b)=s-a=\overline{QE}$$

Значи, важи $\overline{QE}=\overline{FR}$. Точката P припаѓа на бараното множество ако и само ако M е средина на отсечкта EF, т.е. ако и само ако точката F е симетрична со точката E во однос на точката M. Бараното множество точки е полуправата LP.

5. Нека O_{xyz} е правоаголен координатен систем во просторот, S е конечно множество точки во него, а S_x, S_y и S_z се множествата ортогонални проекции на точките од S на рамнините O_{yz}, O_{zx}, O_{xy}, соодветно. Докажи дека

$$|S|^2\leq|S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|.$$

Решение. *Прв начин*. Нека $|S_x|=a, |S_y|=b, |S_z|=c$. Доказот ќе го дадеме со индукција по $|S|$.

За едноелементно множество S тврдењето важи.

Да претпоставиме дека тврдењето важи за секое S, такво што $|S|<n$.

Да го разгледаме множеството S за кое $|S|=n$. Постои рамнина паралелна со некоја координатна рамнина која не содржи ниту една точка од S и која го дели тоа множество на две непразни подмножества S_1 и S_2, така да $n=|S_1|+|S_2|, |S_1|<n, |S_2|<n$. Од индуктивната претпоставка следува

$$|S_1|^2 \le a_1b_1c_1, \quad |S_2|^2 \le a_2b_2c_2.$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека таа рамнина е паралелна со xy -рамнината. Тогаш

$$a_1+a_2=a, \quad b_1+b_2=b, \quad c_1 \le c, \quad c_2 \le c.$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува дека

$$\begin{aligned}|S|^2 &= (|S_1|+|S_2|)^2 \le (\sqrt{a_1b_1c_1}+\sqrt{a_2b_2c_2})^2 \le (\sqrt{a_1b_1}\cdot\sqrt{c}+\sqrt{a_2b_2}\cdot\sqrt{c})^2 \\ &= c(\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2})^2 \le c(a_1+a_2)(b_1+b_2)=abc\end{aligned}$$

со што е докажана точноста на даденото неравенство.

Втор начин. Да означиме

$$\begin{aligned}&S(x)=\{(y,z)\,|\,(x,y,z)\in S\},\\ &S_y(x)=\{z\,|\,(x,z)\in S_y\},\\ &S_z(x)=\{y\,|\,(x,y)\in S_z\}.\end{aligned}$$

Ако го искористиме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и инклузиите $S(x)\subseteq S_x$ и $S(x)\subseteq S_z(x)\times S_y(x)$ добиваме

$$\begin{aligned}|S| &= \sum_x |S(x)| \le \sum_x \sqrt{|S_x|\cdot|S_y(x)|\cdot|S_z(x)|}\\ &\le \sqrt{|S_x|}\cdot\sum_x\sqrt{|S_y(x)|\cdot|S_z(x)|}\\ &\le \sqrt{|S_x|}\cdot\sqrt{\sum_x|S_y(x)|}\cdot\sqrt{\sum_x|S_z(x)|}\\ &= \sqrt{|S_x|}\cdot\sqrt{|S_y|}\cdot\sqrt{|S_z|}\\ &= \sqrt{|S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|}.\end{aligned}$$

6. За секој природен број n со $S(n)$ да го означиме најголемиот природен број со својството: за секој природен број k, $1<k<S(n)$, бројот n^2 може да се претстави како збир од k квадрати на природни броеви.

а) Докажи дека $S(n)\le n^2-14$, за секој $n>14$.

б) Најди природен број n за кој $S(n)=n^2-14$.

в) Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $S(n)=n^2-14$.

Решение. а) Бројот n^2 можеме да го запишеме како

$$n^2 = 1^2 + 1^2 + ... + 1^2 .$$

Ако групираме четири единици добиваме 2^2 и со тоа бројот на квадратите се намалува за 3. Со групирање на 9 единици добиваме 3^2 и бројот на квадратите се намалува за 8. Ако k пати групираме по 4 единици и l пати по 9 единици, тогаш бројот на квадратите се намалува за $3k+8l$. На опишаниот начин бројот на квадратите може да се намали за 3,6,8,9,11,12, но не и за 13. Тоа е затоа што Диофантовата равенка $3k+8l=13$ нема позитивни решенија. (општото решение е $k=-1+8m, l=2-3m, m \in \mathbb{Z}$). Затоа $S(n) \le n^2 - 14$.

б) Ако $S(n) = n^2 - 14, n \ge 4$, тогаш $S(n) \ge 2$. Бројот n^2 мора да биде еднаков на збирот на два квадрати. Може да биде $n = 5,10,13,...$. За $n=5$ и $n=10$, $S(n)=2$. Најмалиот можен број n за кој $S(n) = n^2 - 14$ е $n=13$. Треба да докажеме дека бројот $169 = 13^2$ е еднаков на збирот од k квадрати за секој $k \le 13^2 - 14 = 155$.

Ако n^2 е збир од k квадрати од кои еден е парен, на пример $(2r)^2$, кој можеме да го запишеме како $r^2 + r^2 + r^2 + r^2$, добиваме дека n^2 е збир од $k+3$ квадрати. Од $169 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 3^2$, следува дека бројот 169 може да се запише како збир од $2+3t$ квадрати за $1 \le t \le 53$. Ако 3^2 го запишеме како $2^2 + 2^2 + 1^2$, бројот 169 може да се прикаже како збир од $1+3t$ квадрати за $1 \le t \le 54$ (за $t=1, 169 = 10^2 + 8^2 + 2^2 + 1^2$). За $k = 153, 169 = 3^2 + 3^2 + 151 \cdot 1^2$.

Групирајќи 4 единици во 2^2, четири 2^2 во 4^2 и четири 4^2 во 8^2 се добива запис на 169 со помош на $k = 153 - 3t$ квадрати, за $1 \le t \le 48$. За $t = 49$, имаме $169 = 6^2 + 6^2 + 6^2 + 6^2 + 4^2 + 3^2$, а за $t = 50$, $169 = 12^2 + 4^2 + 3^2$.

Со тоа го добивме прикажувањето на бројот $13^2 = 169$ како збир од k квадрати за секој $k \le 155$.

в) Доволно е да докажеме дека за секој $n = 2^k \cdot 13,$ важи $S(n) = (2^k \cdot 13)^2 - 14.$ Тоа може да се направи со разгледување на

$$(2^k \cdot 13)^2 = (2^k \cdot 8)^2 + (2^k \cdot 8)^2 + (2^k \cdot 4)^2 + (2^k \cdot 4)^2 + (2^k \cdot 3)^2 \quad \text{и}$$

$$(2^k \cdot 13)^2 = 3^2 + 3^2 + [(2^k \cdot 13)^2 - 18] \cdot 1^2$$

и групирање така да се добиваат збирови на квадрати.

XXXIV олимпијада

1. Нека $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$, каде $n>1$ е природен број. Докажи дека $f(x)$ не може да се претстави како производ на два полиноми со целобројни коефициенти со степени поголеми или еднакви на 1.

Решение. Да претпоставиме дека $f(x)=g(x)h(x)$, каде $g(x)$ и $h(x)$ се полиноми со ненулти степени и со целобројни коефициенти. Од $3=f(0)=g(0)h(0)$ следува дека еден од броевите $|g(0)|$, $|h(0)|$ е еднаков на 1. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$$|g(0)|=1 \text{ и } g(x)=x^k+a_1x^{k-1}+...+a_k.$$

Ќе докажеме дека $k>1$. Навистина, ако $k=1$, тогаш $g(x)=x+a$ и како $|g(0)|=1$, имаме $a=\pm1$, т.е. $g(x)=x\pm1$ и $f(\mp1)=0$ што противречи на $f(1)=9$ и $f(-1)=7$ или $f(-1)=-1$, во зависност од парноста на n.

Нека $\alpha_i, i=1,2,...,k$ се корените на полиномот $g(x)$. Тогаш,

$$g(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_k)$$

и $|g(0)|=|\alpha_1\alpha_2...\alpha_k|=1$. Во равенката $f(x)=0$ ставаме $x=\alpha_i$ и добиваме

$$\alpha_i^{n-1}(\alpha_i+5)=-3, \text{ за } i=1,,...,k.$$

Ако ги помножиме овие равенства добиваме

$$|(\alpha_1+5)(\alpha_2+5)...(\alpha_k+5)|=3^k \quad (1)$$

Од равенствата

$$|g(-5)|=|\alpha_1+5|\cdot|\alpha_2+5|\cdot...\cdot|\cdot\alpha_k+5| \text{ и } 3=f(-5)=g(-5)h(-5),$$

бидејќи коефициентите на $g(x)$ и $h(x)$ се целобројни добиваме

$$|(\alpha_1+5)(\alpha_2+5)...(\alpha_k+5)|=3 \text{ или } 1.$$

Но, ова противречи на (1), бидејќи $k>1$, па затоа $f(x)$ не може да се запише во облик $g(x)h(x)$.

2. Нека D е внатрешна точка во остроаголниот $\triangle ABC$ таква што

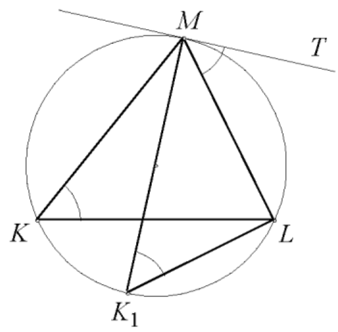
$$\measuredangle ADB=\measuredangle ACB+90^\circ \text{ и } \overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AD}\cdot\overline{BC}.$$

а) Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}$.

б) Докажи дека тангентите во точката C повлечени на кружниците опишани околу триаголниците ACD и BCD се заемно нормални.

Решение. б) Нека $DE\perp DB$, $\overline{DE}=\overline{DB}$ и CT и CU се тангентите во точката C на кружниците опишани околу триаголниците ACD и BCD, соодветно.

Лема. Ако во точката M на $\triangle KLM$ е повлечена тангента MT на опишаната кружница околу триаголникот, тогаш $\measuredangle TML=\measuredangle MKL$.



Доказ. Низ точката M повлекуваме дијаметар MK_1. Тогаш, $\measuredangle MKL = \measuredangle MK_1L$, како агли над ист лак во кружница. Понатаму, аглите MK_1L и TML се агли со нормални краци, па затоа $\measuredangle TML = \measuredangle MK_1L$. Сега тврдењето на лемата следува од претходните две равенства. ■

Од претходната лема следува

$$\measuredangle TCD = \measuredangle CAD \text{ и } \measuredangle DCU = \measuredangle DBC.$$

Според тоа

$$\measuredangle EDA + \measuredangle DAB + \measuredangle ABD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

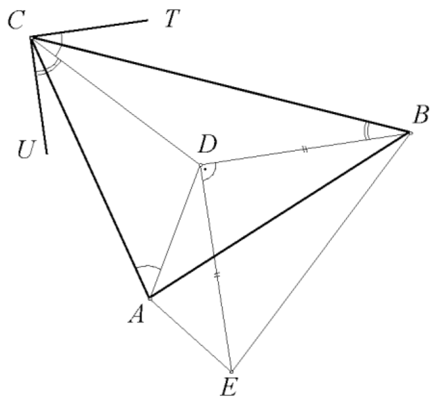
Од условот на задачата следува

$$\measuredangle EDA + 90^\circ = \measuredangle BCA + 90^\circ, \text{ т.е. } \measuredangle EDA = \measuredangle BCA.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}\measuredangle CAD + \measuredangle DBC &= 180^\circ - (\measuredangle BCA + \measuredangle DAB + \measuredangle ABD)\\ &= 180^\circ - (\measuredangle EDA + \measuredangle DAB + \measuredangle ABD) = 90^\circ\end{aligned}$$

Сега од $\measuredangle TCD + \measuredangle DCU = \measuredangle CAD + \measuredangle DBC = 90^\circ$ следува дека тангентите CT и CU се заемно нормални.



а) *Прв начин*. Од условите на задачата следува дека $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$.

Од б) имаме $\measuredangle EDA = \measuredangle BCA$, па затоа $\triangle EDA \sim \triangle BCA$, (должините на страните кај еднаквиот агол се пропорционални). Затоа,

$$\measuredangle CAB = \measuredangle DAE \text{ и } \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}},$$

од што следува

$$\begin{aligned}\measuredangle CAD &= \measuredangle CAB - \measuredangle DAB\\ &= \measuredangle DAE - \measuredangle DAB = \measuredangle BAE.\end{aligned}$$

Од исти причини и триаголниците CAD и BAE се слични, па затоа $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{CD}}{\sqrt{2}\cdot\overline{BD}}$, бидејќи триаголникот BDE е рамнокрак правоаголен.

Конечно, $\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\overline{AC}\cdot\overline{BD}} = \sqrt{2}$.

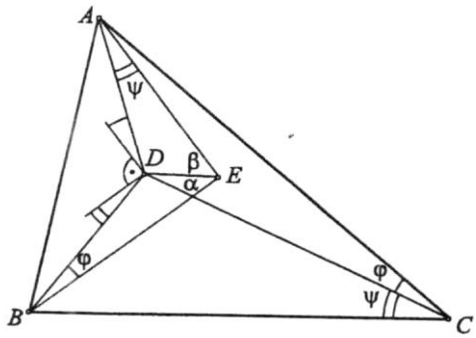
Втор начин. Нека $\alpha = \measuredangle DAC$, $\beta = \measuredangle DBC$ $\delta_1 = \measuredangle ADC$ и $\delta_2 = \measuredangle CDB$ (види цртеж). Збирот на аглите во четириаголникот $ADBC$ е 360°, па користејќи дека $\measuredangle ADB = 90^\circ + \measuredangle ACB$, добиваме дека $\alpha + \beta = 90^\circ$. Со $\chi_{A,k}$ да означиме хомотетија со центар во точката A и коефициент k, а со $\rho_{A,\varphi}$ да означиме ротација за агол φ со центар во точката A. Тогаш за $k_1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$ и $k_2 = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$ важи:

$(\chi_{D,k_1} \circ \rho_{D,\delta_1})(D) = D$,

$(\chi_{D,k_1} \circ \rho_{D,\delta_1})(C) = A$,

$(\chi_{D,k_2} \circ \rho_{D,-\delta_2})(D) = D$,

$(\chi_{D,k_2} \circ \rho_{D,-\delta_2})(C) = B$.



Нека $(\chi_{D,k_1} \circ \rho_{D,\delta_1})(B) = E$, што така $\measuredangle BDE = \delta_1$ и $\frac{\overline{DE}}{\overline{DB}} = k_1$ и нека $(\chi_{D,k_2} \circ \rho_{D,-\delta_2})(A) = E_1$, така што $\measuredangle ADE_1 = \delta_2$ и $\frac{\overline{DE_1}}{\overline{DA}} = k_2$. Точките D, E и E_1 се колинеарни и притоа важи $\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$ и $\frac{\overline{BD}}{\overline{DE_1}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$, од каде што следува $\overline{DE_1} = \overline{DE}$, односно $E \equiv E_1$.

Освен тоа $\measuredangle BEA = \alpha + \beta = 90^\circ$. Значи, $\triangle BED \sim \triangle CAD$ од каде што следува $\overline{BE} : \overline{BD} = \overline{AC} : \overline{CD}$, т.е.

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{BE} \cdot \overline{CD}. \qquad (1)$$

Од $\triangle ADE \sim \triangle CDB$ следува $\overline{AD} : \overline{AE} = \overline{CD} : \overline{BC}$, т.е.

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AE} \cdot \overline{CD}. \qquad (2)$$

Од равенствата (1) и (2) следува

$$\overline{AC}^2 \cdot \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC}^2 = \overline{BE}^2 \cdot \overline{CD}^2 + \overline{AE}^2 \cdot \overline{CD}^2$$
$$= \overline{CD}^2 (\overline{BE}^2 + \overline{AE}^2) = \overline{CD}^2 \cdot \overline{AE}^2.$$

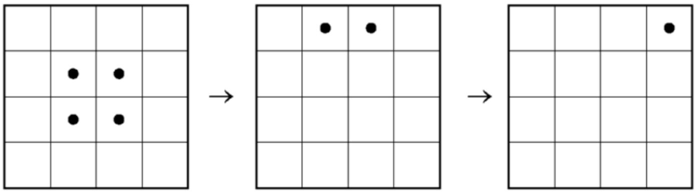
Сега, бидејќи $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}$ добиваме

$$2\overline{AC}^2 \cdot \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 \cdot \overline{AE}^2, \text{ т.е. } \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{BD}} = \sqrt{2}.$$

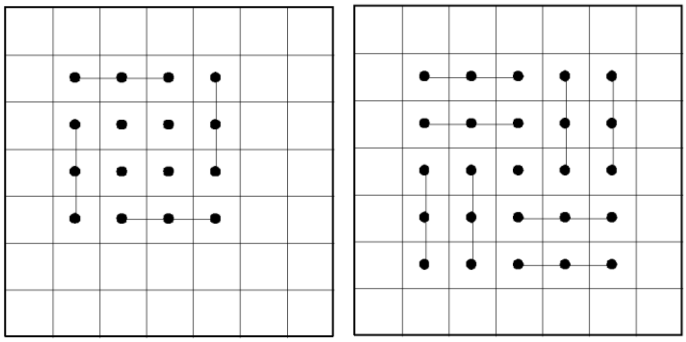
Забелешка. Задачата може да се реши и со користење на инверзија со центар во точката D.

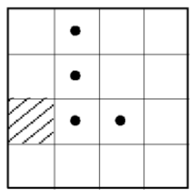
3. На бесконечна шаховска табла се игра следната игра. На почеток, n^2 жетони се поставени на полиња на $n \times n$ квадрат и тоа по еден жетон на секое поле. Во оваа игра, „потез“ е скок во хоризонтална или вертикална насока преку зафатено на слободно поле кое е непосредно до него. Жетонот преку кој се скока се отстранува.
Определи ги сите вредности n за кои играта може да се заврши само со еден жетон на таблата.

Решение. а) За $n=1$ играта е завршенма. Ако $n=2$, тогаш играта може да заврши со еден жетон на таблата, како што е прикажано на долниот цртеж.

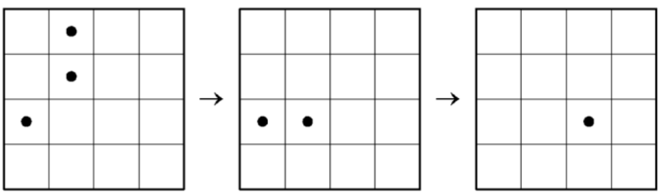


б) Ако $n=4$ или $n=5$, тогаш исто така играта може да заврши само со еден жетон на таблата, како што е прикажано на долните два цртежи.

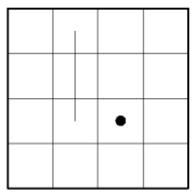




Имено, секои четири жетони распоредени како на цртежот десно, каде штрафираното поле е слободно, со последователна примена на опишаните чекори прикажани на долните цртежи можеме да ги сведеме на поедноставен облик, каде со цртата се обележени полињата од кои се отстранети жетоните.



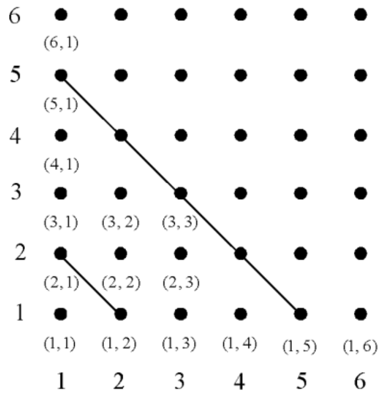
т.е.



в) Нека $n \geq 7$ и $3 \nmid n$. Сега, со примена на претходно опишаните постапки можеме да ги отстраниме сите жетони кои се наоѓаат надвор од квадратот $(n-6)\times(n-6)$ и постапката ја повторуваме онолку пати колку што тоа е потребно. На крајот проблемот се сведува на еден од случаите $n=1,2,4$ или 5 и во секој случај играта може да заврши со само еден жетон на таблата.

г) Сега да го разгледаме случајот $n=3p$. Да ги нумерираме редовите и колоните како што е прикажано на долниот црте. На секој жетон кој се наоѓа на полето (i, j) му го придружуваме бројот $i+j$ и сите жетени да ги поделиме на три групи S_0, S_1, S_2 така да во групата S_k за кои важи

$$i+j\equiv k(\mathrm{mod}\,3),\ k=0,1,2\ .$$



Ако еден жетон го прескокне соседниот и премине на ново поле, тогаш во две групи бројот на жетоните се намалува за еден, а во третата се зголемува за еден, што значи дека парноста на бројот на жетоните во секој чекор се менува во секоја група. Да определиме колку жетонин има на почетокот во секоја група.

$$\begin{aligned}|S_0| &= 2+5+...+(n-1)+(n-2)+(n-5)+...+4+1\\ &=(1+2+...+n)-3(1+2+...+\tfrac{n}{3})\\ &=\tfrac{3p(3p+1)}{2}-\tfrac{3p(p+1)}{2}=3p^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|S_1| &= 3+6+...+(n-3)+n+(n-3)+...+6+3\\ &=3(1+2+...+p)+3(1+2+...+(p-1))\\ &=\tfrac{3p(p+1)}{2}+\tfrac{3p(p-1)}{2}=3p^2\end{aligned}$$

$$|S_2|=(3p)^2-|S_0|-|S_1|=3p^2$$

Броевите $|S_0|,|S_1|,|S_2|$ на почетокот се со иста парност и парноста ја задржуваат по секој чекор, па затоа не е можно на крајот два од нив да се еднакви на 0, а еден да е еднаков на 1.

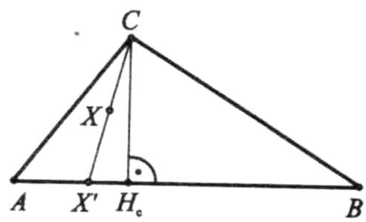
4. За три точки P,Q и R бројот $m(PQR)$ е еднаков на најмалата должина од висините на триаголникот PQR (притоа $m(PQR)=0$ ако P,Q и R се колинеарни). Нека A,B и C се дадени точки во рамнината π.

Докажи дека за секоја точка $X\in\pi$ важи:

$$m(ABC)\le m(ABX)+m(AXC)+m(XBC)\,.$$

Решение. Можни се следниве три случаи.

а) Точката X лежи во внатрешноста или на страните на $\triangle ABC$. Нека $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$ и $\overline{CA}=b$. Ќе докажеме дека за секој од триаголниците ABX, BCX и CAX, најдолгата тсрана не е подолга од $\max\{a,b,c\}$.



Нека точката $X'\equiv CX\cap AB$ се наоѓа меѓу A и подножјето H_c на висината повлечена од темето C (црт десно). Од

$$\overline{CA}^2-\overline{CX'}^2=(\overline{CH_c}^2+\overline{AH_c}^2)-(\overline{CH_c}^2+\overline{X'H_c}^2)=\overline{AH_c}^2-\overline{X'H_c}^2\ge 0$$

добиваме

$$\overline{CX} \leq \overline{CX'} \leq b.$$

Ако точката X' лежи меѓу подножната точка H_c и B, тогаш важи $\overline{CX} \leq a$. Значи, во секој случај важи $\overline{CX} \leq \max\{a,b\}$, а оттука $\overline{CX} \leq \max\{a,b,c\}$. Според тоа, во секој од триаголниците ABX, BCX и ACX најголемата страна е помала или еднаква на $\max\{a,b,c\}$.

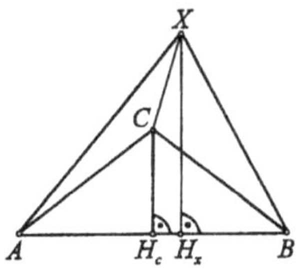
Од $h_c c = h_a a = h_b b = 2P = 2P_{\triangle ABC}$ следува $m(ABC) = \frac{2P}{\max\{a,b,c\}}$. Сега,

$$P_{\triangle ABX} + P_{\triangle ACX} + P_{\triangle BCX} = P_{\triangle ABC},$$

па затоа

$$\begin{aligned} m(ABX) + m(ACX) + m(BCX) &\geq \frac{2P_{\triangle ABX}}{\max\{a,b,c\}} + \frac{2P_{\triangle ACX}}{\max\{a,b,c\}} + \frac{2P_{\triangle BCX}}{\max\{a,b,c\}} \\ &= \frac{2P_{\triangle ABC}}{\max\{a,b,c\}} = m(ABC). \end{aligned}$$

б) Нека X е надвор од $\triangle ABC$ и притоа ниту една од полуправите AX, BX и CX не сече ниту една од страните на $\triangle ABC$. Еден од триаголниците ABX, ACX, BCX го содржи $\triangle ABC$ и најмалата висина во $\triangle ABC$ е помала или еднаква на најмалата висина во тој триаголник. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека темето C е внатрешна точка за $\triangle ABX$ или лежи на неговите страни (цртеж десно). Ако $m(ABX)$ е висината над страната AB, тогаш

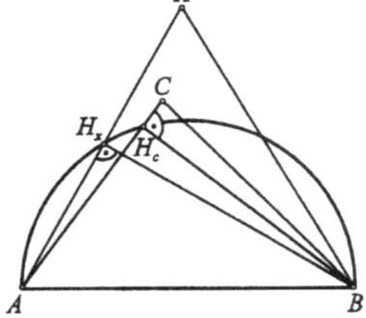


$$m(ABX) \geq \overline{XH_x} \geq \overline{CH_c} \geq m(ABC),$$

каде што H_x и H_c се проекциите на точките X и C врз правата AB. Најмалата висина во триаголникот е визина повлечена кон најдолгата страна, а пак таа лежи наспроти најголемиот агол. Затоа, ако $m(ABX)$ е висина на страната AX, тогаш $\measuredangle ABX \geq \measuredangle XAB$, бидејќи

$$2\measuredangle XAB \leq \measuredangle XAB + \measuredangle ABX < 180^\circ$$

и $\measuredangle XAB$ е остар. Бидејќи C е внатрешна точка за $\triangle ABX$ или лежи на неговите страни и $\measuredangle XAB \geq \measuredangle CAB$ добиваме $\overline{BH_X} \geq \overline{BH_C}$, ($\measuredangle BH_X A = \measuredangle BH_C A = 90^\circ$ и $\overline{BH_X}$ е тетива над поголем периферен агол, цртеж десно). Според тоа,



$$m(ABX) = \overline{BH_X} \geq \overline{BH_C} \geq m(ABC),$$

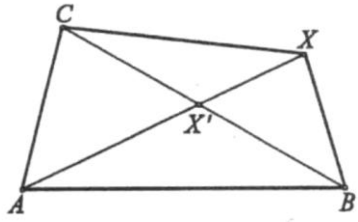
и ако земеме предвид дека

$$m(ACX) \geq 0 \text{ и } m(BCX) \geq 0$$

добиваме:

$$m(ABX) + m(ACX) + m(BCX) \geq m(ABC),$$

в) Нека една од полуправите AX, BX и CX сече некоја од страните на $\triangle ABC$. Без губење на општоста можеме да земеме дека полуправата AX ја сече страната BC и нека $BC \cap AX \equiv X'$. Од б) следува дека



$$m(ABX) \geq m(ABX') \text{ и}$$

$$m(ACX) \geq m(ACX').$$

Понатаму, од а) следува

$$\begin{aligned} m(ABX) + m(ACX) + m(BCX) &\geq m(ABX') + m(ACX') \\ &= m(ABX') + m(ACX') + m(BCX') \\ &\geq m(ABC). \end{aligned}$$

5. Дали постои функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таква што

(i) $f(1) = 2$

(ii) $f(f(n)) = f(n) + n$, за секој $n \in \mathbb{N}$ и

(iii) $f(n) < f(n+1)$, за секое $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Нека $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ е едно од решенијата на квадратната равенка $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$. За функцијата $g(x) = \alpha x$, важи

$$g(g(n)) - g(n) - n = 0, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}.$$

Ќе докажеме дека функцијата $f(n) = [g(n) + \frac{1}{2}]$ ги задоволува условите на задачата.

Од $\alpha > 1$ и $g(n+1) > g(n) + 1$ следува дека функцијата f строго расте. Понатаму, од $2 < \alpha + \frac{1}{2} < 3$ следува $f(1) = 2$. Од дефинициите на функциите f и g следува $|f(n) - g(n)| < \frac{1}{2}$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Равенството $f(f(n)) = f(n) + n$ следува од фактот дека f е целобројна функција и оценката

$$\begin{aligned} |f(f(n)) - f(n) - n| &= |g(g(n)) - g(n) - n - g(g(n)) + f(f(n)) - f(n) + g(n)| \\ &= |g(g(n)) - f(f(n)) + f(n) - g(n)| \\ &= |g(g(n)) - g(f(n)) + g(f(n)) - f(f(n)) + f(n) - g(n)| \\ &= |(\alpha - 1)(g(n) - f(n)) + g(f(n)) - f(f(n))| \\ &\leq |\alpha - 1| \cdot |g(n) - f(n)| + |g(f(n)) - f(f(n))| \\ &= \tfrac{\alpha-1}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{\alpha}{2} < 1. \end{aligned}$$

6. Нека $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. На кружница се поставени n светилки $L_0, L_1, ..., L_{n-1}$, во овој редослед. Секоја светилка е запалена или изгасната. На почетокот сите светилки се запалени. Се прават чекори $S_0, S_1, ..., S_j, ...$. Во чекорот S_j ако светилката L_{j-1} е запалена, тогаш се менува состојбата на L_j и тоа од запалена во изгасната и обратно, а ако светилката L_{j-1} е изгасната тогаш состојбата на светилката L_j не се менува. Во чекорот S_j состојбата на останатите светилки не се менува. Светилките се означени по $\mod n$, т.е. $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_o = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$ итн.

Докажи дека

а) Постои природен број $M(n)$ таков што после $M(n)$ чекори сите светилки ќе бидат запалени.

Б) Ако n е од облик 2^k тогаш сите светилки ќе бидат запалени по $n^2 - 1$ чекори.

в) Ако n е од облик $2^k + 1$ сите светилки ќе бидат запалени по $n^2 - n + 1$ чекори.

Решение. а) Чекорите ќе ги поделиме во групи и тоа така што првите n чекори во првата група, вторите n во втората група итн.

По секој чекор можеме да ја констатираме состојбата пред него: ако по $i-$от чекор светилката на местото $i-1$ била запалена, тогаш $i-$тата светилка ја променила својата состојба, а ако светилката на местото $i-1$ била изгасена, тогаш состојбата на $i-$тата светилка не се променила. На ваков начин можеме да ја констатираме состојбата пред произволно многу чекори.

Бидејќи имаме конечно многу комбинации за состојбите на светилките, по конечно многу чекори мора да се појави периода. Да земеме дека состојбата по k чекори е еднаква на состојбата по m чекори, $k > m$. Состојбите по k и m чекори се еднакви, па затоа и состојбите по $k-1$ и $m-1$ чекори се еднакви. Исто така и состојбите по $k-2$ и $m-2$ чекори се еднакви итн, за на крајот да се еднакви состојбите по $m-m=0$ и $k-m$ чекори. Според тоа, по $k-m$ чекори ја добиваме почетната состојба во која сите светилки се запалени.

б) Бројот 1 нека означува запалена, а 0 изгасната светилка. Чекорите ги запишуваме во табела со помош на низа од нули и единици. Кога ќе стигнеме до првата светилка продолжуваме да запишуваме во следниот ред. Со (x, y) да ја означиме состојбата на светилката на местото y во $x-$от ред. Низата $(x,i),...,(x, j)$ ги означува состојбите на светилките од $i-$то до $j-$то место во $x-$от, а низата $(i, y),...,(j, y)$ состојбната на светилките од $i-$то до $j-$то место во колоната y. Конечно,

$$\begin{matrix} (i,x) & (i,y) \\ (j,x) & (j,y) \end{matrix}$$

ја означува состојбата од $i-$ от до $j-$ от ред и од $x-$ тата до $y-$ тата колона. На пример:

Почетна состојба	1	1	1	1
1. ред	0	1	0	1
2. ред	1	0	0	1
3. ред	0	0	0	1
4. ред	1	1	1	

Ќе докажеме дека за $n=2^k$ сите табели се од овој облик. Навистина:

- полињата $(n,1),...,(n,n-1)$ имаат вредност 1 (последниот ред),
- полињата $(n-1,1),...,(n-1,n-1)$ имаат вредност 0 (претпоследниот ред),
- полињата $(1,n),...,(n-1,n)$ имаат вредност 1 (последната колона), и
- полињата $(1,n-1),...,(n-1,n-1)$ имаат вредност 0 (претпоследната колона).

Ако сите табели се од овој облик, тогаш сите светилки ќе бидат запалени по n^2-1 чекори. Последното тврдење може да се докаже со индукција. Деталите ги оставаме на читателот.

с) Аналогно се докажува тврдењето за $n=2^k+1$. Во овој случај сите табели се од обликот

Почетна состојба	1	1	1	1	1
1. ред	0	1	0	1	0
2. ред	0	1	1	0	0
3. ред	0	1	0	0	0
4. ред	0	1	1	1	1
5. ред	1				

- полињата $(1,1),...,(n-1,1)$ имаат вредност 0 (прва колона),
- полињата $(1,2),...,(n-1,2)$ имаат вредност 1 (втора колона),
- полињата $(n-1,2),...,(n-1,n)$ имаат вредност 1 (претпоследен ред),
- полињата $(n-2,3),...,(n-2,n)$ имаат вредност 0 (претпретпоследен ред),
- полињата $(1,n),...,(n-2,n)$ имаат вредност 0 (последна колона), и
- полето $(n,1)$ има вредност 1.

Јасно, ако сите табели имаат ваков облик, тогаш сите светилки ќе бидат запалени по $n(n-1)+1=n^2-n+1$ чекори. Последното тврдење може да се докаже со индукција. Деталите ги оставаме на читателот.

XXXV олимпијада

1. Нека $m, n \in \mathbb{N}$, а $a_1, a_2, ..., a_m$ се меѓусебно различни елементи од множеството $\{1, 2, ..., n\}$. Ако $a_i + a_j \le n$ за некои i, j, $1 \le i < j \le m$, тогаш постои k, $1 \le k \le m$, таков што $a_i + a_j = a_k$. Докажи дека

$$\frac{a_1+a_2+...+a_m}{m} \ge \frac{n+1}{2}.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека за броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ важи $a_1 < a_2 < ... < a_m$. Ќе докажеме дека за секој $i = 1, 2, ..., m$ важи $a_i + a_{m-i+1} \ge n+1$.

Нека претпоставиме дека постои i таков што $a_i + a_{m-i+1} \le n$. Тогаш,

$$a_{m-i+1} < a_{m-i+1} + a_1 < a_{m-i+1} + a_2 < ... < a_{m-i+1} + a_i \le n.$$

Според тоа, добивме $i+1$ различни броеви кои припаѓаат на множеството $\{a_{m-i+1}, a_{m-i+2}, a_{m-i+3}, ..., a_m\}$ кое има i елементи, што е противречност. Значи, за секој $i = 1, 2, ..., m$ важи $a_i + a_{m-i+1} \ge n+1$.

Од претходно изнесеното следува дека

$$\begin{aligned}2(a_1 + a_2 + ... + a_m) &= (a_1 + a_m) + (a_2 + a_{m-1}) + ... + (a_{m-1} + a_2) + (a_m + a_1)\\ &\ge m(n+1),\end{aligned}$$

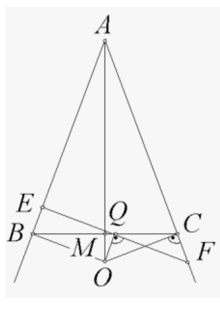
т.е. $\frac{a_1+a_2+...+a_m}{m} \ge \frac{n+1}{2}$, што и требаше да се докаже.

2. Даден е $\triangle ABC$, со $\overline{AB} = \overline{AC}$. Нека
   a) M е средина на страната BC, а O е точка на правата AM таква што OB е нормална на AB,
   b) Q е произволна точка на страната BC различна од B и C.
   c) E се наоѓа на правата AB и F припаѓа на правата AC и притоа точките E, Q и F се различни и колинеарни.

Докажи дека OQ е нормална на EF ако и само ако $\overline{QE} = \overline{QF}$.

Решеиие. Нека $OQ \perp EF$ (цртеж десно). Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $Q \in MC$. Од

$$\measuredangle OBE + \measuredangle OQE = 180^\circ$$



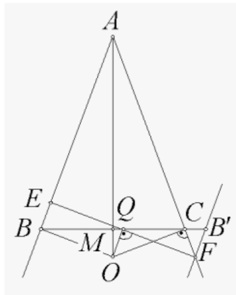
следува дека четириаголникот $OQEB$ е тетивен. Оттука следува дека $\measuredangle OEQ = \measuredangle OBQ = \measuredangle OAB$. Од друга страна $\measuredangle FCO = \measuredangle FQO = 90^\circ$, што значи дека четириаголникот $OFCQ$ е тетивен. Затоа

$$\measuredangle QOF = 180^\circ - \measuredangle FCQ = \measuredangle BCA,$$

од што следува дека

$$\measuredangle OFQ = 90^\circ - \measuredangle QOF = \measuredangle CAM = \measuredangle QEO.$$

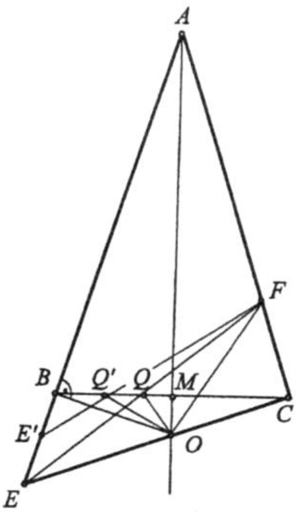
Според тоа, $\triangle EOF$ е рамнокрак со висина OQ, од што следува $\overline{EQ} = \overline{FQ}$.



Нека претпоставиме дека $\overline{EQ} = \overline{FQ}$. Применуваме централна симетрија на B и E во однос на точката Q. Нека B' е сликата на B при оваа централна симетрија. Од $\overline{EQ} = \overline{FQ}$ следува дека F е сликата на E. Од $B'F \parallel BE$ следува дека триаголниците ABC и $FB'C$ се слични, па затоа $\overline{CF} = \overline{B'F} = \overline{BE}$. Од

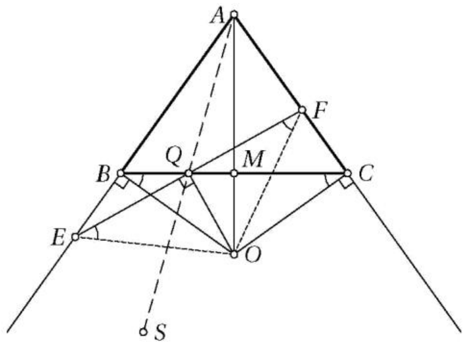
$$\measuredangle EBO = 90^\circ = \measuredangle FCO, \ \overline{OB} = \overline{OC} \text{ и } \overline{BE} = \overline{CF}$$

следува дека $\triangle OEB \cong \triangle OFC$ па затоа $\overline{OE} = \overline{OF}$. Според тоа, $\triangle OFE$ е рамнокрак со основа EF и тежишна линија OQ, па затоа $OQ \perp EF$.



Забелешка. Импликацијата: Од $\overline{QE} = \overline{QF}$ следува $OQ \perp EF$, може да се докаже и на следниов начин.

Втор начин. Нека $\overline{QE} = \overline{QF}$. На отсечката BC земаме точка Q' таква што $\measuredangle OQ'F = 90^\circ$, цртеж десно. Нека $FQ' \cap AB \equiv E'$. Бидејќи $OQ' \perp FE'$, од претходно докажаното следува $\overline{Q'E'} = \overline{Q'F}$. Од друга страна, по претпоставка $\overline{QE} = \overline{QF}$. Оттука следува дека мора да е $Q' \equiv Q$, бидејќи во спротивно добиваме $QQ' \parallel AB$, што е противречност. Освен тоа и $E' \equiv E$, па затоа $OQ \perp FE$.



Трет начин. Нека $\overline{QE} = \overline{QF}$ и нека точката S е симетрична на точката A во однос на точката Q. Тогаш четириаголникот $AESF$ е паралелограм. Од друга страна, ако нормалата на точката Q на правата OQ ги сече правите AB и AC соодветно во точќките E' и F', тогаш од претходно докажаното следува дека $\overline{Q'E'} = \overline{Q'F}$, па затоа $AE'SF'$ е паралелограм, од каде што следува $E' \equiv E$, $F' \equiv F$ и $OQ \perp FE$.

3. За секој $k \in \mathbb{N}$ со $f(k)$ да го означиме бројот на елементите од множеството $\{k+1, k+2, ..., 2k\}$ кои запишани во броен систем со основа 2 имаат точно три единици.

a) Докажи дека за секој $m \in \mathbb{N}$, постои барем еден $k \in \mathbb{N}$ таков што $f(k) = m$.

b) Најди ги сите природни броеви m за кои постои точно еден број k таков што $f(k) = m$.

Решение. *Прв начин.* Нека M е множеството од сите природни броеви во чиј бинарен запис има точно три единици. Природен број n во својот бинарн запис има точно три единици ако $n = 2^{\alpha} + 2^{\beta} + 2^{\gamma}$, каде α, β, γ се различни ненегативни цели броеви. Според тоа,

$$M = \{n \mid n = 2^{\alpha} + 2^{\beta} + 2^{\gamma}, \alpha > \beta > \gamma \geq 0\}.$$

Ако $n \in M$, тогаш

$$2n = 2(2^{\alpha} + 2^{\beta} + 2^{\gamma}) = 2^{\alpha+1} + 2^{\beta+1} + 2^{\gamma+1},$$

па затоа $2n \in M$. Ако $2n \in M$, тогаш

$$2n = 2^{\alpha+1} + 2^{\beta+1} + 2^{\gamma+1}$$

и притоа $\alpha > \beta > \gamma \geq 0$, од што следува дека

$$n = 2^{\alpha} + 2^{\beta} + 2^{\gamma},$$

каде α, β, γ се различни ненегативни цели броеви. Според тоа,

$$n \in M \text{ ако и само ако } 2n \in M. \tag{1}$$

Нека $B_k = \{1, 2, ..., k\} \cap M$ и $A_k = \{k+1, k+2, ..., 2k\} \cap M$. Тогаш, $f(k) = |A_k|$. Ако ставиме $g(k) = |B_k|$, тогаш $f(k) = g(2k) - g(k)$, бидејќи $A_k = B_{2k} \setminus B_k$.

Ако $k = 2^t$, тогаш $B_k = \{n \mid n = 2^{\alpha} + 2^{\beta} + 2^{\gamma}, t > \alpha > \beta > \gamma \geq 0\}$, па затоа $g(k)$ е еднаков на бројот на сите тројки (α, β, γ) за кои важи $t > \alpha > \beta > \gamma \geq 0$, а такви тројки вкупно се $\binom{t}{3} = \frac{t(t-1)(t-2)}{6}$. Според тоа,

$$f(2^t) = g(2 \cdot 2^t) - g(2^t) = \binom{t+1}{3} - \binom{t}{3} = \binom{t}{2} = \frac{t(t-1)}{2}.$$

Да ги разгледаме множествата A_k и A_{k+1}, т.е. множествата

$$\{k+1, k+2, ..., 2k\} \cap M \text{ и } \{k+2, ..., 2k, 2k+1, 2k+2\} \cap M.$$

Бидејќи тие се разликуваат само во тоа дали $k+1, 2k+1, 2k+2 \in M$, од $2k+2 = 2(k+1)$ и од (1) следува дека дека:

$$\text{ако } 2k+1 \in M \text{, тогаш } A_{k+1} = A_k \cup \{2k+1\} \text{, и} \tag{2}$$

$$\text{ако } 2k+1 \notin M \text{ , тогаш } A_{k+1} = A_k \text{ ,} \tag{3}$$

па затоа

$$\text{ако } 2k+1 \in M \text{ , тогаш } f(k+1) = f(k)+1 \text{, и} \tag{4}$$

$$\text{ако } 2k+1 \notin M \text{ , тогаш } f(k+1) = f(k) \text{.} \tag{5}$$

Од $f(2^t) = \binom{t}{2}$ следува дека за секој m постои t, таков што $f(2^t) > m$. Сега од $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ и $f(4) = 1$ следува дека за секој m постои k, таков што $f(k) = m$, со што е докажано тврдењето под а).

Понатаму, нека за природниот број m постои точно еден природен број k таков што $f(k) = m$. Од (4) и (5) следува $f(k-1) = m-1$ и $f(k+1) = m+1$. Понатаму, од (2) и (3) следува $2(k-1)+1 \in M$ и $2k+1 \in M$.

Од $2k+1 \in M$ следува $2k = 2^\alpha + 2^\beta$, за $\alpha > \beta \geq 1$. Од $2k-1 \in M$ следува $\beta \neq 1$. Ако $\beta > 2$, тогаш $2k-1 = 2^\alpha + 2^{\beta-1} + 2^{\beta-2} + ... + 2 + 1 \notin M$, па затоа $\alpha > \beta = 2$. Според тоа $2k = 2^\alpha + 2^2$, т.е. $k = 2^{\alpha-1} + 2$, за $\alpha - 1 \geq 2$.

Значи $f(k) = m$ има единствено решение ако и само ако $k = 2^{\alpha-1} + 2$, за $\alpha - 1 \geq 2$ и тогаш

$$\begin{aligned} m = f(k) &= g(2k) - g(k) = g(2^\alpha + 4) - g(2^{\alpha-1} + 2) \\ &= 1 + g(2^\alpha) - g(2^{\alpha-1}) = 1 + \binom{\alpha}{3} - \binom{\alpha-1}{3} = 1 + \binom{\alpha-1}{2} \end{aligned}$$

Последното равенство е исполнето бидејќи

$$B_{2^t+2} = B_{2^t+1} = B_{2^t} \text{ , т.е. } g(2^t+2) = g(2^t)$$

и

$$B_{2^t+4} = B_{2^t+2^2} = B_{2^t+2^1+2^0} = B_{2^t+2} \cup \{2^t+2+1\} \text{ т.е.}$$

$$g(2^t+4) = g(2^t+2) + 1 = g(2^t) + 1 \text{ .}$$

Конечно, решението под b) е $m = f(k) = 1 + \binom{t}{2}, t \geq 2$.

Втор начин. а) Со b_n да го означиме бројот на единиците во бинарниот запис на природниот број n. Бидејќи $b_{2k+2} = b_{k+1}$ и $b_{2k+1} = b_k + 1$, важи

$$f(k+1) = \begin{cases} f(k)+1, & \text{ако } b_k = 2, \\ f(k), & \text{во спротивно.} \end{cases} \tag{1}$$

Исто така, $f(1) = 0$. Бидејќи $b_k = 2$ важи за бесконечно многу вредности k, функцијата f е неограничена, па затоа нејзината слика е целото множество $\mathbb{N}_0$.

b) Бидејќи функцијата f е растечка, k е единствено решение на равенката $f(k) = m$ ако и само ако $f(k-1) < f(k) < f(k+1)$. Според (1) , последното е еквивалентно со $b_{k-1}=b_k=2$, а ова е можно ако и само ако $k=2^t+2$ за некој природен број $t>1$. Тогаш множеството $\{k+1,k+2,...,2k\}$ го содржи бројот $2^{t+1}+3=10...011_2$ и уште $\binom{t}{2}$ бинарни $(t+1)-$цифрени броеви со три единици. Затоа, $m=f(k)=1+\binom{t}{2}, t\geq 2$.

4. Определи ги подредени парови природни броеви (m,n) такви што $\frac{n^3+1}{mn-1}\in\mathbb{N}$.

Решение. *Прв начин.* Нека $\frac{n^3+1}{mn-1}=k$, за $m,n,k\in\mathbb{N}$. Тогаш, $n^3+1=mnk-k$, т.е. $n(mk-n^2)=k+1$. Значи, $k+1=np$, т.е. $k=np-1$, за $p\in\mathbb{N}$. Според тоа, $n^3+1=mn^2p-mn-np+1$ од што следува $n(n^2-mnp+m+p)=0$ и како $n\in\mathbb{N}$ добиваме $n^2-mnp+m+p=0$. Последната равенка разгледувана како квадратна равенка по n мора да има решение во $\mathbb{N}$, па затоа

$$(pm)^2-4(m+p)=a^2,$$

за некој $a\in\mathbb{N}$ и како $(pm)^2-4(m+p)<(pm)^2$ добиваме $a<pm$. Од

$$(pm)^2-4(m+p)-(pm-1)^2=-4(m+p)+2pm-1\neq 0$$

следува $a\neq pm-1$. Понатаму, од

$$a^2=(pm-2)^2+4pm-4-4(m+p)=(pm-2)^2+4(p-1)(m-1)-8$$

и $a\leq pm-2$ следува дека $(p-1)(m-1)\leq 2$.

Ако $p=1$, тогаш од $a^2=m^2-4m-4=(m-2)^2-8$ следува дека

$$8=(m-2)^2-a^2=(m-2-a)(m-2+a).$$

Ако $m-2-a=2$, $m-2+a=4$ или $m-2-a=4$, $m-2+a=2$, тогаш $2m-4=6$, т.е. $m=5$. Ако $m-2-a=8, m-2+a=1$ или $m-2-a=1,$ $m-2+a=8$, тогаш $2m-4=9$, што не е можно. Слично, ако $m=1$, тогаш $p=5$.

Ако $p\geq 2$ и $m\geq 2$, тогаш $(p-1)(m-1)\leq 2$ е можно само ако $m=p=2$, $p=2, m=3$ или $p=3, m=2$.

За $p=1, m=5$, од $n^2-5n+6=0$ следува $n=2$ или $n=3$.

За $p=5, m=1$, од $n^2-5n+6=0$ следува $n=2$ или $n=3$.

За $p=m=2$, од $n^2-4n+4=0$ следува $n=2$.

За $p=3, m=2$, од $n^2-6n+5=0$ следува $n=1$ или $n=5$.

За $p=2, m=3$, од $n^2-6n+5=0$ следува $n=1$ или $n=5$.

Според тоа, бараните подредени парови се

$$(2,5);\ (3,5);\ (2,1);\ (3,1);\ (2,2);\ (1,3);\ (1,2);\ (5,3);\ (5,2).$$

Втор начин. Бидејќи $mn-1$ и m^3 се заемно прости, добиваме дека $mn-1$ е делител на n^3+1 ако и само ако $mn-1$ е делител на

$$m^3(n^3+1)=m^3n^3-1+m^3+1=(mn-1)(m^2n^2+mn+1)+m^3+1$$

ако и само ако $mn-1$ е делител на m^3+1. Според тоа, подредениот пар (n,m) е решение на задачата ако и само ако подредениот пар (m,n) е решение на задачата.

i) Ако $m=n$, тогаш $\frac{n^3+1}{n^2-1}=\frac{n^2-n+1}{n-1}=n+\frac{1}{n-1}$ е природен број ако и само ако $n=2$.

ii) Нека $m>n$. Ако $n=1$, тогаш $\frac{2}{m-1}$ е природен број ако и само ако $m=2$ или $m=3$.

Понатаму, нека $n\geq 2$. Тогаш, како и во решението според првиот начин имаме $\frac{n^3+1}{mn-1}=pn-1$, од што заедно со $m>n$ добиваме

$$pn-1=\frac{n^3+1}{mn-1}<\frac{n^3+1}{n^2-1}=n+\frac{1}{n-1},$$

па затоа $n(p-1)<1+\frac{1}{n-1}\leq 2$. Но, $n\geq 2$ па затоа од последното неравенство следува дека $p=1$. Сега од

$$n^3+1=(n-1)(mn-1)=n^2m-n-mn+1 \text{ и } n\in\mathbb{N}$$

следува $n^2-mn+m+1=0$, т.е.

$$m=\frac{n^2+1}{n-1}=n+1+\frac{2}{n-1}.$$

Но, $m\in\mathbb{N}$ па затоа од последното равенство следува дека $n=2$ или $n=3$, при што и во двата случаи $m=5$.

Конечно, $(2,5);\ (3,5);\ (2,1);\ (3,1);\ (2,2);\ (1,3);\ (1,2);\ (5,3);\ (5,2)$.

5. Нека S е множество од сите реални броеви поголеми од -1. Определи ги сите функции $f:S\to S$ кои ги задоволуваат условите:

a) $f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$, за секои $x,y\in S$;

b) Функцијата $\frac{f(x)}{x}$ е строго растечка во секој од интервалите $-1<x<0$ и $x>0$.

Решение. Од условот *b*) следува дека равенката $f(x)=x$ има најмногу три решенија и тоа: едно за $x\in(-1,0)$, едно за $x=0$ и едно за $x\in(0,+\infty)$.

Нека $f(a)=a$, за некој $a>0$. Ако ставиме $x=y=a$, тогаш од *a*) добиваме

$$f(2a+a^2)=f(a+f(a)+af(a))=a+f(a)+af(a)=2a+a^2.$$

Тогаш, бидејќи $2a+a^2>0$ следува дека и $2a+a^2$ е решение на $f(x)=x$, при $x>0$. Според тоа, $2a+a^2=a$ т.е. $a(a+1)=0$, што не е можно за $a>0$. Значи, за секој $a>0$ важи $f(a)\neq a$.

Слично, за секој $a\in(-1,0)$ важи $f(a)\neq a$.

Бидејќи, за $x=y\in S$ од $a)$ добиваме $f(x+f(x)+xf(x))=x+f(x)+xf(x)$, единствена можност е $x+f(x)+xf(x)=0$. Според тоа, $f(x)=-\frac{x}{1+x}$ за секој $x\in S$. Лесно се проверува дека $\frac{f(x)}{x}=-\frac{1}{1+x}$ строго монотоно расте на интервалите $(-1,0)$ и $(0,+\infty)$. Понатаму,

$$y+f(x)+yf(x)=y-\frac{x}{1+x}-\frac{yx}{1+x}=\frac{y-x}{1+x}=-\frac{x-y}{1+x}=-\frac{\frac{x-y}{1+y}}{1+\frac{x-y}{1+y}}.$$

$$=f(\tfrac{x-y}{1+y})=f(x+f(y)+xf(y)).$$

6. Докажи дека постои подмножество A од множеството природни броеви со следното својство: за секое бесконечно множество S од прости броеви постојат два природни броја $m\in A$ и $n\notin A$ такви што секој од нив е производ на k различни елементи од множеството S за некој $k\geq 2$.

Решение. Нека $P=\{p_1,p_2,p_3,...\}$ е множеството од сите прости броеви. Дефинираме $A=\bigcup\limits_{k=2}^{\infty}A_k$, каде што $A_k=\{q_1...q_k \mid q_i\in P,\ p_{k-1}\neq q_1,q_2,...,q_k\}$.

Нека S е бесконечно множество прости броеви и $p_k\in S$. Тогаш, множеството $S\setminus\{p_k\}$ е бесконечно, па постојат $q_1,q_2,...,q_{k+1}\in S\setminus\{p_k\}$ и притоа ако

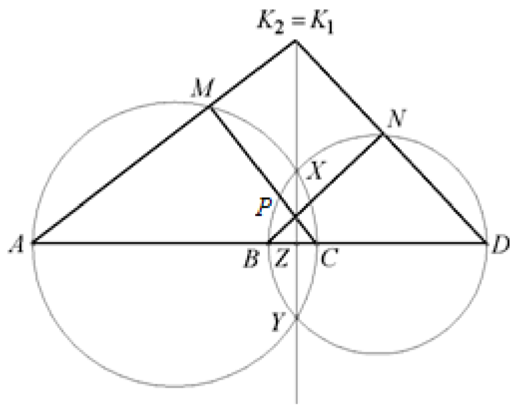
$$m=q_1q_2...q_kq_{k+1} \text{ и } n=q_1q_2...q_kp_k$$

добиваме $m\in A$ и $n\notin A$. Ако $p_k\notin S$, тогаш егзистенцијата на броевите m и n е очигледна.

XXXVI олимпијада

1. Нека A, B, C и D се четири различни точки од дадена права, во тој редослед. Кружниците со дијаметри AC и BD се сечат во точките X и Y. Правата XY ја сече BC во точка Z и P е точка на правата XY различна од Z. Правата CP ја сече кружницата со дијаметар AC во точките C и M, а правата BP ја сече кружницата со дијаметар BD во точките B и N. Докажи дека правите AM, DN и XY се сечат во една точка.

Решение. *Прв начин.* Нека $K_1 = DN \cap XY, \quad K_2 = AM \cap XY$. Триаголникот BDN е правоаголен и $\measuredangle DNB = 90^\circ$. Од сличноста на триаголниците PBZ и DK_1Z следува



$\frac{\overline{K_1Z}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{DZ}}{\overline{PZ}}$, т.е. $\overline{K_1Z} = \frac{\overline{BZ}\cdot\overline{DZ}}{\overline{PZ}}$

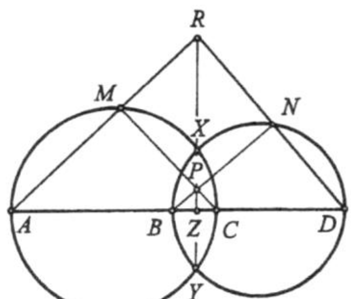
и аналогно од сличноста на триаголниците PCZ и AK_2Z следува

$\frac{\overline{K_2Z}}{\overline{CZ}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{PZ}}$, т.е. $\overline{K_2Z} = \frac{\overline{AZ}\cdot\overline{CZ}}{\overline{PZ}}$.

Бидејќи триаголниците ACX и BDX се правоаголни, со примена Евклидовите теореми добиваме

$$\overline{AZ}\cdot\overline{CZ} = \overline{ZX}^2 = \overline{BZ}\cdot\overline{DZ},$$

па затоа $\overline{K_1Z} = \overline{K_2Z}$, т.е. $K = K_1 = K_2$ и $K = AM \cap DN \cap XY$.

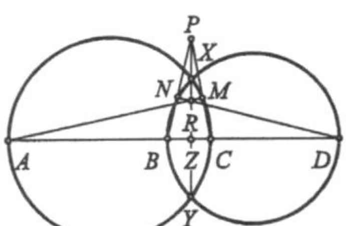


Втор начин. Тврдењето е тривијално ако P се совпадне со X или Y. Затоа да претпоставиме дека $P \neq X$ и $P \neq Y$. Од

$$\overline{PB}\cdot\overline{PN} = \overline{PX}\cdot\overline{PY} = \overline{PC}\cdot\overline{PM}$$

следува дека четириаголникот $BCNM$ е тетивен. Ако P припаѓа на отсечката XY (цртеж десно), тогаш и

$$\measuredangle MAD + \measuredangle MNB + \measuredangle BND = \measuredangle MAD + \measuredangle MCA + \measuredangle AMC = 180^\circ.$$



Ако P не припаѓа на отсечката XY (цртеж лево), тогаш

$$\measuredangle MAD = 180^\circ - \measuredangle AMC - \measuredangle MCA$$
$$= 180^\circ - \measuredangle BND - \measuredangle PNM$$
$$= \measuredangle MND.$$

И во двата случаја четириаголникот $ADNM$ е тетивен. Нека AM и DN се сечат во точката R. Нека правата RX ја сече првата кружница во точката Y_1, а втората во точката Y_2. Тогаш

$$\overline{RX}\cdot\overline{RY_1}=\overline{RA}\cdot\overline{RM}=\overline{RD}\cdot\overline{RN}=\overline{RX}\cdot\overline{RY_2}\ .$$

Оттука следува $Y_1\equiv Y_2\equiv Y$ и всушност R припаѓа на правата XY.

2. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ се такви што такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}\ .$$

Решение. *Прв начин*. Нека $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$ и $z=\frac{1}{c}$. Тогаш, $xyz=1$ и

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ .$$

Десната страна на неравенството да ја означиме со S. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\begin{aligned}[(y+z)+(z+x)+(x+y)]S&=x^2+y^2+z^2+(x^2\tfrac{z+x}{y+z}+y^2\tfrac{y+z}{z+x})+\\&\quad+(y^2\tfrac{x+y}{z+x}+z^2\tfrac{z+x}{x+y})+(z^2\tfrac{y+z}{x+y}+x^2\tfrac{x+y}{y+z})\\&\geq x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\\&=(x+y+z)^2\end{aligned}$$

односно $S\geq\frac{x+y+z}{2}$. Повторно од неравенствот меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме $S\geq\frac{x+y+z}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{x+y+z}{3}\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=1$, односно ако и само ако $a=b=c=1$.

Втор начин. Поопштото неравенство

$$\frac{a^k}{b+c}+\frac{b^k}{a+c}+\frac{c^k}{a+b}\geq\frac{3}{2}\text{, за } a,b,c>,\ abc=1$$

едноставно се докажува со помош на неравенството на Мјурхед за $k\geq1$ или $k\leq-2$. Навистина, со смената $a=x^3, b=y^3, c=z^3$, хомогенизација и сведување на заеднички именител тоа се сведува на неравенството

$$T_{3k+6,0,0}+2T_{3k+3,3,0}+T_{3k,3,3}\geq 3T_{k+5,k+2,k-1}+T_{k+2,k+2,k+2}\,.$$

3. Определи ги сите природни броеви $n>3$ за кои постојат n точки $A_1,A_2,\ldots,$ A_n во рамнината и реални броеви $r_1,r_2,\ldots,r_n$, такви што се исполнети условите:

а) било кои три точки од точките $A_1,A_2,\ldots,A_n$ се неколинеарни,

b) за секои i, j, k $(1 \le i < j < k \le n)$ плоштината на триаголникот $A_i A_j A_k$ е еднаква на $r_i + r_j + r_k$.

Решение. Ќе докажеме дека $n = 4$ е единствениот природен број што ги задоволува условите на задачата.

Ако $n = 4$, нека $A_1 A_2 A_3 A_4$ е единечен квадрат и $r_i = \frac{1}{6}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогаш, условите на задачата се задоволени.

Ќе докажеме дека бројот 5 не ги задоволува условите на задачата, од каде ќе следува дека не постои природен број $n \ge 5$, кој ги задоволува условите на задачата.

Нека претпоставиме дека бројот 5 ги задоволува условите на задачата. Плоштината на триаголникот $A_i A_j A_k$ ја означуваме со $[ijk]$. Имаме,

$$[ijk] = r_i + r_j + r_k \text{, за } 1 \le i < j < k \le 5 .$$

Ако на пример $r_4 = r_5$, тогаш $[124] = [125]$ и $[234] = [235]$, од што следува дека $A_5 A_4$ е паралелна со $A_1 A_2$ и $A_2 A_3$, што не е можно бидејќи точките A_1, A_2, A_3 не се колинеарни. Да забележиме дека ако четириаголникот $A_i A_j A_k A_l$ е конвексен, тогаш важи $[ijk] + [kli] = [jkl] + [lij]$, од што следува $r_i + r_k = r_j + r_l$.

Да ја разгледаме конвексната обвивка на точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, т.е. конвексниот многуаголник чии темиња припаѓаат на множеството $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$. Можни се следните три случаи.

а) Конвексната обвивка е петаголник $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$. Бидејќи $A_1 A_2 A_3 A_4$ и $A_1 A_2 A_3 A_5$ се конвексни четориаголници, од претходните забелешки добиваме дека $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$ и $r_1 + r_3 = r_2 + r_5$. Од овде е $r_4 = r_5$, што е противречност.

б) Конвексната обвивка е четириаголник $A_1 A_2 A_3$ A_4. Не се губи од општоста ако се претпостави дека A_5 се наоѓа во триаголникот $A_3 A_4 A_1$. Тогаш $A_1 A_2 A_3 A_5$ е конвексен четириаголник, и добиваме иста противречност како и во првиот случај.

в) Конвексната обвивка е триаголникот $A_1 A_2 A_3$. Бидејќи

$$[123] + [234] + [314] = [125] + [235] + [315]$$

добиваме $r_4 = r_5$ што е противречност.

4. Определи ја најголемата можна вредност на бројот x_0 за која постои низа позитивни реални броеви $x_0, x_1, ..., x_{1995}$ кои ги задоволуваат условите:

a) $x_0 = x_{1995}$.

b) $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$, за секој $i \in \{1, 2, ..., 1995\}$.

Решение. Дадениот услов е еквивалентен со

$$2x_i^2 - (x_{i-1} + \tfrac{2}{x_{i-1}})x_i + 1 = 0,$$

чии решенија по x_i се $x_i = \frac{1}{2}x_{i-1}$ и $x_i = \frac{1}{x_{i-1}}$. Со математичка индукција ќе докажеме дека $x_i = 2^{k_i} x_0^{\varepsilon_i}$, каде k_i е цел број таков што $|k_i| \le i$ и $\varepsilon_i = (-1)^{k_i+i}$. Тврдењето е точно за $i = 0$, бидејќи земаме $k_0 = 0$ и $\varepsilon_0 = 1$. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за $i-1$. Можни се два случаја. Ако $x_i = \frac{1}{2}x_{i-1}$, тогаш имаме $k_i = k_{i-1} - 1$ и $\varepsilon_i = \varepsilon_{i-1}$. Ако $x_i = \frac{1}{x_{i-1}}$, тогаш имаме $k_i = -k_{i-1}$ и $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i-1}$. И во двата случаја непосредно се добива дека $|k_i| \le i$ и $\varepsilon_i = (-1)^{k_i+1}$. Затоа $x_{1995} = 2^k x_0^{\varepsilon}$ каде $k = k_{1995}$ и $\varepsilon = \varepsilon_{1995}$ при што $0 \le |k| \le 1995$ и $\varepsilon = (-1)^{1995+k}$. Значи $x_0 = x_{1995} = 2^k x_0^{\varepsilon}$. Ако k е непарен број, тогаш $\varepsilon = 1$, па имаме $2^k = 1$, што е противречност бидејќи $k \ne 0$. Затоа k мора да е парен број, па $\varepsilon = -1$ и $x_0^2 = 2^k$. Бидејќи k е парен и $|k| \le 1995$ добиваме дека $k \le 1994$. Од овде $x_0 \le 2^{997}$. Равенството се достигнува за $x_0 = 2^{997}$, $x_i = \frac{1}{2}x_{i-1}$ за $i = 1, 2, 3, ..., 1994$ и $x_{1995} = \frac{1}{x_{1994}}$. Тогаш, $x_{1994} = 2^{-997}$ и $x_{1995} = 2^{997} = x_0$.

5. Нека $ABCDEF$ е конвексен шестаголник, таков што

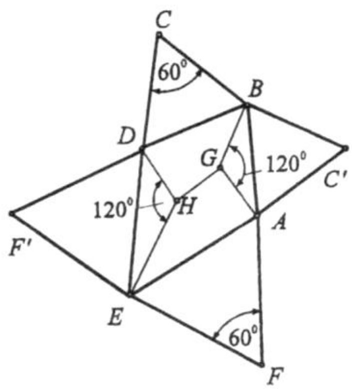
$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}, \quad \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA} \quad \text{и} \quad \measuredangle BCD = \measuredangle EFA = 60^\circ,$$

и G и H се точки од внатрешноста на шестаголникот такви што

$$\measuredangle AGB = \measuredangle DHE = 120^\circ.$$

Докажи дека

$$\overline{AG} + \overline{GB} + \overline{GH} + \overline{DH} + \overline{HE} \ge \overline{CF}.$$



Решение. Забележуваме дека триаголниците BCD и EFA се рамнострани. Од

$$\overline{AB} = \overline{BD} \text{ и } \overline{AE} = \overline{ED}$$

следува дека правата BE е оска на симетрија за четириаголникот $ABDE$. Нека C' и F' се соодветно симетричните точки на C и F во однос на правата BE. Тогаш,

$$\triangle BCD \cong \triangle BC'A \text{ и } \triangle ADF' \cong \triangle EAF.$$

Четириаголникот $AGBC'$ е тетивен бидејќи

$$\measuredangle AGB + \measuredangle AC'B = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ .$$

Од теоремата на Птоломеј добиваме дека $\overline{AG} + \overline{GB} = \overline{GC'}$. Аналогно се добива дека $\overline{HE} + \overline{HD} = \overline{HF'}$. Од овде добиваме

$$\overline{CF} = \overline{C'F'} \le \overline{C'G} + \overline{GH} + \overline{HF'} = \overline{AG} + \overline{GB} + \overline{GH} + \overline{DH} + \overline{HE}.$$

Притоа равенството важи ако и само ако точките G и H лежат на правата $C'F'$.

6. Нека p е непарен прост број. Определи го бројот на сите подмножества A од множеството $\{1,2,3,...,2p\}$ такви што:

a) A има точно p елементи, и

b) збирот на сите елементи од множеството A е делив со p.

Решение. *Прв начин.* За произволно p-елементно подмножество A од $\{1,2,3,...,2p\}$, со $s(A)$ да го означиме збирот на елементите во A. Има вкупно $\binom{2p}{p}$ подмножества од $\{1,2,3,...,2p\}$ со по p елементи. За множествата $B = \{1,2,...,p\}$ и $C = \{p+1, p+2,...,2p\}$ важи $s(B) \equiv s(C) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. Останатите $\binom{2p}{p} - 2$ подмножества со p елементи ќе ги поделиме во групи од по p броеви на следниот начин:

Две подмножества A и A' се во иста група ако и само ако $A \cap C = A' \cap C$ и ако $A' \cap B$ е циклична пермутација од $A \cap B$ во однос на B. Тоа значи, ако $A \cap B$ има n елементи, $0 < n < p$, тогаш за некој m, таков што $0 < m < p$ важи

$$A' \cap B = \{x+m \mid x \in A \cap B, x+m \le p\} \cup \{x+m-p \mid x \in A \cap B, x \le p < x+m\} .$$

Сега $s(A') - s(A) \equiv mn\ (\mathrm{mod}\ p)$ и mn мора да биде делив со p. Но, mn не е деливо со p, бидејќи p е прост број. Затоа точно едно подмножество A во секоја група го задоволува условот $s(A) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$. Затоа бројот на сите такви подмножества е еднаков на $\frac{1}{p}(\binom{2p}{p} - 2) + 2$.

Втор начин. Нека $\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{p} + i \sin\frac{2k\pi}{p}$, за некој $k, 1k \le p-1$. Ако го искористиме равенството

$$\prod_{i=1}^{2p} (x - \omega_k^i) = (x^p - 1)^2 = x^{2p} - 2x^p + 1 ,$$

тогаш со споредување на коефициентите пре x^p добиваме

$$\sum_{\{i_1,...,i_p\} \subset A} \omega_k^{i_1 + i_2 + ... + i_p} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \omega_k^i = 2 ,$$

каде a_i е бројот на подмножествата $\{i_1, i_2, ..., i_p\} \subset A$ за кои

$$i_1 + i_2 + ... + i_p \equiv i (\bmod p) .$$

Го разгледуваме полиномот

$$q(x) = -2 + \sum_{i=0}^{p-1} a_i x^i .$$

Бидејќи $q(\omega_k) = 0$ за $k = 1, 2, ..., p-1$, добиваме дека $1 + x + ... + x^{p-1} \mid q(x)$, па затоа $q(x) = c(1 + x + ... + x^{p-1})$ за некоја константа c. Според тоа,

$$a_0 - 2 = a_1 = ... = a_{p-1} ,$$

па како

$$a_0 + a_1 + ... + a_{p-1} = \binom{2p}{p} ,$$

добиваме $a_0 = \frac{1}{p}(\binom{2p}{p} - 2) + 2$.

XXXVII олимпијада

1. Дадена е правоаголна табла $ABCD$ со димензии $\overline{AB}=20$ и $\overline{BC}=12$, која е поделена на 20×12 единечни квадрати.
Нека $r\in\mathbb{N}$. Монета може да биде придвижена од еден квадрат на друг ако и само ако растојанието меѓу центрите на двата квадрата е $\sqrt{r}$. Целта е да се најде низа од движења на монетата од квадратот чие теме е A до квадратот чие теме е B.
a) Докажи дека целта не може да се постигне ако r е делив со 2 или 3.
b) Докажи дека целта може да се постигне ако $r=73$.
c) Дали целта може да се постигне ако $r=97$?

Решение. Работиме на решетка $\mathbb{A}=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2\mid 0\le x\le 19, 0\le y\le 11\}$. Ако монетата ја придвижиме од точката $P(x_1,y_1)$ до точката $Q(x_2,y_2)$, таа ќе помине растојание $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, односно $d=\sqrt{x^2+y^2}$, каде $x=x_1-x_2$, $y=y_1-y_2\in\mathbb{Z}$. Значи, $x^2+y^2=r$.

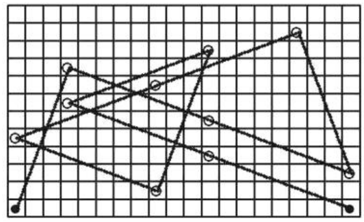
a) Ако $r=2k$, тогаш $x^2+y^2=2k$, што е можно ако и само ако x и y се со иста парност. Со A_1,B_1,C_1 и D_1 да ги означиме центрите на квадратите со темиња A,B,C,D соодветно. Нека поставиме правоаголен координатен систем таков што $A_1(0,0)$, $B_1(19,0)$, $D_1(0,12)$ и $C_1(19,12)$. Тогаш монетата може да се помести од полето (p_1,q_1) на полето (p_2,q_2) ако и само ако

$$p_1+q_1=p_2+q_2(\bmod 2),\text{ т.е. } p_1-p_2\equiv q_1-q_2(\bmod 2).$$

Но, бидејќи $A_1(0,0)$ и $B_1(19,0)$ од $0+0\not\equiv 19+0(\bmod 2)$ заклучуваме дека целта не може да се постигне.

Нека $r=3k$, т.е. $x^2+y^2=3k$. Ако $x=3p$, тогаш мора да е $y=3q$. Ако $x=3p\pm1$, тогаш $x^2\equiv1(\bmod 3)$, па мора да е $y^2\equiv-1(\bmod 3)$, што не е можно. Значи, ако монетата се поместува од полето (p_1,q_1) на полето (p_2,q_2) тогаш $p_1-p_2\equiv q_1-q_2(\bmod 3)$. Но, како $19-0\not\equiv 0-0(\bmod 3)$ заклучуваме дека целта не може да се постигне.

b) Може. Бидејќи $r=73=8^2+3^2$ секој чекор е од видот $(x_1,y_1)\to(x_1\pm8,y_1\pm3)$ или од видот $(x_1,y_1)\to(x_1\pm3,y_1\pm8)$. Едно решение е дадено на цртежот десно.



c) Не е можно. Ќе докажеме дека бројот на поместувања од видот $(x,y)\to(x\pm4,y+9)$ е еднаков на бројот на поместувања од видот $(x,y)\to(x\pm4,y-9)$.

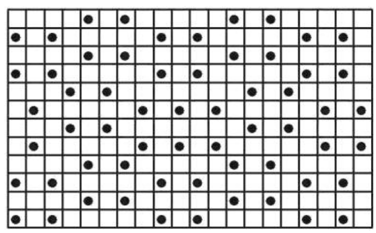
Ако ова не е точно, тогаш без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека имаме повеќе поместувања од видот $(x,y)\to(x\pm 4, y+9)$, „качувања“ за 9.

За да точката остане на $x-$оската, овој вишок на качувања може да се компензира со „симнувања“ за 4 и притоа $y-$положбата на паричката се менува за 1 по модул 4. Затоа, за да остане на $x-$оската вишокот на движења од облик $(x\pm 4, y+9)$, во однос на движењата $(x\pm 4, y-9)$ мора да е делив со 4, и при секое од нив почетната $y-$положба на монетата е различна по модул 4. Но, бидејќи не постои положба на таблата (x,y), каде $y\equiv 3(\bmod 4)$ и качување за 9 е можно, добиваме дека тврдењето е точно, т.е. бројот на движењата од облик $(x,y)\to(x\pm 4, y+9)$ е еднаков на бројот на движењата од облик $(x,y)\to(x\pm 4, y-9)$. Оттука следува и дека:

колку што има движења од облик $(x,y)\to(x\pm 9, y+4)$, *толку има движења од облик* $(x,y)\to(x\pm 9, y-4)$.

Значи, секогаш имаме парен број на поместувања од двата вида, што значи по $x-$оската секогаш се движиме за парно растојание, па како растојанието од $A_1(0,0)$ до $B_1(19,0)$ е 19, заклучуваме дека целта не може да се постигне.

***Забелешка* 1.** Во делот на задачата под *c)* всушност е докажано дека при димензии на таблата $12\times 2n$ целта не може да се постигне, а истото го докажавме и во делот од задачата *a) i)*.



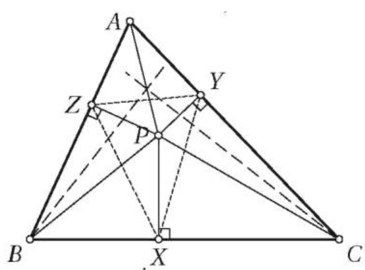
***Забелешка* 2.** На десниот цртеж се прикажани сите полиња кои може да се достигнат во делот од задачата под *c)*.

2. Нека P е точка во внатрешноста на триаголникот ABC таква што
$$\measuredangle BPA-\measuredangle BCA=\measuredangle APC-\measuredangle ABC.$$
Точките D и E се центри на кружниците впишани во триаголниците APB и APC, соодветно. Докажи, дека правите AP, BD и CE се сечат во иста точка.

Решение. *Прв начин.* Нека подножјата на нормалите спуштени од точката P до BC, CA и AB се X, Y и Z, соодветно (цртеж десно). Од тетивните четириаголници $AZPY$, $BXPZ$ и $CYPX$ заклучуваме дека

i) $\overline{YZ}=\overline{PA}\sin A$, и

ii) $\measuredangle YXP=\measuredangle BPC-\measuredangle A$.



Нека $BD \cap AP = \{Q\}$ и $CE \cap AP = \{R\}$. Бидејќи BD и CE се симетрали на аглите $\measuredangle ABP$ и $\measuredangle ACP$ соодветно, добиваме $\frac{\overline{AQ}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}$ и $\frac{\overline{AR}}{\overline{RC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}$. Затоа за да докажеме дека Q и R се совпаѓаат, доволно е да докажеме дека $\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}$.

Сега од *i)* добиваме

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CP} = \overline{AC} \cdot \overline{BP} \Leftrightarrow \overline{CP} \sin C = \overline{BP} \sin B \Leftrightarrow \overline{XY} = \overline{XZ}.$$

Бидејќи $\measuredangle APB - \measuredangle C = \measuredangle APC - \measuredangle B$ од *ii*) добиваме дека $\measuredangle XZY = \measuredangle XYZ$, па затоа $\overline{XY} = \overline{XZ}$, а тоа повлекува $\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}$.

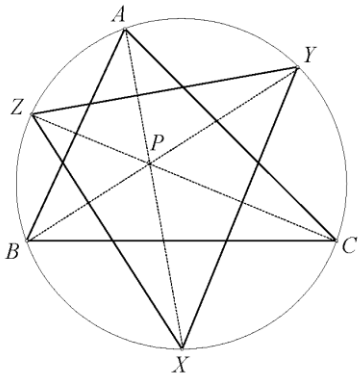
Втор начин. Доволно е да се докаже дека симетралите на $\measuredangle ABP$ и $\measuredangle ACP$ се сечат на отсечката AP. Нека k е кружницата опишана околу $\triangle ABC$ и правите AP, BP и CP ја сечат k во точките X, Y и Z, соодветно (цртеж десно). Условот

$$\measuredangle APB - \measuredangle ACB = \measuredangle APC - \measuredangle ABC$$

е еквивалентен со условот

$$\measuredangle PAC + \measuredangle PBC = \measuredangle PAB + \measuredangle PCB$$

од каде што со разгледување на периферните агли се добива



$$\measuredangle XZY = \measuredangle XYZ \text{ и } \overline{XZ} = \overline{XY}.$$

Исто така $\triangle BPC \sim \triangle ZPY$, (еднакви агли), па затоа $\frac{\overline{BC}}{\overline{ZY}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{ZP}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PY}}$. Нека $\overline{BP} \cdot \overline{PY} = t$. Тогаш, $\overline{PC} \cdot \overline{ZP} = t = \overline{AP} \cdot \overline{PX}$. Од релацијата

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{ZY}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{ZP}} = \frac{\overline{BP}}{\frac{t}{\overline{PC}}} = \frac{\overline{BP} \cdot \overline{PC}}{k}$$

добиваме $\overline{ZY} = \frac{k\overline{BC}}{\overline{BP} \cdot \overline{CP}}$. Аналогно добиваме $\overline{XY} = \frac{k\overline{AB}}{\overline{BP} \cdot \overline{AP}}$ и $\overline{XZ} = \frac{k\overline{CA}}{\overline{AP} \cdot \overline{CP}}$. Од $\overline{XY} = \overline{YZ}$ следува дека $\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}$. Симетралите на аглите $\measuredangle ABP$ и $\measuredangle ACP$ ја делат отсечката AP во еднаков однос, па затоа тие се сечат на AP.

Трет начин. Да разгледаме инверзија $\Psi_{A,r}$. За произволна точка X нека $X' = \Psi_{A,r}(X)$. Тогаш условот на задачата го добива видот

$$\measuredangle B'C'P' = \measuredangle C'B'P', \text{ т.е. } \overline{B'C'} = \overline{C'P'}.$$

Понатаму, од $\overline{B'P'} = \frac{r^2}{\overline{AP} \cdot \overline{AB}} \overline{BP}$ и $\overline{C'P'} = \frac{r^2}{\overline{AP} \cdot \overline{AC}} \overline{CP}$, со замена во равенството $\overline{B'C'} = \overline{C'P'}$ добиваме $\frac{r^2}{\overline{AP} \cdot \overline{AB}} \overline{BP} = \frac{r^2}{\overline{AP} \cdot \overline{AC}} \overline{CP}$, односно $\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}$.

3. Најди ги сите функции $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ такви што

$$f(m+f(n))=f(f(m))+f(n),\text{ за секои } m,n\in\mathbb{N}_0. \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин.* За $m=n=0$ добиваме $f(0)=0$. Ако ставиме $m=0$, n произволен добиваме $f(f(n))=f(n)$, за секој $n\in\mathbb{N}_0$.

Нултата функција е тривијално решение. Затоа да претпоставиме дека $f\not\equiv 0$. Затоа дадената равенка е еквивалентна со $f(m+f(n))=f(m)+f(n)$, $f(0)=0$. Нека сега дефинираме функција g со $g(n)=f(n)-n$ за $n\in\mathbb{N}_0$. Функцијата g ги има својствата

1^o $g(0)=0$

2^o $g(f(n))=0$, за секое $n\in\mathbb{N}_0$

3^o g е периодична функција, т.е. $g(m+f(n))=g(m)$ за секои $m,n\in\mathbb{N}_0$

Својствата 1^o и 2^o се очигледни и

$$\begin{aligned}g(m+f(n))&=f(m+f(n))-m-f(n)\\&=f(m)+f(n)-m-f(n)\\&=f(m)-m=g(m)\end{aligned}$$

од каде следува 3^o.

Можни се два случаја, и тоа:

а) g е идентички еднаква на нула, и тогаш $f(n)=n$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

б) g не е идентички еднаква на нула. Нека k е најмалиот од броевите $f(1),f(2),\dots$. Ќе докажеме дека k е најмалиот број таков што $g(k)=0$ за $k>0$. Навистина, ако $0<u<k$, добиваме $u=f(u)<k$ што противречи на изборот на k. Освен тоа k е број од облик $f(t)$ за некој t, па k е најмал период на функцијата g. Нека $0<i<k$. Бидејќи $g(f(i))=0$ следува дека $f(i)=kn_i$ за некој природен број i. Бидејќи k е период, за g добиваме

$$g(rk+s)=g(s),\text{ за } 0\le s<k,$$

што значи

$$f(rk+s)-kr-s=f(s)-s,\text{ т.е. } f(rk+s)=kr+f(s)=k(r+n_s).$$

Ако $n_1,n_2,\dots,n_{k-1}$ се произволни природни броеви или се еднакви на нула, ќе покажеме дека оваа функција f го задоволува условот на задачата. Навистина, нека $m=kp+s$ и $n=kq+t$ каде $0\le s,t<k$. Тогаш

$$\begin{aligned}f(m+f(n))&=f(kp+s+k(q+n_t))=f(k(p+q+n_t)+s)\\&=k(p+q+n_t+n_s)=k(p+n_s)+k(q+n_t)\\&=f(m)+f(n)\end{aligned}$$

Втор начин. За $m=n=0$ добиваме $f(0)=0$. Ако ставиме $m=0, n$ произволен добиваме $f(f(n))=f(n)$, за секој $n\in\mathbb{N}_0$.

Нултата функција е тривијално решение. Затоа да претпоставиме дека $f\not\equiv 0$. Го разгледуваме најмалиот $a\in\mathbb{N}$ за кој $f(a)=a$ (таков a постои бидејќи $f(f(n))=f(n)$ за секој $n\in\mathbb{N}$). Од (1) со индукција лесно се докажува дека $f(ka)=ka$, за секој $k\in\mathbb{N}$. Уште повеќе, бидејќи

$$f(ka+i)=f(i+f(ka))=f(f(i))+f(ka)=ka+f(i)\neq ka+i\text{, за } 0<i<a,$$

заклучуваме дека равенството $f(n)=n$ важи ако и само ако $a\,|\,n$. Покрај тоа $a\,|\,f(n)$ за $n\in\mathbb{N}$. Ако сега земеме $f(i)=an_i$, за $i=0,1,2,...,a-1$ (при што $n_0=0$ и $n_i\in\mathbb{N}$ за $1\le i<a$) добиваме

$$f(n)=(k+n_i)a\text{, каде } n=ka+i \text{ и } 0\le i<a.$$

Освен нултата функција и овие функции се решение на (1), што се докажува како при првиот начин на решавање на задачата.

4. Природните броеви a и b се такви што броевите $15a+16b$ и $16a-15b$ се точни квадрати на природни броеви. Определи ја најмалата можна вредност која што може да ја прими помалиот од овие два квадрати.

Решение. *Прв начин*. Нека $15a+16b=r^2$ и $16a-15b=s^2$, $r,s\in\mathbb{N}$. Од овде наоѓаме

$$a=\tfrac{15r^2+16s^2}{481} \text{ и } b=\tfrac{16r^2-15s^2}{481},$$

т.е.

$$a+b=\tfrac{31r^2+s^2}{481}\in\mathbb{N} \text{ и } a-b=\tfrac{31s^2-r^2}{481}\in\mathbb{Z}$$

па затоа важи:

(i) $481\,|\,31r^2+s^2$, и

(ii) $481\,|\,31s^2-r^2$.

Забележуваме дека (i) и (ii) се еквивалентни. Навистина,

$$31(31s^2-r^2)+(31r^2+s^2)=2\cdot 481s^2\equiv 0(\text{mod}\,481)$$

и од NZD(31,481)=1 следува $481\,|\,31s^2-r^2 \Leftrightarrow 481\,|\,31r^2+s^2$. Потоа (i) е еквивалентно со

(i') $31r^2\equiv -s^2(\text{mod}13)$, и (ii') $31r^2\equiv -s^2(\text{mod}\,37)$

бидејќи $481=13\cdot 37$.

Ќе докажеме дека (i') е можно само ако $r\equiv s\equiv 0(\text{mod}13)$. Навистина, ако еден од броевите r и s е делив со 13 тогаш мора и вториот да е делив со 13. Да претпоставиме дека $13\nmid r$ и $13\nmid s$. Од (i') добиваме

$$5r^2 \equiv -s^2 \pmod{13},\quad 25r^4 \equiv s^4 \pmod{13},\quad -r^4 \equiv s^4 \pmod{13},\quad -r^{12} \equiv s^{12} \pmod{13}$$

што не е можно бидејќи од малата теорема на Ферма следува $r^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ и $s^{12} \equiv 1 \pmod{13}$. Значи, од (i') следува $r \equiv s \equiv 0 \pmod{13}$.

Аналогно се докажува дека од (ii') следува $r \equiv s \equiv 0 \pmod{37}$. Значи, (i) е можно само ако $481 | r$ и $481 | s$, па $r \geq 481$ и $s \geq 481$. Но, за $r = 481$ и $s = 481$ броевите $a = 31 \cdot 481$ и $b = 481$ се природни, па затоа одговорот на задачата е 481^2.

Втор начин. Да означиме $15a + 16b = x^2$ и $16a - 15b = y^2$, каде $x, y \in \mathbb{N}$. Тогаш

$$x^4 + y^4 = (1a + 16b)^2 + (16a - 15b)^2 = (15^2 + 16^2)(a^2 + b^2) = 481(a^2 + b^2).$$

Според тоа, $481 = 13 \cdot 37 | x^4 + y^4$. Од друга страна, познато е следново тврдење:

Лема. Ако $p > 2$ е прост број и $x, y \in \mathbb{Z}$ се такви што $p | x^4 + y^4$ и $p \nmid xy$, тогаш $8 | p - 1$.

Доказ. Нека $y_1 \in \mathbb{Z}$ е таков што $yy_1 \equiv 1 \pmod{p}$. Тогаш $p | (xy_1)^4 + 1 | (xy_1)^8 - 1$, што значи дека редот на бројот xy_1 по модул p е 8. Оттука следува дека $8 | p - 1$. ■

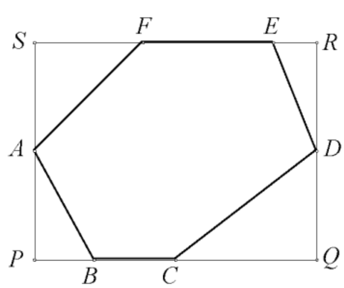
Бидејќи $13 \not\equiv 1 \pmod{8}$ и $37 \not\equiv 1 \pmod{8}$, следува дека x и y се деливи и со 13 и со 37, па затоа $481 | x, y$. Од друга страна $x = y = 481$ се достигнува за $a = 31 \cdot 481$ и $b = 481$, па затоа одговорот на задачата е 481^2.

5. Нека $ABCDEF$ е конвексен шестаголник таков што AB е паралелна со DE, BC е паралелна со FE и CD е паралелна со AF. Нека R_A, R_B и R_C се радиусите на кружниците опишани околу триаголниците ABF, BCD и DEF соодветно и p е периметар на шестаголникот. Докажи дека

$$R_A + R_B + R_C \geq \frac{p}{2}.$$

Решение. *Прв начин*. Нека $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$, $\overline{CD} = z$, $\overline{DE} = t$, $\overline{EF} = u$ и $\overline{FA} = v$. Забележуваме дека

$$\measuredangle A = \measuredangle D,\ \measuredangle B = \measuredangle E \text{ и } \measuredangle C = \measuredangle F.$$



Нека точките P, Q, R и S се такви што P и Q лежат на правата определена со B и C, S и R лежат на правата определена со

F и E и при тоа

$$\measuredangle ASF = \measuredangle APB = \measuredangle AQC = \measuredangle DRE = 90^\circ .$$

Тогаш

$$\overline{AP} = x\sin\measuredangle B,\ \overline{AS} = v\sin\measuredangle C,$$
$$\overline{DQ} = z\sin\measuredangle C,\ \overline{DR} = t\sin\measuredangle B .$$

Од овде добиваме

$$\begin{aligned}2\overline{BF} &\geq \overline{AP} + \overline{AS} + \overline{DQ} + \overline{DR}\\ &= x\sin\measuredangle B + v\sin\measuredangle C + z\sin\measuredangle C + t\sin\measuredangle B\end{aligned}.$$

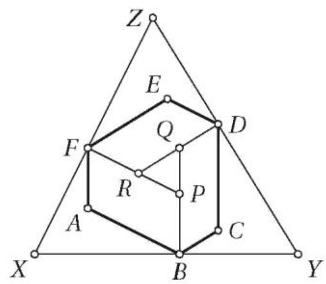
Аналогно се докажуваат и следните две неравенства:

$$2\overline{DB} \geq z\sin\measuredangle A + y\sin\measuredangle B + u\sin\measuredangle B + v\sin\measuredangle A$$
$$2\overline{FD} \geq u\sin\measuredangle C + t\sin\measuredangle A + x\sin\measuredangle A + y\sin\measuredangle C$$

За радиусите R_A, R_C и R_E на опишаните кружници околу триаголниците FAB, BCD и DEF важи $R_A = \frac{\overline{BF}}{2\sin\measuredangle A}$, $R_C = \frac{\overline{DB}}{2\sin\measuredangle C}$ и $R_E = \frac{\overline{FD}}{2\sin\measuredangle B}$, односно

$$R_A + R_C + R_E \geq \tfrac{1}{4}x(\tfrac{\sin\measuredangle B}{\sin\measuredangle A} + \tfrac{\sin\measuredangle A}{\sin\measuredangle B}) + \tfrac{1}{4}y(\tfrac{\sin\measuredangle B}{\sin\measuredangle C} + \tfrac{\sin\measuredangle C}{\sin\measuredangle B}) + \ldots$$
$$= \tfrac{2x}{4} + \tfrac{2y}{4} + \ldots + \tfrac{2v}{4} = \tfrac{x+y+\ldots+v}{2} = \tfrac{p}{2}.$$

Втор начин. Нека точките P, Q и R се такви што четириаголниците $FABP, BCDQ$ и $DEFR$ се паралелограми, а точките точките X, Y, Z се такви што правите XY, YZ, ZX редоследно минуваат низ B, D, F и се нормални на правите BP, DQ, FR (цртеж десно). Бидејќи



$$2R_A = \overline{PX}, 2R_C = \overline{QY} \text{ и } 2R_E = \overline{RZ},$$

треба да докажеме дека

$$\overline{PX} + \overline{QY} + \overline{RZ} \geq \overline{PF} + \overline{PB} + \overline{QB} + \overline{QD} + \overline{RD} + \overline{RE} . \tag{1}$$

Да означиме $\overline{YZ} = x, \overline{ZX} = y$ и $\overline{XY} = z$. Нека Y_x и Z_x се соодветно точките симетрични на точките Y и Z во однос на симетралата на $\measuredangle ZXY$. Тогаш

$$y \cdot \overline{PB} + z \cdot \overline{PF} = \overline{XZ_x} \cdot \overline{PB} + \overline{XY_x} \cdot \overline{PF} = 2P_{XZ_xP} + 2P_{XY_xP}$$
$$= 2P_{XY_xPZ_x} \leq \overline{Y_xZ_x} \cdot \overline{PX} = x \cdot \overline{PX},$$

па добиваме

$$\tfrac{y}{x} \cdot \overline{PB} + \tfrac{z}{x} \cdot \overline{PF} \leq \overline{PX} . \tag{2}$$

Со P', Q', R' да ги означиме средините на отсечките QR, RP, PQ, соодветно. Ако го собереме (2) со аналогните равенства за QY и RZ добиваме

$$\overline{PX}+\overline{QY}+\overline{RZ}\ge(\tfrac{y}{x}\cdot\overline{PB}+\tfrac{x}{y}\cdot\overline{QB})+(\tfrac{z}{y}\cdot\overline{QD}+\tfrac{y}{z}\cdot\overline{RD})+(\tfrac{x}{z}\cdot\overline{RF}+\tfrac{z}{x}\cdot\overline{PF})$$
$$=(\tfrac{y}{x}+\tfrac{x}{y})\cdot\overline{R'B}+(\tfrac{z}{y}+\tfrac{y}{z})\cdot\overline{P'D}+(\tfrac{x}{z}+\tfrac{z}{x})\cdot\overline{Q'F}+\tfrac{1}{2}\delta$$

каде $\delta=(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})\cdot\overline{PQ}+(\frac{y}{z}-\frac{z}{y})\cdot\overline{QR}+(\frac{z}{x}-\frac{x}{z})\cdot\overline{RP}$. Понатаму, триаголниците PQR и XYZ се слични, па затоа $\frac{\overline{QR}}{\overline{YZ}}=\frac{\overline{RP}}{\overline{ZX}}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{XY}}=k$, па е

$$\delta=k(\tfrac{x}{y}-\tfrac{y}{x})z+k(\tfrac{y}{z}-\tfrac{z}{y})x+k(\tfrac{z}{x}-\tfrac{x}{z})y=0\,.$$

Сега (1) следува од (3) и неравенствата $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2,\ \frac{y}{z}+\frac{z}{y}\ge 2,\ \frac{z}{x}+\frac{x}{z}\ge 2$.

6. Нека $n,p,q\in\mathbb{N}$ се такви што $n>p+q$ и $x_0,x_1,...,x_n$ се цели броеви кои ги задоволуваат условите:

(a) $x_0=x_n$

(b) за секој природен број i, $1\le i\le n$ важи или $x_i-x_{i-1}=p$ или $x_i-x_{i-1}=-q$.

Докажи дека постои пар на индекси (i,j) таков што $i<j$, $(i,j)\ne(0,n)$ и $x_i=x_j$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека p и q се заемно прости броеви, бидејќи ако $\text{NZD}(a,b)=d>1$, тогаш може да го примениме решението на задачата за $p'=\frac{p}{d}$, $q'=\frac{q}{d}$ и $x_i'=\frac{x_i}{d}$.

Нека бројот на индексите $i\in\{1,2,...,n\}$ такви што $x_i-x_{i-1}=p$ биде еднаков на k. Тогаш бројот на индексите $i\in\{1,2,...,n\}$ за кои $x_i-x_{i-1}=-q$ е еднаков на $n-k$. Бидејќи $x_n=x_0=0$ добиваме дека $kp=(n-k)q$, па затоа $k=aq$ и $n-k=ap$ за некој природен број a. Значи $n=a(p+q)$, каде $a>1$ бидејќи $n>p+q$.

Нека $y_i=x_{i+p+q}-x_i$ за $i\in\{0,1,...,n-p-q\}$. Бидејќи $n>p+q$, постојат барем два такви броја y_i. Ќе покажеме дека барем еден од овие броеви y_i е нула и со тоа задачата ќе биде решена. Нека $S_i=\{i+1,i+2,...,i+p+q\}$ и нека r е бројот на сите индекси $j\in S_i$ за кои $x_j-x_{j-1}=p$. Тогаш бројот на сите $j\in S_i$ за кои $x_j-x_{j-1}=-q$ е $p+q-r$. Собирајќи ги овие равенства за сите $j\in S_i$, добиваме

$$y_i=rp-(p+q-r)q=(p+q)(r-q)\,.$$

Значи за секое i важи $p+q\mid y_i$. Да ја разгледаме разликата

$$y_{i+1}-y_i=(x_{i+p+q+1}-x_{i+1})-(x_{i+p+q}-x_i)=(x_{i+p+q+1}-x_{i+p+q})-(x_{i+1}-x_i)\,.$$

Секој од броевите во заградата е p или $-q$, па затоа

$$y_{i+1}-y_i\in\{0,p+q,-(p+q)\}\,.$$

Да го разгледаме сега равенството

$$y_0+y_{p+q}+y_{2(p+q)}+...+y_{n-p-q}=0\,.$$

Тоа покажува дека броевите y_i не може да се сите позитивни или сите негативни. Значи, во низата $y_0,y_1,...,y_{n-p-q}$ постојат два броја кои имаат спротивни знаци. Бидејќи секое y_i се дели со $p+q$ и разликата меѓу два соседни броја е 0 или $\pm(p+q)$, добиваме дека некој од тие два броја мора да е еднаков на нула.

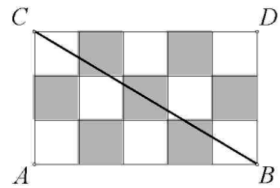
XXXVIII олимпијада

1. Точките во рамнината со целобројни координати се темиња на единечни квадрати. Квадратите се наизменично обоени со бела и црна боја (како шаховска табла). За произволен пар позитивни цели броеви m и n разгледуваме правоаголен триаголник чии темиња имаат целобројни координати, а неговите катети, со должини m и n, лежат на страните на единечните квадрати. Нека S_1 е вкупната плоштина на црниот дел од триаголникот и S_2 е вкупната плоштина на белиот дел од триаголникот. Нека
$$f(m,n) = | S_1 - S_2 | .$$
а) Пресметај го $f(m,n)$ за кои било позитивни цели броеви m и n со иста парност.

б) Докажи дека $f(m,n) \le \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ за секои природни броеви m и n.

в) Докажи дека не постои константа C таква што $f(m,n) < C$ за секои природни броеви m и n.

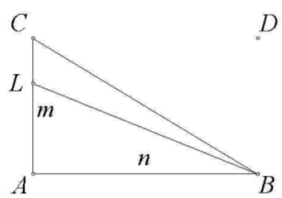
Решение. а) Нека ABC е правоаголен триаголник чии темиња се темиња на квадрат, чии катети лежат на страните на квадратот, при што $\measuredangle A = 90^\circ$, $\overline{AB} = n$ и $\overline{AC} = m$. Разгледуваме $n \times m$ правоаголник $ABCD$ како што е покажано на цртежот десно.



За било кој полигон P со $S_1(P)$ ќе ја означиме вкупната плоштина на црниот дел од P, а со $S_2(P)$ вкупната плоштина на белиот дел.

Кога m и n се со иста парност, боењето на правоаголникот $ABCD$ е централно симетрично во однос на средината на хипотенузата BC. Затоа
$$S_1(ABC) = S_1(BCD), \quad S_2(ABC) = S_2(BCD) \quad \text{и}$$
$$f(m,n) = | S_1(ABC) - S_2(ABC) | = \tfrac{1}{2} | S_1(ABCD) - S_2(ABCD) | .$$
Затоа $f(m,n) = 0$, ако m и n се парни, а $f(m,n) = \frac{1}{2}$ ако m и n се непарни.

б) Ако m и n се со иста парност, тврдењето следува од а). Да претпоставиме дека m е непарен, а n е парен. Нека L е точка на страната AC, така што $\overline{AL} = m-1$, како што е покажано на цртежот десно.



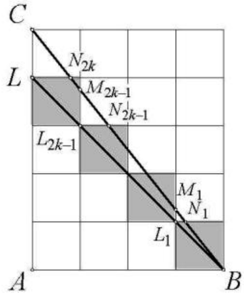
Бидејќи $m-1$ е парен број, тогаш
$$f(m-1,n) = 0 \text{, т.е. } S_1(ABL) = S_2(ABL) .$$
Оттука следува:
$$f(m,n) = | S_1(ABC) - S_2(ABC) | = | S_1(LBC) - S_2(LBC) |$$
$$\le P(LBC) = \tfrac{n}{2} \le \tfrac{1}{2}\max\{m,n\}.$$

в) Да го најдеме $f(2k+1,2k)$. Нека L е точка на страната AC таква што $\overline{AL}=2k$. Бидејќи

$$f(2k,2k)=0 \text{ и } S_1(ABL)=S_2(ABL),$$

следува

$$f(2k+1,2k)=|S_1(LBC)-S_2(LBC)|.$$



Плоштината на триаголникот LBC е еднаква на k. Без губење на општоста, можеме да претпоставиме дека дијагоналата BL е црна (црт. 38.3). Тогаш белиот дел од триаголникот LBC се состои од неколку триаголници: $CLN_{2k}, M_{2k-1}L_{2k-1}N_{2k-1}, \dots, M_1L_1N_1$, од кои секој е сличен со триаголникот CAB. Нивната вкупна плоштина е еднаква на:

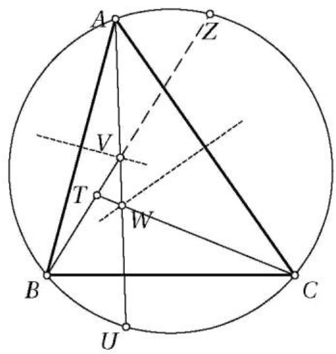
$$S_2(LBC)=\tfrac{1}{2}\tfrac{2k}{2k+1}((\tfrac{2k}{2k})^2+(\tfrac{2k-1}{2k})^2+\dots+(\tfrac{1}{2k})^2)$$
$$=\tfrac{1}{4k(2k+1)}(1^2+2^2+\dots+(2k)^2)=\tfrac{4k+1}{12}.$$

Значи,

$$S_1(LBC)=k-\tfrac{1}{12}(4k+1)=\tfrac{1}{12}(8k-1),\quad f(2k+1,2k)=\tfrac{2k-1}{6}.$$

2. Нека $\measuredangle A$ е најмалиот агол во $\triangle ABC$. Точките B и C ја делат опишаната кружница околу триаголникот на два кружни лака. Нека U е внатрешна точка од лакот меѓу B и C кој не ја содржи точката A. Симетралите на страните AB и AC ја сечат правата AU во точките V и W соодветно. Правите BV и CW се сечат во точката T. Докажи дека $\overline{AU}=\overline{TB}+\overline{TC}$.

Решение. *Прв начин*. Нека правата BV ја сече опишаната кружница на триаголникот ABC во точката $Z\not\equiv B$ (цртеж десно). Тетивите BZ и AU се симетрични во однос на симетралата на отсечката AB, па затоа $\overline{BZ}=\overline{AU}$. Исто така важи



$$\measuredangle TZC=\measuredangle BZC=\measuredangle BAC \text{ и}$$
$$\measuredangle TCZ=\measuredangle BTC-\measuredangle BZC=\measuredangle BTC-\measuredangle BAC$$
$$=\measuredangle TBA+\measuredangle TCA=\measuredangle BAV+\measuredangle CAW$$
$$=\measuredangle BAC,$$

па триаголникот TZC е рамнокрак и $\overline{TZ}=\overline{TC}$. Конечно,

$$\overline{TB}+\overline{TC}=\overline{BZ}=\overline{AU}.$$

Втор начин. Нека $\alpha=\measuredangle A$, B', C' се средини на страните AC и AB соодветно и $\theta=\measuredangle BAU$, $\phi=\measuredangle UAC$. Бидејќи WB' е симетрала на страната AC,

$\measuredangle ACW = \phi$ и аналогно , бидејќи VC' е симетрала на страната AB, $\measuredangle ABV = \theta$.
Оттука добиваме

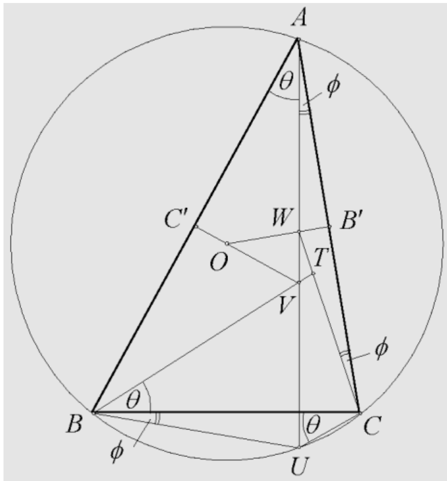
$$\measuredangle BTC = \pi - (\beta - \theta + \gamma - \phi) = \alpha + (\theta + \phi) = \alpha + \alpha = 2\alpha$$

Применувајќи ја синусната теорема за триаголникот BTC добиваме

$$\frac{\overline{TB}}{\sin(\gamma-\phi)} = \frac{\overline{TC}}{\sin(\beta-\theta)} = \frac{\overline{BC}}{\sin 2\alpha} = \frac{2R\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}$$

каде што R е радиусот на опишаната кружница. (Да забележиме дека заради условот на α , $\cos\alpha > 0$ и дека $\beta - \theta > 0, \gamma - \phi > 0$). Следува:

$$\begin{aligned}\overline{TB} + \overline{TC} &= \tfrac{R}{\cos\alpha}(\sin(\beta-\theta) + \sin(\gamma-\phi)) \\ &= \frac{2R\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma+\phi-\theta}{2}}{\cos\alpha} \\ &= 2R\cos\frac{\beta-\gamma+\phi-\theta}{2}.\end{aligned}$$



Бидејќи точките U, A, B и C лежат на кружницата, $\measuredangle UBC = \phi$ и $\measuredangle UCB = \theta$, а оттука следува:

$$\begin{aligned}\overline{AU} &= 2R\sin(\beta+\phi) = 2R\sin(\gamma+\theta) \\ &= R(\sin(\phi+\phi) + \sin(\gamma+\theta)) \\ &= 2R\sin\frac{\beta+\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma+\phi-\theta}{2} \\ &= 2R\cos\frac{\beta-\gamma+\varphi-\theta}{2}.\end{aligned}$$

односно $\overline{AU} = \overline{TB} + \overline{TC}$.

3. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се реални броеви кои ги задоволуваат условите

$$|x_1 + x_2 + ... + x_n| = 1, \quad |x_i| \le \tfrac{n+1}{2} \text{ за } i = 1, 2, ..., n .$$

Докажи дека постои пермутација $y_1, y_2, ..., y_n$ на $x_1, x_2, ..., x_n$ така што

$$|y_1 + 2y_2 + ... + ny_n| \le \tfrac{n+1}{2} .$$

Решение. За секоја пермутација $\pi = (y_1, y_2, ..., y_n)$ од $(x_1, x_2, ..., x_n)$ со $S(\pi)$ ќе го означиме збирот $y_1 + 2y_2 + ... + ny_n$. Нека $r = \frac{n+1}{2}$. Треба да покажеме дека $S(\pi) \le r$ барем за една пермутација π .

Нека $\pi_0 = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\pi^* = (x_n, x_{n-1}, ..., x_1)$. Ако

$$|S(\pi_0)| \le r \text{ или } |S(\pi^*)| \le r ,$$

тогаш тврдењето е точно. Затоа, нека претпоставуваме дека

$$|S(\pi_0)| > r \text{ и } |S(\pi^*)| > r .$$

Забележуваме дека

$$S(\pi_0) + S(\pi^*) = (x_1 + 2x_2 + ... + nx_n) + (x_n + 2x_{n-1} + ... + nx_1) = (n+1)(x_1 + ... + x_n)$$

па затоа

$$|S(\pi_0)+S(\pi^*)|=n+1=2r\ .$$

Бидејќи секој од броевите $S(\pi_0)$ и $S(\pi^*)$ по апсолутна вредност е поголем од r, следува дека тие мора да бидат со спротивен знак. Еден од нив е поголем од r , а другиот е помал од $-r$.

Почнувајќи од пермутацијата π_0 можеме да ја добиеме секоја пермутација со последоватено заменување на соседни елементи. Специјално, постои низа од пермутации $\pi_0,\pi_1,...,\pi_m$ така што $\pi_m=\pi^*$ и за секој $i\in\{0,1,...,m-1\}$ пермутацијата π_{i+1} се добива од π_i со замена на последователни членови.

Тоа значи дека ако $\pi_i=(y_1,...,y_n)$ и $\pi_{i+1}=(z_1,...z_n)$, тогаш постои индекс $k\in\{0,1,...,n-1\}$ така што $z_k=y_{k+1},\ z_{k+1}=y_k,\ z_j=y_j$ за $j\neq k,k+1$.

Бидејќи броевите x_i по апсолутна вредност не се поголеми од r , добиваме

$$\begin{aligned}|S(\pi_{i+1})-S(\pi_i)|&=|kz_k+(k+1)z_{k+1}-ky_k-(k+1)y_{k+1}|\\&=|y_k-y_{k+1}|\leq|y_k|+|y_{k+1}|\leq 2r.\end{aligned}$$

Тоа значи дека разликата меѓу два соседни члена од низата $S(\pi_0),S(\pi_1),...,$ $S(\pi_m)=S(\pi^*)$ не е поголема од $2r$.

Броевите $S(\pi_0)$ и $S(\pi_m)=S(\pi^*)$, разгледувани како броеви на реалната права, лежат надвор од интервалот $[-r,r]$ и тоа од негова различна страна. Оттука следува дека барем еден од броевите $S(\pi_i)$ се наоѓа во тој интервал. Затоа $|S(\pi_i)|\leq r$ за некоја пермутација π_i .

4. Матрицата $n\times n$ со елементи од множеството $S=\{1,2,...,2n-1\}$ се нарекува *сребрена* матрица, ако за секој $i=1,2,...,n$, $i-$тата редица и $i-$тата колона заедно ги содржат сите елементи од S. Покажи дека:

а) не постои сребрена матрица за $n=1997$,

б) сребрени матрици постојат за бесконечно многу броеви n.

Решение.. а) Нека $n>1$ е цел број. Да претпоставиме дека постои $n\times n$ сребрена матрица A. Нека x е некој елемент од множеството $\{1,2,...,2n-1\}$ кој што не се појавува на дијагоналата. (Таков елемент постои, бидејќи има n елементи на дијагоналата, но вкупно имаме $2n-1$ броеви.) Унијата на i-тата редица и i-тата колона ќе ја наречеме i-ти „дел“. Елементот x се појавува во секој „дел“ само по еднаш. Ако x е $(i,j)-$ти елемент од A, тогаш тој припаѓа во i-тиот j-тиот „дел“. Во овој случај двата „дела“ се означени со x. (На пример во вториот пример под б) првиот и четвртиот дел се означени со 6.) Тоа значи дека сите n „делови“ сме ги поделиле во парови x-обележани, па затоа n е парен број. Бидејќи $n=1997$ е непарен број, следува дека не постои сребрена матрица за овој број n.

б) За $n=2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

е сребрена матрица. За $n = 4$ има повеќе примери, од кои еден е

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Со помош на математичка индукција може да се конструираат бесконечно многу сребрени матрици, како што може да се види од следниот пример:

$$B = \begin{bmatrix} A & Y \\ X & A \end{bmatrix}$$

каде што A е сребрена матрица со елементи од множеството $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$,

$$X = \begin{bmatrix} 2n & 2n+1 & \ldots & 3n-1 \\ 3n-1 & 2n & \ldots & 3n-2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 3n+1 & 2n+2 & \ldots & 2n \end{bmatrix}, \; Y = \begin{bmatrix} 3n & 3n+1 & \ldots & 4n-1 \\ 4n-1 & 3n & \ldots & 4n-2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 3n+1 & 2n+2 & \ldots & 3n \end{bmatrix}.$$

Матрицата B е исто така сребрена.

5. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$a^{b^2} = b^a .$$

Решение. *Прв начин*. Равенката

$$x^{y^2} = y^x \tag{1}$$

ја запишуваме во облик

$$(\tfrac{x}{y^2})^{y^2} = y^{x-2y^2} . \tag{2}$$

Очигледно, потребно е $x^2 \neq 2y^2$.

Ако $x^2 > 2y^2$, тогаш $\frac{x}{y^2} = k \in \mathbb{N}, x = ky^2$, па од (2) добиваме:

$$k^{y^2} = y^{ky^2-2y^2} \text{, т.е. } k = y^{k-2} .$$

За $k = 1$ решение е $(1,1)$. За $k = 2$ нема решение. За $k = 3$ решение е $(27,3)$. За $k = 4$ решение е $(16,2)$. За $k \geq 5$ имаме:

$$y^{k-2} \geq 2^{k-2} = 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2 \geq 2 \cdot 2 \cdot \tfrac{k-3}{k-1} \cdot \ldots \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{2}{1} = 4(k-3) > k .$$

Ако $x^2 < 2y^2$ од (2) добиваме:

$$(\tfrac{y^2}{x})^{y^2} = y^{2y^2-x} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{y^2}{x} = m \in \mathbb{N}, \quad y^2 = mx .$$

Оттука и од (1) добиваме:

$$x^{2y^2}=y^{2x}\ \Rightarrow\ x^{2m}=(mx)^x,\ \ x^{2m}=mx,\ \text{ т.е. }\ x^{2m-1}=m.$$

За $m=1$, решение е (1,1), кое веќе го најдовме.

За $m\geq 2$ имаме:

$$x^{2m-1}\geq 2^{2m-1}=2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2\geq \tfrac{2m-1}{2m-1}\cdot\tfrac{2m-2}{2m-3}\cdot\ldots\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{2}{1}=2m-1>m$$

па во овој случај равенката нема решение.

Втор начин. Нека m и n се заемно прости броеви такви што $\frac{a}{b^2}=\frac{m}{n}$. Од $a^{b^2}=b^a$ следува $a^n=b^m$. Бројот $z=a^{\frac{1}{m}}=b^{\frac{1}{n}}$ е цел, бидејќи ако $k,l\in\mathbb{N}$ се такви што $km-ln=1$, тогаш $z=\frac{z^{km}}{z^{nl}}=\frac{a^k}{b^l}$. Почетната равенка го добива обликот $z^{mz^{2n}}=a^{b^2}=b^a=z^{nz^m}$, па затоа $mz^{2n}=nz^m$, т.е.

$$z^{m-2n}=\frac{m}{n}.$$

Можни се два случаја.

1) $m<2n$. Тогаш $\frac{m}{n}=\frac{1}{z^{2n-m}}$, па затоа $m=1$ и $n=z^{2n-m}=z^{2m-1}$. Бидејќи $z^{2n-1}>2n-1\geq n$ за $z>1$, мора да важи $z=1$, па затоа $n=1$. Значи, едно решение е парот $(a,b)=(1,1)$.

2) $m\geq 2n$. Тогаш $n=1$ и $m=z^{m-2n}=z^{m-2}$. За $z>4$ имаме $z^{m-2}>m$. За $z=3$ единствено решение е $m=3$, од каде што го добиваме решението $(a,b)=(27,3)$. За $z=2$ единствeо решение е $m=4$, од каде што го добиваме решението $(a,b)=(16,2)$.

Според тоа, единствени решенија се $(1,1),(16,2)$ и $(27,3)$.

6. За секој природен број *n*, со $f(n)$ е означен бројот од различни претставувања на бројот *n* како збир од степени на бројот 2 со ненегативни целобројни показатели. Претставувањата кои се разликуваат само во редоследот на собироците се сметаат за еднакви. На пример, $f(4)=4$ бидејќи бројот 4 може да се претстави на следните четири начини: 4, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1.
Докажи дека за секој природен број $n\geq 3$ важи

$$2^{\frac{n^2}{4}}<f(2^n)<2^{\frac{n^2}{2}}.$$

Решение. Ако $n=2k+1$ е било кој непарен цел број поголем од 1, тогаш секое запишување на *n* во бараниот вид го има 1 како еден од собироците. Ако го отстраниме, добиваме запис на бројот 2*k*. Обратно, ако додадеме 1 во зписот на бројот 2*k* ќе добиеме запис на бројот 2*k*+1. Ова придружување е биективно. Затоа важи рекурзивната формула

$$f(2k+1)=f(2k) \tag{1}$$

Понатаму, ако $n = 2k$ е било кој позитивен парен цел број, тогаш секој запис на n има еден од следните два вида: или содржи еден собирок 1 или нема таков собирок. Во првиот случај мажеме да одземеме 1 и да добиеме запис на бројот $2k-1$. На тој начин добиваме биекција меѓу записот од првиот вид на $2k$ и сите записи на $2k-1$. Во записите од вториот вид (овде ниту еден член не е 1), можеме секој член да го поделиме со 2 и ќе го добиеме записот на бројот k. На тој начин ќе добиеме друга рекурзивна формула

$$f(2k) = f(2k-1) + f(k) \tag{2}$$

Секоја од овие формули важи за секој цел број $k \geq 1$. Очигледно $f(1) = 1$. Ако ставиме $f(0) = 1$, формулата (1) ќе важи и за $k = 0$. Од (1) и (2) следува дека функцијата f е неопаѓачка.

Од (1) следува дека бројот $f(2k-1)$ во формулата (2) може да се замени со $f(2k-2)$, па добиваме

$$f(2k) - f(2k-2) = f(k), \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

Ако ги собериме овие равенства за $k = 1, 2, \dots, n$, ја добиваме формулата

$$f(2n) = f(0) + f(1) + \dots + f(n), \text{ за } n = 1, 2, \dots, n \tag{3}$$

Во формулата (3) ниту еден собирок не е поголем од последниот. Бидејќи $2 = f(2) \leq f(n)$ за $n \geq 2$, добиваме

$$f(2n) = 2 + \left(f(2) + \dots + f(n) \right) \leq 2 + (n-1) f(n) \leq f(n) + (n-1) f(n) = nf(n),$$

за $n = 2, 3, \dots$. Специјално, во нашиот случај имаме:

$$f(2^n) \leq 2^{n-1} \cdot f(2^{n-1}) \leq 2^{n-1} \cdot 2^{n-1} \cdot f(2^{n-1}) \leq \dots$$
$$\leq 2^{(n-1)+(n-2)+\dots+1} \cdot f(2) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2.$$

Бидејќи $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2 < 2^{\frac{n^2}{2}}$ за $n > 3$, следува дека важи десната оценка.

Пред да ја докажеме левата оценка, ќе го покажеме прво неравенството

$$f(b+1) - f(b) \geq f(a+1) - f(a) \tag{4}$$

за целите броеви $b \geq a \geq 0$ со иста парност. Имено, ако a и b се парни броеви, тогаш од (1) следува дека двете страни се нула; ако a и b се двата непарни, тогаш од (2) следува

$$f(b+1) - f(b) = f(\tfrac{b+1}{2}), \; f(a+1) - f(a) = f(\tfrac{a+1}{2}),$$

па неравенството (4) важи бидејќи функцијата f е непоаѓачка.

Нека r и k се цели броеви така што $r \geq k \geq 1$ и r е парен. Ставајќи во (4)

$$a = r - j, \; b = r + j, \; j = 0, 1, 2, \dots, k-1$$

и собирајќи ги добиените неравенства, добиваме

$$f(r+k) - f(r) \geq f(r+1) - f(r-k+1)$$

Бидејќи r е парен, $f(r+1) = f(r)$ и

$$f(r+k)-f(r-k+1)\geq 2f(r),\ \ k=1,2,\dots,r\,.$$

Собирајќи ги овие неравенства, добиваме

$$f(1)+f(2)+\dots+f(2r)\geq 2rf(r)\,.$$

Од (3) следува дека збирот на левата страна е $f(4r)-1$ и

$$f(4r)\geq 2rf(r)+1>2rf(r) \text{ за секој цел број } r>2\,.$$

Ставајќи $r=2^{m-2}$, добиваме

$$f(2^m)>2^{m-1}f(2^{m-2}) \tag{5}$$

За $r=2^{m-2}$ да биде парен број, m мора да биде цел број поголем од 2; да забележиме дека (5) важи за $m=2$.

Нека n е било кој цел број поголем од 1. Ако l е позитивен цел број таков што $2l<n$, тогаш применувајќи го неравенството (5) за $m=n,n-1,\dots,n-2l+2$ и добиваме

$$\begin{aligned}f(2^n)&>2^{n-1}\cdot f(2^{n-2})>2^{n-1}\cdot 2^{n-3}\cdot f(2^{n-4})\\&>\dots>2^{(n-1)+(n-3)+\dots(n-2l+1)}\cdot f(2^{n-2l})=2^{l(n-l)}\cdot f(2^{n-2l})\end{aligned}$$

Ако n е парен број, ставаме $l=\frac{n}{2}$; ако n е непарен, нека $l=\frac{n-1}{2}$. Се добиваат следниве неравенства:

$$f(2^n)>2^{\frac{n^2}{4}}\cdot f(2^0)=2^{\frac{n^2}{4}} \text{ за } n \text{ парен број,}$$

$$f(2^n)>2^{\frac{n^2-1}{4}\frac{n^2-1}{4}}\cdot f(2^1)=2^{\frac{n^2-1}{4}}\cdot 2>2^{\frac{n^2}{4}} \text{ за } n \text{ непарен број.}$$

Ја добивме бараната оценка за $n\geq 2$. Таа важи и за $n=1$, што може непосредно да се провери.

XXXIX олимпијада

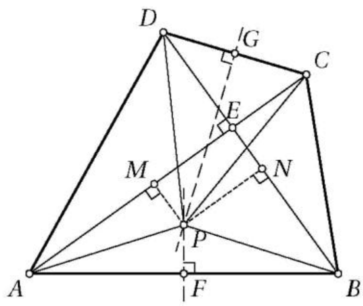
1. Во конвексниот четириаголник *ABCD* дијагоналите *AC* и *BD* се нормални, а спротивните страни *AB* и *CD* не се паралелни. Пресечната точка *P* на симетралите на станите *AB* и *CD* лежи во внатрешноста на четириаголникот *ABCD*. Докажи дека околу четириаголникот може да се опише кружница ако и само ако триаголниците *ABP* и *CDP* имаат еднакви плоштини.

Решение. *Прв начин*. Нека *E* е пресечната точка на *AC* и *BD*. Без губење од општоста можеме да претпоставиме дека точката *P* лежи во триаголникот *ABE*. Со *M* и *N* ги означуваме подножјата на нормалите спуштени од *P* кон *AC* и *BD*, соодветно. Ќе претпоставиме дека M припаѓа на отсечката AE, а N припаѓа на отсечката BE. Останатите случаи слично се разгледуваат. Тогаш

$$\begin{aligned}2S_{ABP} &= 2S_{ABE} - 2S_{PAE} - 2S_{PBE}\\ &= (\overline{AM}+\overline{PN})(\overline{BN}+\overline{PM}) - (\overline{AM}+\overline{PN})\overline{PM} - (\overline{BN}+\overline{PM})\overline{PN}\\ &= \overline{AM}\cdot\overline{BN} - \overline{PN}\cdot\overline{PM}\ .\end{aligned}$$

Аналогно $2S_{CDP} = \overline{CM}\cdot\overline{DN} - \overline{PM}\cdot\overline{PN}$, па затоа

$$2(S_{ABP} - S_{CDP}) = \overline{AM}\cdot\overline{BN} - \overline{CM}\cdot\overline{DM} \quad (1)$$



Нека $\overline{PA} = \overline{PB}$ и $\overline{PC} = \overline{PD}$. Ако $ABCD$ е тетивен четириаголник, тогаш P е центар на опишаната кружница и $\overline{AM} = \overline{CM}$, $\overline{BN} = \overline{DN}$. Сега, од (1) заклучуваме дека $S_{ABP} = S_{CDP}$. Обратно, нека $S_{ABP} = S_{CDP}$ и без ограничување на општоста да земеме дека $\overline{PA} = \overline{PB} > \overline{PC} = \overline{PD}$. Тогаш $\overline{AM} > \overline{CM}$, $\overline{BN} > \overline{DN}$, па затоа важи

$$\overline{AM}\cdot\overline{BN} > \overline{CM}\cdot\overline{DN}\text{, т.е. } S_{ABP} > S_{CDP}$$

што противречи на равенството (1).

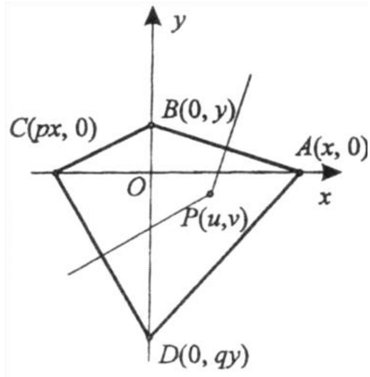
Втор начин. Средините на страните AB и CD да ги означиме со F и G, соодветно. Да претпоставиме дека P е на иста страна на правата AC на која е B. Бидејќи $PF \perp AB, PG \perp CD, \measuredangle FEB = \measuredangle ABE$ и $\measuredangle GEC = \measuredangle DCE$, лесно се покажува дека $\measuredangle FPG = \measuredangle FEG = 90^\circ + \measuredangle ABE + \measuredangle DCE$.

Понатаму, имаме $S_{ABP} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{FP}}{2} = \overline{FE}\cdot\overline{FP}$ и слично $S_{CDP} = \overline{GE}\cdot\overline{GP}$, па условот $S_{ABP} = S_{CDP}$ е еквивалентен со условот $\frac{\overline{FE}}{\overline{GE}} = \frac{\overline{GP}}{\overline{FP}}$, што важи ако и само ако $\triangle EFG \sim \triangle PGF$, т.е. ако и само ако $EFPG$ е паралелограм. Последното се сведува на $\measuredangle EFP = \measuredangle EGP$, т.е.

$$2\measuredangle ABE = 2\measuredangle DCE,$$

што е услов четириаголникот $ABCD$ да е тетивен.

Трет начин. Дијагоналите AC и BD се заемно нормални, па затоа можеме да земеме правоаголен Декартов координатен систем таков што A и C припаѓаат на $x-$оската и B и D припаѓаат на $y-$оската (цртеж десно). Тогаш темињата на четириаголникот се зададени со $A(x,0)$, $B(0,y), C(px,0)$ и $D(0,qy)$, каде $x>0$, $y>0$, $p<0, q<0$ и $p \neq q$ (страните AB и CD не се паралелни).



Разгледувајќи го степенот на точката O во однос на кружница добиваме дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен ако и само ако $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$, т.е.

$$px^2 - qy^2 = 0. \tag{1}$$

Нека координатите на точката P се (u,v). Од условот $\overline{PA}=\overline{PB}$ следува равенството $(u-x)^2+v^2=u^2+(v-y)^2$, т.е.

$$2ux-2vy = x^2-y^2. \tag{2}$$

Аналогно од условот $\overline{PC}=\overline{PD}$ добиваме

$$2upx-2vqy = p^2x^2-q^2y^2. \tag{3}$$

Од системот линеарни арвенки (2) и (3) ги определуваме координатите на точката P и добиваме

$$u=\frac{p^2x^2-q^2y^2-q(x^2-y^2)}{2x(p-q)},\ \ v=\frac{p^2x^2-q^2y^2-p(x^2-y^2)}{2y(p-q)}. \tag{4}$$

За плоштините на триаголниците PAB и PCD добиваме

$$S_{ABP}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x-u & -v \\ -u & y-v \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(xy-xv-yu), \tag{5}$$

$$S_{CDP}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} px-u & -v \\ -x & qy-v \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(pqxy-pxv-qyu). \tag{6}$$

При пресметувањето на плоштините на триаголниците PAB и PCD водено е сметка тие да имаат ист знак. Еднаквоста на плоштините на овие триаголници е еквивалентна со равенството

$$pq-1=\frac{v}{y}(p-1)+\frac{u}{x}(q-1). \tag{7}$$

Од овде, по замената на изразите за u и v од (4) и по средувањето на добиената релација се добива

$$(px^2-qy^2)[(p-1)^2x^2+(q-1)^2y^2]=0. \tag{8}$$

Изразот во средните загради на (8) е позитивен, па затоа триаголниците PAB и PCD имаат еднакви плоштини ако и само ако важи условот (1), т.е. ако и само ако четириаголникот $ABCD$ е тетивен.

2. На еден натпревар учествувале a натпреварувачи, кои биле оценувани од b судии, каде $b \geq 3$ е непарен број. Секој судија го оценува секој натпреварувач со „положил“ или „не положил“. Нека k е број, таков што оценките на било кои двајца судии се совпаѓаат кај најмалку k натпреварувачи. Докажи дека $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

Решение. За секој $i \in \{1, 2, \dots, a\}$ нека i - тиот натпреварувач добил x_i оценки „положил“ и y_i оценки „не положил“. Тогаш $x_i + y_i = b$ и бројот на парови од судии кои го оцениле исто овој натпреварувач е

$$\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2} = \frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2 - x_i - y_i) \geq \frac{1}{4}((b-1)^2 - 1)$$

Бидејќи b е непарен број, следува дека

$$\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2} \geq \frac{1}{4}(b-1)^2 .$$

Според тоа, ако ги собереме горните неравенства за $i = 1, 2, \dots, a$ добиваме дека бројот на поклопувањата на паровите судии кај a натпреварувачи е еднаков на

$$\sum_{i=1}^{a} \left(\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2}\right) \geq \frac{a(b-1)^2}{4} .$$

Бидејќи секој од $\binom{b}{2}$ паровите судии се сложуваат кај најмногу k натпреварувачи, вкупниот број на поклопување не е поголем од $k\binom{b}{2}$. Конечно, го добиваме неравенството

$$k\binom{b}{2} \geq \sum_{i=1}^{a} \left(\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2}\right) \geq \frac{a(b-1)^2}{4} ,$$

кое е еквивалентно со неравенството кое што требаше да се докаже.

3. За секој позитивен цел број n со $d(n)$ ќе го означиме бројот на позитивните цели делители на n (вклучувајќи ги 1 и n). Определи ги сите позитивни цели броеви k за кои постои позитивен цел број n, така што $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$.

Решение. Нека $n > 1$ и $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$ е каноничното разложување на n на прости множители, $a_i = k_i + 1$, за $1 \leq i \leq r$. Тогаш

$$d(n) = a_1 a_2 \dots a_r \quad \text{и} \quad d(n^2) = (2a_1 - 1)(2a_2 - 1)\dots(2a_r - 1) .$$

Задачата се сведува на определување на сите природни броеви k кои може да се претставаат во облик

$$m=\frac{(2a_1-1)(2a_2-1)...(2a_r-1)}{a_1a_2...a_r}\text{, каде } k_i\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\text{, за } i=1,2,...,r\,. \qquad (1)$$

Јасно, m мора да биде непарен број, бидејќи $d(n^2)$ е непарен број. Со индукција ќе покажеме дека секој непарен број $m\in\mathbb{N}$ може да се претстави во обликот (1).

Базата на индукцијата $k=1$ е тривијална. Нека претпоставиме дека тврдењето важи непарниот број m. Тогаш точноста на тврдењето за непарниот број $k=2m-1$, следува од индуктивната претпоставка и претставувањето $k=\frac{2m-1}{m}m$. Ако непарниот број е од видот $k=4m-1$, каде m е непарен број тогаш тој може да се запише во видот $k=\frac{12m-3}{6m-1}\cdot\frac{6m-1}{3m}\cdot m$, па затоа точноста на тврдењето за броевите од овој вид следува од индуктивната претпоставка и даденото претставување. Ќе продолжиме со оваа идеја. Нека $n=2^t m-1$, каде m е непарен. Означуваме $u=(2^t-1)m$ и добиваме

$$k=\frac{2^t u-2^t+1}{2^{t-1}u-2^{t-1}+1}\cdot...\cdot\frac{4u-3}{2u-1}\cdot\frac{2u-1}{u}\cdot m\,.$$

Со ова индукцијата е завршена.

4. Определи ги сите парови (a,b) од цели броеви такви што ab^2+b+7 е делител на a^2b+a+b.

Решение. Нека ab^2+b+7 е делител на a^2b+a+b. Тогаш, бројот

$$b(a^2b+a+b)-a(ab^2+b+7)=b^2-7a$$

е делив со ab^2+b+7. Бидејќи $a\geq 1$, следува дека $ab^2+b+7>b^2-7a$, односно ако $b^2-7a\geq 0$, заклучуваме дека $b^2-7a=0$. Значи $b=7a$, $a=7c^2$ и лесно се проверува дека парот $(7c^2,7c)$ (c е цел број) ги задоволува условите од задачата. Да претпоставиме дека $b^2-7a<0$. Тогаш целиот број $7a-b^2$ е помал од $7a$ и е делив со ab^2+b+7. Следува $b=1$ или $b=2$ бидејќи во спротивно $ab^2+b+7>9a$. Лесно се проверува дека случајот $b=2$ не е можен, а за $b=1$ добиваме две решенија $(11,1)$ и $(49,1)$.

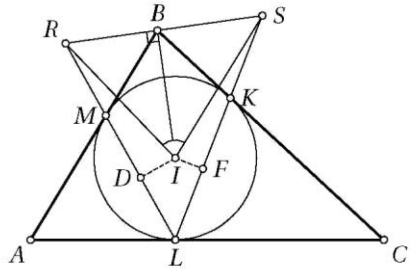
5. Нека I е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC која ги допира страните BC, CA и AB во точките K, L и M, соодветно. Правата која што минува низ B и е паралелна со MK ги сече правите LM и LK во точките R и S. Докажи дека $\measuredangle RIS$ е остар.

Решение. *Прв начин*. Бидејќи

$$\measuredangle RMB=90^\circ-\tfrac{\alpha}{2},\quad \measuredangle RBM=\measuredangle BMK=90^\circ-\tfrac{\beta}{2},\quad \measuredangle MRB=90^\circ-\tfrac{\gamma}{2},$$

$$\measuredangle SKB = 90^\circ - \tfrac{\gamma}{2},\ \measuredangle SBK = \measuredangle MKB = 90^\circ - \tfrac{\beta}{2},\ \measuredangle KSB = 90^\circ - \tfrac{\alpha}{2},$$

следува дека триаголниците RMB и KBS се слични. Оттука добиваме



$$\overline{RB}\cdot\overline{BS} = \overline{BK}^2,$$

затоа што $\overline{BK} = \overline{BM}$. Бидејќи $BI \perp MK$ (BI е симетрала на $\measuredangle MBK$ во рамнокракиот триаголник MKB) следува

$$\overline{RI}^2 + \overline{SI}^2 - \overline{RS}^2 = \overline{RB}^2 + \overline{BI}^2 + \overline{BS}^2 + \overline{BI}^2 - (\overline{RB}+\overline{BS})^2$$
$$= 2(\overline{BI}^2 - \overline{RB}\cdot\overline{BS})$$
$$= 2(\overline{BI}^2 - \overline{BK}^2) = 2\overline{IK}^2 > 0.$$

Оттука следува дека $\measuredangle RIS$ е остар.

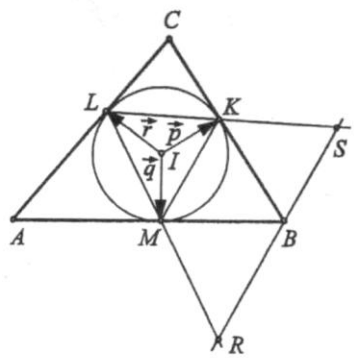
Втор начин. Нека D и F се средините на отсечките LM и LK, соодветно. Од тетивните четириаголници $RBID$ и $SBIF$ следува

$$\measuredangle RIS = \measuredangle RLS + \measuredangle IRL + \measuredangle ISL = 90^\circ - \frac{\beta}{2} + \measuredangle IBD + \measuredangle IBF = 90^\circ - \frac{\beta}{2} + \measuredangle DBF.$$

Бидејќи BD и BF се тежишни линии во триаголниците BLM и BLK такви што $\overline{BL} > \overline{BM}$ и $\overline{BL} > \overline{BK}$, добиваме $\measuredangle LBD < \frac{1}{2}\measuredangle LBM$ и $\measuredangle LBF < \frac{1}{2}\measuredangle LBK$.

Ако ги собереме овие неравенства добиваме $\measuredangle DBF < \frac{\beta}{2}$ и оттука $\measuredangle RIS < 90^\circ$.

Трет начин. Без ограничувањe на општоста можеме да претпоставиме дека вписаната кружница има радиус еднаков на 1 (цртеж десно). Ена единичните вектори со кои се поврзани точките K, L, M со центарот на кружницата се $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$, соодветно. За да докажеме дека $\measuredangle RIS$ е остар доволно е да докажеме дека скаларниот производ на векторите $\overrightarrow{IR}$ и $\overrightarrow{IS}$ е позитивен.



За векторот $\overrightarrow{IB}$ важи $(\overrightarrow{IB} - \vec{p})\vec{p} = 0$ и $(\overrightarrow{IB} - \vec{q})\vec{q} = 0$, т.е.

$$\overrightarrow{IB}\cdot\vec{p} = 1 \text{ и } \overrightarrow{IB}\cdot\vec{q} = 1. \quad (1)$$

Според условот на задачата векторот $\vec{q} - \vec{p}$ е ортогонален на векторот $\overrightarrow{IB}$, а векторите $\vec{r} - \vec{p}$ и $\overrightarrow{LS}$ се колинеарни. Оттула следува дека постојат скалари λ и μ за кои важи:

$$\overrightarrow{IS}=\overrightarrow{IB}+\lambda(\vec{q}-\vec{p}), \qquad \overrightarrow{IS}=\vec{r}+\mu(\vec{r}-\vec{p}) \tag{2}$$

односно

$$\overrightarrow{IB}+\lambda(\vec{q}-\vec{p})=\vec{r}+\mu(\vec{r}-\vec{p}). \tag{3}$$

Ако (3) го помножиме со $\vec{p}$ и $\vec{q}$, и ги искориостиме равенствата (1) ги добиваме равенствата

$$1+\lambda(\vec{q}\cdot\vec{p}-1)=\vec{r}\cdot\vec{p}+\mu(\vec{r}\cdot\vec{p}-1), \tag{4}$$

$$1+\lambda(1-\vec{p}\cdot\vec{q})=\vec{r}\cdot\vec{q}+\mu(\vec{r}\cdot\vec{q}-\vec{p}\cdot\vec{q}). \tag{5}$$

Ако ги собереме (3) и (4) за коефициентот μ добиваме

$$\mu=\frac{2+\vec{r}\cdot(\vec{p}+\vec{q})}{\vec{r}\cdot(\vec{p}+\vec{q})-\vec{p}\cdot\vec{q}-1}. \tag{6}$$

Притоа да забележиме дека именителот во изразот на десната страна на (6) е различен од нула. Навистина, во спротивно од $\vec{r}\cdot(\vec{p}+\vec{q})-\vec{p}\cdot\vec{q}-1=0$ ќе следува $(\vec{r}-\vec{p})(\vec{r}-\vec{q})=0$. Последното значи дека векторите $\overrightarrow{LK}$ и $\overrightarrow{LM}$ се ортогонални и дека точките M, I, K лежат на дијаметар на впишаната кружница. Од $\vec{p}\perp\overrightarrow{BC}$ и $\vec{q}\perp\overrightarrow{AB}$ следува дека AB и BC се паралелни, а тогаш триаголникот ABC не постои.

Од (6) заменуваме во (2) и добиваме

$$\overrightarrow{IS}=\frac{\vec{p}(\vec{r}\cdot(\vec{p}+\vec{q})-2)+\vec{r}(1-\vec{p}\cdot\vec{q})}{\vec{r}\cdot(\vec{p}+\vec{q})-\vec{p}\cdot\vec{q}-1}. \tag{7}$$

Аналогно се добива

$$\overrightarrow{IR}=\frac{\vec{q}(\vec{r}\cdot(\vec{p}+\vec{q})-2)+\vec{r}(1-\vec{p}\cdot\vec{q})}{\vec{r}\cdot(\vec{p}+\vec{q})-\vec{p}\cdot\vec{q}-1}. \tag{8}$$

Лесно се пресметува дека скаларниот производ $\overrightarrow{IS}\cdot\overrightarrow{IR}$ е позитивен, што значи дека $\measuredangle RIS$ е остар.

6. Ги разгледуваме сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ каде што

$$f(n^2 f(m))=m(f(n))^2$$

за произволни $m, n\in\mathbb{N}$. Определи ја најмалата можна вредност на $f(1998)$.

Решение. Прво ќе ги определиме функциите кои ги задоволуваат условите на задачата.

Нека $f(1)=a$. За $n=m=1$ добиваме $f(f(m))=a^2m$ и $f(an^2)=(f(n))^2$. Тогаш

$$\begin{aligned}(f(m))^2(f(n))^2&=(f(m))^2 f(an^2)=f(m^2 f(f(an^2)))\\&=f(m^2a^3n^2)=(f(amn))^2,\end{aligned}$$

т.е.

$$f(amn) = f(m)f(n) \ .$$

За $n=1$ имаме $f(am) = af(m)$, па значи

$$af(mn) = f(m)f(n) \qquad (1)$$

Ќе докажеме дека a е делител на $f(n)$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Нека p е произволен прост број и α и β се степеновите показатели на p во каноничното разложување на a и $f(n)$. Од (1), со индукција, следува дека

$$(f(n))^k = a^{k-1} f(n^k)$$

за секој природен број k. Тогаш $k\beta \geq (k-1)\alpha$, што е можно само ако $\beta \geq \alpha$. Оттука следува дека a е делител на $f(n)$.

Ставаме $g(n) = \frac{f(n)}{a}$. Од докажаното, следува дека $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Понатаму, лесно се покажува дека

$$g(mn) = g(m)g(n) \qquad (2)$$

$$g(g(m)) = m \qquad (3)$$

Обратно, ако $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е функција која ги задоволува равенствата (2) и (3), тогаш за секој $\alpha \in \mathbb{N}$ функцијата $f(n) = \alpha\, g(n)$ ги задоволува условите од задачата.

Сега ќе го најдеме општиот облик на функциите $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ кои ги задоволуваат равенствата (2) и (3). За $n = m = 1$ од (2) следува

$$g(1) = 1 \qquad (4)$$

Со P ќе го означиме множеството од прости броеви. Ќе докажеме дека $g(p) \in P$ за секој $p \in P$. Навистина, ако $g(p) = uv$, од (3) и (2) следува дека

$$p = g(g(p)) = g(uv) = g(u)g(v) \ .$$

Без губење од општоста можеме да претпоставиме дека $g(u) = 1$, па оттука добиваме

$$u = g(g(u)) = g(1) = 1,$$

односно $g(p) \in P$. Ако $n \geq 2$ е произволен природен број и $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ е неговото канонично разложување на прости множители, од (2) добиваме:

$$g(n) = (g(p_1))^{\alpha_1} \dots (g(p_k))^{\alpha_k} \qquad (5)$$

Од докажаното, следува дека, ако $g: P \to P$ е произволна функција таква што $g(g(p)) = p$, за секој $p \in P$, тогаш со помош на равенствата (4) и (5) g може еднозначно да се продолжи на множеството на природните броеви. Директно се проверува дека така добиената функција $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ги задоволува равенствата (2) и (3).

Сега ќе покажеме дека најмалата можна вредност на $f(1998)$ е 120. Бидејќи

$$f(1998)=f(2\cdot 3^3\cdot 37)=f(1)g(2)(g(3))^3 g(37)\geq 1\cdot 3\cdot 2^3\cdot 5=120,$$

останува да конструираме функција f која ги задоволува условите од задачата и за која важи $f(1998)=120$. Ставаме

$$f(1)=1,\ f(2)=3,\ f(3)=2,\ f(37)=5 \text{ и } f(p)=p$$

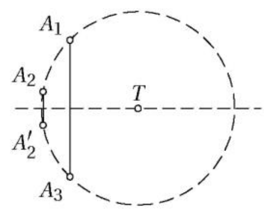
за сите останати прости броеви p. Јасно е дека $f(f(p))=p$ за секој $p\in P$. На овој начин е дефинирана функција $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ која ги задоволува условите од задачата и $f(1998)=120$.

XL олимпијада

1. Определи ги сите конечни множества точки во рамнината S кои содржат барем три точки и кои го задоволуваат следниов услов: за секои две различни точки A и B од S, симетралата на отсечката AB е оска на симетрија на множеството S.

Решение. За произволни различни точки $A, B \in S$, симетријата во однос на симетралата s_{AB} на отсечката AB го пресликува множеството S во себе, па така го пресликува во себе и тежиштето T на множеството S. Значи, $T \in s_{AB}$, т.е. $\overline{TA} = \overline{TB}$. Последното значи дека целото множество S припаѓа на кружница со центар T.

Нека точките на множеството S определуваат конвексен многуаголник $A_1A_2...A_n$. Точката $A_2^{'}$, симетрична на точката A_2 во однос на $S_{A_1A_3}$ припаѓа на лакот $A_1A_2A_3$ и припаѓа на множеството S, па затоа мора да важи $A_2^{'} \equiv A_2$. Оттука следува дека $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$. Аналогно следува дека $\overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4} = ... = \overline{A_nA_1}$, т.е. $A_1, A_2, ..., A_n$ се темиња на правилен $n-$аголник. Јасно е дека сите вакви множества ги задоволуваат условите на задачата.



2. Нека $n \geq 2$ е природен број.

а) Определи ја најмалата константа C така да неравенството

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4 \tag{1}$$

важи за секои реални броеви $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$.

б) За најдената константа C определи кога важи знак за равенство.

Решение. *Прв начин.* Ако не се сите броеви x_i еднакви на нула (во спротивно неравенството е тривијално), заради хомогеноста можеме да сметаме дека $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Левата страна на неравенството го добива обликот

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = \sum_i x_i^3 \sum_{j \neq i} x_j = \sum_i x_i^3 (1 - x_i) = \sum_i f(x_i),$$

каде $f(x) = x^3 - x^4$.

Бидејќи

$$f(x+y) + f(0) - f(x) - f(y) = 3xy(x+y)\left(\tfrac{2}{3} - x - y\right)$$

вредноста на F расте ако два позитивни броја x и y такви што $x+y\le\frac{2}{3}$ се заменат со броевите 0 и $x+y$. Оваа операција секогаш може да се реализира ако меѓу броевите x_i има најмалку три броја различни од нула. Така со нејзино повеќекратно применување добиваме

$$F(x_1,x_2,...,x_n)\le F(a,1-a,0,...,0)=\tfrac{1}{2}(2a(1-a))(1-2a(1-a))\le\tfrac{1}{8},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a=\frac{1}{2}$. Според тоа, $C=\frac{1}{8}$ за секој n, при што знак за равенство важи ако и само ако два броја x_i се еднакви, а останатите се нули.

Втор начин. Да означиме $M=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2$. Користејќи го неравенството

$$ab\le\tfrac{1}{8}(a+2b)^2$$

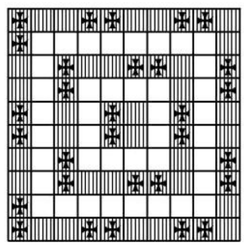
добиваме

$$\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j(x_i^2+x_j^2)\le M\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j\le\tfrac{1}{8}(M+2\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j)^2=\tfrac{1}{8}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^4,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$M=2\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j \text{ и } x_ix_j(x_i^2+x_j^2)=Mx_ix_j, \text{ за секои } i<j.$$

3. Дадена е квадратна табла со димензија $n\times n$, каде n е парен природен број. Таблата е поделена на n^2 единечни квадрати. Два различни единечни квадрати на таблата се соседни ако имаат заедничка страна.
Означени се N единечни квадрати така што секој единечен квадрат (означен или неозначен) е соседен со барем еден означен квадрат.
Определи ја најмалата можна вредност на бројот N.



Решение. Нека $n=2k$. Множеството квадратни полиња чии центри се на растојание $i-\frac{1}{2}$ од најблиската страна на квадратот ($i=1,2,...,k$) го нарекуваме $i-$та рамка. Полињата на $i-$тата рамка ги боиме во црно за непарно i, а во бело за парно i. Сега секое поле на таблата (обоено во било која боја) е соседно со точно две црни полиња. Бидејќи имаме $2k(k+1)$ црни полиња, мораме да означиме најмалку $k(k+1)$ поле. Останува да докажеме дека овој број може да се достигне. Во секоја црна рамка да го означиме полето во долниот лев агол и полето непосредно над него, а потоа одејќи долж оваа рамка во насока на движењето на стрелката на часовникот, наизменично прескокнуваме и означуваме по две полиња. Лесно се гледа дека секое поле има точно по едно означено соседно поле, а се означени $2(2k-1)+2(2k-5)+2(2k-9)+...=k(k+1)$ полиња.

Според тоа, одговорот на задачата е $k(k+1)$.

Забелешка. На сличен начин може да се решат случаите кога $n=4k-1$ и $n=4k+1$. Во општи случај одговорот е $(2[\frac{n}{4}]+1)(n-2[\frac{n}{4}])$.

4. Определи ги сите парови природни броеви (n,p) такви што
   1) p е прост број,
   2) $n \le 2p$ и
   3) $n^{p-1} \mid (p-1)^n+1$.

   Решение. Единствени решенија за $n<3$ или $p<3$ се $(2,2)$ и $(1,p)$ за произволен прост број p. Понатаму, ќе сметаме дека p, а со само тоа и n е непарен број.

   Нека q е најмалиот прост делител на бројот n. Од $q \mid (p-1)^n+1 \mid (p-1)^{2n}-1$ следува дека редот k на бројот $p-1$ по модул q е делител на $2n$. Од друга страна, знаеме дека $k \mid q-1$, па затоа $k \mid \mathrm{NZD}(2n,q-1)=2$. Според тоа, $q \mid (p-1)^2-1=p(p-2)$. Притоа не е можно $q \mid p-2$, бидејќи тогаш

   $$(p-1)^n+1 \equiv 2 (\operatorname{mod} q).$$

   Значи, $q=p$ и бидејќи $n<2p$ заклучуваме дека $n=p$. Сега, од 3) следува дека

   $$p^{p-1} \mid (p-1)^p+1=p^p-\tbinom{p}{1}p^{p-1}+\tbinom{p}{2}p^{p-2}-...-\tbinom{p}{p-2}p^2+\tbinom{p}{p-1}p. \quad (1)$$

   Меѓутоа, на десната страна во (1) сите собирци освен последниот се деливи со p^3, па затоа $p^3 \nmid (p-1)^p+1$. Затоа $p=3$. Навистина, парот $(n,p)=(3,3)$ ги задоволува условите на задачата.

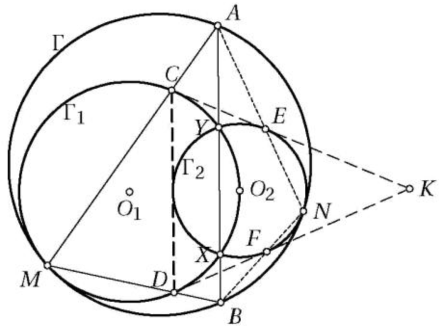
5. Кружниците Γ_1 и Γ_2 се наоѓаат во внатрешноста на кружницата Γ и ја допираат Γ во различни точки M и N, соодветно. Кружницата Γ_1 минува низ центарот на кружницата Γ_2. Правата која што минува низ пресечните точки на кружниците Γ_1 и Γ_2 ја сече кружницата Γ во точките A и B. Правите MA и MB ја сечат Γ_1 во точките C и D, соодветно. Докажи, дека правата CD е тангента на кружницата Γ_2.

   Решение. *Прв начин*. Нека кружниците Γ_1 и Γ_2 се сечат во точките X и Y, а правите NA и NB ги сечат кружниците Γ_1 и Γ_2 во точките E и F, соодветно (види цреж). При хомотетија со центар M која Γ_1 ја пресликува во Γ точките C и D се пресликуваат во точките A и B соодветно, па затоа

$CD \parallel AB$. Од

$$\overline{AC} \cdot \overline{AM} = \overline{AX} \cdot \overline{AY} = \overline{AE} \cdot \overline{AN}$$

следува дека точките C, E, M, N лежат на една кружница, па затоа $\measuredangle ACE = \measuredangle ANM = \measuredangle ABM = \measuredangle CDM$. Оттука следува дека правата CE е тангента на кружницата Γ_1. Аналогно CE е тангента на Γ_2, а правата DF е тангента на кружниците Γ_1 и Γ_2.



Со K да ја означиме пресечната точка на правите CE и DF, а со O_1 и O_2 центрите на кружниците Γ_1 и Γ_2. Точката O_1 е средина на помалиот лак CD на кружницата опишана околу триаголникот CDK. Бидејќи точката O_2 припаѓа на симетралата на $\measuredangle CDK$ и $\overline{O_1C} = \overline{O_1D} = \overline{O_1O_2}$, добиваме дека O_2 е центар на впишаната кружница во триаголникот CDK (т.е. Γ_2 е впишаната кружница) или центар на припишаната кружница наспроти темето K. Во двата случаја Γ_2 ја допира правата CD.

Втор начин. Со r_1, r_2, r да ги означиме радиусите на кружниците Γ_1 Γ_2, Γ, соодветно. Треба да докажеме дека растојанието $d(O_2, CD)$ од точката O_2 до правата CD е еднакво на r_2.

Хомотетијата со центар M и коефициент $\frac{r}{r_1}$ ги пресликува Γ_1, C, D во Γ, A, B соодветно, па затоа $CD \parallel AB$ и

$$d(C, AB) = \tfrac{r-r_1}{r} d(M, AB).$$

Ако R е пресечната точка на правите O_1O_2 и XY, тогаш

$$d(O_2, CD) = \overline{O_2R} + \tfrac{r-r_1}{r} d(M, AB),$$

т.е.

$$d(O_2, CD) = \overline{O_2R} + \tfrac{r-r_1}{r}(\overline{O_1O_2} - \overline{O_2R} + r_1 \cos \measuredangle OO_1O_2), \qquad (1)$$

бидејќи точките O, O_1 и M се колинеарни. Понатаму,

$$\overline{O_1X} = \overline{O_1O_2} = r_1, \overline{OO_1} = r - r_1, \ \overline{OO_2} = r - r_2 \text{ и } \overline{O_2X} = r_2,$$

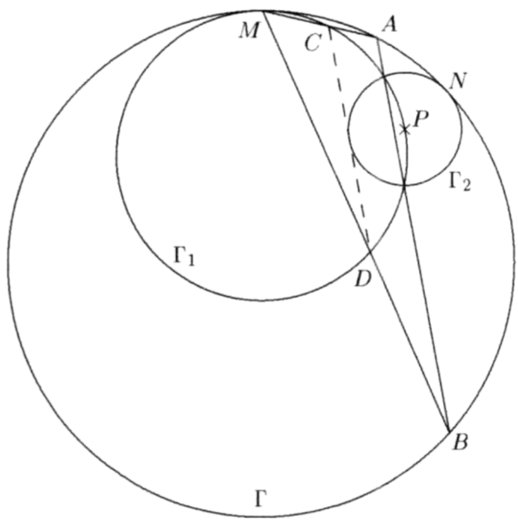
па од косинусната теорема за триаголниците OO_1O_2 и XO_1O_2 следува

$$\cos \measuredangle OO_1O_2 = \tfrac{2r_1^2 - 2rr_1 + 2rr_2 - r_2^2}{2r_1(r-r_1)} \text{ и } \overline{O_2R} = \tfrac{r_2^2}{2r_1},$$

па од (1) следува $d(O_2, CD) = r_2$.

Трет начин. Координатниот почеток ќе го поставиме во центарот на кружницата Γ , а нејзиниот радиус нека биде еднаков на 1 (цртеж долу. Равенката на кружницата е $x^2+y^2=1$. Нека центарот на гружницата Γ_1 е во точката $(0,y_1)$. Тогаш нејзината равенка е $x^2+(y-y_1)^2=(1-y_1)^2$, односно

$$x^2+y^2-2yy_1+2y_1-1=0\,. \qquad (1)$$



Точката M има координати $(0,1)$. Центарот на кружницата Γ_2 нека е во точката $P(x_2,y_2)$. Имаме $\overline{PN}=1-\sqrt{x_2^2+y_2^2}$, па затоа равенката на на оваа кружница е $(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=(1-\sqrt{x_2^2+y_2^2})^2$, односно

$$x^2+y^2-2xx_2-2yy_2+2\sqrt{x_2^2+y_2^2}-1=0\,. \qquad (2)$$

Понатаму, бидејќи Γ_1 минува низ центарот на Γ_2, важи равенството

$$x_2^2+(y_2-y_1)^2=(1-y_1)^2\,. \qquad (3)$$

Правата низ точките A и B е радикална оска за кружниците Γ_1 и Γ_2 и затоа нејзината равенка се добива со одземање на равенките (1) и (2). Според тоа, равенката на правата AB е

$$xx_2+yy_2-yy_1+y_1-\sqrt{x_2^2+y_2^2}=0\,. \qquad (4)$$

Радиусите на кружниците Γ и Γ_1 се еднакви на 1 и $1-y_1$, па затоа од хомотетијата $\chi=\chi_{M,1-y_1}$ важи $\chi(A)=C$ и $\chi(B)=D$. СПоред тоа, $CD\,||\,AB$, па затоа равенката на правата CD е

$$xx_2+y(y_2-y_1)+k=0\,. \qquad (5)$$

Коефициентот k го определуваме од условот $\frac{d(M,CD)}{D(M,AB)}=1-y_1$, каде што со $d(M,AB)$ и $d(M,CD)$ е означено растојанието од точката M до правата

AB и CD, соодветно. Бидејќи

$$d(M,AB) = \frac{y_2-y_1+y_1-\sqrt{x_2^2+y_2^2}}{\sqrt{x_2^2+(y_2-y_1)^2}}, \tag{6}$$

$$d(M,CD) == \frac{y_2-y_1+k}{\sqrt{x_2^2+(y_2-y_1)^2}}, \tag{7}$$

добиваме дека

$$k = (1-y_1)(y_2-\sqrt{x_2^2+y_2^2})+y_1-y_2. \tag{8}$$

Задачата ќе биде решена ако докажеме дека растојанието $d(P,CD)$, од центарот $P(x_2,y_2)$ на кружницата Γ_2 до правата CD, е еднакво на нејзиниот радиус $r_2 = 1-\sqrt{x_2^2+y_2^2}$. Ако од (8) за k замениме во (8) и ја искористиме формулата за растојанието од точка до права добиваме

$$d(P,CD) = \frac{x_2^2+y_2(y_2-y_1)+(1-y_1)(y_2-\sqrt{x_2^2+y_2^2})+y_1-y_2}{\sqrt{x_2^2+(y_2-y_1)^2}}. \tag{9}$$

Сега, од (3) добиваме $\sqrt{x_2^2+(y_2-y_1)^2} = 1-y_1$ и ако замениме во (9) добиваме

$$d(P,CD) = \frac{x_2^2+y_2(y_2-y_1)+(1-y_1)(y_2-\sqrt{x_2^2+y_2^2})+y_1-y_2}{1-y_1} = 1-\sqrt{x_2^2+y_2^2},$$

со што задачата е решена.

6. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(x-f(y)) = f(f(y))+xf(y)+f(x)-1,$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Нека $f(0)=c$. За $x=y=0$ добиваме $f(-c)=f(c)+c-1$, па затоа $c\neq 0$. Да го разгледаме множеството $A=\{f(x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$. Ако во почетната равенка ставиме $x=f(y)$ добиваме $f(x)=\frac{c+1}{2}-\frac{x^2}{2}$, за секој $x\in A$. Уште повеќе, за $u,v\in A$ имаме

$$f(u-v) = f(u)+uv+f(v)-1 = c-\frac{u^2+v^2}{2}+uv = c-\frac{(u-v)^2}{2}.$$

Останува да забележиме дека за секој $x\in\mathbb{R}$ постојат $u,v\in A$ такви што $u-v=x$. Навистина, почетната равенка за $y=0$ дава

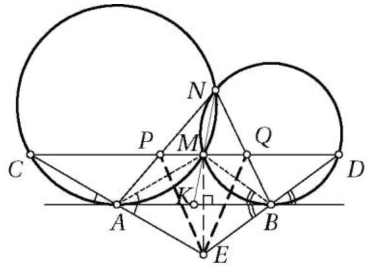
$$f(x-c)-f(x) = cx+f(c)-1,$$

и вредностите на десната страна на последното равенство се сите реални броеви.

Според тоа, $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Непосредно се проверува дека последната функција ги задоволува условите на задачата.

XLI олимпијада

1. Кружниците Γ_1 и Γ_2 се сечат во точките M и N. Нека правата AB ги допира кружниците Γ_1 и Γ_2 во точките A и B соодветно, така што точката M е поблиску до правата AB од точката N. Нека правата која минува низ точката M и е паралелна со правата AB по втор пат ги сече кружниците Γ_1 и Γ_2 во точките C и D соодветно. Правите CA и DB се сечат во точката E, правите CA и DB се сечат во точката E, правите AN и CD во точката P, а правите BN и CD во точката Q. Докажи дека $\overline{EP}=\overline{EQ}$.



Решение. Нека правите MN и AB се сечат во точката K. Од степенот на точката K во однос на кружниците Γ_1 и Γ_2 следува

$$\overline{KA}^2=\overline{KM}\cdot\overline{KN}=\overline{KB}^2,$$

т.е. $\overline{KA}=\overline{KB}$, што значи дека K е средина на отсечката AB. Но правата CD е паралелна на правата AB, што значи дека PQ е паралелна на AB. Сега, бидејќи K е средина на отсечката AB заклучуваме дека M е средина на отсечката PQ. Аголот меѓу тангентата AB и тетивата AM е еднаков на аголот над тетивата AM, т.е. $\measuredangle BAM=\measuredangle ACM$, а $\measuredangle ACM=\measuredangle EAB$ како агли со паралелни краци, па затоа

$$\measuredangle BAM=\measuredangle ACM=\measuredangle EAB$$

На потполно ист начин заклучуваме дека $\measuredangle ABM=\measuredangle EBA$, па затоа точките E и M се симетрични во однос на правата AB. Според тоа, $EM\perp AB\parallel PQ$. Конечно, триаголниците EMP и EMQ се складни, па затоа $\overline{EP}=\overline{EQ}$.

2. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи, дека

$$(a-1+\tfrac{1}{b})(b-1+\tfrac{1}{c})(c-1+\tfrac{1}{a})\le 1.$$

Решение. Од $abc=1$ следува дека $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$ за некои $x,y,z>0$. Даденото неравенство се сведува на неравенството

$$\frac{x-y+z}{y}\cdot\frac{y-z+x}{z}\cdot\frac{z-x+y}{x}\le 1. \tag{1}$$

Ги воведуваме ознаките $p=z-x+y, q=x-y+z, r=y-z+x$ и неравенството (1) го запишуваме во обликот

$$8pqr\le(p+q)(q+r)(r+p). \tag{2}$$

Меѓу броевите p,q,r најмногу еден е негативен. Навистина, ако два од броевите p,q,r се негативни, на пример p и q, тогаш

$$0 > p+q = z-x+y+(x-y+z) = 2z > 0,$$

што е противречност, а ако сите три броја се негативни, тогаш

$$0 > p+q+r = z-x+y+(x-y+z)+(y-z+x) = x+y+z > 0,$$

што повторно е противречност. На пример, нека $p<0$. Тогаш левата страна на (2) е негативна, а десната страна е позитивна. Ако $p,q,r \geq 0$, тогаш неравенството (2) се добива со множење на неравенствата

$$p+q \geq 2\sqrt{pq}\,,\ q+r \geq 2\sqrt{qr} \text{ и } r+p \geq 2\sqrt{rp}\,.$$

3. Нека $n \geq 2$. На хоризонтална права се наоѓаат n болви но така што не се сите во една точка. За позитивен број λ *потез* се дефинира на следниов начин: Се избираат две болви кои се наоѓаат во произволни точки точки A и B при што точката A се наоѓа лево од точката B. Болвата од точката A скока во точката C, која на дадената права се наоѓа десно од B така што важи $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \lambda$.

Определи ги сите вредности на λ така што за секоја точка M на дадената права и произволен почетен распоред на $n-$те болви постои конечна низа потези после која сите болви ќе се најдат десно од точката M.

Решение. Ќе докажеме дека за $\lambda \geq \frac{1}{n-1}$ сите болви може да отидат произволно далеку во десно. Со d и δ да го означиме најголемото и најмалото растојание меѓу две болви во дадениот момент, соодветно. Јасно, $d \geq (n-1)\delta$. Ако крајната лева болва ја прескокне крајната десна болва, тогаш најмалото растојание меѓу две болви нема да се намали бидејќи $\lambda d \geq \delta$, а притоа позицијата на крајната десна болва се поместила во десно за најмалку δ. Со низа на вакви скокови на болвите се постигнува саканата цел.

Сега нека $\lambda < \frac{1}{n-1}$. На секоја болва нека и ја придружиме координатата на нејзината положба на реалната права. Со w_k и s_k да ги означиме координатата на крајната десна болва и збирот на координатите на сите болви по k скокови, соодветно. Ако во $(k+1)-$от скок болвата од точка a прескокне преку болвата во точка b во точка c, тогаш

$$s_{k+1} - s_k = c - a = \tfrac{1+\lambda}{\lambda}(c-b) \geq \tfrac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1} - w_k)\,.$$

Ако за $k = 0,1,2,...,i-1$ ги собереме овие неравенства добиваме

$$nw_i \geq s_i \geq s_0 + \tfrac{1+\lambda}{\lambda}(w_i - w_0)\,,$$

т.е.

$$(\tfrac{1+\lambda}{\lambda} - n)w_i \leq \tfrac{1+\lambda}{\lambda} w_0 - s_0\,,$$

што покажува дека низата w_i е ограничена бидејќи $\frac{1+\lambda}{\lambda}-n>0$. Според тоа, во овој случај сите болви не може да стасаат произволно далеку.

4. Маѓионичар има 100 карти нумерирани со броевите од 1 до 100. Тој ги става сите карти во три кутии – црвена, бела и сина, така што секоја кутија содржи барем една карта. Гледач од публиката прво избира две кутии, а потоа избира по една карта од секоја од избраните кутии и го соопштува збирот на броевите на избраните карти. Знаејќи го тој збир маѓионичарот ја определува кутијата од која не е избрана карта.
На колку начини маѓионичарот може да ги распореди картите во кутиите така што овој трик секогаш ќе биде успешен? (Два распореди се различни ако барем една карта не е двата пати ставена во иста кутија.)
Решение. Нека a,b,c и d се карти такви што a,b,c се во различни кутии и $c+d=a+b$. Тогаш картите c и d мора да се во иста кутија, бидејќи во спротивно ако гледачот го соопшти збирот $a+b$ маѓионичарот нема да може да даде сигурен одговор.
Нека претпоставиме дека за некој i картите $i,i+1,i+2$ се во различни кутии. Бидејќи $i+(i+3)=(i+1)+(i+2)$, заклучуваме дека картите i и $i+3$ се во иста кутија. Слично, $i-1$ е во иста кутија како $i+2$ (ако $i>1$). Со едноставна индукција се докажува дека картите 1, 4, 7, ..., 100 се во една кутија, картите 2, 5, ..., 98 во друга и картите 3, 6, ..., 99 во трета кутија. Така во овој случај имаме 6 можни распореди.
Да претпоставиме дека не постојат три последователно нумерирани карти кои не се во различни кутии. Нека картата 1 е во кутијата A и нека b и c се картите со најмали броеви кои се во кутиите B и C, соодветно, при што на пример $b<c$. Картата $b-1$ е во кутијата A, па по претпоставка $b+1$ не е во C, што значи $c>b+1$. Ако сега $c<100$, тогаш од

$$b+c=(b-1)+(c+1)$$

следува дека $c+1$ е во A, но тогаш од

$$b+(c+1)=(b+1)+c$$

следува дека $b+1$ е во C, што е противречност. Според тоа, $c=100$, и тоа е единствената карта во C. Понатаму, од

$$99+b=100+(b-1)$$

следува дека 99 е во B. Сега, кутијата A не може да содржи ниту една од картите k за $2\le k\le 99$, бидејќи во спротивно од

$$99+k=100+(k-1)$$

ќе следува дека $k-1$ е во C, што не е можно. Според тоа, во A е само картата 1, а картите 2, 3, ..., 99 се во B. И во овој случај имаме 6 можни распореди, па затоа вкупнот број распореди е 12.

5. Дали постои природен број n кој е делив со точно 2000 различни прости броеви, таков што бројот 2^n+1 е делив со n?

Решение. Со индукција по k ќе докажеме дека за секој $k\in\mathbb{N}$ постои $n_k\in\mathbb{N}$ кој има точно k различни прости делители и важи $n_k\,|\,2^{n_k}+1$ и $3\,|\,n_k$.

За $k=1$ бројот $n_1=3$ го задоволува горното тврдење. Нека претпоставиме дека $k\ge 1$ и $n_k=3^a m$, каде $3\nmid m$, па m има $k-1$ прости делители. Тогаш бројот $3n_k=3^{a+1}m$ има точно k прости делители и

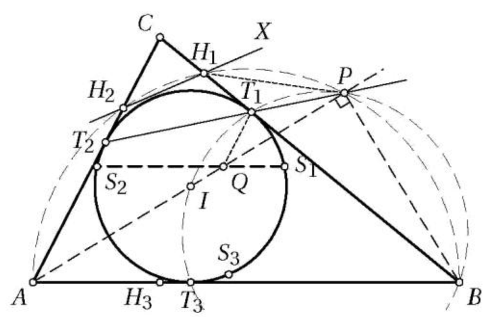
$$2^{3n_k}+1=(2^{n_k}+1)(2^{2n_k}-2^{n_k}+1)$$

е делив со $3n_k$, бидејќи $3\,|\,2^{2n_k}-2^{n_k}+1$. Ќе земеме прост број p кој не е делител на n_k и нека $n_{k+1}=3pn_k$. Доволно е да се земе p така што $p\,|\,2^{3n_k}+1$ и $p\nmid 2^{n_k}+1$.

Последното е можно, бидејќи за секој природен број $a>2$ постои прост број p кој е делител на $a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$, но не е делител на $a+1$. Навистина, од $a^2-a+1=(a+1)(a-2)+3$ следува дека $\mathrm{NZD}(a+1,a^2-a+1)\,|\,3$ и $3^2\nmid a^2-a+1$, па за p може да се земе било кој прост делител на бројот a^2-a+1 поголем од 3.

6. Нека AH_1, BH_2, CH_3 се висините на остроаголниот триаголник ABC. Впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните BC, CA, AB во точките T_1, T_2, T_3, соодветно. Нека правите l_1, l_2, l_3 се симетрични на правите H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 во однос на правите T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2, соодветно. Докажи дека правите l_1, l_2, l_3 определуваат триаголник чии темиња лежат на впишаната кружница на триаголникот ABC.

Решение. За аглите на триаголникот ABC ќе ги користиме стандардните ознаки α,β,γ. Нека I е центарот на впишаната кружница на триаголникот ABC и нека точките S_1, S_2, S_3 се симетрични на точките T_1, T_2, T_3 во однос на правите AI, BI, CI, соодветно. Ќе докажеме



дека бараниот триаголник е триаголникот $S_1S_2S_3$. Нека правата AI ја сече правата T_1T_2 во точката P. Бидејќи $\measuredangle BIP = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = \measuredangle BT_1P$, четириаголникот BIT_1P е тетивен, па затоа важи $\measuredangle APB = \measuredangle IT_1B = 90^\circ$. Оттука следува дека точките A, B, P, H_1 лежат на една кружница, па затоа

$$\measuredangle APH_1 = \measuredangle ABH_1 = \beta = 2\measuredangle IBT_1 = 2\measuredangle APT_1,$$

што значи дека правите H_1P и AP се симетрични во однос на правата T_1T_2. Според тоа, точката $Q \in l_3$ која е симетрична на точката H_1 во однос на T_1T_2 лежи на правата AP.

Сега,

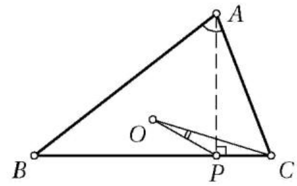
$$\measuredangle T_1QS_1 = 2\measuredangle T_1QP = 2\measuredangle T_1H_1P = 2\measuredangle BAP = \alpha = \measuredangle CH_1H_2 = \measuredangle T_1H_1X$$

за произволна точка X на правата H_1H_2 (важи $H_2 - H_1 - X$), од каде заклучуваме дека правата QS_1 е симетрична на правата H_1H_2 во однос на T_1T_2, т.е. $S_1 \in l_3$. Аналогно важи $S_2 \in l_3$, $S_1, S_3 \in l_2$ и $S_2, S_3 \in l_1$.

XLII олимпијада

1. Нека ABC е остроаголен триаголник, O е центар на неговата опишана кружница и P е подножјето на висината повлечена од темето A кон страната BC. Ако $\measuredangle BCA \geq \measuredangle ABC + 30^\circ$, докажи дека $\measuredangle CAB + \measuredangle COP < 90^\circ$.

Решение. Бидејќи $\measuredangle OCP = 90^\circ - \measuredangle A$, треба да докажеме дека $\measuredangle OCP > \measuredangle COP$, т.е. $\overline{OP} > \overline{CP}$. Според неравенството на триаголник доволно е да докажеме дека $\overline{CP} < \frac{1}{2}\overline{CO} = \frac{1}{2}R$. Навистина, од правоаголниот триаголник ACP и синусната теорема за триаголникот ABC следува



$$\begin{aligned}\overline{CP} = \overline{AC}\cos\gamma &= 2R\sin\beta\cos\gamma \\ &\leq 2R\sin\beta\cos(\beta+30^\circ) \\ &= R(\sin(2\beta+30^\circ) - \sin 30^\circ) < \tfrac{1}{2}R.\end{aligned}$$

2. Докажи, дека

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

за секои позитивни реални броеви a,b,c.

Решение. *Прв начин*. Ќе определиме константа $k>0$ така што

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^k}{a^k+b^k+c^k}, \text{ за секои } a,b,c>0. \quad (1)$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(a^k+b^k+c^k)^2 \geq a^{2k-2}(a^2+8bc),$$

т.е. со неравенството

$$(a^k+b^k+c^k)^2 - a^{2k} \geq 8a^{2k-2}bc.$$

Од друга страна, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$(a^k+b^k+c^k)^2 - a^{2k} = (a^{2k}+b^k+c^k)(b^k+c^k) \geq 8a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{3k}{4}}c^{\frac{3k}{4}}.$$

Според тоа, неравенството (1) е исполнето за $k=\frac{4}{3}$. Сега, ако (1) го собереме со соодветните неравенства за $\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}$ и $\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$ го добиваме бараното неравенство.

Втор начин. Да означиме

$$x = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}},\ y = \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} \text{ и } z = \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}.$$

За броевите $x,y,z>0$ важи

$$f(x,y,z)=(\tfrac{1}{x^2}-1)(\tfrac{1}{y^2}-1)(\tfrac{1}{z^2}-1)=8^3. \qquad (1)$$

Треба да докажеме дека за броеви $x,y,z>0$ за кои е исполнет условот (1) важи $x+y+z\ge 1$.

Бидејќи функцијата f строго монотоно опаѓа по секоја променлива x,y,z, доволно е да докажеме дека ако $x,y,z>0$ и $x+y+z=1$, тогаш важи $f(x,y,z)\ge 8^3$. Бидејќи

$$\tfrac{1}{x^2}-1=\tfrac{(x+y+z)^2-x^2}{x^2}=\tfrac{(2x+y+z)(y+z)}{x^2},$$
$$\tfrac{1}{y^2}-1=\tfrac{(x+y+z)^2-y^2}{y^2}=\tfrac{(x+2y+z)(x+z)}{x^2},$$
$$\tfrac{1}{z^2}-1=\tfrac{(x+y+z)^2-z^2}{z^2}=\tfrac{(x+y+2z)(x+y)}{z^2},$$

неравенството $f(x,y,z)\ge 8^3$ е еквивалентно со неравенството

$$(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8^3x^2y^2z^2. \qquad (2)$$

Од неравенството межу аритметичката и геометриската средина следува

$2u+v+w\ge 4\sqrt[4]{u^2vw}$ и $u+v\ge 2\sqrt{uv}$,

па ако првото неравенство го земеме за броевите $2x,y,z; x,2y,z$ и $x,y,2z$, а второт за броевите x,y: y,z и z,x, а потоа добиените неравенства ги помножиме го добиваме неравенството (2).

3. На математички натпревар учествувале 21 момче и 21 девојче. Секој од нив решил најмногу 6 задачи. За секое момче и за секое девојче постои барем една задача која и двајцата ја решиле. Докажи, дека постои задача која ја решиле барем три момчиња и барем три девојчиња.

Решение. За една задача ќе велиме дека е *тешка за момчињата* ако ја решиле најмногу две момчиња, а *тешка за девојчињата* ако ја решиле најмногу две девојчиња.

Ќе го оцениме бројот на паровите момче-девојче такви што и двајцата решиле некоја задача тешка за момчињата. Да разгледаме произволно девојче. Според условот, меѓу шесте задачи кои ги решила, најмногу 5 се тешки за момчињата, т.е. овие задачи се решени од најмногу 2 момчиња. Според тоа, бројот на разгледуваните парови е помал или еднаков на $21\cdot 5\cdot 2=210$.

Слично, има најмногу 210 парови момче-девојче такви што и двајцата решиле некоја задача која е тешка за девојчињата. Меѓутоа, вкупниот број парови момче-девојче е $21^2=441$. Значи, во најмалку 21 пар задачата која и двајцата ја решиле не е тешка ниту за девојчињата ниту за момчињата. Јасно, оваа задача ја решиле најмалку три момчиња и најмалку три девојчиња.

4. Нека n е непарен природен број поголем од 1 и нека $k_1, k_2, ..., k_n$ се цели броеви. За секоја пермутација $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ на множеството $\{1, 2, ..., n\}$ нека

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i \ .$$

Докажи, дека постојат различни пермутации b и c такви што $n!$ е делител на бројот $S(b) - S(c)$.

Решение. Нека претпоставиме дека сите $n!$ броеви $S(a)$ се различни по модул $n!$. Тогаш збирот $\sum_a S(a)$ по сите пермутации е кунгруентна со

$$0 + 1 + ... + (n! - 1) = \tfrac{(n!-1)n!}{2} \equiv \tfrac{n!}{2} (\text{mod } n!)$$

Од друга страна, секој од броевите k_i во збирот $\sum_a S(a)$ се јавува со коефициент

$$(n-1)!(1 + 2 + ... + n) = \tfrac{n+1}{2} n! ,$$

а овој збир за непарен n е делив со $n!$. Затоа, $\sum_a S(a) \equiv 0 (\text{mod } n!)$, што е противречност.

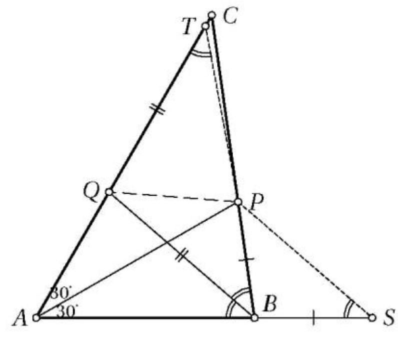
5. Во триаголникот ABC важи $\measuredangle CAB = 60^\circ$. Симетралата на аголот BAC ја сече страната BC во точка P, а симетралата на аголот ABC ја сече страната CA во точка Q. Ако $\overline{AB} + \overline{BP} = \overline{AQ} + \overline{QB}$, определи ги аглите на триаголникот ABC.

Решение. Нека S и T се точки на правите AB и AC, со распоред $A - B - S$ и $A - Q - T$, соодветно такви што $\overline{BS} = \overline{BP}$ и $\overline{QT} = \overline{QB}$. Дадено е дека

$$\overline{AS} = \overline{AB} + \overline{BP} = \overline{AQ} + \overline{QB} = \overline{AT} \ .$$

Бидејќи $\measuredangle PAS = \measuredangle PAT$, триаголниците APS и APT се складни, па затоа $\measuredangle ATP = \measuredangle ASP = \frac{1}{2}\beta = \measuredangle QBP$, т.е. $\measuredangle QTP = \measuredangle QBP$.

Ако точката P не е на правата BT, триаголниците QBP и QTP мора да се складни, па затоа P лежи на симетралата на $\measuredangle BQT$. Бидејќи AP е симетрала на $\measuredangle QAB$, P е центар на припишаната кружница на $\triangle QAB$, па затоа и BP симетрала на $\measuredangle QBS$. Според тоа,



$$\measuredangle PBQ = \tfrac{1}{2}\beta = \measuredangle PBS = 180^\circ - \beta ,$$

па затоа $\beta = 120^\circ$, што не е можно.

Според тоа, $P \in BT$, што значи дека $T \equiv C$. Сега, од $\overline{QC} = \overline{QB}$ добиваме $120^\circ - \beta = \gamma = \tfrac{1}{2}\beta$, па затоа $\beta = 80^\circ$ и $\gamma = 40^\circ$.

6. Нека a,b,c,d се природни броеви, такви што $a > b > c > d$ и

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c) . \qquad (1)$$

Докажи, дека $ab + cd$ не е прост број.

Решение. Равенството (1) е еквивалентно на равенството

$$a^2 - ac + b^2 = b^2 + bd + d^2 .$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}(ab + cd)(ad + bc) &= ac(b^2 + bd + d^2) + bd(a^2 - ac + c^2)\\ &= (ac + bd)(a^2 - ac + c^2).\end{aligned} \qquad (2)$$

Нека претпоставиме дека $ab + cd$ е прост број. Од $a > b > c > d$ следува дека $ab + cd > ac + bd > ad + bc$ и како $ab + cd$ е прост број следува дека

$$\mathrm{NZD}(ab + cd, ac + bd) = 1 .$$

Сега, од (2) следува дека $ac + bd \mid ad + bc$, што противречи на

$$ac + bd > ad + bc .$$

Конечно, од добиената противречност следува дека $ab + cd$ не е прост број.

XLIII олимпијада

1. Нека n е природен број и T е множество точки (x, y) во рамнината такви што x и y се ненегативни цели броеви и $x+y<n$. Секоја точка на множеството T е обоена црвено или сино. Ако точката (x, y) е обоена црвено, такви се и сите точки (x', y') на множеството T за кои истовремено важи $x' \leq x$ и $y' \leq y$. Множеството од n сини точки се нарекува X – *множество* ако сите точки имаат различни x-координати, а множеството од n сини точки се нарекува Y – множество ако сите точки имаат различнње y-координати. Докажи дека бројот на X – множествата е еднаков на бројот на Y -множествата.

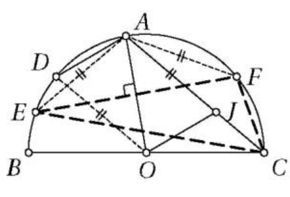
Решение. Нека a_i е бројот на сини точки на правата $x=i$, а b_i е бројот на сини точки на правата $y=i$. Треба да докажеме дека $a_0 a_1 ... a_{n-1} = b_0 b_1 ... b_{n-1}$. Всушност ќе докажеме дека низата $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ е пермутација на низата $b_0, b_1, ..., b_{n-1}$.

Тврдењето ќе го докажеме со индукција по бројот на црвените точки. Основата на индукцијата (кога сите точки се сини) е тривијална. Сега да воочиме црвена точка (x, y) со најголем збир $x+y$. Тогаш $a_x = b_y = n-x-y-1$. Ако оваа точка ја пребоиме во сино, тогаш a_x и b_y ќе се намалат за 1. Според индуктивната претпоставка $a_0, ..., a_x - 1, ..., a_{n-1}$ е пермутација на $b_0, ..., b_x - 1, ..., b_{n-1}$ и индуктивниот чекор одма следува.

2. Нека BC е дијаметар на кружница k со центар O, A е точка од k таква што $0^\circ < \measuredangle AOB < 120^\circ$, а D е средината на лакот AB на кружницата k кој не ја содржи точката C. Нека правата која минува низ O и е паралелна со DA ја сече правата AC во точката J, а симетралата на отсечката OA ја сече кружницата k во точките E и F. Докажи, дека J е центар на впишаната кружница во триаголникот CEF.

Решение. Од

$$\measuredangle BCA = \frac{1}{2} \measuredangle BOA = \measuredangle BOD$$



следува дека правите CA и OD се паралелни. По услов $AD \parallel OJ$, па затоа четириаголникот $JADO$ е паралелограм. Оттука следува дека

$$\overline{AJ} = \overline{OD} = \overline{OE} = \overline{AE} = \overline{AF},$$

па затоа

$$\measuredangle JFE = \measuredangle JFA - \measuredangle EFA = \measuredangle AJF - \measuredangle ECA = \measuredangle AJF - \measuredangle ACF = \measuredangle CFJ.$$

Последното значи дека FJ е симетрала на $\measuredangle EFC$. Сега од $\overline{AE} = \overline{AF}$ следува дека CJ е симетрала на $\measuredangle ECF$, па затоа J е центар на впишаната кружница во триаголникот CEF.

3. Определи ги сите парови природни броеви (m,n), $m,n\geq 3$ такви што

$$\frac{a^m+a-1}{a^n+a^2-1}$$

е природен број за бесконечно многу природни броеви a.

Решение. Нека $R(x)$ е остатокот при делењето на полиномот $F(x)=x^m+x-1$ со полиномот $G(x)=x^n+x^2-1$. Тогаш за бесконечно многу x, треба $R(x)$ да е делив со $G(x)$ и како $\deg R<\deg G$, за секој доволно голем $|x|$ ќе важи $|R(x)|<|G(x)|$, па затоа мора да важи $R(x)=0$. Значи, $R\equiv 0$, т.е. полиномот $F(x)$ е делив со полиномот $G(x)$.

Полиномот

$$H(x)=x^{m-n}G(x)-F(x)=x^{m-n+2}-x^{m-n}-x+1$$

е делив со $G(x)$ и очигледно $\frac{H(x)}{G(x)}$ не е константа, па затоа $\deg H\geq \deg G+1$, т.е. $m\geq 2n-1$.

Од друга страна, бидејќи $G(0)=-1$ и $G(1)=1$ добиваме дека полиномот $G(x)$ има барем една нула $\alpha\in(0,1)$. Тогаш важи $F(\alpha)=0$, т.е.

$$\alpha^m+\alpha=\alpha^n+\alpha=1.$$

Ако $m\geq 2n$, тогаш

$$1-\alpha=\alpha^m\leq(\alpha^n)^2=(1-\alpha^2)^2,$$

што е еквивалентно со

$$\alpha(1-\alpha)(\alpha^2+\alpha-1)\leq 0,$$

но тоа не е можно бидејќи

$$\alpha^2+\alpha-1>\alpha^m+\alpha-1=0.$$

Значи, $m=2n-1$. Според тоа, за некој $a\in\mathbb{Z}$ имаме

$$H(x)=(x-a)G(x)=x^{n+1}-ax^n+x^3-ax^2-x+a.$$

Сега лесно се добива дека $a=1$ и $(n,m)=(3,5)$.

4. Нека $n>1$ е природен број и нека $d_1,d_2,...,d_k$ се сите позитивни делители на бројот n, при што

$$1=d_1<d_2<...<d_k=n.$$

Нека $D=\sum_{i=1}^{k-1}d_id_{i+1}$.

а) Докажи, дека $D<n^2$.

б) Определи ги сите броеви n за кои D е делител на n^2.

Решение. а) Јасно, $n = d_i d_{k+1-i}$, т.е. $\frac{d_i}{n} = \frac{1}{d_{k+1-i}}$, па затоа

$$\frac{D}{n^2} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d_i d_{i+1}}{n^2} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{d_{k+1-i} d_{k-i}} \le \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d_{k+1-i} - d_{k-i}}{d_{k+1-i} d_{k-i}}$$
$$= \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{d_{k-i}} - \frac{1}{d_{k+1-i}}\right) = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_k} = 1 - \frac{1}{n} < 1,$$

што значи дека $D < n^2$.

б) Од решението под а) имаме

$$1 > \frac{D}{n^2} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{d_{k+1-i} d_{k-i}} \ge \frac{1}{d_1 d_2} = \frac{1}{d_2},$$

па затоа $d_1 = 1 < \frac{n^2}{D} \le d_2$. Според тоа, ако D е делител на n^2, тогаш мора да важи $\frac{n^2}{D} = d_2$, па затоа $k = 2$. Значи, природниот број $n > 1$ има точно два позитивни делител, односно n е прост број.

5. Определи ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што важи

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz), \qquad (1)$$

за секои $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

Решение. Ако во (1) ставиме $x = z = 0$ и $y = t$ добиваме $4f(0)f(y) = 2f(0)$. Ако $f(0) \ne 0$, тогаш $f(y) = \frac{1}{2}$, за секој $y \in \mathbb{R}$.

Нека $f(0) = 0$. Ако во (1) ставиме $z = t = 0$ добиваме

$$f(xy) = f(x)f(y), \text{ за секои } x, y \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Ако $f(y) = 0$ за некој $y \ne 0$, добиваме дека $f(x) = 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$. Затоа нека $f(y) \ne 0$ за секој $y \ne 0$. Да забележиме дека од (2) следува дека $f(x) = f(\sqrt{x})^2 > 0$ за секој $x > 0$, па од (1) за $t = x$ и $z = y$ следува

$$f(x^2 + y^2) = (f(x) + f(y))^2 \ge f(x^2),$$

за секои $x, y \ge 0$. Според тоа, функцијата f строго монотоно расте на $\mathbb{R}^+$.

Од (2) следува дека $f(1) = 1$. Понатаму, ако во (1)земеме $t = y$, тогаш од (2) по скратувањето со $f(y)$ добиваме

$$2(f(x) + f(z)) = f(x - z) + f(x + z), \text{ за секои } x, z \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Сега ако во (3) земеме $x = 0$ добиваме $f(z) = f(-z)$. Понатаму, користејќи ја (3) со индукција лесно се докажува дека $f(nx) = n^2 f(x)$ за секој $n \in \mathbb{N}$, а оттука следува дека $f(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n^2} f(m) = (\frac{m}{n})^2$ за секој рационален број $\frac{m}{n}$.

Конечно, бидејќи функцијата f монотоно расте за $x>0$ мора да важи $f(x)=x^2$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

Лесно се проверува дека функциите $f(x)=0,\ f(x)=\frac{1}{2},\ f(x)=x^2$ навистина се решенија на равенката (1).

6. Нека $k_1,k_2,...,k_n,(n\geq 3)$ се кружници со радиуси еднакви на 1 и центри $O_1,O_2,...,O_n$, соодветно. Докажи дека ако ниту една права нема заеднички точки со повеќе од две од дадените кружници, тогаш

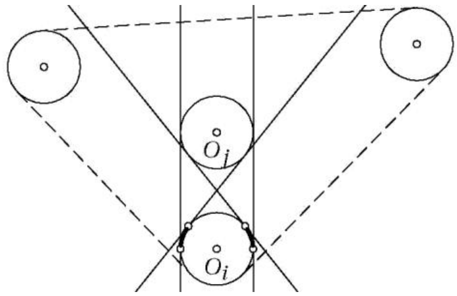
$$\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{O_iO_j}\leq\frac{(n-1)\pi}{4}.$$

Решение. Јасно,

$$\frac{2}{O_iO_j}=\sin\alpha_{ij}<\alpha_{ij},$$

каде $2\alpha_{ij}$ е аголот меѓу внатрешните заеднички тангенти на кружниците k_i и k_j. Затоа доволно е да докажеме дека

$$\sum_{i\neq j}\alpha_{ij}\leq(n-1)\pi.$$



За произволни $1\leq i,j\leq n,(i\neq j)$ да го разгледаме множеството k_{ij} од сите точки на кружницата k_i во кои тангентата на k_i ја сече или ја допира кружницата k_j. Множеството k_{ij} се состои од два лака со централен агол α_{ij}. Според условот на задачата множествата k_{ij} $(1\leq i,j\leq n)$ се заемно дисјунктни, па затоа важи $2\sum_{i\neq j}\alpha_{ij}\leq 2n\pi$.

Нека K е конвексната обвивка на кружниците $k_1,k_2,...,k_n$. Нејзината граница се состои од неколку отсечки и од лаци на кружници со вкупен збир на должини 2π. Овие лаци се дисјунктни со сите множества k_{ij}, па така всушност важи $2\sum_{i\neq j}\alpha_{ij}\leq 2(n-1)\pi$, со што доказот е завршен.

XLIV олимпијада

1. Нека A е подмножество на множеството $S=\{1,2,...,1000000\}$, кое содржи точно 101 елемент. Докажи, дека постојат броеви $t_1,t_2,...,t_{100}\in S$ такви што множествата
$$A_i=\{x+t_i \mid x\in A\},\ i=1,2,...,100$$
се по паров дисјунктни.

Решение. Да го разгледаме множеството $D=\{x-y \mid x,y\in A\}$. Јасно, множеството D има најмногу $101\cdot 100+1$ елемент. Понатаму, множествата $A_i=t_i+A$ и $A_j=t_j+A$ се дисјунктни ако и само ако $t_i-t_j\notin D$. Бараните броеви $t_1,t_2,...,t_{100}$ ќе ги избереме индуктивно.

Прво, да земеме произволен број $t_1\in S\setminus D$. Нека претпоставиме дека сме одбрале $k\le 99$ броеви $t_1,t_2,...,t_k\in D$ такви што разликата на било кои два од овие броеви не припаѓа на множеството D. За t_{k+1} е доволно да се избере било кој број од S кој не припаѓа на множествата $t_1+D,t_2+D,...,t_k+D$. Последното може да се направи бидејќи за секој i важи $|t_i+D|\le 101\cdot 100+1$, па затоа
$$|\bigcup_{i=1}^{k}(t_i+D)|\le 99\cdot(101\cdot 100+1)=999999<1000000.$$

2. Определи ги сите парови природни броеви (a,b) такви што $\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ е природен број.

Решение. Нека $a^2=k(2ab^2-b^3+1), k\in\mathbb{N}$. Јасно, $2ab^2\ge b^3$, па затоа важи $b\le 2a$. Од друга страна, ако $b\ge a$, тогаш $b^2\ge a^2\ge b^2(2a-b)+1$, па затоа во овој случај мора да е $b=2a$.

За дадени вредности на b и k, бројот a е корен на квадратната равенка
$$x^2-2kb^2x+k(b^3-1)=0. \qquad (1)$$
Оваа равенка има две решенија $a_1,a_2\in\mathbb{N}_0$. Нека $a_1\ge a_2$. Од Виетовите правила имаме $a_1+a_2=2kb^2$, па затоа $a_1\ge kb^2$. Повторно од Виетовите правила следува
$$0\le a_2=\frac{k(b^3-1)}{a_1}\le\frac{k(b^3-1)}{kb^2}<b$$
и од претходно изнесеното добиваме дека мора да важи $b=2a_2$ или $a_2=0$.

Ако $a_2=0$, тогаш $b=1$ и $a_1=2k$. Ако $b=2a_2$, тогаш ако во (1) земеме

$x = a_2$ и $b = 2a_2$ добиваме $k = a_2^2$, па наоѓаме $a_1 = 2kb^2 - a_2 = 8a_2^4 - a_2$.
Конечно, од претходно изнесеното следува дека единствени решенија се

$$(a,b) \in \{(2t,1), (t,2t), (8t^4 - t, 2t) \mid t \in \mathbb{N}\}.$$

Непосредно се проверува дека овие парови навистина се решенија на задачата.

3. Даден е конвексен шестаголник кај за кои секои две спротивни страни важи: растојанито меѓу нивните средини е еднакво на збирот на нивните должини помножен со $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Докажи, дека сите агли на овој шестаголник се еднакви?
(Конвексен шестаголник $ABCDEF$ има три пара спротивни старни: AB и DE, BC и EF, CD и FA.)

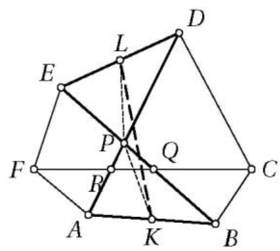
Решение. Нека $ABCDEF$ е дадениот шестаголник. Ќе го користиме следново тврдење.

Лема. Ако $\measuredangle XZY \geq 60^\circ$ и M е средина на отсечката XY, тогаш $\overline{MZ} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{XY}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $\triangle XYZ$ е рамностран.

Доказ. Нека Z' е точка таква што $\triangle XYZ'$ е рамностран и Z, Z' се на иста страна на правата XY. Тогаш Z е во внатрешноста на опишаната кружница околу $\triangle XYZ'$, па затоа $\overline{MZ} \leq \overline{MZ'} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{XY}$. Јасно, зна за равенство важи ако и само ако $Z \equiv Z'$. ■

Да означиме

$$AD \cap BE = P,\ BE \cap CF = Q \text{ и } CF \cap AD = R.$$



Нека претпоставиме дека $\measuredangle APB = \measuredangle DPE > 60^\circ$. Тогаш, ако K и L се средини на отсечките AB и DE, соодветно, од лемата следува

$$\overline{KL} \leq \overline{PK} + \overline{PL} < \frac{\sqrt{3}}{2}(\overline{AB} + \overline{DE}) = \overline{KL},$$

што е противречност. Според тоа, $\measuredangle APB \leq 60^\circ$.

Аналогно се докажува дека $\measuredangle BQC \leq 60^\circ$ и $\measuredangle CRD \leq 60^\circ$. Бидејќи

$$\measuredangle APB + \measuredangle BQC + \measuredangle CRD = 180^\circ,$$

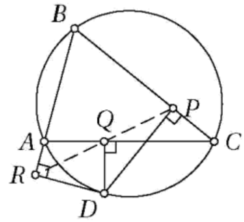
заклучуваме дека

$$\measuredangle APB = \measuredangle BQC = \measuredangle CRD = 60^\circ$$

и уште повеќе триаголниците APB, BQC и CRD мора да бидат рамнострани. Следува дека $\measuredangle ABC = \measuredangle ABP + \measuredangle QBC = 120^\circ$.

Аналогно се докажува дека и останатите агли на шестаголникот се еднакви на 120°.

4. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Нека P,Q и R се подножјата на нормалите повлечени од точката D на правите BC, CA и AB, соодветно. Докажи, дека $\overline{PQ}=\overline{QR}$ ако и само ако симетралите на аглите $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle ADC$ се сечат на правата AC.



Решение. Ако симетралите на аглите $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle ADC$ ја сечат отсечката AC во точките K и L, соодветно, тогаш важи

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AK}}{\overline{KC}} \text{ и } \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AL}}{\overline{LC}},$$

па затоа $K\equiv L$ е еквивалентно со $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$. Од друга страна, точките P и Q лежат на кружницата со дијаметар CD, па затоа

$$\overline{PQ}=\overline{CD}\sin\measuredangle PCQ=\overline{CD}\sin\measuredangle ACB=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{2r},$$

каде r е радиусот на кружницата $ABCD$. Слично, $\overline{QR}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AD}}{2r}$, па и $\overline{PQ}=\overline{QR}$ е еквивалентно со $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$.

5. Нека n е природен број и $x_1,x_2,...,x_n$ се реални броеви такви што $x_1\le x_2\le ...\le x_n$.

а) Докажи, дека

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2\le\frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2 .$$

б) Докажи, дека знак за равенство важи ако и само ако $x_1,x_2,...,x_n$ е аритметичка прогресија.

Решение. *Прв начин.* Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц применето на низите $|i-j|$ и $|x_i-x_j|$ следува

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}(i-j)^2\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2\right)\ge\left(\sum_{i,j=1}^{n}|i-j|\cdot|x_i-x_j|\right)^2, \qquad (1)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако постои λ таков што $x_i-x_j=\lambda(i-j)$, што значи ако и само ако $\{x_i\}$ е аритметичка прогресија. Останува да ги средиме двете страни на (1). Лесно се докажува, на пример со индукција, дека

$$\sum_{i,j=1}^{n}(i-j)^2=\frac{n^2(n^2-1)}{6} \text{ и } \sum_{i,j=1}^{n}|i-j|\cdot|x_i-x_j|=\frac{n}{2}\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j| .$$

Според тоа, неравенството (1) е еквивалентно на неравенството

$$\frac{n^2(n^2-1)}{6}\left(\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2\right)\geq\frac{n^2}{4}\left(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2,$$

кое е еквивалентно со даденото неравенство.

Втор начин. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$, (секој број можеме да го транслатираме за $\alpha=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$). Сега, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2=\left(2\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i\right)^2\leq\left(4\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)$$

$$=\frac{4n(n^2-1)}{3}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)=\frac{4(n^2-1)}{3}\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)$$

$$=\frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2.$$

6. Даден е прост број p. Докажи, дека постои прост број q таков што за секој цел број n бројот n^p-p не е делив со q.

Решение. *Прв начин.* Нека претпоставиме дека за секој прост број q постои цел број n таков што $n^p\equiv p(\bmod q)$. Знаеме дека за $q\not\equiv 1(\bmod p)$ степените n^p ги даваат сите можни остатоци по модул q. Затоа бројот q ќе го побараме во облик $q=kp+1, k\in\mathbb{N}$. Бидејќи $p^k\equiv n^{kp}=n^{q-1}\equiv 1(\bmod q)$, добиваме дека $q\mid p^k-1$ за секој таков q.

Нека q е прост делител на бројот $N=\frac{p^p-1}{p-1}=p^{p-1}+p^{p-2}+...+p+1$. Бидејќи $q\nmid p-1$ од $N\equiv p\equiv 1(\bmod p-1)$, следува дека редот на бројот p по модул q е p, па навистина е $q=kp+1$ за некој k. Сега од $q\mid \mathrm{NZD}(p^k-1,p^p-1)$ следува дека $q\mid p^{\mathrm{NZD}(p,k)}-1$, па затоа $\mathrm{NZD}(p,k)>1$, т.е. $p\mid k$. Понатаму, од $q=kp+1$ и $p\mid k$ следува дека $q\equiv 1(\bmod p^2)$. Последното значи дека сите прости делители на бројот N се од видот p^2x+1, што не е можно бидејќи $N\not\equiv 1(\bmod p^2)$.

Втор начин. Ако $p=2$, тогаш $q=3$ ги има саканите својства.

Нека p е непарен. Да го разгледаме бројот $N=1+p+p^2+...+p^{p-1}$. Јасно, N е непарен и $N\equiv p+1(\bmod p^2)$. Според тоа, $N\not\equiv 1(\bmod p^2)$ и затоа N има прост делител q за кој $q \not\equiv 1 (\bmod p^2)$. Ќе докажеме дека q ги има саканите својства.

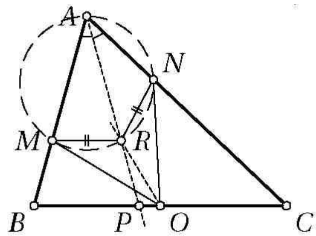
Бидејќи p не е делител на N, важи $q \neq p$. Освен тоа, ако претпоставиме дека q е делител на $p-1$, тогаш $N \equiv 1+1+...+1 = p (\bmod q)$, т.е. q е делител на p, што не е можно. Значи, q не е делител на $p-1$. Уште да забележиме дека од равенството $(p-1)N = p^p - 1$ следува дека $p^p \equiv 1 (\bmod q)$.

Нека претпоставиме дека $n^p \equiv p (\bmod q)$ за некој природен број n. Од претходните разгледувања следува дека q не е делител на n и $n \not\equiv 1 (\bmod q)$. Конгруенцијата $n^p \equiv p (\bmod q)$ ја степенуваме на степен p и добиваме $n^{p^2} \equiv p^p \equiv 1 (\bmod q)$.

Нека k е редот на n по модул q. Тогаш од малата теорема на Ферма следува дека k е делител на $q-1$, а од конгрунцијата $n^{p^2} \equiv 1 (\bmod q)$ следува дека k е делител на p^2. Од изборот на q следува дека $q-1$ не е делител на p^2, поа затоа $k = 1$ или $k = p$. Првото противречи на $n \not\equiv 1 (\bmod q)$. Во вториот случја добиваме $n^p \equiv 1 (\bmod q)$, од што заедно со $n^p \equiv p (\bmod q)$ добиваме $p \equiv 1 (\bmod q)$, што е противречност.

XLV олимпијада

1. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ таков што $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Кружницата со дијаметар BC ги сече страните AB и AC во точките M и N, соодветно. Со O да ја означиме средината на страната BC. Симетралите на $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle MON$ се сечат во точка R. Докажи, дека кружниците опишани околу $\triangle BMR$ и $\triangle CNR$ се сечат во точка која припаѓа на страната BC.



Решение. Јасно, O е центар на кружницата со дијаметар BC. Затоа симетралата на $\measuredangle MON$ е симетрала на отсечката MN. Тоа значи дека $\overline{OM} = \overline{ON}$, и како R припаѓа на симетралата на $\measuredangle MON$ заклучуваме дека $\overline{RM} = \overline{RN}$. Бидејќи $CM \perp AB$ и $BN \perp AC$, четириаголникот $MBCN$ е тетивен, па затоа $\measuredangle MAN = \measuredangle ABC$ и $\measuredangle NMA = \measuredangle ACB$. Значи, $\triangle ANM \sim \triangle ABC$, па од $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ следува дека $\overline{AM} \neq \overline{AN}$. Според тоа, точката R е пресек на симетралата на $\measuredangle MAN$ и симетралата на отсечката MN, па затоа лежи на кружницата опишана околу $\triangle AMN$.

Нека правите AR и BC се сечат во точката P. Тогаш

$$\measuredangle MRA = \measuredangle MNA = \measuredangle ABP \text{ и } \measuredangle NRA = \measuredangle NMA = \measuredangle ACP,$$

што значи дека четириаголниците $RMBP$ и $RNCP$ се тетивни, т.е. P е пресечна точка на кружниците опишани околу $\triangle BMR$ и $\triangle CNR$.

2. Определи ги сите полиноми $P(x)$ со реални коефициенти такви што

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c) \qquad (1)$$

за секои реални броеви a,b,c такви што $ab+bc+ca=0$.

Решение. Нека $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. За секој $x \in \mathbb{R}$ подредената тројка $(a,b,c) = (6x - 3x, 2x)$ го задоволува условот $ab+bc+ca=0$. Со замена во (1) добиваме

$$P(3x) + P(5x) + P(-8x) = 2P(7x), \text{ за секој } x \in \mathbb{R}.$$

Оттука со споредување на коефициентите следува дека

$$3^i + 5^i + (-8)^i - 2\cdot 7^i = 0 \text{ за секој } a_i \neq 0.$$

Ако i е непарен, тогаш $8^i = (3+5)^i > 3^i + 5^i$ и затоа $3^i + 5^i + (-8)^i - 2\cdot 7^i < 0$. Ако $i \geq 6$ е парен број, од $(\frac{8}{7})^i > 2$ следува дека $3^i + 5^i + (-8)^i - 2\cdot 7^i > 0$. Непосредно се проверува дека $3^0 + 5^0 + (-8)^0 - 2\cdot 7^0 = 1$ и

$$3^2+5^2+(-8)^2-2\cdot 7^2=3^4+5^4+(-8)^4-2\cdot 7^4=0\,.$$

Затоа $a_i=0$, за $i\neq 2,4$. Според тоа, $P(x)=a_2x^2+a_4x^4$, за некои реални броеви a_2 и a_4.

Ќе докажеме дека полиномите од видот $P(x)=a_2x^2+a_4x^4,\, a_2,a_4\in\mathbb{R}$ го задоволуваат условот на задачата. Последното е доволно да го докажеме за полиномите $P_1(x)=x^2$ и $P_2(x)=x^4$.

Ако го искористиме условот $ab+bc+ca=0$, zа полиномот $P_1(x)=x^2$ добиваме

$$\begin{aligned}P_1(a-b)+P_1(b-c)+P_1(c-a)&=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)\\&=2a^2+2b^2+2c^2+4(ab+bc+ca)\\&=2P_1(a+b+c).\end{aligned}$$

За полиномот $P_2(x)=x^4$ имаме

$$\begin{aligned}P_2(a+b+c)&=(a+b+c)^2(a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)^2\\&=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}P_2(a-b)+P_2(b-c)+P_2(c-a)&=2(a^4+b^4+c^4)+6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\\&\quad-4(a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b),\end{aligned}$$

што значи дека треба да го докажеме равенството

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=2(a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b)\,. \tag{1}$$

За да го докажеме равенството (1) ќе искористиме дека

$$0=(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2\,,$$

па ако замениме во (1) го добиваме еквивалентното равенство

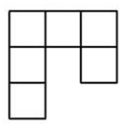
$$a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b+a^2bc+ab^2c+abc^2=0\,,$$

кое е еквивалентно со точното равенствот.

$$(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)=0$$

Конечно, бараниоте полиноми се од видот $P(x)=a_2x^2+a_4x^4,\, a_2,a_4\in\mathbb{R}$.

3. Кука ќе ја наречеме *кука* фигурата прикажана на цртежот десно, која составена од шест единечни квадрати, или било која друга фигура која е добиена од оваа фигура со примена на ротации и осни симетрии. Определи ги сите $m\times n$ правоаголници кои можат да се покријат со куки така што

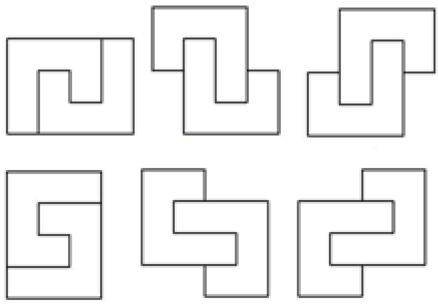


1) правоаголникот е покриен без празнини и преклопувања,

2) ниту еден дел од некоја кука не е надвор од правоаголникот.

Решение. *Одговор*. Сите правоаголници $m\times n$ за кои $12\,|\,mn$, барем еден од броевите m,n е делив со 4 и $m,n\notin\{1,2,5\}$.

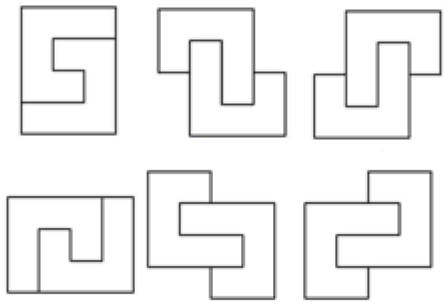
Нека претпоставиме дека правоаголникот $m\times n$ може да се покрие со куки. За секоја кука H нејзиниот „внатрешен“ квадрат е покриен точно со една кука K. Од друга страна, H го покрива внатрешниот квадрат на K, па затоа сите куки можат да се поделат на парови $\{H,K\}$ кои формираат една од следниве фигури со плоштина 12.



Значи, нашиот правоаголник е покриен со вакви фигури. Тоа значи дека $12\,|\,mn$. Следниве случаи ги исцрпуваат сите можности.

1) $m=4a$ и $n=3b$. Тогаш правоаголникот очигледно се покрива со правоаголници 4×3, што значи дека се покрива со куки.
2) $m=12a$. Јасно, ако $n=1,2$ тогаш правоаголникот не може да се покрие. Ако $n=5$, ако разгледување покривање на аголното поле, лесно следува дека покривањето не е можно. Затоа секој $n\notin\{1,2,5\}$ постојат природни броеви $k,l\in\mathbb{N}_0$ такви што $n=3k+4l$ (за $n=3,4,6,7,8$ последното е точно, а ако еточно за некој n, тогаш е точно и за $n+3$). Затоа правоаголникот $m\times n$ може да се подели на правоаголници 12×3 и 12×4, и оттука на правоаголници 4×3 и 3×4.
3) *Прв начин*. $m=2a,n=2b$, каде a и b се непарни броеви. Ќе докажеме дека таков правоаголник не може да се покрие со куки. Да воведеме координатен систем со кординатен почеток во долното лево поле и m е на $x-$ оската. Да ги обоиме полињата со координати (k,l), за $l=1,3,...,m-1$ и $l=1,3,...,n-1$ кога $k=4t+1$ и за $k=1,3,...,m-1$ и $l=2,4,...,n$ кога $k=4t+3$. Да забележиме дека вкупниот број обоени полиња е ab и тоа е непарен број. Непосредно се проверува дека секоја од трите фигури во горниот ред на цртежот (тип *A*) покрива по 3 обоени полиња, а секоја до трите фигури во долниот ред на цртежот (тип *B*) покрива 2 или 4 обоени полиња. Според тоа, имаме непарен рбој фигури од типот *A*. Со аналогно боење на непарните редови добиваме дека имаме непарен број фигури од типот *B*. Според тоа, вкупниот број на фигури од двата типа е парен, што значи дека mn е делив со 24, што е противречност.

   Втор начин. $m=2a,n=2b$, каде a и b се непарни броеви. Јасно, притоа вкупниот број фигури составени од две куки е е непарен. Имено, ако тој е парен, тоа значи дека mn е делив со 24, што е противречност.



Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека вкупниот број фигури прикажани во долниот ред на цртежот десно е непарен. Да ја обоиме секоја секоја четврта колона на таблата mn во црно. Тогаш секоја фигура од долниот ред на цртежот покрива по 3 црни полиња, а секоја фигура од горниот ред на цртежот покрива по 2 или 4 црни полиња. Значи, бројот на покриените црни полиња е непарен, што не е можно бидејќи има парен број црни полиња.

4. Нека $n \geq 3$ е природен број. Ако $t_1, t_2, ..., t_n$ се позитивни реални броеви такви што

$$n^2+1 > (t_1+t_2+...+t_n)(\tfrac{1}{t_1}+\tfrac{1}{t_2}+...+\tfrac{1}{t_n}),$$

тогаш за секои i, j, k такви што $1 \leq i < j < k \leq n$ броевите t_i, t_j, t_k се должини на страни на триаголник. Докажи!

Решение. Заради симетрија доволно е да докажеме дека $t_1 < t_2 + t_3$. По ослободување од заградите добиваме

$$\begin{aligned} n^2+1 &> \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{t_i} > n + \sum_{1\leq i<j\leq n} (\tfrac{t_i}{t_j}+\tfrac{t_j}{t_i}) \\ &= n + t_1(\tfrac{1}{t_2}+\tfrac{1}{t_3}) + \tfrac{1}{t_1}(t_2+t_3) + \sum_{(i,j)\neq(1,2),(1,3)} (\tfrac{t_i}{t_j}+\tfrac{t_j}{t_i}). \end{aligned}$$

Бидејќи броевите се позитивни, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме $\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i} \geq 2$ за $1 \leq i < j \leq n$, $\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3} \geq \frac{2}{\sqrt{t_1 t_2}}$ и $t_2+t_3 \geq 2\sqrt{t_2 t_3}$. Ставаме $a = \frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}}$ и добиваме дека

$$n^2+1 > n + 2\frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}} + 2\frac{\sqrt{t_2 t_3}}{t_1} + 2[\binom{n}{2} - 2] = 2a + \tfrac{2}{a} + n^2 - 4.$$

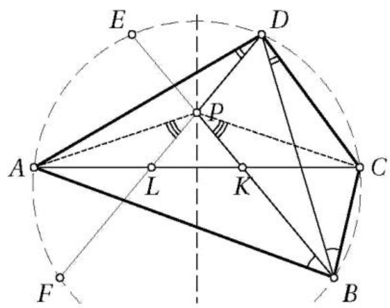
Според тоа, $2a + \frac{2}{a} - 5 < 0$, од каде што следува $\frac{1}{2} < a = \frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}} < 2$, па затоа $t_1 < 2\sqrt{t_2 t_3} \leq t_2 + t_3$.

Забелешка. Тврдењето на задачата е точно ако n^2+1 се замени со $(n+\sqrt{10}-3)^2$. Ова е најдобрата можна апроксимација.

5. Во конвексен четириаголник $ABCD$ дијагоналата BD не е симетрала ниту на аголот $\measuredangle ABC$ ниту на аголот $\measuredangle CDA$. За точката P која припаѓа на внатрешноста на четириаголникот $ABCD$ важи $\measuredangle PBC = \measuredangle DBA$ и $\measuredangle PDC = \measuredangle BDA$. Докажи дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен ако и само ако $\overline{AP} = \overline{CP}$.

Решение. *Прв начин*. Да претпоставиме дека P е внатрешна точка за $\triangle ABD$ и нека BP и DP по втор пат ја сечат опишаната кружница околу овој триаголник во точките E и F, соодветно. Имаме, $\triangle FPE \sim \triangle BPD$ и $\triangle FAE \sim \triangle BCD$, бидејќи соодветните агли им се еднакви. Според тоа, четириаголниците $FPEA$ и $BPDC$ се слични. Тогаш

$$\begin{aligned} \overline{AP} = \overline{CP} &\Leftrightarrow FPEA \cong BPDC \\ &\Leftrightarrow \overline{FE} = \overline{BD} \\ &\Leftrightarrow FB \parallel ED \\ &\Leftrightarrow \measuredangle BFD = \measuredangle EDF \\ &\Leftrightarrow \measuredangle BAD = 180^\circ - BCD, \end{aligned}$$



бидејќи

$$\begin{aligned} \measuredangle EDF &= \measuredangle EDA + \measuredangle FDA = \measuredangle PBA + \measuredangle PDA \\ &= \measuredangle DBC + \measuredangle BDC. \end{aligned}$$

Аналогно се разгледува случајот кога P е внатрешна точка за $\triangle BCD$, со што задачата е решена.

Втор начин. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник и нека правите BP и DP повторно ја сечат опишаната околу него кружница во точките E и F, соодветно. Тогаш $AF = BC$ и $AE = CD$, па затоа $BF \parallel AC \parallel DE$. Според тоа, четириаголникот $BDEF$ е рамнокрак трапез и $P = BE \cap DF$ лежи на заедничката симетрала на отсечките BF, ED, AC, па затоа $\overline{AP} = \overline{CP}$.

Нека претпоставиме дека $\overline{AP} = \overline{CP}$. Понатаму, нека правите BP и DP ја сечат AC во точките K и L, соодветно. Точките A и C се изогонално конјугирани во $\triangle BDP$, па затоа $\measuredangle APL = \measuredangle CPK$, од каде следува дека точките K и L се симетрични во однос на симетралата p на отсечката AC. Тогаш симетричната точка E на точката D во однос на правата p лежи на правата BP, па затоа $\triangle APD \cong \triangle CPE$. Оттука следува дека $\measuredangle BDC = \measuredangle ADP = \measuredangle BEC$, што значи дека точката B припаѓа на кружницата опишана околу $\triangle CDE$. Конечно, бидејќи и точката A припаѓа на кружницата опишана околу $\triangle CDE$ заклучуваме дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен.

6. Природниот број k ќе го нарекуваме *наизменичен* ако секои две соседни цифри во неговиот декаден запис се со различна парност. Определи ги сите природни броеви n за кои постои наизменичен природен број A_n делив со n.

Решение. Ако $20\,|\,n$, тогаш последните две цифри на секој број делив со n се парни, па затоа не е наизменичен. Ќе докажеме дека за секој n таков што $20\nmid n$ постои наизменичен содржател A_n. Прво, за секој m таков што $\text{NZD}(m,10)=1$ и за секој $k\in\mathbb{N}$ постои број од облик

$$I_{k,m}=\overline{1\underbrace{0...0}_{k-1}1\underbrace{0...0}_{k-1}1\underbrace{0...0}_{k-1}...1\underbrace{0...0}_{k-1}1}=\frac{10^{ik}-1}{10^k-1},\ i\in\mathbb{N}$$

таков што $m\,|\,I_{k,m}$. Навистина, според теоремата на Ојлер можеме да земеме $i=\varphi((10^k-1)m)$.

1) Ако $\text{NZD}(n,10)=1$, тогаш $I_{2,n}$ е наизменичен број делив со n.

2) Нека $n=2\cdot 5^k m$, каде $\text{NZD}(m,10)=1$. Ќе докажеме, дека за секој r постои $r-$цифрен наизменичен број U_r (кој може да почнува со нула) делив со 5^r, а потоа ќе земеме $A_n=10U_{2k}I_{2k,m}$.

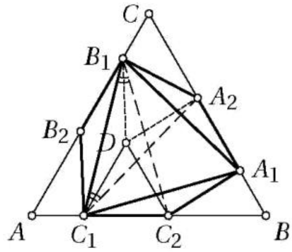
   Низата $\{U_r\}$ ја дефинираме индуктивно. Нека $U_1=5$. За $r\geq 1$ нека $c\in\{0,1,2,3,4\}$ е таков што $2^r c\equiv -\frac{U_r}{5^r}(\text{mod}\,5)$ и нека $d=c+5$. Тогаш $(r+1)-$цифрените броеви $\overline{cU_r}$ и $\overline{dU_r}$ се деливи со 5^{r+1}, а еден од нив е наизменичен. За U_{r+1} го земеме тој наизменичен број.

3) Нека $n=2^k m$, каде $\text{NZD}(m,10)=1$. Ќе докажеме дека за секој r постои $2r-$цифрен наизменичен број V_r делив со 2^{2r+1}, а потоа ќе земеме $A_n=V_k I_{2k,m}$. Како и во случајот 2), V_r го дефинираме индуктивно. Земаме $V_1=16$, а за $r>1$ точно еден од броевите $\overline{10V_r},\overline{12V_r},\overline{14V_r},\overline{16V_r}$ може да се земе за V_{r+1}.

XLVI олимпијада

1. На страните на рамностран триаголник ABC избрани се шест точки: A_1, A_2 на BC; B_1, B_2 на AC и C_1, C_2 на AB. Овие точки се темиња на конвексен шестаголник $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ чии страни имаат еднакви должини. Докажи, дека правите A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 се сечат во една точка.

Решение. Нека D е точката во внатрешноста на $\triangle ABC$ таква што $\triangle C_1C_2D$ е рамностран. Тогаш DC_1 е паралелна и еднаква со B_1B_2, па затоа $B_1B_2C_1D$ е ромб и оттука $\overline{DB_1} = \overline{B_1B_2} = \overline{A_2B_1}$. Аналогно $\overline{DA_2} = \overline{A_2B_1}$, што значи дека $\triangle DA_2B_1$ е рамностран. Значи, точките A_2, B_1, C_1, C_2 лежат на кружница со центар D, па затоа



$$\measuredangle B_1C_1A_2 = \measuredangle C_1B_1C_2 = \tfrac{1}{2}\measuredangle C_1DC_2 = 30^\circ.$$

Слично,

$$\measuredangle C_1A_1B_2 = \measuredangle A_1C_1A_2 = \measuredangle A_1B_1C_2 = \measuredangle B_1A_1B_2 = 30^\circ.$$

Од досега изнесеното следува дека $\triangle A_1B_1C_1$ е рамностран и дека A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 се симетрали на неговите страни, што значи дека тие се сечат во неговиот центар.

2. Нека $a_1, a_2, ...$ е низа цели броеви, која содржи бесконечно многу како позитивни така и негативни броеви. Познато е дека за секој природен број n броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ даваат различни остатоци при делење со n. Докажи, дека во оваа низа секој цел број се појавува точно по еднаш.

Решение. Од условот на задачата следува дека сите членови на низата се различни. Навистина, ако $a_i = a_j$ за $i < j$, тогаш броевите $a_1, a_2, ..., a_j$ не може да даваат различни остатоци при делење со j.

Нека $|a_1 - a_2| = t > 1$ и да ги разгледаме остатоците од делењето на $a_1, a_2, ...,$ a_t со t. Бидејќи $|a_1 - a_2| = t$, добиваме дека a_1 и a_2 даваат еднакви остатоци при делење со t, што противречи на условот на задачата. Според тоа, $|a_1 - a_2| = 1$. Ако $|a_3 - a_i| = t > 2$ за $i = 2$ или $i = 3$ ќе добиеме дека a_3 и a_1, или a_3 и a_2 даваат исти остатоци при делење со t, што противречи на условот на задачата. Според тоа, $|a_3 - a_i| = 1$ или 2, што значи дека броевите a_1, a_2 и a_3 се последователни цели броеви (не задолжително во овој редослед).

Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се последователни цели броеви. Ако постои $i = 1, 2, ..., n$ за кој важи $| a_{n+1} - a_i | = t \geq n+1$, тогаш при делење на броевите $a_1, a_2, ..., a_t$ со t има два еднакви остатоци (на a_{n+1} и a_i). Според тоа, за секој $i = 1, 2, ..., n$ имаме $| a_{n+1} - a_i | < n+1$. Бидејќи $a_1, a_2, ..., a_n$ се во некој редослед последователни цели броеви, заклучуваме дека последните равенства се можни ако и само ако $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ се во некој редослед последователни цели броеви. Според тоа, за секој n броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ во некој редослед се блок од последователни цели броеви.

Нека x е произволен цел број. Бидејќи во низата има бесконечно многу позитивни и бесконечно многу негативни членови, заклучуваме дека постојат i и j такви што $a_i < x$ и $a > x$. Но, тогаш броевите $a_1, a_2, ..., a_m$, за $m = \max\{i, j\}$ се последователни цели броеви од каде што следува дека со a_i и a_j тој блок ги содржи сите броеви меѓу нив. Сега од произволноста на x следува дека секој цел број се сретнува точно еднаш како член на низата.

3. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $xyz \geq 1$. Докажи дека

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} + \frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2} + \frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geq 0 . \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин.* Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и условот $xyz \geq 1$ следува

$$(x^5 + y^2 + z^2)(yz + y^2 + z^2) \geq (x^{\frac{5}{2}}(yz)^{\frac{1}{2}} + y^2 + z^2)^2 \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2 ,$$

т.е.

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} \leq \frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} .$$

Ако го собереме ова неравенства со аналогните неравенства за $\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}$ и $\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}$, го добиваме неравенството

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2} \leq \frac{2(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} \leq 3$$

кое е еквивалентно со неравенство (1).

Втор начин. При вообичаената ознака

$$T_{a,b,c} = x^a y^b z^c + y^a z^b x^c + z^a x^b y^c + x^a z^b y^c + z^a y^b x^c + y^a x^b z^c ,$$

после сведувањето на заеднички именител неравенството (1) се сведува на неравенството

$$T_{5,5,5} + 4T_{7,5,0} + T_{9,0,0} + T_{5,2,2} \geq T_{5,2,2} + 2T_{5,4,0} + T_{6,0,0} + 2T_{4,2,0} + T_{2,2,2} . \qquad (2)$$

Од неравенствата на Шур и Мјурхед и условот $xyz \geq 1$ следуваат нерaвенствата

$$T_{9,0,0}+T_{5,2,2}\ge 2T_{7,2,0}\ge 2T_{7,1,1}\ge 2T_{6,0,0}\ge T_{6,0,0}+T_{4,2,0},\quad T_{7,5,0}\ge T_{5,5,2}$$

$$2T_{7,5,0}\ge 2T_{6,5,1}\ge 2T_{5,4,0},\quad T_{7,5,0}\ge T_{6,4,2}\ge T_{4,2,2},\quad T_{5,5,5}\ge T_{2,2,2}.$$

Конечно, ако ги собереме горните неравенства го добиваме неравенството (2).

Трет начин. Неравенството

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\ge\frac{x^2-\frac{1}{x}}{x^2+y^2+z^2}$$

е еквивалентно со неравенството

$$\frac{(x^3-1)^2(y^2+z^2)}{x(x^5+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)}\ge 0,$$

кое очигледно е точно. Според тоа,

$$\begin{aligned}\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}&\ge\frac{x^2-\frac{1}{x}+y^2-\frac{1}{y}+z^2-\frac{1}{z}}{x^2+y^2+z^2}\\&\ge\frac{x^2-yz+y^2-zx+z^2-xy}{x^2+y^2+z^2}\\&=\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{x^2+y^2+z^2}\ge 0.\end{aligned}$$

4. Низата $a_1,a_2,\dots$ е определена со

$$a_n=2^n+3^n+6^n-1,\quad (n=1,2,\dots).$$

Определи ги сите природни броеви кои се заемно прости со секој член на оваа низа.

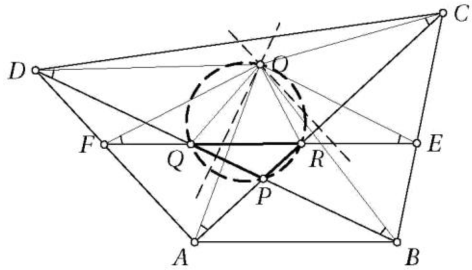
Решение. Ќе докажеме дека за секој прост број p постои m таков што $p\mid a_m$. За $p\in\{2,3\}$ имаме $p\mid a_2=48$. Од друга страна, ако $p>3$, тогаш од малата теорема на Ферма следува дека

$$6a_{p-2}=3\cdot 2^{p-1}+2\cdot 3^{p-1}+6^{p-1}-6\equiv 3+2+1-6=0\ (\mathrm{mod}\ p),$$

т.е. $p\mid a_{p-2}$, со што доказот е завршен.

Според тоа, единствен природен број со саканото својство е бројот 1.

5. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ кај кој должините на страните BC и AD се еднакви и страните BC и AD не се паралелни. Нека E и F се внатрешни точки на страните BC и AD соодветно при што важи $\overline{BE}=\overline{DF}$. Правите AC и BD се сечат во P, правите BD и EF се сечат во Q, а правите EF и AC се сечат во R. Ги разгледуваме триаголниците PQR кои се добиваат за сите вакви точки E и F. Докажи, дека опишаните кружници на сите овие триаголници имаат заедничка точка различна од P.



Решение. *Прв начин*. Со O да го означиме пресекот на симетралите на отсечките AC и BD. Точките $D,\ F, A$ при ротација околу точката O за агол $\omega = \measuredangle DOB$ се пресликуваат во точките B, E, C, соодветно. Според тоа, $\overline{OE} = \overline{OF}$ и

$$\measuredangle OFE = \measuredangle OAC = 90^\circ - \frac{\omega}{2},$$

па затоа точките F, A, R, O се конциклични и $\measuredangle ORP = 180^\circ - \measuredangle OFA$. Слично, точките E, B, Q, O се конциклични и

$$\measuredangle OQP = 180^\circ - \measuredangle OEB = \measuredangle OEC = \measuredangle OFA.$$

Сега важи $\measuredangle ORP = 180^\circ - \measuredangle OQP$, т.е. точката O лежи на опишаната кружница околу $\triangle PQR$ и тоа е бараната точка.

Втор начин. Со O да го означиме пресекот на симетралите на отсечките AC и BD. Ќе докажеме дека O е бараната точка, т.е. дека кога E и F се менуваат, тогаш опишаните кружници околу триаголниците PQR минуваат низ O. За таа цел доволно е да докажеме дека четириаголникот $PQOR$ е тетивен. Од $\overline{OB} = \overline{OD}$, $\overline{OC} = \overline{OA}$ и $\overline{BC} = \overline{AD}$ следува дека $\triangle OBC \cong \triangle ODA$. Затоа $\measuredangle BOC = \measuredangle DOA$, од каде следува $\measuredangle BOD = \measuredangle AOC$. Бидејќи $\triangle BOD$ и $\triangle AOC$ се рамнокраки со еднакви агли при врвовите, тие се слични. Освен тоа, од $\overline{OB} = \overline{OD}$, $\overline{BE} = \overline{DF}$ и $\measuredangle OBE = \measuredangle ODF$ следува $\triangle OBE \cong \triangle ODF$, па затоа $\overline{OE} = \overline{OF}$ и $\measuredangle EOF = \measuredangle BOD$. Според тоа, $\triangle EOF$ е сличен на $\triangle BOD$ и $\triangle AOC$, па затоа $\measuredangle OEQ = \measuredangle OBQ = \measuredangle OCR$. Од овие равенства следува дека четириаголниците $OBEQ$ и $OECR$ се тетивни. Затоа

$$\measuredangle OQB = \measuredangle OEB = \measuredangle ORC = \measuredangle ORP,$$

што значи дека четириаголникот $PQOR$ е тетивен.

6. На еден математички натпревар учениците решавале 6 задачи. Се покажало дека секој пар задачи бил решен од повеќе од $\frac{2}{5}$ од учениците и дека не постои ученик кој ги решил сите 6 задачи. Докажи, дека постојат најмалку два ученика такви што секој од нив решил точно 5 задачи.

Решение. *Прв начин*. Нека имало n ученици, од кои a_i решиле точно i задачи, што значи дека $a_0 + ... + a_5 = n$. Ќе го определиме бројот N на парови (C, P), каде C е ученик кој го решил парот задачи P. Секој од 15-те парови задачи го решиле барем $\frac{2n+1}{5}$ ученици, па затоа $N \geq 15 \cdot \frac{2n+1}{5} = 6n+3$. Од друга страна, a_i ученици решиле $\frac{i(i-1)}{2}$ парови, па затоа

$$\begin{aligned} 6n+3 \leq N &\leq a_2 + 3a_3 + 6a_4 + 10a_5 \\ &= 6n + 4a_5 - (3a_3 + 5a_2 + 6a_1 + 6a_0) \\ &\leq 6n+4. \end{aligned}$$

Според тоа, $a_5 \geq 1$.

Да претпоставиме дека $a_5 = 1$. Тогаш мора да важи $N = 6n+4$, што е можно само ако 14 парови задачи решиле точно $\frac{2n+1}{5}$ ученици, а преостанатиот пар (да го наречеме *посебен*) $\frac{2n+1}{5}+1$ ученици. Притоа $a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$, т.е. победникот решил 5 задачи (да кажеме дека не ја решил задачата *t*), а сите останати решиле по 4 задачи.

Сега да го определиме бројот M_p на парови (C, P) во кои *P* содржи дадена задача *p*. Нека b_p е бројот на учениците кои ја решиле *p*. Тогаш $M_t = 3b_t$ (секој од b_t ученици решил три пара задачи кои ја содржат *t*) и $M_p = 3b_p + 1$ за $p \neq t$ (победникот решил четири такви пара). Од друга страна, секој од петте парови кои ја вклучуваат *p* го решиле $\frac{2n+1}{5}$ или $\frac{2n+1}{5}+1$ ученици, па затоа $M_p = 2n+2$ ако посебниот пар ја содржи *p*, односно $M_p = 2n+1$ во спротивно. Значи $M_t = 3b_t = 2n+1$ или $2n+2$, па затоа $2n+1 \equiv 0$ или $2 (\mathrm{mod}\, 3)$. Но, ако $p \neq t$ е задача која не е во посебниот пар, имаме $M_p = 3b_p + 1 = 2n+1$, па е $2n+1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, што е контрадикција.

Втор начин. Од условот на задачата следува дека секои две задачи ги решиле најмалку $\frac{2n+1}{5}$ ученици, каде n е вкупниот број ученици. Да претпоставиме дека најмногу еден ученик решил 5 задачи. Тогаш секој од останатите ученици решил најмногу по 4 задачи. Да ги преброиме тројките (i, j, A), каде i и j се броеви на различни задачи, а A е ученик кој ги решил задачите i и j. Ако $a_1, a_2, ..., a_n$ ги означуваат задачите, решени од соодветниот ученик, тогаш за бројот на овие тројки имаме:

$$\binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} + ... + \binom{a_n}{2} \leq \binom{5}{2} + (n-1)\binom{4}{2} = 6n+4.$$

Од друга страна, овој број не е помал од $\binom{6}{2} \cdot \frac{2n+1}{5}$. Според тоа,

$$15 \cdot \left(\left[\frac{2n}{5}\right]+1\right) \leq 6n+4. \qquad (1)$$

Нека $n = 5k + l$ за $l = 0, 1, 2, 3, 4$.

- Ако $l=0$, тогаш $[\frac{2n}{5}]=2k$ и неравенството (1) е $30k+15\leq 30k+4$.
- Ако $l=1$, тогаш $[\frac{2n}{5}]=2k$ и неравенството (1) е $30k+15\leq 30k+10$.
- Ако $l=2$, тогаш $[\frac{2n}{5}]=2k$ и неравенството (1) е $30k+15\leq 30k+16$.
- Ако $l=3$, тогаш $[\frac{2n}{5}]=2k+1$ и неравенството (1) е $30k+30\leq 30k+22$.
- Ако $l=4$, тогаш $[\frac{2n}{5}]=2k+1$ и неравенството (1) е $30k+30\leq 30k+28$.

Во сите случаи освен за $n=5k+2$ добиваме противречност. Да разгледаме комплетен граф со 6 темиња A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 кои соодветствуваат на шесте задачи. На реброто кое ги поврзува задачите i и j да го запишеме бројот a_{ij} еднаков на бројот на учениците кои ги решиле задачите i и j. Од (1) следува дека 14 од овие броеви се еднакви на $2k+1$, а петнаесеттиот е еднаков на $2k+2$. Од (1) следува дека четиринаесет од овие броеви се еднакви на $2k+1$, а петнаесеттиот е еднаков на $2k+2$. Да ставиме $t=2k+1$ и без ограничување на општоста да земеме $a_{12}=2k+2$.

Да избереме задача A_i, која е решена од ученикот кој решил 5 задачи и не е A_1 или A_2. Секој ученик кој заедно со таа задача решил уште 3 задачи додава на збирот на броевите, запишани на ребрата, кои излегуваат од A_i, точно 3 единици. Ученикот кој решил точно 5 задачи, додава на тој збир 4 единици. Според тоа, $3s+4=5t$, од каде следува дека $5t\equiv 1(\bmod 3)$.

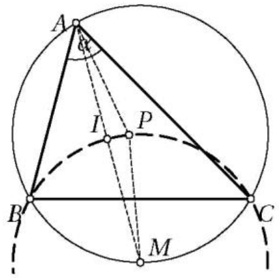
Сега да ја избереме задачата A_j која не е решена од ученикот кој решил 5 задачи. Нека таа задача е решена од p ученици.

1) Ако $A_j\neq A_1$ и $A_j\neq A_2$, како погоре имаме $3p=5t$, што противречи на $5t\equiv 1(\bmod 3)$.
2) Ако $A_j=A_1$, тогаш $3p=5x+1$, што противречи на $5t\equiv 1(\bmod 3)$.

Од добиената противречност следува дека има барем два ученика кои решиле по 5 задачи.

XLVII олимпијада

1. Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Во внатрешноста на триаголникот избрана е точка P таква што
$$\measuredangle PBA + \measuredangle PCA = \measuredangle PBC + \measuredangle PCB .$$
Докажи, дека $\overline{AP} \geq \overline{AI}$ и дека знак за равенство важи ако и само ако $P \equiv I$.
Решение. Од условот на задачата следува
$$\measuredangle PBC + \measuredangle PCB = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha ,$$
т.е.
$$\measuredangle BPC = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha = \measuredangle BIC .$$



Тоа значи дека P лежи на опишаната кружница ω околу $\triangle BCI$. Бидејќи центарот на кружницата ω е во средината M на лакот BC на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, кој не ја содржи A (бидејќи $\overline{MB} = \overline{MC} = \overline{MI}$), добиваме дека
$$\overline{AP} \geq \overline{AM} - \overline{MP} = \overline{AM} - \overline{MI} = \overline{AI} ,$$
при што знак за равенство важи ако и само ако $P \equiv I$.

2. За дијагоналата на правилниот 2006-аголник $\Re$ велиме дека е *добра* ако нејзините крајни точки ја делат границата на $\Re$ на две дела такви што секој од деловите се состои од непарен број страни на $\Re$. За страните на $\Re$ исто така сметаме дека за добри.
Ги разгледуваме разбивањата на многуаголникот $\Re$ на триаголници со помош на 2003 дијагонали такви што не постојат две дијагонали со заедничка внатрешна точка. Определи го најголемиот можен број рамнокраки триаголници со по две добри страни кои може да се појават во такво разбивање.
Решение. Рамнокраките триаголници со две добри страни ќе ги наречеме добри. Темињата на добар триаголник T ја делат границата на $\Re$ на три дела, од кои два, да кажеме $\Re_1$ и $\Re_2$, се состојат од непарен број страни. Ќе велиме дека T ги поседува сите страни во $\Re_1$ и $\Re_2$.
Секој добар триаголник различен од T поседува парен број страни во секој од деловите $\Re_1$ и $\Re_2$. Бидејќи бројот на страните во $\Re_i$ е непарен, барем една од нив, да кажеме a_i, не ја поседува ниту еден добар триаголник освен T. На триаголникот T му придружуваме две страни a_1 и a_2. По конструкција, не постојат два триаголници кои имаат заедничка придружена страна, па затоа добри триаголници не може да има повеќе од 1003.
Пример со 1003 добри триаголници може да се добие со повлекување на дијагоналите $A_{2k-2}A_{2k}$, за $k = 1, 2, ..., 1003$ (каде $A_0 \equiv A_{2006}$) и уште произволни

1000 дијагонали.

3. Определи го најмалиот реален број M таков што неравенството

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)|\le M(a^2+b^2+c^2)^2 \qquad (1)$$

важи за секои реални броеви a,b и c.

Решение. *Прв начин*. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\ge b\ge c$. Да означиме $a-b=m, b-c=n, a+b+c=s$. Левата страна на неравенството (1) се разложува како

$$L=(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)=mn(m+n)s,$$

а додека десната како

$$a^2+b^2+c^2=\frac{s^2+m^2+n^2+(m+n)^2}{3}.$$

Бидејќи $(m+n)^2\le\frac{2}{3}(m^2+n^2+(m+n)^2)$, од неравенството меѓу средните имаме

$$2L^2\le\frac{(m+n)^6s^2}{8}\le s^2(\frac{m^2+n^2+(m+n)^2}{3})^3\le(\frac{s^2+m^2+n^2+(m+n)^2}{4})^4=\frac{3^4(a^2+b^2+c^2)^4}{4^4},$$

т.е. $L\le\frac{9}{16\sqrt{2}}(a^2+b^2+c^2)^2$. Знак за равенство важи ако и само ако $m=n$ и $s^2=\frac{m^2+n^2+(m+n)^2}{3}$, од каде лесно следува дека $a:b:c=(1+\frac{3}{\sqrt{2}}):1:(1-\frac{3}{\sqrt{2}})$. Значи, $M=\frac{9}{16\sqrt{2}}$.

Втор начин. Имаме $L=|(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)|$. Случајот $a+b+c=0$ етривијален, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a+b+c=1$. Моничниот кубен полином чии нули се $a-m, b-c$ и $c-a$ е од облик

$$P(x)=x^3+qx+r,\ q=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2),\ r=-(a-b)(b-c)(c-a).$$

Тогаш $M=\max r(\frac{1-2q}{3})^{-2}$. Бидејќи сите три нули на полиномот $P(x)$ се реални, важи $D=(\frac{q}{3})^3+(\frac{r}{2})^2\ge0$, односно $r^2\ge-\frac{4}{27}q^3$. Оттука следува

$$M^2\le f(q)=-\frac{4}{27}q^3(\frac{1-2q}{3})^{-2}.$$

Функцијата f достигнува максимум $\frac{3^4}{2^9}$ во точката $q=-\frac{3}{2}$, па затоа $M\le\frac{9}{16\sqrt{2}}$. Случајот на равенство едноставно се наоѓа.

4. Определи ги сите парови цели броеви (x,y) такви што

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2.$$

Решение. Нека $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$. Бројот y е непарен и $2^x\mid(y-1)(y+1)$, но двата множители не се деливи со 4, од каде следува дека еден од нив е делив со 2^{x-1}, т.е. $y=2^{x-1}z\pm1$. Од друга страна, очигледно е дека

$$2^x+1<y<2^{x+1}-1,\text{ за } x\ge2,$$

па затоа $z=3$. Ако означиме $t=2^{x-1}$, тогаш почетната равенка го добива обликот $8t^2+2t+1=(3t\pm1)^2$. Последната равенка во множеството природни броеви има единствено решение $t=8$. Сега, $x=4$ и $y=23$ и тоа навистина е решение, бидејќи $1+2^4+2^9=23$.

5. Нека $P(x), \deg P=n>1$ е полином со целобројни коефициенти и нека $k\in\mathbb{N}$. Докажи дека за полиномот

$$Q(x)=\underbrace{P(P(...P(P}_{k\text{ пати}}(x))...)).$$

постојат најмногу n цели броеви t такви што $Q(t)=t$.

Решение. Ќе докажеме дека ако $Q(t)=t$, тогаш $P(P(t))=t$. Нека $x_0=t$ и $x_{i+1}=P(x_i)$ за $i\ge0$, така што $x_k=x_0$. Да означиме $d_i=x_{i+1}-x_i$. Бидејќи

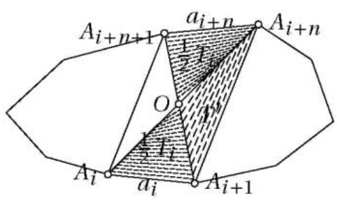
$$d_i\mid P(x_{i+1})-P(x_i)=x_{i+2}-x_{i+1}=d_{i+1}$$

за секој i, од $d_k=d_0$ следува дека $|d_0|=|d_1|=...=|d_k|$. Нека $d_1=d_0=d\ne0$. Тогаш $d_2=d$ (во спротивно ќе важи $x_3=x_1$, па во низата никогаш нема да се појави x_0); слично $d_3=d$ итн, па затоа $x_k=x_0+kd\ne x_0$, за секој k, што е противречност. Според тоа, $d_1=-d_0$, па затоа $x_2=x_0$, т.е. $P(P(t))=t$.

Ако секој $t\in\mathbb{Z}$ за кој е $Q(t)=t$ задоволува $P(t)=t$, тогаш бројот на решенијата е помал или еднаков на $\deg P=n$. Да претпоставиме дека за некој $t_1\in\mathbb{Z}$ важи $P(t_1)=t_2\ne t_1$ и $P(t_2)=t_1$ и да разгледаме произволен $t_3\notin\{t_1,t_2\}$ и $P(t_3)=t_4$ со $P(t_4)=t_3$. Тогаш $t_1-t_3\mid t_2-t_4\mid t_1-t_3$, т.е. $|t_1-t_3|=|t_2-t_4|$, а аналогно и $|t_1-t_4|=|t_2-t_3|$. Ако $t_1-t_3=t_2-t_4=k\ne0$, второт равенство го добива обликот $|t_1-t_2+k|=|t_2-t_1+k|$, што не е можно. Затоа мора да важи $t_1-t_3=t_4-t_2$, т.е. $P(t_1)+t_1=P(t_3)+t_3=c$ за некој c. Според тоа, сите целобројни решенија на равенката $P(P(t))=t$ се нули на полиномот $P(x)+x-c$, а нив ги има најмногу n.

6. На секоја страна b на конвексниот многуаголник $\Re$ и ја придружуваме најголемата плоштина на триаголникот кој се содржи во $\Re$ и чија една страна е b. Докажи, дека збирот на сите плоштини придружени на страните на мно-

гуаголникот $\Re$ е поголем или еднаков на двократната плоштина P на многуаголникот $\Re$.



Решение. *Прв начин*. На секое теме A на многуаголникот $\Re$ му соодветствува единствена точка A' на границата на $\Re$ таква што правата AA' ја полови плоштината на $\Re$. Сметајќи ги и овие точки по потреба во темињата, можеме да претпоставиме дека $\Re$ има парен број темиња $A_1, A_2, ..., A_{2n}$, и дека секоја дијагонала $A_i A_{i+n}$ $(i = 1, ..., n)$ ја полови неговата плоштина.

Со a_i и d_i да ги означиме страната $A_i A_{i+1}$ и полуправата $A_i A_{i+n}$, $1 \le i \le 2n$ (индексите се по модул $2n$), соодветно. За $i = 1, ..., n$, нека $\Re_i$ е областа ограничена со d_i, d_{i+1}, a_i и a_{i+n}, а T_i е нејзината плоштина. Ќе докажеме дека областите $\Re_i$ го покриваат целиот $\Re$. Нека X е произволна точка во внатрешноста на $\Re$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека X е лево од d_i. Бидејќи X е десно од d_{i+n}, постои j $(i \le j < i+n)$ таков што X е лево од d_j и десно од d_{j+1}, а тогаш $X \in \Re_j$. Оттука следува дека $T_1 + \ldots + T_n \ge P$.

Со P_i да ја означиме плоштината придружена на страната a_i $(1 \le i \le n)$. Нека d_i и d_{i+1} се сечат во точката O. Триаголниците $OA_i A_{i+1}$ и $OA_{i+n} A_{i+n+1}$ имаат плоштина $\frac{1}{2}T_i$, додека барем еден од триаголниците $OA_i A_{i+n+1}$ и $OA_{i+1} A_{i+n}$ има плоштина T' која не е помала од $\frac{1}{2}T_i$. Според тоа, $P_i + P_{i+n} \ge \frac{1}{2}T_i + T' \ge T_i$. Конечно,

$$P_1 + \ldots + P_{2n} \ge 2(T_1 + \ldots + T_n) \ge 2P.$$

Знак за равенство важи ако и само ако многуаголникот $\Re$ е централно симетричен.

Втор начин. Со S_a да ја означиме плоштината придружена на страната a. Ќе велиме дека темето V е придружено на страната a на конвексниот (може и дегенериран) многуаголник $\Re$ ако триаголникот определен со a и V има плоштина S_a. Дефинираме $\sigma(\Re) = \sum_a S_a$ и $\delta(\Re) = \sigma(\Re) - 2[\Re]$, каде со $[X]$ е означена плоштината на многуаголникот X. Со индункција по бројот n на меѓусебно непаралелните страни во $\Re$ ќе докажеме дека $\delta(\Re) \ge 0$ за секој $\Re$. Ова е тривијално за $n = 2$. Нека $n \ge 3$.

Разгледуваме две соседни страни AB и BC без заеднички придружени темиња (јасно вакви страни постојат). Нека правите низ темињата U и V придружени на страните AB и BC, паралелни на тие страни соодветно, се сечат во точката X. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека на отсечките UX и VX нема други темиња на $\Re$, (Зошто?). Страните и темињата на $\Re$ кои лежат внатре во $\triangle UVX$ ќе ги нарекуваме пасивни (со исклучок на U и V). Лесно се гледа дека пасивните темиња не се придружени на ниту една страна на $\Re$, како и дека на сите пасивни страни им е придружено темето B. Сега да го разгледаме многуаголникот $\Re'$ добиен со замена на сите пасивни темиња на $\Re$ со точката X. Бидејќи темето B е придружено и на страните UX и VX во $\Re'$, збирот на плоштините придружени на пасивните страни се зголемил за плоштината S на делот на четириаголникот $BUXV$ надвор од $\Re$, додека останатите придружени плоштини не се променија. Според тоа, $\sigma(\Re') = \sigma(\Re) + S$. Бидејќи $[\Re'] = [\Re] + S$, следува дека $\delta(\Re') = \delta(\Re) - S$.

Со премин од $\Re$ на $\Re'$ бројот на непаралелните страни се намали, па од индуктивната претпоставка имаме $0 \le \delta(\Re') \le \delta(\Re)$.

XLVIII олимпијада

1. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се реални броеви. За секој $i \in \{1, 2, ..., n\}$ нека
$$d_i = \max\{a_j \mid 1 \le j \le i\} - \min\{a_j \mid i \le j \le n\}$$
и нека
$$d = \max\{d_i \mid 1 \le i \le n\}.$$
а) Докажи дека за произволни реални броеви $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ важи
$$\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \le i \le n\} \ge \tfrac{d}{2}. \qquad (1)$$
б) Докажи дека постојат реални броеви $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ такви што во (1) важи знак за равенство.

Решение. Од условот на задачата следува дека $d = a_k - a_l$ за некои $k \le l$. Бидејќи
$$(x_l - a_l) - (x_k - a_k) = (a_k - a_l) + (x_l - x_k) \ge a_k - a_l = d \text{ и } d \ge 0$$
следува
$$2\max\{|x_k - a_k|, |x_l - a_l|\} \ge |x_l - a_l| + |x_k - a_k| = |(a_k - x_k) - (a_l - x_l)| \ge d,$$
односно $\max\{|x_k - a_k|, |x_l - a_l|\} \ge \frac{d}{2}$, од каде следува а).

Јасно, низата која го задоволува б) зависи од изразите $M_i = \max\{a_j \mid 1 \le j \le i\}$ и $m_i = \min\{a_j \mid i \le j \le n\}$. Со цел да се минимизира изразот на левата страна во (1), природно е да земеме $x_i = \frac{M_i + m_i}{2}$, за $i = 1, 2, ..., n$. Оваа низа го задоволува б), бидејќи

1) По конструкција низите $\{m_i\}_{i=1}^n$ и $\{M_i\}_{i=1}^n$ не опаѓаат, па затоа не опаѓа и $\{x_i\}_{i=1}^n$.
2) Ако $d_i = M_i - m_i$, тогаш
$$-\tfrac{d_i}{2} = \tfrac{m_i - M_i}{2} = x_i - M_i \le x_i - a_i \le x_i - m_i = \tfrac{M_i - m_i}{2} = \tfrac{d_i}{2},$$
т.е. $|x_i - a_i| \le \frac{d_i}{2} \le \frac{d}{2}$, па како важи а) добиваме дека во (1) важи знак за равенство.

Забелешка. Можни се и други конструкции на низа која го задоволува условот б). На пример
$$x_1 = a_1 - \tfrac{d}{2}, \quad x_i = \max\{x_{i-1}, a_i - \tfrac{d}{2}\} \text{ за } 2 \le i \le n.$$
Навистина, од самата дефиниција следува дека низата $\{x_i\}_{i=1}^n$ не опаѓа и $x_i - a_i \ge -\frac{d}{2}$ за $1 \le i \le n$. Важи $x_i = x_j = a_j - \frac{d}{2}$ за некој $j \le i$ (всушност j е најмалиот индекс за кој важи $x_i = x_j$, па како

$$a_j - a_i \le \max\{a_k \mid 1 \le k \le i\} - \min\{a_k \mid 1 \le k \le i\} = d_k \le d$$

следува дека

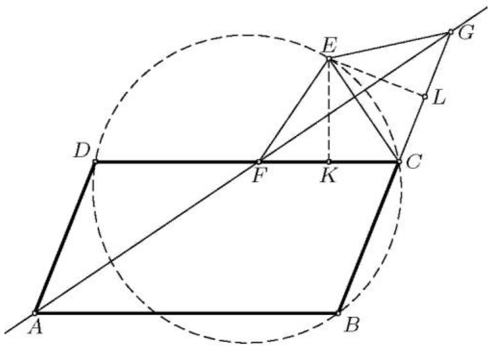
$$x_i - a_i \le a_j - \tfrac{d}{2} - a_i = a_j - a_i - \tfrac{d}{2} \le d - \tfrac{d}{2} = \tfrac{d}{2},$$

т.е. $-\frac{d}{2} \le x_i - a_i \le \frac{d}{2}$ за $1 \le i \le n$, па затоа $\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \le i \le n\} \le \frac{d}{2}$. Сега, ако се има предвид решението под а) добиваме дека во (1) важи знак за равенство.

2. Нека точките A, B, C, D и E се такви што $ABCD$ е паралелограм, а $BCED$ е тетивен четириаголник. Правата l која минува низ точката A ја сече отсечката DC во нејзина внатрешна точка F и ја сече правата BC во точка G. Ако $\overline{EF} = \overline{EG} = \overline{EC}$, докажи дека l е симетрала на $\measuredangle DAB$.

Решение. *Прв начин.* Нека K и L се подножјата на нормалите повлечени од точката E на DC и BC, соодветно. Триаголниците EFC и ECG се рамнокраки, K и L се средини на отсечките FC и CG, соодветно, и $\triangle KCL \sim \triangle FCG$. Да означиме $\measuredangle BAF = \alpha$ и $\measuredangle DAF = \beta$. Од тетивниот четириаголник $EKCL$ и теоремата за агли со паралелни краци следува дека

$$\measuredangle LEC = \measuredangle LKC = \measuredangle GFC = \alpha \text{ и } \measuredangle CEK = \measuredangle CLK = \measuredangle CGF = \beta.$$



Во правоаголните триаголници EKC и CLE важи

$$\overline{CK} = \overline{CE}\sin\beta,\ \overline{EK} = \overline{CE}\cos\beta,$$
$$\overline{CL} = \overline{CE}\sin\alpha,\ \overline{EL} = \overline{CE}\cos\alpha.$$

Имаме, $\triangle DAF \sim \triangle CGF$, па затоа $\frac{\overline{DF}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{CG}} = r$. Тогаш

$$\overline{DF} = r\overline{FC} = 2r\overline{CK} \text{ и}$$
$$\overline{BC} = \overline{DA} = r\overline{CG} = 2r\overline{CL},$$

па затоа

$$\overline{BL} = \overline{BC} + \overline{CL} = (2r+1)\overline{CL} = (2r+1)\overline{CE}\sin\alpha$$

и

$$\overline{DK} = \overline{DF} + \overline{FK} = (2r+1)\overline{CK} = (2r+1)\overline{CE}\sin\beta.$$

Бидејќи четириаголникот $DBCE$ е тетивен, важи

$$\measuredangle EDK = \measuredangle EDC = \measuredangle EBC = \measuredangle EBL,$$

па важи $\operatorname{tg}\measuredangle EDK = \operatorname{tg}\measuredangle EBL$. Но, од правоаголниот триаголник EDK следува

$$\operatorname{tg}\measuredangle EDK = \frac{\overline{EK}}{\overline{DK}} = \frac{\overline{CE}\cos\beta}{(2r+1)\overline{CE}\sin\beta} = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{2r+1},$$

а од правоаголниот триаголник BLE следува

$$\operatorname{tg}\measuredangle EBL = \frac{\overline{EL}}{\overline{BL}} = \frac{\overline{CE}\cos\alpha}{(2r+1)\overline{CE}\sin\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2r+1},$$

па затоа мора да важи $\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha$ и оттука $\beta = \alpha$, т.е. l е симетрала на $\measuredangle DAB$.

Втор начин. Нека се ознаките исти како и во првиот начин и нека O е пресекот на дијагоналите на паралелограмот $ABCD$. Точката E припаѓа на кружницата опишана околу $\triangle BCD$, па затоа нормалите од E на страните на овој триаголник припаѓаат на една права (Симпсоновата права). Бидејќи Kl е средна линија на $\triangle CGF$ и бидејќи точките A, F и G лежат на една права, правата KL минува низ средината на AC, т.е. низ O. Според тоа, нормалната проекција од E на BD е точката O, па затоа важи $\measuredangle DBE = \measuredangle EDB$.
Меѓутоа, како во првиот нмачин на решавање добиваме

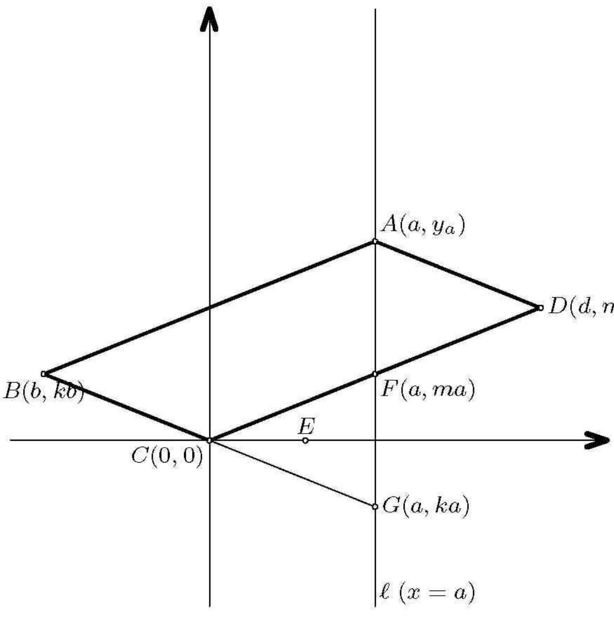
$$\measuredangle FAD = \measuredangle CGF = \measuredangle CLK = \measuredangle CEK = 90^\circ - \measuredangle ECK = 90^\circ - \measuredangle ECD = 90^\circ - \measuredangle EBD$$

и

$$\measuredangle BAF = \measuredangle CFG = \measuredangle CKL = \measuredangle CEL = 90^\circ - \measuredangle LCE = 90^\circ - \measuredangle EDB,$$

т.е. $\measuredangle DAF = \measuredangle BAF$, што и требаше да докажеме.

Трет начин. Нека конфигурацијата е сместена во координатна рамнина, така што точката C е координатниот почеток, а правата l е паралелна со $y-$ оската, види цртеж.



Нека $B(b,kb), D(d,md)$ и $A(a, y_a)$. Според тоа, $F(a,ma)$ и $G(a,ka)$. Од $\overline{EF} = \overline{EG}$ следува $E(x_e, \frac{k+m}{2}a)$, а од $\overline{EF} = \overline{EC}$ следува

$$x_e^2 + (\tfrac{k+m}{2}a)^2 = (x_e - a)^2 + (ma - \tfrac{k+m}{2}a)^2,$$

од каде наоѓаме $x_e = \frac{1-km}{2}$.

Четириаголникот $BCED$ е тетивен, па затоа $\measuredangle CBE = \measuredangle CDE$. Нека k_{XY} е коефициент на правецот на правата XY. Бидејќи

$$\operatorname{tg}\measuredangle CBE = \frac{k_{BE}-k_{BC}}{1+k_{BE}k_{BC}} = \frac{\frac{\frac{k+m}{2}a-kb}{\frac{1-km}{2}a-b}-k}{1+k\cdot\frac{\frac{k+m}{2}a-kb}{\frac{1-km}{2}a-b}} = \frac{\frac{k+m}{2}a-kb-k(\frac{1-km}{2}a-b)}{\frac{1-km}{2}a-b+k(\frac{k+m}{2}a-kb)} = \frac{\frac{am}{2}(1+k^2)}{(\frac{a}{2}-b)(1+k^2)} = \frac{am}{a-2b}$$

и аналогно $\operatorname{tg}\measuredangle CDE = -\frac{ak}{a-2b}$ ($ABCD$ е паралелограм, па затоа $a-b=d$), следува $k=-m$. Тоа значи дека $\triangle CFG$ е рамнокрак, од каде како и во првиот начин на решавање следува тврдењето на задачата.

Четврт начин. Нека дадената конфигурација е сместена во комплексна рамнина со центар во E и радиус EC на единичната кружница и нека на точките означени со некои големи букви на латиницата соодветствуваат афикси означени со истите мали букви. Според условот на задачата важи $e=0$ и $|c|=|f|=|g|=1$. Како и при првиот начин на решавање имаме $\measuredangle CFG = \measuredangle BAF$ и $\measuredangle CGF = \measuredangle FAD$, па затоа доволно е да се докаже дека $\triangle CGF$ е рамнокрак, т.е. дека

$$\begin{aligned} \overline{CE} = \overline{CF} \quad &\Leftrightarrow \quad |c-g| = |c-f| \quad \Leftrightarrow \quad (c-g)(\bar c-\bar g) = (c-f)(\bar c-\bar f) \\ &\Leftrightarrow \quad \bar c(g-f) = c(\bar f-\bar g) = -c\,\frac{g-f}{fg} \\ &\Leftrightarrow \quad c^2 = fg, \end{aligned}$$

(c, f, g се различни броеви од единичната кружница). Ќе ја користиме следнава лема (види во [18]).

Лема. Ако точката $Z \neq X, Y$ припаѓа на правата определена со точките X и Y ($X \neq Y$) од единичната кружница, тогаш $x+y = z+xy\bar z$. □

Од лемата, применета на $D \in FC, B \in GC$ и $A \in FG$ следува

$$c+f = d+cf\bar d\,, \tag{1}$$

$$c+g = b+cg\bar b\,, \tag{2}$$

$$f+g = a+fg\bar a\,. \tag{3}$$

Од (1) следува $\overline{d-c} = \overline{f(1-c\bar d)} = \bar f(1-\bar c d) = -\frac{1}{cf}(d-c)$ и аналогно од (2) следува $\overline{b-c} = -\frac{1}{cg}(b-c)$. Четириаголникот $BCED$ е тетивен, па затоа $\measuredangle BED = \measuredangle BCD$, односно $\frac{\frac{0-b}{0-\bar b}}{\frac{0-d}{0-\bar d}} = \frac{\frac{c-b}{\bar c-\bar b}}{\frac{c-d}{\bar c-\bar d}} = \frac{-cg}{-cf}$, односно

$$\frac{b}{\bar b} = \frac{d}{\bar d}\cdot\frac{g}{f}\,. \tag{4}$$

Од (1), (2) и (4) следува $\frac{c+f-d}{c}=d\overline{f}=\frac{gd\overline{b}}{b}$, т.е. $b(c+f)=d(b+cg\overline{b})$, па затоа $\frac{b}{d}=\frac{c+g}{c+f}$, од каде наоѓаме $\frac{\overline{b}}{\overline{d}}=\frac{\overline{c+g}}{\overline{c+f}}=\frac{f}{g}\cdot\frac{c+g}{c+f}$, т.е.

$$cf\overline{d}-fg\overline{b}=cg\overline{b}-fg\overline{d}\,. \tag{5}$$

Ако ги собереме (1) и (2) и ја одземеме (3), користејќи $a=b+d-c$ (четириаголникот $ABCD$ е паралелограм), добиваме

$$2c=b+d-(b+d-c)+cf\overline{d}+cg\overline{b}-fg\overline{(b+d-c)}\,,$$

па ако се искористи и (5) добиваме

$$c-fg\overline{c}=cf\overline{d}-fg\overline{b}+cg\overline{b}-fg\overline{d}=2(cf\overline{d}-fg\overline{b})$$

$$=2\overline{b}\cdot cf\,\frac{\overline{d}}{\overline{b}}-fg=2\overline{b}(cf\cdot\frac{g}{f}\cdot\frac{c+f}{c+g}-fg)=\frac{2g\overline{b}}{c+g}(c^2-fg),$$

од каде следува $(\frac{2cg\overline{b}}{c+g}-1)(c^2-fg)=0$, па за да се докаже тврдењето на задачата доволно е уште да се докаже дека првиот множител на левата страна во последното равенство е различен од нула. Меѓутоа, ако $\frac{2cg\overline{b}}{c+g}-1=0$, тогаш од (2) следува $c+g=2cg\overline{b}=2(c+g-b)$, т.е. $b=\frac{c+g}{2}$, што не е можно.

3. На математички натпревар некои ученици се пријатели; ако *A* е пријател со *B*, тогаш и *B* е пријател со *A*. Група ученици се нарекува дружина ако секои два ученика во таа групи се пријатели. (Специјално, секоја група со помалку од два ученика е дружина.) Бројот на учениците во една дружина се нарекува големина на дружината.

На овој натпревар максималната големина на дружина е парен број. Докажи дека учениците може да се распоредат во две соби, така што максималната големина на дружине во едната соба е еднаква на максималната големина на дружина во другата соба.

Решение. На почетокот да ги сместиме сите ученици на една дружина со максимална големина $2n$ во соба *X*. Овие ученици да ги наречеме *П*–ученици. Останатите ученици ги сместуваме во соба *Y*. Нека се $d(X)$ и $d(Y)$ максималните големини на дружините во собите *X* и *Y* во дадениот момент, соодветно. Со префрлање на еден ученик од собата *X* во собата *Y* големината $d(X)$ се намалува за 1, а $d(Y)$ не се не менува или се зголемува за 1, па затоа разликата $d(X)-d(Y)$ се намалува за 1 или 2. Со повторување на оваа постапка можеме да постигнеме оваа разлика да биде 0 (со што тврдењето на задачата е докажано) или -1 (т.е. $d(Y)=d(X)+1$).

Во натамошните разгледувања ќе претпоставиме дека $d(X)=l$ и $d(Y)=l+1$. Ги разликуваме следниве случаи:

1) Ако во собата *Y* постои *П*–ученик кој не припаѓа на некоја од дружините во *Y* со големина $l+1$, тогаш по неговото префрлање во собата X останува $d(Y)=l+1$, а $d(X)$ се зголемува за 1, со што се постигнува $d(X)=d(Y)$.
2) Нека претпоставиме дека секој од $2n-l$ *П*–ученици во *Y* припаѓа на сите дружини во *Y* со големина $l+1$. Тогаш произволна дружина со големина $l+1$ во собата *Y* содржи $2n-l$ *П*–ученици и $0 \le l+1-(2n-l)=2(n-l)+1$ ученици кои не се *П*–ученици (да ги наречеме не-*П*–ученици). Бидејќи $2(n-l)+1 \neq 0$, во секоја дружина со големина $l+1$ во *Y* постои не-*П*–ученик.

   Сега да избереме некоја дружина во *Y* со големина $l+1$ и да префрлиме еден не-*П*–ученик од неа во *X*. Оваа постапка ја повторуваме се додека постојат дружини со големина $l+1$ во *Y* (нив ги има конечно многу). Бидејќи $d(Y)$ при секој ваков потез не се менува или се намалува за 1, во еден момент ќе важи $d(Y)=l$. Доволно е да докажеме дека по оваа постапка останува $d(X)=l$.

   Навистина, ако претпоставиме дека во *X* се формирала дружина со големина $l+1$, тогаш сите ученици на таа дружине ги познаваат сите $2n-l$ *П*–ученици во Y (бидејќи сите се или *П*–ученици, или се префрлени од *Y* каде биле во дружина со овие $2n-l$ ученици), па нивната унија со овие $2n-l$ ученици формира дружина со големина $(l+1)+(2n-l)=2n+1>2n$, што не е можно.

Конечно, од претходните разгледувања следува точноста на тврдењето на задачата.

4. Симетралата на $\measuredangle BCA$ на $\triangle ABC$ ја сече по вторпат опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката R, а симетралите на страните BC и AC ги сече во точките P и Q, соодветно. Нека K и L се средините на страните BC и AC, соодветно. Докажи дека плоштините на триаголниците RPK и RQL се еднакви.

Решение. *Прв начин*. Нека α, β, γ се соодветните агли на $\triangle ABC$, a, b, c се соодветните страни и r е радиусот на опишаната кружница. Од $\measuredangle QCL = \frac{\gamma}{2}$ следува

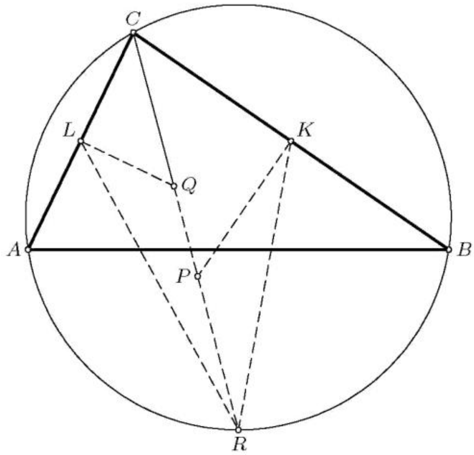
$$\measuredangle RQL = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}, \quad \overline{LQ} = \overline{CL} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = r\sin\beta \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \text{ и } \overline{CQ} = \frac{\overline{CL}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{r\sin\beta}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Бидејќи

$$\measuredangle CAR = \measuredangle CAB + \measuredangle BAR = \measuredangle CAB + \measuredangle BCA = \alpha + \frac{\gamma}{2},$$

следува

$$\overline{QR}=\overline{CR}-\overline{CQ}$$
$$=2r\sin(\alpha+\tfrac{\gamma}{2})-\frac{r\sin\beta}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$
$$=\frac{r}{\cos\frac{\gamma}{2}}(2\sin(\alpha+\tfrac{\gamma}{2})\cos\tfrac{\gamma}{2}-\sin\beta)$$
$$=\frac{r}{\cos\frac{\gamma}{2}}(\sin(\alpha+\gamma)+\sin\alpha-\sin\beta)$$
$$=\frac{r\sin\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}},$$



па затоа

$$P_{\triangle RQL}=\frac{\overline{LQ}\cdot\overline{QR}\cdot\sin\measuredangle RQL}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{r\sin\beta\cdot\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot r\sin\alpha\cdot\sin(90^\circ+\frac{\gamma}{2})}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$
$$=\frac{r^2\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}{2}\sin\alpha\sin\beta$$

.

Заради симетрија, со замена на елементите кои соодветствуваат на темињата A и B се добива $P_{\triangle RKP}=\frac{r^2\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}{2}\sin\alpha\sin\beta$, од каде следува тврдењето на задачата.

Втор начин. Правите KP и QL се сечат во центарот O на опишаната кружница на $\triangle ABC$. Тогаш $\overline{OP}=\overline{OQ}$. Навистина, ако $\overline{AB}=\overline{AC}$, тогаш $O\equiv P\equiv Q$. Ако, на пример, $\overline{AB}>\overline{AC}$, тогаш

$$\measuredangle OQP=\measuredangle CQL=90^\circ-\tfrac{\gamma}{2}=\measuredangle CPK=\measuredangle QPO,$$

па затоа $\overline{OP}=\overline{OQ}$. Исто така $\measuredangle RQL=\measuredangle RPK=90^\circ+\frac{\gamma}{2}$, па затоа

$$P_{\triangle RQL}=\tfrac{1}{2}\overline{RQ}\cdot\overline{QL}\sin(90^\circ+\tfrac{\gamma}{2})=\tfrac{1}{2}\overline{RQ}\cdot\overline{QC}\sin\tfrac{\gamma}{2}\sin(90^\circ+\tfrac{\gamma}{2}).$$

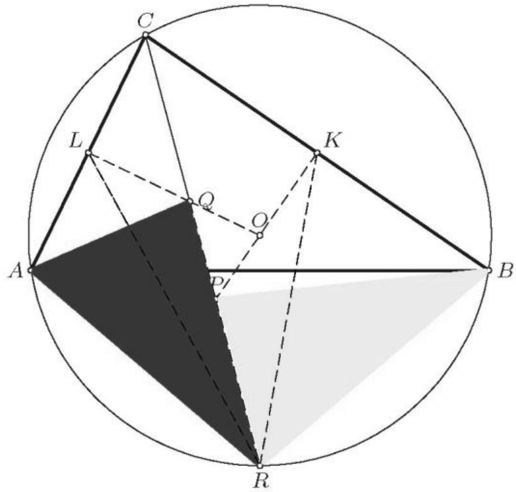
Аналогно, $P_{\triangle RPK}=\frac{1}{2}\overline{RP}\cdot\overline{PC}\sin\frac{\gamma}{2}\sin(90^\circ+\frac{\gamma}{2})$, па останува да докажеме дека $\overline{RQ}\cdot\overline{QC}=\overline{RP}\cdot\overline{PC}$, т.е. дека степените на точките P и Q во однос на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ се еднакви. Имаме,

$$\overline{RQ}\cdot\overline{QC}=r^2-\overline{OQ}^2=r^2-\overline{OP}^2=\overline{RP}\cdot\overline{PC}.$$

Трет начин. Нека ознаките се како во вториот начин на решавање. Ако $\overline{AB}=\overline{AC}$, тогаш $O\equiv P\equiv Q$, а ако на пример $\overline{AB}>\overline{AC}$, тогаш како и во вториот начин добиваме $\overline{OP}=\overline{OQ}$, т.е. $\triangle OPQ$ е рамнокрак

Триаголниците RQL и RQA имаат заедничка страна, а според Талесовата теорема висините спуштени на таа страна се однесуваат како $\frac{\overline{CL}}{\overline{CA}}=\frac{1}{2}$, па затоа

$$P_{\triangle RQA}=2P_{\triangle RQL}\,.$$



Аналогно се добива

$$P_{\triangle RBP}=2P_{\triangle RKP}\,,$$

па затоа е доволно да докажеме дека

$$P_{\triangle RQA}=P_{\triangle RBP}\,.$$

Последното равенство е точно, бидејќи со ротација ρ околу точката O за агол γ триаголникот RQA се пресликува во триаголникот RBP ($\overline{OA}=\overline{OR}$, $\measuredangle ROA=2\measuredangle RCA=\gamma$ и $\measuredangle ROB=2\measuredangle RCB=\gamma$, па затоа $\rho(A)=R$ и $\rho(R)=B$, во $\triangle OPQ$ имаме $\overline{OP}=\overline{OQ}$ и $\measuredangle POQ=180^\circ-2(90^\circ-\frac{\gamma}{2})=\gamma$, па е $\rho(Q)=P$).

5. Нека a и b се природни броеви. Докажи, дека ако $4ab-1$ е делител на $(4a^2-1)^2$, тогаш $a=b$.

Решение. Ќе го докажеме следново поопшто тврдење:

Нека $k>1$ е природен број. Ако ако $kab-1$ е делител на $(ka^2-1)^2$, тогаш $a=b$.

За парот природни броеви (a,b) ќе велиме дека е *добар* ако $kab-1\,|\,(ka^2-1)^2$. Од

$$(ka^2-1)^2\equiv(ka^2-kab)^2=k^2a^2(a-b)^2\ (\operatorname{mod} kab-1)\ \text{ и }\ \mathrm{NZD}(k^2a^2,kab-1)=1$$

следува дека $kab-1\,|\,(ka^2-1)^2$ ако и само ако $kab-1\,|\,(a-b)^2$. Според тоа, парот (a,b) е добар ако и само ако парот (b,a) е добар. Последното значи, дека ако $a\neq b$, тогаш можеме да претпосатвиме дека $b>a$.

Нека a е најмалиот природен број за кој постои $b>a, b\in\mathbb{N}$ таков што парот (a,b) е добар. Тогаш

$$\frac{(ka^2-1)^2}{kab-1}\equiv-\frac{(ka^2-1)^2}{kab-1}(kab-1)=-(ka^2-1)^2\equiv-1\ (\operatorname{mod} ka)\,,$$

па затоа постои $c\in\mathbb{N}$ таков што

$$(ka^2-1)^2=(kab-1)(kac-1)\,,$$

што значи дека парот (a,c) е добар. Меѓутоа,

$$kac-1=\frac{(ka^2-1)^2}{kab-1}<ka^2-1,$$

па затоа $a>c$, што противречи на изборот на парот (a,b). Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

6. Нека n е природен број и нека

$$S=\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\in\{0,1,...,n\},\ x+y+z>1\}$$

е множество точки кое се состои од $(n+1)^3-1$ точка на тридимензионалниот простор. Определи го најмалиот можен број рамнини чија унија ги содржи сите точки на множеството S, но не ја содржи точката $(0,0,0)$.

Решение. *Прв начин.* Унијата на $3n$ рамнини $x=i,\ y=i,\ z=i$ за $1\le i\le n$ го содржи множеството S и не ја содржи точката $(0,0,0)$. Нека претпоставиме дека постои фамилија $\{a_i x+b_i y+c_i z+d_i=0\,|\,1\le i\le N\}$ од $N<3n$ рамнини кои го содржат S и не ја содржат $(0,0,0)$. Го разгледуваме полиномот

$$P(x,y,z)=\prod_{i=1}^{N}(a_i x+b_i y+c_i z+d_i).$$

Лема 1. Постојат броеви δ_i, $i=1,2,...,n$ такви што

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i=-1 \text{ и } \sum_{i=1}^{n}\delta_i i^m=0, \text{ за } 0<m<n.$$

Доказ. Горниот систем е систем од n линеарни равенки со n непознати. Детерминантата на системот е Вандермондовата детерминанта(за броевите $1,2,...,n$) која е различна од нула, од каде следува тврдењето на лемата. ■

Од лема 1 (ако се усвои $0^0=1$) следува дека постојат $\delta_0=1,\delta_i$, $i=1,2,...,n$ такви што

$$\sum_{i=0}^{n}\delta_i i^m=0 \text{ за } 0\le m<n.$$

Нека $\deg P=N<3n$ и

$$S_1=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\delta_i\delta_j\delta_k P(i,j,k).$$

Бидејќи во претходната сума $\delta_0^3 P(0,0,0)$ е единствен член различен од 0, следува дека $S_1=P(0,0,0)\ne 0$. Од друга страна, ако

$$P(x,y,z)=\sum_{\alpha+\beta+\gamma\le N}p_{\alpha,\beta,\gamma}x^\alpha y^\beta z^\gamma,$$

следува

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\delta_i\delta_j\delta_k \sum_{\alpha+\beta+\gamma\le N} p_{\alpha,\beta,\gamma} i^\alpha j^\beta k^\gamma \\ &= \sum_{\alpha+\beta+\gamma\le N} p_{\alpha,\beta,\gamma} (\sum_{i=0}^{n}\delta_i i^\alpha)(\sum_{j=0}^{n}\delta_j j^\beta)(\sum_{k=0}^{n}\delta_k k^\gamma) \end{aligned} \tag{1}$$

Да го разгледаме собирокот кој соодветствува на тројката (α,β,γ) во (1). Бидејќи $\alpha+\beta+\gamma\le N<3n$, барем еден од α,β,γ мора да е помал од n. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа е α и тогаш важи $\sum_{i=}^{n}\delta_i i^\alpha=0$. Според тоа, секој собирок во (1) е 0, па затоа $S_1=0$, што е противречност

Од добиената противречност следува дека се поттребни најмалку $3n$ рамнини, што значи дека врз основа на горниот пример, бараниот број рамнини е $3n$.

Забелешка. Без користење на Вандермондовата детерминанта може да се докаже дека броевите $\delta_0=1, \delta_i=(-1)^i\binom{n}{i}, i=1,2,...,n$ ги задоволуваат условите потребни во горното решение. Тоа следува од следната лема.

Лема 2. За секои природни броеви $0\le m<n$ и произволен полином P, $\deg P=m$ важи

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}P(i)=0 .$$

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. За $n=1$ полиномот P е константа, па затоа го задоволува даденото равенство, бидејќи важи $P(0)-P(1)=0$.

Нека тврдењето е точно за $n-1$ и нека $Q(x)=P(x+1)-P(x)$. Јасно Q е полином и важи $\deg Q=\deg P-1=m-1<n-1$, па затоа важи

$$\begin{aligned} 0 &= -\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}Q(i) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}(P(i)-P(i+1)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}P(i) - \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}P(i+1) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}P(i) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n-1}{i-1}P(i) \\ &= P(0)+\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i})P(i)+(-1)^nP(n) \\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}P(i), \end{aligned}$$

т.е. тврдењето важи и за n. ■

Втор начин. Нека важи се исто како во првиот пасус на првиот начин на решавање.

Лема 3. Нека $P^*(x_1, x_2, ..., x_k)$ е полином кој се анулира во сите точки на множеството

$$\{(x_1, x_2, ..., x_k) \mid x_1, x_2, ..., x_k \in \{0,1,...,n\},\ x_1 + x_2 + ... + x_k > 0\}$$

и $P^*(0,0,...,0) \neq 0$. Тогаш $\deg P^* \geq kn$.

Доказ. Со индукција по k . За $k = 1$, P^* е ненулти полином со n нули, па затоа $\deg P^* \geq n$. Нека тврдењето важи за полином со $k-1$ променлива.

Нека $R(x_1, x_2, ..., x_k)$ е остатокот од делењето на полиномот $P^*(x_1, x_2, ..., x_k)$ со $Q(x_k) = x_k(x_k - 1)...(x_k - n)$. Бидејќи $0, 1, 2, ..., n$ се нули на полиномот Q , добиваме дека P^* и R примаат исти вредности на множеството $\{0,1,...,n\}^k$, па затоа за полиномот R се исполнети условите на лема 2 и $\deg_{x_k} R \leq n$. Нека

$$R(x_1, ..., x_k) = R_n(x_1, ..., x_{k-1})x_k^n + R_{n-1}(x_1, ..., x_{k-1})x_k^{n-1} + ... + R_0(x_1, ..., x_{k-1}) .$$

1) Нека $a_1, a_2, ..., a_{k-1} \in \{0,1,...,n\}$ не се сите еднакви на нула. Степенот на полиномот $T(x_k) = R(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, x_k)$ е помал или еднаков на n и тој се анулира за $x_k \in \{0,1,...,n\}$, па затоа мора да е $T \equiv 0$, од каде што следува $R_n(a_1, ..., a_{k-1}) = 0$.
2) Слично, $T(x_k) = R(0, 0, ..., 0, x_k)$ е полином со степен помал или еднаков на n , има n нули $1, 2, ..., n$ и важи $T(0) = R(0, 0, ..., 0) \neq 0$, па затоа $\deg T = n$, од каде што следува дека $R_n \not\equiv 0$, како и дека $R_n(0, 0, ..., 0) \neq 0$.

Од претходно изнесеното следува дека полиномот $R_n(x_1, ..., x_{k-1})$ ја задоволува индуктивната претпоставка, па затоа

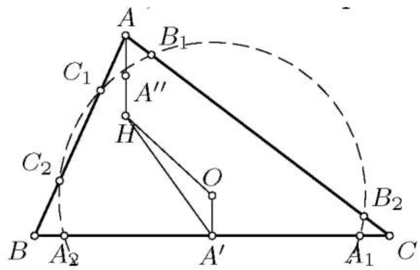
$$\deg P^* \geq \deg R \geq \deg R_n + n \geq (k-1)n + n = kn\ . \ \blacksquare$$

Сега тврдењето на задачата следува од лема 3 применета на полиномот P , бидејќи $P(0, 0, 0) \neq 0$ и $P(i, j, k) = 0$ за $(i, j, k) \in S$, па е $\deg P \geq 3n$.

XLIX олимпијада

1. Нека H е ортоцентарот на остроаголниот триаголник ABC. Кружницата со центар во средината на отсечката BC и која минува низ H ја сече правата BC во точките A_1 и A_2. Аналогно, кружницата со центар во средината на отсечката CA и која ја содржи H ја сече правата CA во точките B_1 и B_2, а кружницата со центар во средината на отсечката AB и која ја содржи точката H ја сече правата AB во точките C_1 и C_2. Докажи дека точките $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ припаѓаат на една кружница.

Решение. *Прв начин*. Нека A' и A'' се соодветно средините на отсечките BC и AH, O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC и R е неговиот радиус. Тогаш од правилото на паралелограм применето на паралелограмите $OA'HA''$ и $OA'A''A$ следува



$$\overline{OA_1}^2 = \overline{OA'}^2 + \overline{A'A_1}^2 = \overline{OA'}^2 + \overline{A'H}^2 = \tfrac{1}{2}(\overline{A'A''}^2 + \overline{OH}^2) = \tfrac{1}{2}(R^2 + \overline{OH}^2) .$$

Истиот израз се добива и за отсечките $OA_2, OB_1, OB_2, OC_1, OC_2$, што значи дека точките $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на кружница со центар во O.

Втор начин. Со A', B', C' да ги означиме средините на отсечките BC, CA, AB, соодветно. Тогаш

$$\overline{CA_1} \cdot \overline{CA_2} = (\overline{CA'} - \overline{A'A_1})(\overline{CA'} + \overline{A'A_1}) = \tfrac{b^2}{4} - \overline{A'H}^2$$

и аналогно

$$\overline{CB_1} \cdot \overline{CB_2} = \tfrac{a^2}{4} - \overline{B'H}^2 .$$

Бидејќи $CH \perp A'B'$, добиваме

$$\overline{A'H}^2 - \overline{B'H}^2 = \overline{A'C}^2 - \overline{B'C}^2 = \tfrac{b^2 - a^2}{4} ,$$

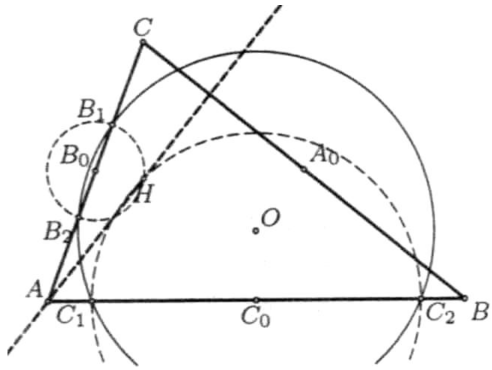
од каде следува дека

$$\overline{CA_1} \cdot \overline{CA_2} = \overline{CB_1} \cdot \overline{CB_2} ,$$

што значи дека A_1, A_2, B_1, B_2 припаѓаат на некоја кружница k_c. Аналогно точките A_1, A_2, C_1, C_2 припаѓаат на некоја кружница k_b и точките B_1, B_2, C_1, C_2 припаѓаат на некоја кружница k_a.

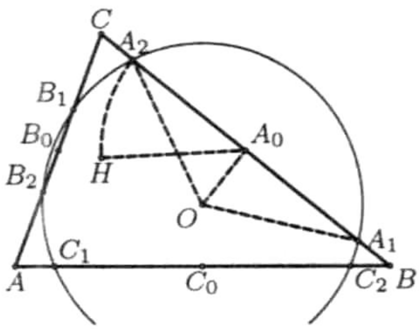
Ако кружниците k_a, k_b, k_c се мешусебно различни, тогаш нивните радикални оски по парови се $BC.CA, AB$, што не е можно бидејќи овие прави не припаѓаат на ист прамен. Затоа сите три кружници се совпаѓаат, т.е. точките

$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на една кружница.



Трет начин. Нека k_B и k_C се кружниците од условот на задачата чии центри се средините на отсечките CA и BA, соодветно. Радикалната оска на овие две кружници е нормална на правата која ги поврзува нивните центри, т.е. нормална е на правата која ја содржи средната линија на $\triangle ABC$ соодветна на страната BC, па затоа е нормална на BC. Оваа радикална оска ја содржи и точката H, бидејќи кружниците k_B и k_C се сечат во H, па затоа ја содржи висината повлечена кон страната BC. Тоа значи дека точката A припаѓа на оваа радикална оска, па затоа $\overline{AB_1} \cdot \overline{AB_2} = \overline{AC_1} \cdot \overline{AC_2}$, од каде следува дека точките B_1, B_2, C_1, C_2 се конциклични. Центарот на кружницата која ги содржи овие точки припаѓа на симетралите на отсечките B_1B_2 и C_1C_2, па како тие се совпаѓаат со симетралите на отсечките AC и AB следува дека овој центар се совпаѓа со центарот O на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Оттука следува дека $\overline{OB_1} = \overline{OB_2} = \overline{OC_1} = \overline{OC_2}$.

Аналогно се докажува дека $\overline{OB_1} = \overline{OB_2} = \overline{OA_1} = \overline{OA_2}$, од каде што следува тврдењето на задачата.



Четврт начин. Нека A_0 е средина на отсечката BC. Дадената конфигурација ја сместуваме во комплексна рамнина така што центарот O на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ е координатниот почеток, опишаната кружница околу $\triangle ABC$ е единична и нека точките $A, B, C, H, A_0, A_1, A_2$ имаат афикси $a, b, c, h, a_0, a_1, a_2$, соодветно. Тогаш $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1$, $h = a + b + c$ и $a_0 = \frac{b+c}{2}$.

Од правоаголните триаголници OA_1A_0 и OA_0A_2 следува

$$\begin{aligned}\overline{OA_1}^2 &= \overline{OA_2}^2 = \overline{OA_0}^2 + \overline{A_0A_1}^2 = \overline{OA_0}^2 + \overline{A_0H}^2 \\ &= \tfrac{b+c}{2} \cdot \overline{\tfrac{b+c}{2}} + (a + b + c - \tfrac{b+c}{2}) \cdot \overline{(a + b + c - \tfrac{b+c}{2})} \\ &= a\bar{a} + \tfrac{b\bar{b}}{2} + \tfrac{c\bar{c}}{2} + \tfrac{a\bar{b}+\bar{a}b+b\bar{c}+\bar{b}c+c\bar{a}+\bar{c}a}{2} = 2 + \tfrac{a\bar{b}+\bar{a}b+b\bar{c}+\bar{b}c+c\bar{a}+\bar{c}a}{2}.\end{aligned}$$

Последниот израз е симетричен по a,b,c, па со циклична замена на промен-ливите се добива $\overline{OA_1}^2=\overline{OA_2}^2=\overline{OB_1}^2=\overline{OB_2}^2=\overline{OC_1}^2=\overline{OC_2}^2$, што значи дека точките A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 се конциклични.

2. а) Докажи, дека

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1 \tag{1}$$

за секои реални броеви x,y,z такви шту ниту еден од нив не е еднаков на 1 и за кои важи $xyz=1$.

б) Докажи, дека знак за равенство важи за бесконечно многу тројки рационални броеви x,y,z такви што ниту еден од нив не е еднаков на 1 и за кои важи $xyz=1$.

Решение. *Прв начин.* а) Воведуваме смена $a=\frac{x}{x-1}, b=\frac{y}{y-1}, c=\frac{z}{z-1}$ и условот на задачата го добива обликот $a+b+c=ab+bc+ca+1$, а неравенството (1) го добива обликот

$$a^2+b^2+c^2\geq 1. \tag{2}$$

Понатаму, имаме

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=(a+b+c)^2-2(a+b+c)+2\\&=(a+b+c-1)^2+1\geq 1,\end{aligned}$$

т.е. точно е неравенството (2), при што знак за равенство важи ако и само ако $a+b+c=1$ и $ab+bc+ca=0$.

б) Треба да докажеме, дека постојат бесконечно многу тројки $a,b,c\in\mathbb{Q}$ такви што $a+b+c=1$ и $ab+bc+ca=0$. Ако во второто равенство замениме $c=1-a-b$ добиваме $a^2+ab+b^2-a-b=0$. Во последното равенство земаме $b=ta$ и истото го добива обликот $(t^2+t+1)a^2=(t+1)a$, од каде наоѓаме $a=\frac{t+1}{t^2+t+1}$ и $b=\frac{t^2+t}{t^2+t+1}$. Сега, $c=1-a-b=\frac{-t}{t^2+t+1}$. Според тоа, за

$$(a,b,c)=(\tfrac{t+1}{t^2+t+1},\tfrac{t^2+t}{t^2+t+1},\tfrac{-t}{t^2+t+1})$$

важи знак за равенство за секој $t\in\mathbb{Q}$.

Втор начин. Нека $a=\frac{x}{x-1}, b=\frac{y}{y-1}, c=\frac{z}{z-1}$ и $s_1=x+y+z, s_2=xy+yz+zx$ и $s_3=xyz=1$. Тогаш

$$0\neq(x-1)(y-1)(z-1)=s_3-s_2+s_1-1=s_1-s_2,$$

$$abc = \frac{xyz}{(x-1)(y-1)(z-1)} = \frac{1}{s_1 - s_2},$$
$$ab+bc+ca = \frac{xy(z-1)+yz(x-1)+zx(y-1)}{(x-1)(y-1)(z-1)} = \frac{3-s_2}{s_1-s_2},$$
$$a+b+a = \frac{x(y-1)(z-1)+y(z-1)(x-1)+z(x-1)(y-1)}{(x-1)(y-1)(z-1)} = \frac{3-2s_2+s_1}{s_1-s_2},$$

па затоа a,b,c се корени на полннимот

$$P(t) = (s_1 - s_2)t^3 - (3-2s_2+s_1)t^2 + (3-s_2)t - 1,$$

кој е од трет степен бидејќи $s_1 - s_2 \neq 0$. Според тоа,

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= (\tfrac{3-2s_2+s_1}{s_1-s_2})^2 - 2\cdot\tfrac{3-s_2}{s_1-s_2} \\ &= 1 + \tfrac{(3-s_2)^2}{(s_1-s_2)^2} \geq 1. \end{aligned}$$

Со тоа е докажано бараното неравенство, а знак за равенство важи ако и само ако $s_3 = xyz = 1$ и $3 = s_2 = xy+yz+zx$ Следува $yz = \frac{1}{x}$ и $y+z = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$, па затоа y и z се корени на равенката $t^2 - (\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2})t + \frac{1}{x} = 0$. За рационални x тие се рационални ако е дискриминантата на оваа е точен квадрат на рационален број, т.е. $(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2})^2 - \frac{4}{x} = \frac{(x-1)^2(1-4x)}{x^4}$ е точен квадрат на рационален број, а тоа е на пример за $1-4x = q^2$ за $q \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{1\}$ (бидејќи $x \neq 0$ различните $q \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{1\}$ даваат различни x, па на овој начин се добиваат бесконечлно многу барани тројки).

3. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што бројот n^2+1 има прост делител поголем од $2n+\sqrt{2n}$.

Решение. Како што знаеме, постојат бесконечно многу прости броеви од облик $p = 4k+1, k \in \mathbb{N}$ и дека за секој таков број p важи $(\frac{-1}{p}) = 1$, што значи дека постои точно еден природен број n, $n < \frac{p-1}{2}$ таков што $n^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$. Тогаш n^2+1 има прост делител p поголем од $2n$. Ќе докажеме дека за $p > 20$ всушност важи $p > 2n+\sqrt{2n}$.

Нека $k = p-2n$. Од $p \mid (2n)^2+4 \equiv k^2+4 \,(\mathrm{mod}\, p)$ и $k \geq \sqrt{p-4} > 4$ следува дека $k^2 \geq p-4 = 2n+k-4 > 2n$. Затоа, $p = 2n+k > 2n+\sqrt{2n}$ и $p \mid n^2+1$.

4. Определи ги сите функции $f:(0,+\infty) \to (0,+\infty)$ такви што

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}, \qquad (1)$$

за секои позитивни реални броеви x,y,z,w такви што $wx=yz$.

Решение. Ако во (1) земеме $x=y=z=w$, добиваме $f(x^2)=f(x)^2$, за секој $x>0$, па ако во последната равенка земеме $x=1$ наоѓаме $f(1)=1$. Сега за $w=1,\ y=z=\sqrt{x}$ од (1) следува

$$\frac{1+(f(x))^2}{2f(x)}=\frac{1+x^2}{2x},$$

што е еквивалентно со

$$(f(x)-x)(f(x)-\tfrac{1}{x})=0,$$

т.е. $f(x)\in\{x,\frac{1}{x}\}$, за секој $x>0$.

Нека претпоставиме дека за некои $x,w\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$ важи $f(x)=x$ и $f(w)=\frac{1}{w}$. Ако земеме $y=z=\sqrt{wx}$, тогаш од (1) следува

$$\frac{\frac{1}{w^2}+x^2}{2f(wx)}=\frac{w^2+x^2}{2wx}.$$

Меѓутоа, за $f(wx)=wx$ од последната равенка следува $w=1$, а за $f(wx)=\frac{1}{wx}$ повторно од последната равенка следува $x=1$, што е противречност. Според тоа, $f(x)=x$, за секој $x>0$ или $f(x)=\frac{1}{x}$ за секој $x>0$. Лесно се проверува дека овие функции ја задоволуваат равенката (1).

5. Нека се n и k природни броеви такви што $k>n$ и $k-n$ е парен број. Дадени се $2n$ сијалици означени со броевите $1,2,\dots,2n$; секоја од кои може да биде запалена или изгасната. На почетокот сите сијалици се изгаснатаи. Разгледуваме низи од чекори: во секој чекор се менува состојбата на точно една сијалица (запалена станува изгасната, а изгасната - запалена).
Нека N е бројот на такви низи од k чекори кои даваат состојба во која сите сијалици од 1 до n се запалени, а сите сијалици од $n+1$ до $2n$ се изгаснати.
Нека M е бројот на такви низи од k чекори кои даваат состојба во која сите сијалици од 1 до n запалени, а сите сијалици од $n+1$ до $2n$ се изгаснати и притоа ниту еднаш не е променета состојбата на сјалиците од $n+1$ до $2n$.
Пресметај $\frac{N}{M}$.

Решение. Низата чекори после која сите сијалици од 1 до n се запалени, а останатите се изгаснати ја нарекуваме *допустлива*. Ако притоа сијалиците од $n+1$ до $2n$ не ја менувале состојбата, тогаш низата ја нарекуваме *строга*. Значи, има N допустливи низи, од кои M се строги. Јасно, $M,N>0$. Секоја допустлива низа, на секоја сијалица од 1 до n и ја менува состојбата непарен број пати, а на секоја од останатите сијалици парен број пати.

Набљудуваме строга низа чекори P. Нека со неа сијалицата i $(1\leq i\leq n)$ ја менувала состојбата m_i пати. Притоа важи $m_1+m_2+...+m_n=k$. Ако за секој i избереме парен број од овие m_i чекори и ги замениме во чекорите на сијалицата $n+i$, добиваме допустлива низа чекори. За дадено i, овие чекори може да се изберат на 2^{m_i-1} начини (толку има подмножества на m_i-елементно множество со парен број елементи). Вкупно, со оваа постапка од строга низа чекори P можеме да направиме допустлива низа на точно $\prod_{i=1}^{n}2^{m_i-1}=2^{k-n}$ начини.

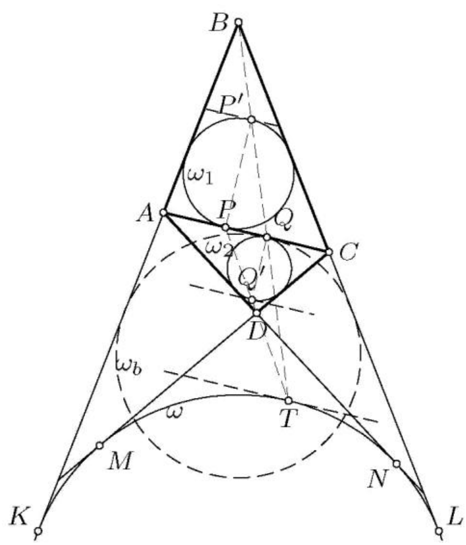
Од друга страна, секоја допустлива низа чекори може да се добие само од една строга низа (онаа која се добива кога сите чекори на било која сијалица j за $j>n$ се заменат со чекор на сијалицата $j-n$), и тоа на само еден начин. Според тоа, вака е конструирано "$1\leftrightarrow 2^{n-k}$" пресликување меѓу строгите и допустливите низи чекори. Затоа $\frac{N}{M}=2^{k-n}$.

6. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник кај кој $\overline{BA}\neq\overline{BC}$. Нека ω_1 и ω_2 се впишаните кружници во триаголниците ABC и ADC, соодветно. Да претпоставиме дека постои кружница ω која ја допира полуправата BA по точката A и полуправата BC по точката C, а која истовремено ги допира и правите AD и CD. Докажи дека надворешните заеднички тангенти на кружниците ω_1 и ω_2 се сечат на ω.

Решение. *Прв начин*. Нека ω ги допира правите AB, BC, CD, DA соодветно во точките K, L, M, N. Тогаш

$$\begin{aligned}\overline{BA}+\overline{AD}&=\overline{BA}+\overline{AN}-\overline{DN}\\&=\overline{BK}-\overline{DN}\\&=\overline{BL}-\overline{DM}\\&=\overline{BC}+\overline{CM}-\overline{DM}\\&=\overline{BC}+\overline{CD}.\end{aligned}$$

Тоа значи дека ако со P и Q ги означиме допирните точки соодветно на ω_1 (со центар во O_1) и ω_2 (со центар во O_2) со AC, тогаш важи $\overline{AP}=\frac{\overline{AC}+\overline{AB}-\overline{BC}}{2}=\frac{\overline{AC}+\overline{CD}-\overline{AD}}{2}=\overline{CQ}$.



Со други зборови, припишаната кружница ω_b наспроти B во триаголникот ABC ја допира AC точно во точката Q.

Разгледуваме хомотетија χ_B со центар во B која кружницата ω_b ја пресликува во кружницата ω и да означиме $T=\chi_B(Q)$. Сега точката P' дијаметрално спротивна на точката P на ω_1 лежи на правата BQ, а точката Q' дијаметрално спротивна на точката Q на ω_2 лежи на правата DP (Зошто?). Тангентите во P', Q' и T соодветно на ω_1, ω_2 и ω се прави паралелни со правата AC. Следува дека хомотетијата со центар D која ω_2 ја пресликува во ω ја пресликува точката Q' во точката T, па затоа точките T, D, Q', P се колинеарни. Значи, правите $P'Q$ и PQ' се сечат во точката T, па како е $PP' \| QQ'$, точката T е центар на хомотетија која ω_1 ја пресликува во ω_2, од каде следува тврдењето на задачата.

L олимпијада

1. Нека n е природен број и нека $a_1, a_2, ..., a_k, (k \geq 2)$ се меѓусебно различни природни броеви од множеството $\{1, 2, ..., n\}$ такви што броевите $a_i(a_{i+1}-1)$ се деливи со n за секој $i \in \{1, 2, ..., k-1\}$. Докажи дека бројот $a_k(a_1-1)$ не е делив со n.

Решение. *Прв начин*. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. нека

$$a_i a_{i+1} \equiv a_i \ (\operatorname{mod} n) \text{ за } i = 1, 2, ..., k$$

(индексите се сметаат по модул k). Тогаш за секој j важи

$$a_j \equiv a_j a_{j+1} \equiv a_j a_{j+1} a_{j+2} \equiv ... \equiv a_j a_{j+1} ... a_{j+k-1} = a_1 a_2 ... a_k \ (\operatorname{mod} n),$$

па затоа $a_1 \equiv a_2 \equiv ... \equiv a_k \ (\operatorname{mod} n)$, што е противречност.

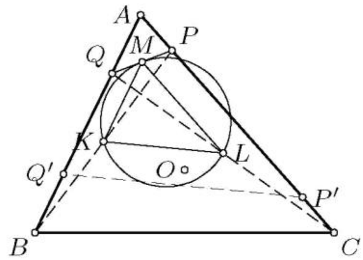
Втор начин. Ако a, b и c се такви цели броеви што n е делител на $a(b-1)$ и $b(c-1)$, тогаш n е делител на $a(c-1) = ab(c-1) - a(b-1)(c-1)$. Оттука по индукција следува дека n еделител на $a_1(a_{i+1}-1)$ за $i = 1, 2, .., k-1$. Во случајов n е делител на $a_1(a_k - 1) = a_k(a_1-1) + a_k - a_1$. Според тоа, n е делител на $a_k(a_1-1)$ ако и само ако n е делител на $a_k - a_1$. Последното не е можно, бидејќи $0 < |a_k - a_1| < n$.

Трет начин. Нека $a_0 = a_k$, $a_{k+1} = a_1$ и нека $n | a_i(a_{i+1}-1)$ за $i = 0, 1, ..., k$. Нека $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_l^{\alpha_l}$ е каноничната репрезентација на бројот n. Ако $p_i | a_j$ за некој $j \in \{1, 2, ..., k-1\}$, од $p_i | a_{j-1}(a_j - 1)$ и $\operatorname{NZD}(a_{j-1}, a_j) = 1$ следува $\operatorname{NZD}(p_i, a_j - 1) = 1$, па затоа $p_i^{\alpha_i} | a_{j-1}$. Слично, ако $p_i | a_j - 1$ за некој $j \in \{1, ..., k-1\}$, од $p_i | a_j(a_{j+1}-1)$ и $\operatorname{NZD}(a_j, a_j - 1) = 1$ следува $\operatorname{NZD}(p_i, a_j)$ $= 1$, па затоа $p_i^{\alpha_i} | a_{j+1} - 1$. Значи, за секој $j \in \{1, 2, ..., k\}$ важи $a_j \equiv c_i$ $(\operatorname{mod} p_i^{\alpha_i})$, каде $c_i \in \{0, 1\}$ за секој $i \in \{1, 2, ..., l\}$. Сега од Кинеската теорема за остатоци следува дека $a_1 \equiv a_2 \equiv ... \equiv a_k \ (\operatorname{mod} n)$, што е противречност.

Четврт начин. Нека $a_0 = a_k$, $a_{k+1} = a_1$ и нека $n | a_i(a_{i+1}-1)$ за $i = 0, 1, ..., k$. Да означиме $d_i = \operatorname{NZD}(a_i, n)$. Од $\operatorname{NZD}(d_i, a_i - 1) = 1$ и $d_i | n | a_{i-1}(a_i - 1)$ следува $d_i | a_{i-1}$ и оттука $d_i | \operatorname{NZD}(a_{i-1}, n) = d_{i-1}$. Според тоа, $d_k | d_{k-1} | ... | d_1 | d_0 = d_k$ и оттука следува $d_k = d_{k-1} = ... = d_1 = d$ за некој d. На потполно идентичен начин добиваме дека $e_k = e_{k-1} = ... = e_1 = e$ за некој e каде $e_i = \operatorname{NZD}(a_i - 1, n)$. Понатаму, од $n | a_i(a_{i+1}-1)$ следува $n | de$. Сега од $s_i \equiv a_j \equiv 0 (\operatorname{mod} d)$ и $s_i \equiv a_j \equiv 1 (\operatorname{mod} e)$ следува $d_i \equiv a_j \equiv 1 (\operatorname{mod} n)$, што е противречност.

2. Точката O е центар на опишаната кружница на $\triangle ABC$, а P и Q се внатрешни точки на отсечките AC и AB, соодветно. Точките K, L и M се средини на отсечките BP, CQ и PQ, соодветно, а Γ е кружницата која минува низ точките K, L и M. Ако правата PQ е тангента на кружницата Γ, докажи дека $\overline{OP} = \overline{OQ}$.

Решение. *Прв начин*. Бидејќи PQ е тангента на Γ и $MK \parallel AB$ и $ML \parallel AC$, добиваме дека $\measuredangle LKM = \measuredangle LMP = \measuredangle APQ$ и $\measuredangle KLM = \measuredangle KMQ = \measuredangle AQP$, па затоа триаголниците MKL и APQ се слични. Оттука следува дека



$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{ML}}{\overline{MK}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{QB}}, \text{ т.е. } \overline{AP} \cdot \overline{PC} = \overline{AQ} \cdot \overline{QB}.$$

Сега, $\overline{AP} \cdot \overline{PC} = \overline{OA}^2 - \overline{OP}^2$ и $\overline{AQ} \cdot \overline{QB} = \overline{OA}^2 - \overline{OQ}^2$, како степени на точките P и Q во однос на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Конечно, од последните три равенства следува $\overline{OP} = \overline{OQ}$.

Втор начин. Нека P' и Q' се точки такви што $\overrightarrow{P'C} = \overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{Q'B} = \overrightarrow{AQ}$. Тогаш

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{ML} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PC}) = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{Q'A} + \overrightarrow{AP'}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{Q'P'},$$

па затоа $Q'P' \parallel KL$. Сега, $\measuredangle AQ'P' = \measuredangle MKL = \measuredangle APQ$, од каде следува дека точките P, Q, P', Q' лежат на иста кружница. Центарот на оваа кружница е пресекот на симетралите на отсечките PP' и QQ', што е точката O, бидејќи овие симетрали се совпаѓаат со симетралите на отсечките AC и AB. Оттука следува $\overline{OP} = \overline{OQ}$.

3. Нека $s_1, s_2, s_3, ...$ е строго растечка низа природни броеви таква што следните две нејзини поднизи

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, ... \text{ и } s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, ...$$

се аритметички прогресии. Докажи дека низата $s_1, s_2, s_3, ...$ е аритметичка прогресија.

Решение. Нека $s_{s_n} = an + b$ и $s_{s_n+1} = cn + d$ за секој n, каде a, b, c, d се константи. Од $an + b = s_{s_n} \le cn + d = s_{s_n+1} \le s_{s_{n+1}} = a(n+1) + b$ добиваме дека $b - d \le (c-a)n \le a + b - d$, за секој n, па затоа мора да е $a = c$.

Бидејќи низата $s_1, s_2, s_3, ...$ е строго растечка, важи $s_m - s_n \ge m - n$ за $m \ge n$.

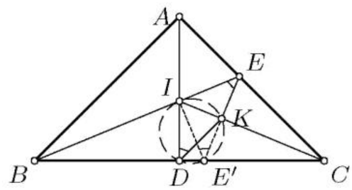
Затоа $1 \le s_{n+1} - s_n \le s_{s_n+1} - s_{s_n} = a$, па постојат $m = \min\{s_{n+1} - s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $M = \max\{s_{n+1} - s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Нека $s_{k+1} - s_k = m$ и $s_{l+1} - s_l = M$. Имаме:

$$\begin{aligned} Mm &= \sum_{i=1}^{M} m \le \sum_{i=1}^{M} (s_{s_k+i} - s_{s_k+i-1}) = s_{s_k+1} - s_{s_k} = a \\ &= s_{s_l+1} - s_{s_l} = \sum_{i=1}^{m} (s_{s_k+i} - s_{s_k+i-1}) \le \sum_{i=1}^{m} M = Mm. \end{aligned} \qquad (1)$$

Според тоа, сите неравенства во (1) мора да се равенства, па за $i = 1$ добиваме $m = s_{s_k+1} - s_{s_k} = d - b = s_{s_l+1} - s_{s_l} = M$, т.е. $s_{n+1} - s_n$ е константа.

4. Во триаголникот ABC важи $\overline{AB} = \overline{AC}$. Симетралите на $\measuredangle CAB$ и $\measuredangle ABC$ ги сечат страните BC и CA во точките D и E, соодветно. Нека K е центарот на впишаната кружница во триаголникот ADC. Ако $\measuredangle BEK = 45^\circ$, определи ги сите можни вредности на $\measuredangle CAB$.

Решение. Со I да го означиме центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, а со E' точката симетрична на точката E во однос на правата CI. Бидејќи



$$\measuredangle IE'K = \measuredangle IEK = 45^\circ = \measuredangle IDK,$$

заклучуваме дека точките I, D, E', K лежат на иста кружница.

Ако $E' \equiv D$, тогаш триаголниците IEC и IDC се складни, па затоа $\measuredangle BEC = 90^\circ$, од каде што следува дека $\triangle ABC$ е рамностран и $\measuredangle CAB = 60^\circ$. Навистина, во овој случај равенството $\measuredangle BEK = \measuredangle IDK = 45^\circ$ тривијално важи.

Ако $E' \not\equiv D$, тогаш точките D и K се на кружница над дијаметар IE', па затоа $90^\circ = \measuredangle IKE' = \measuredangle IKE$. Понатаму,

$$\measuredangle CIE = 45^\circ \text{ и } \measuredangle BIC = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\measuredangle CAB = 135^\circ,$$

па затоа $\measuredangle CAB = 90^\circ$. Од друга страна, ако $\measuredangle CAB = 90^\circ$, нека нормалата во K на CI ги сече AC и BC соодветно во точките E^* и E^{**}. Точките I, D, E^{**}, K припаѓаат на кружницата , па е $\measuredangle IE^*K = \measuredangle IE^{**}K = \measuredangle IDK = 45^\circ$ и $\measuredangle CIE^* = 45^\circ = \measuredangle CIE$, па е $E^* \equiv E$.

Според тоа, можни вредности за $\measuredangle CAB$ се 60° и 90°.

5. Определи ги сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такви што за секои природни броеви a и b постои недегенериран триаголник чии должини на страни се

$$a,\ f(b) \text{ и } f(b + f(a) - 1).$$

Решение. *Прв начин*. Ставаме $a=1$ и добиваме дека $1, f(b)$ и $f(b+f(1)-1)$ се страни на триаголник, па затоа мора да важи $f(b+f(1)-1)=f(b)$. Ако $f(1)\neq 1$, од последното равенство следува дека функцијата f е периодична, па затоа важи $f(x)\leq M$ за некој M. Но, тогаш $2M, f(b)$ и $f(b+f(2M)-1)$ не може да се страни на триаголник, па затоа $f(1)=1$.

За $b=1$ добиваме дека $a,1$ и $f(f(a))$ се страни на триаголник за секој a, па затоа $f(f(a))=a$, т.е. f е биекција. Ако наместо a ставиме $f(a)$ добиваме дека $f(a), f(b)$ и $f(a+b-1)$ се страни на триаголник.

Нека $f(2)=z$. Очигледно $z>1$ и $f(z)=2$. Бидејќи $f(z), f(z)$ и $f(2z-1)$ се страни на триаголник, имаме $f(2z-1)<2f(z)=4$, т.е. $f(2z-1)\in\{1,2,3\}$. Но, f е биекција и $2z-1\notin\{1,2\}$, па затоа единствена можност е $f(2z-1)=3$, т.е. $f(3)=2z-1$.

Со индукција ќе докажеме дека $f(n)=(n-1)z-(n-2)$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Јасно, ова важи за $n\leq 2$. Нека претпоставиме дека равенството важи за секој $n<k$ ($k\geq 3$). Бидејќи $f((k-1)z-k+2), f(z)$ и $f(kz-k+1)$ се страни на триаголник, важи

$$f(kz-k+1)\leq f(z)+f((k-1)z-k+2)\leq 2+k-1=k+1,$$

па како функцијата е биекција следува дека $f(kz-k+1)=k+1$ и оттука $f(k+1)=kz-k+1$, со што индуктивниот доказ е завршен. Исто така следува дека f е растечка. Тоа значи дека од $z\geq 2$ следува $2=f(z)\geq f(2)=z$, па е $z=2$. Конечно, $f(n)=2(n-1)-n+2=n$. Лесно се проверува дека функцијата $f(n)=n$, $n\in\mathbb{N}$ ги исполнува условите на задачата.

Втор начин. Да претпоставиме дека $f(1)=d+1>1$. Ако земеме $a=1$, тогаш бидејќи $1, f(b)$ и $f(b+f(a)-1)=f(b+d)$ се страни на триаголник добиваме $|f(b)-f(b+d)|<1$, па затоа $f(b)=f(b+d)$, за секој $b\in\mathbb{N}$. Значи, функцијата f е периодична, па затоа таа е ограничена, на пример со m. Тогаш за секој природен број a важи $a<f(b)+f(b+f(a)-1)\leq 2m$, што е противречност. Од добиената противречност следува дека $f(1)=1$. Ако во условот на задачата земеме $b=1$, добиваме дека за секој природен број a важи $|f(f(a))-a|<1$, па затоа $f(f(a))=a$. Оттука

$$f(a+b-1)=f(f(f(a))+b-1)<f(a)+f(b).$$

Ако $e=f(2)-1$, тогаш

$$f(1+en)-f(1+e(n-1))<f(f(2))=2,\ n\in\mathbb{N}.$$

Според тоа, $f(1+en)\leq 1+f(1+e(n-1))$ и како $f(1)=1$, по индукција следува

$f(1+e(n-1)) \le n$.

Од друга страна, од $f(f(a)) = a$ следува дека f е биекција. Затоа $e = 1$ и $f(n) = n$, за $n \in \mathbb{N}$. Лесно се проверува дека оваа функција го задоволува условот на задачата.

6. Нека се $a_1, a_2, ..., a_n$ по парови различни природни броеви и нека је M е множество кое се состои од $n-1$ природни броеви и не го содржи бројот $s = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Скакулец треба да направи n скокови надесно по бројната права, тргнувајќи од точката со координата 0. Притоа, должините на неговите скокови мора да бидат еднакви на броевите $a_1, a_2, ..., a_n$, во некој редослед. Докажи, дека тој редослед може да се избере таке што скакулецот никогаш нема да скокне во точка чија координата е во множеството M.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. За $n = 1$ тврдењето очигледно важи. Нека претпоставиме дека $n \ge 2$ и дека тврдењето важи за сите $k < n$. Нека $a_1 < a_2 < ... < a_n$ и $m = \min M$. Можни се два случаја.

1) $m < a_n$. Ако $a_n \notin M$, скакулецот го прави првиот скок со должина a_n. Потоа, треба да направи скокови со дужина $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ така што прескокнува $n-2$ точки од множеството $M \setminus \{m\}$, а тоа според индуктивната претпоставка може да го направи.

   Нека претпоставиме дека $a_n \in M$. Паровите $(a_i, a_i + a_n)$ за $1 \le i \le n-1$ се меѓусобно дисјунктни, па барем еден од нив не содржи ниту еден елемент од множеството $M \setminus \{a_n\}$ (а не го содржи ниту a_n). Нека тоа е парот $(a_k, a_k + a_n)$. По два скока со должини a_k и a_n редоследно, на скакулецот му останува да направи скокови со должини $a_1, ..., a_{k-1}, a_{k+1} ..., a_{n-1}$ така што ќе прескокне $n-3$ точки на множеството $M \setminus \{m, a_n\}$, што според индуктивната претпоставка повторно може да го направи.

2) $m \ge a_n$. Според индуктивната претпоставка, скакулецот може првиот скок да го направи со должина a_n и останатите скокови по некој редослед a_{i_1} , . . . , $a_{i_{n-1}}$ така што ґе ги заобиколи сите точки на множеството $M \setminus \{m\}$. Ако притоа не скокне и во точката m, доказот е завршен. Затоа нека претпоставиме дека во $k-$тиот скок тој скокнува во точката m, т.е. $a_n + a_{i_1} + ... + a_{i_k - 1} = m$. Во овој случај, скакулецот со низа $a_{i_1}, ..., a_{i_k}, a_n$, $a_{i_{k+1}}, ..., a_{n-1}$ ги исполнува барањата на задачата. Навистина, и на овој начин скакулецот ги прескокнува точките на множеството $M \setminus \{m\}$, но ја прескокнува и точката m бидејќи $a_{i_1} + ... + a_{i_k} < m < a_{i_1} + ... + a_{i_k} + a_n$.

LI олимпијада

1. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$f([x]y)=f(x)[f(y)]. \qquad (1)$$

($[z]$ е најголемиот цел број кој не е поголем од z.)

Решение. *Прв начин.* За $x=y=0$ добиваме $f(0)=f(0)[f(0)]$, од каде следува $f(0)=0$ или $[f(0)]=1$.

Ако $[f(0)]=1$, ставаме $y=0$ во (1) и добиваме $f(x)=f(0)=c\in[1,2)$, за секој $x\in\mathbb{R}$. За $c\in[1,2)$ функцијата $f(x)=c$ е решение бидејќи за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи $f([x]y)=c=c\cdot 1=c\cdot[c]=f(x)[f(y)]$.

Нека $f(0)=0$. Тогаш за секој $x\in[0,1)$ од (1) добиваме $f(x)[f(y)]=0$, што значи дека $f(x)=0$ за секој $x\in[0,1)$ или $[f(y)]=0$ за секој $y\in\mathbb{R}$.

1) Ако $[f(y)]=0$ за секој y, тогаш за $x=1$ од (1) следува $f(y)=0$. Навистина функцијата $f(y)=0$ исто така е решение на задачата, бидејќи тогаш $f([x]y)=0=0\cdot[0]=f(x)[f(y)]$.
2) Нека $f(x)=0$ за секој $x\in[0,1)$. За $y\in\mathbb{R}$, нека n е цел број таков што $\frac{y}{n}\in[0,1)$. Тогаш $f(y)=f(n\cdot\frac{y}{n})=f(n)[f(\frac{y}{n})]=0$, т.е. $f\equiv 0$.

Конечно, единствени решенија на задачата се константните функции

$$f(x)=c \text{ каде } c=0 \text{ или } c\in[1,2).$$

Втор начин. Ако во (1) ставиме $x=y=1$ добиваме $f(1)=f(1)[f(1)]$, па затоа $f(1)=0$ или $[f(1)]=1$.

Ако $f(1)=0$, во (1) ставаме $x=1$ и добиваме $f(y)=0$ за секој $y\in\mathbb{R}$. Како погоре се докажува дека функцијата $f(x)=0$ е решение на задачата.

Ако $[f(1)]=1$, во (1) ставаме $y=0$ и добиваме $f(0)=f(x)[f(0)]$. Можни се два случаја.

1) Ако $[f(0)]\neq 0$, тогаш $f(x)=\frac{f(0)}{[f(0)]}$, што значи дека за $c=\frac{f(0)}{[f(0)]}$ важи $f(x)=c$, за закој $x\in\mathbb{R}$. Сега од (1) имаме $c=c[c]$, па затоа $c\in[1,2)$. Од друга страна функцијата $f(x)=x\in[1,2)$ навистина е решение на задачата, бидејќи $f([x]y)=c=c\cdot 1=c\cdot[x]=f(x)[f(y)]$.
2) Ако $[f(0)]=0$, во (1) ставаме $y=1$ и добиваме $f(x)=f([x])$. Сега, ако ставиме $x=2,\ y=\frac{1}{2}$, добиваме

$$f(1)=f([2]\cdot\tfrac{1}{2})=f(2)[f(\tfrac{1}{2})]=f(2)[f([\tfrac{1}{2}])]=f(2)[f(0)]=0,$$

што не е можно.

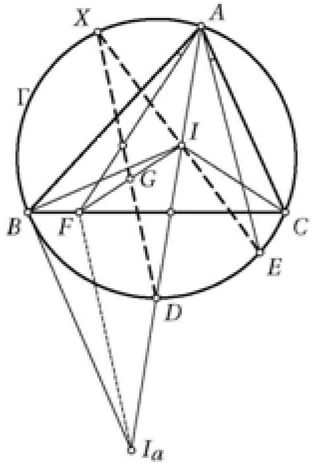
Конечно, единствени решенија на задачата се константните функции

$$f(x)=c \text{ каде } c=0 \text{ или } c\in[1,2).$$

2. Нека I е центар на впишаната кружница, а Γ е опишаната кружница на $\triangle ABC$. Нека правата AI ја сече Γ во точките A и D. Нека E е точка од лакот BDC, а F е точка на отсечката BC така што

$$\measuredangle BAF=\measuredangle CAE<\tfrac{1}{2}\measuredangle BAC.$$

Нека G е средина на отсечката IF. Докажи дека правите DG и EI се сечат на кружницата Γ.



Решение. *Прв начин.* Ако I_a е центарот на припишаната кружница на $\triangle ABC$ наспроти темето A, тогаш важи $\measuredangle IBI_a=90^\circ$ и $\overline{DI}=\overline{DB}$, па затоа D е средина на отсечката II_a. Понатаму, од

$$\measuredangle AI_aB=\measuredangle ACI \text{ и } \measuredangle I_aAB=\measuredangle CAI$$

следува $\triangle ABI_a\sim\triangle AIC$, а од $\measuredangle EAC=\measuredangle BAF$ и $\measuredangle AEC=\measuredangle ABF$ следува $\triangle AEC\sim\triangle ABF$. Од овие сличности добиваме

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AI_a}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{AI_a}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{AI}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AI}}{\overline{AE}},$$

а тоа заедно со $\measuredangle FAI_a=\measuredangle IAE$ дава $\triangle AI_aF\sim\triangle AEI$. Ако сега со X ја означиме втората пресечна точка на правата EI и Γ, добиваме

$$\measuredangle ADG=\measuredangle AI_aF=\measuredangle AEI=\measuredangle AEX=\measuredangle ADX,$$

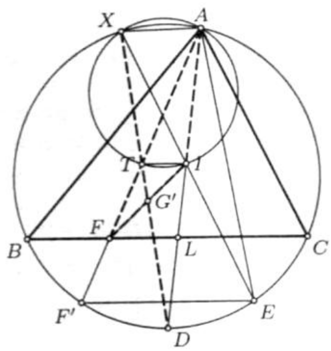
па затоа X припаѓа на правата DG, што и требаше да се докаже.

Втор начин. Нека правата EI по втор пат ја сече Γ во точката X, а XD ги сече AF и IF во T и G', соодветно, L е пресекот на AD и BC, F' е пресекот на AF и Γ. Од

$$\measuredangle IXT=\measuredangle EXD=\measuredangle EAD=\measuredangle DAF'=\measuredangle IAT$$

следува дека точките I,A,X,T се концик-лични, па затоа

$$\measuredangle ATI=\measuredangle AXI=\measuredangle AXE=\measuredangle AF'E.$$



Следува, $TI\parallel EF'\parallel BC$ и оттука $\frac{\overline{AT}}{\overline{TF}}=\frac{\overline{AI}}{\overline{IL}}$.

Од друга страна, важи $\frac{\overline{AD}}{\overline{DI}}=\frac{\overline{AI}}{\overline{IL}}$ (навистина , ако L' е симетрична на точката L во однос на CI, тогаш $IL'\parallel CD$, па е $\triangle AL'I\sim\triangle ACD$ и оттука $\frac{\overline{AD}}{\overline{DI}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}=$

$\frac{\overline{AI}}{\overline{IL'}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{IL}}$). Сега од теоремата на Менелај (применета на $\triangle AFI$ и правата XD) имаме

$$1 = \frac{\overline{FG'}}{\overline{G'I}} \cdot \frac{\overline{ID}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{AI}}{\overline{TF}} = \frac{\overline{FG'}}{\overline{G'I}},$$

па затоа $G' \equiv G$.

3. Определи ги сите функции $g:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такви што

$$(g(m)+n)(m+g(n))$$

е точен квадрат на природен број за секои $m,n \in \mathbb{N}$.

Решение. Ќе ја користиме следнава лема.

Лема. Ако p е прост број и $p \mid g(m)-g(n)$, тогаш $p \mid m-n$.

Доказ. Ако $p^2 \mid g(m)-g(n)$, нека $k > g(m), g(n)$ е таков што $p \nmid k$ и $l = kp - g(n)$. Тогаш $p \parallel l + g(n)$, а ако $l + g(m) = (l+g(n)) + (g(m)-g(n))$, следува $p \parallel l + g(m)$. Според условот на задачата $m + g(l)$ и $n + g(l)$ се деливи со p, па затоа $p \mid m-n$.

Ако $p \parallel g(m)-g(n)$, нека $k > g(m), g(n)$ е таков што $p \nmid k$ и $l = kp^3 - g(n)$. Тогаш $p^3 \parallel l + g(m)$, а како $l + g(m) = (l+g(n)) + (g(m)-g(n))$, следува $p \parallel l + g(m)$. Според условот на задачата $m + g(l)$ и $n + g(l)$ се дели со p, па затоа $p \mid m-n$. ■

Фунјцијата f е инјекција. Навистина, ако $g(m) = g(n)$, тогаш според лемата $p \mid m-n$ за секој прост број p, т.е. $m = n$. Понатаму, ако $p \mid g(n+1)-g(n)$, тогаш $p \mid 1$, што не е можно, па затоа $g(n+1)-g(n) = \pm 1$. Притоа не важи $g(n+1)-g(n) = -(g(n)-g(n-1))$, бидејќи тогаш $g(n+1) = g(n-1)$, што не е можно. Оттука со индукција добиваме $g(n+1)-g(n) = g(2)-g(1) = \varepsilon = \pm 1$ за секој n, па затоа $g(n) = k + \varepsilon n$, за некоја константа $k \in \mathbb{N}_0$. Бидејќи $g(n) > 0$ за секој n, можноста $\varepsilon = -1$ отпаѓа, па затоа $g(n) = n + k$, за некоја константа $k \in \mathbb{N}_0$.

Функцијата $g(n) = n + k$, $k \in \mathbb{N}_0$ ги задоволува условите на задачата бидејќи

$$(g(m)+n)(m+g(n)) = (m+n+k)^2.$$

Втор начин. Ќе докажеме дека за секој природен број n важи

$$|g(n+1)-g(n)| = 1.$$

Навистина, ако $g(n+1)-g(n) \neq \pm 1$, тогаш постои прост број p таков што $p \mid g(n+1)-g(n)$.

1) Ако $p \neq 2$, постои m таков што $p \parallel m + g(n)$ и $p \parallel m + g(n+1)$ (ако m е

таков што $p^2 \mid m-p+g(n)$, тогаш $p \parallel m+g(n), m+p+g(n)$; како $m+p+g(n+1)-(m+g(n+1))=p$, најмногу еден од броевите $m+g(n+1)$ и $m+p+g(n+1)$ е делив со p^2). Од условот на задачата следува дека $p \mid n+g(m), n+1+g(m)$, па затоа $p \mid (n+1+g(m))-(n+g(m))=1$, што не е можно.

2) Ако $p=2$ и $4 \mid g(n+1)-g(n)$, постои m таков што $2 \parallel m+g(n)$ и $2 \parallel m+g(n+1)$ (ако m е таков што $4 \mid m-2+g(n)$, тогаш $2 \parallel m+g(n)$, $m+g(n+1)$). Од условот на задачата следува $2 \mid n+g(m), n+1+g(m)$, па затоа $2 \mid (n+1+g(m))-(n+g(m))=1$, што не е можно.

3) Ако $p=2$ и $2 \parallel g(n+1)-g(n)$, постои m таков што $8 \parallel m+g(n)$. Тогаш $m+g(n+1)=m+g(n)+(g(n+1)-g(n))$, па како важи $2 \parallel g(n+1)-g(n)$ и $4 \mid m+g(n)$, добиваме $2 \parallel m+g(n+1)$. Од условот на задачата следува $2 \mid n+g(m), n+1+g(m)$, па затоа $2 \mid (n+1+g(m))-(n+g(m))=1$, што не е можно

Ако за некој $n \in \mathbb{N}$ важи $g(n+1)-g(n)=-1$, тогаш од условот на задачата

$$(g(n+1)+n)(n+1+g(n))=(g(n)+n-1)(g(n)+n+1)=(g(n)+n)^2-1$$

е точен квадрат на природен број, што не е можно. Според тоа, за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $g(n+1)-g(n)=1$, па затоа

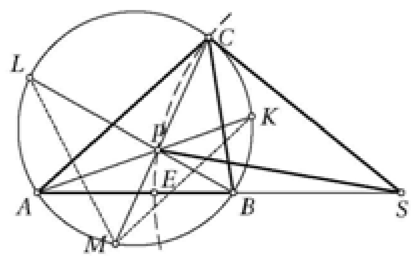
$$g(n)=g(1)+\sum_{i=1}^{n-1}(g(i+1)-g(i))=g(1)-1+n=n+c,\ c \in \mathbb{N}_0.$$

Од друга страна, оваа функција е решение на задачата бидејќи

$$(g(m)+n)(m+g(n))=(m+n+c)^2.$$

4. Нека P е точка во внатрешноста на $\triangle ABC$. Правите AP, BP и CP ја сечат опишаната кружница Γ на $\triangle ABC$ во точките K, L и M, соодветно. Тангентата на кружницата Γ во точката C ја сече правата AB во S. Ако $\overline{SC}=\overline{SP}$, докажи дека $\overline{MK}=\overline{ML}$.

Решение. *Прв начин*. Нека B е меѓу A и S. Ако E е пресекот на симетралата на $\measuredangle ACB$ со страната AB, тогаш



$$\begin{aligned}\measuredangle CES &= \measuredangle CAB+\measuredangle ACE\\ &= \measuredangle BCS+\measuredangle ECB=\measuredangle ECS,\end{aligned}$$

што значи дека кружницата $k(S,\overline{SC})$

минува низ E. Бидејќи $\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$, k е Аполониева кружница, т.е. геометриско место на точки X за кои $\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$. Значи, условот $\overline{SC}=\overline{SP}$ е еквивалентен со условот $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$.

Од друга страна, од сличностите $\triangle PKM \sim \triangle PCA$ и $\triangle PLM \sim \triangle PCB$ следува $\frac{\overline{PM}}{\overline{KM}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{CA}}$ и $\frac{\overline{LM}}{\overline{PM}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{PB}}$, од каде со множење добиваме $\frac{\overline{LM}}{\overline{KM}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$. Значи, и условот $\overline{LM}=\overline{KM}$ е еквивалентен со условот $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$.

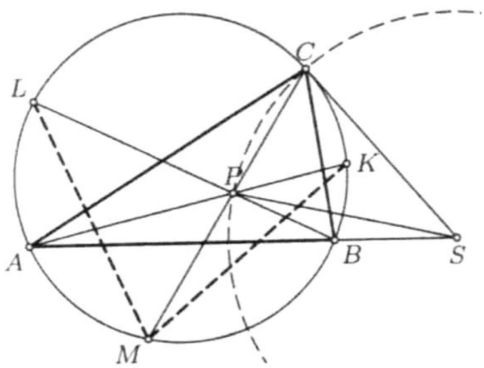
Втор начин. Нека $\overline{SC}=\overline{SP}$. Од $\overline{SA}\cdot\overline{SB}=\overline{SC}^2=\overline{SP}^2$ следува дека правата SP ја допира кружницата APB, па затоа

$$\begin{aligned}\measuredangle PAB &= \measuredangle SPB = \measuredangle CPB - \measuredangle CPS = \measuredangle CPB - \measuredangle SCM\\ &= \measuredangle CLB + \measuredangle MCL - \measuredangle CLM = \measuredangle MCL - \measuredangle BLM.\end{aligned}$$

Бидејќи $\measuredangle PBA = \measuredangle KAB = \measuredangle KLB$, добиваме

$$\measuredangle MKL = \measuredangle MCL = \measuredangle BLM + \measuredangle KLB = \measuredangle KLM,$$

и оттука $\overline{MK}=\overline{ML}$.



Трет начин. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\overline{BC}<\overline{AC}$. Од степенот на точката S во однос на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ следува

$$\overline{SA}\cdot\overline{SB}=\overline{SC}^2=\overline{SP}^2,$$

т.е. $\frac{\overline{SA}}{\overline{SP}}=\frac{\overline{SP}}{\overline{SB}}$ и како $\measuredangle BSP = \measuredangle ASP$ заклучуваме дека $\triangle ASP \sim \triangle PSB$. Понатаму, од $\frac{\overline{SA}}{\overline{SC}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{SB}}$ и $\measuredangle BSC = \measuredangle ASC$ следува $\triangle ASC \sim \triangle CBS$. Затоа

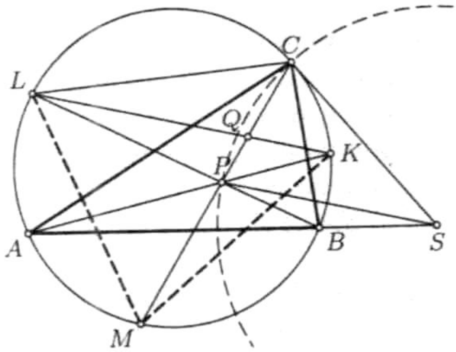
$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{SP}}{\overline{SB}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{SB}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}. \qquad (1)$$

Од друга страна $\triangle PCA \sim \triangle PMK$ ($\measuredangle APC = \measuredangle KPM$ и $\measuredangle CPA = \measuredangle CAK = \measuredangle CMK = \measuredangle PMK$) и $\triangle PBC \sim \triangle PLM$ ($\measuredangle CPB = \measuredangle MPL$ и $\measuredangle BCP = \measuredangle BCM = \measuredangle BLM = \measuredangle PLM$) па затоа $\frac{\overline{PA}}{\overline{PN}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{MK}}$ и $\frac{\overline{PB}}{\overline{PM}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{ML}}$ и ако го искористиме (1) добиваме $\frac{\overline{MK}}{\overline{ML}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$, од каде што следува $\overline{MK}=\overline{ML}$.

Четврт начин. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\overline{BC}<\overline{AC}$. Од степенот на точката S во однос на опишаната кружница околу

$\triangle ABC$ следува

$$\overline{SA}\cdot\overline{SB}=\overline{SC}^2=\overline{SP}^2,$$



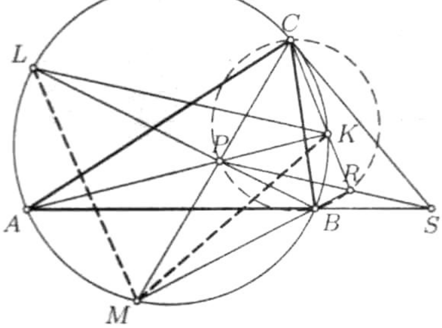
т.е. $\frac{\overline{SA}}{\overline{SP}}=\frac{\overline{SP}}{\overline{SB}}$ и како $\measuredangle BSP=\measuredangle ASP$ заклучуваме дека $\triangle ASP \sim\triangle PSB$. Затоа,

$\measuredangle SPB=\measuredangle PSA=\measuredangle KAB=\measuredangle KLB$, од каде што следува $KL\,\|\,SP$. Нека Q е пресечната точка на KL и CM. Тогаш

$$\measuredangle MKL=\measuredangle MCL=\measuredangle CQK-\measuredangle CLQ=\measuredangle CPS-\measuredangle CLK=\measuredangle SPC-\measuredangle CLK$$
$$=\measuredangle SCM-\measuredangle CLK=\measuredangle CLM-\measuredangle CLK=\measuredangle KLM,$$

од каде следува $\overline{MK}=\overline{ML}$ (тетиви над еднакви агли).

Петти начин. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\overline{BC}<\overline{AC}$. Од степенот на точката S во однос на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ следува



$$\overline{SA}\cdot\overline{SB}=\overline{SC}^2=\overline{SP}^2,$$

т.е. $\frac{\overline{SA}}{\overline{SP}}=\frac{\overline{SP}}{\overline{SB}}$ и како $\measuredangle BSP=\measuredangle ASP$ заклучуваме дека $\triangle ASP \sim\triangle PSB$. Затоа $\measuredangle PAS=\measuredangle SPB$ и $\measuredangle RCB=\measuredangle KBC=\measuredangle KAB=\measuredangle PAB=\measuredangle SPB=\measuredangle RPB$, од каде што следува дека четириаголникот $BRCP$ е тетивен. Бидејќи $\measuredangle SCB=\measuredangle CAB$ (тангентен и периферен агол), следува

$$\measuredangle SBR=\measuredangle SBC-\measuredangle RBC=\measuredangle SBC-\measuredangle RPC=\measuredangle SBC-\measuredangle SPC=\measuredangle SBC-\measuredangle PCS$$
$$=\measuredangle CAB+\measuredangle BCA-\measuredangle SBC-\measuredangle BCP=\measuredangle BCA-\measuredangle BCM=\measuredangle MCA=\measuredangle MBA,$$

па како $A-B-S$, следува $M-B-R$. Според тоа,

$$\measuredangle MKL=\measuredangle MBL=180^\circ-\measuredangle RBL=180^\circ-\measuredangle RBP=\measuredangle RCP=\measuredangle KCM=\measuredangle KLM,$$

од каде следува $\overline{MK}=\overline{ML}$ (тетиви над еднакви агли).

5. Во секоја од шесте кутии B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6 на почетокот се наоѓа точно по една монета. Дозволено е да се вршат следниве операции:

1° Да се избере непразна кутија B_j за некој $j\in\{1,2,3,4,5\}$, да се извади една монета од B_j и да се додадат две монети во B_{j+1}.

2° Да се избере непразна кутија B_k за некој $k\in\{1,2,3,4\}$, да се извади една монета од B_k и да се заменат содржините (може да се и празни) на кутиите B_{k+1} и B_{k+2}.

Испитај дали со конечна низа вакви операции може да се постигне кутиите B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 да се празни, а кутијата B_6 да содржи точно $2010^{2010^{2010}}$ монети. (Важи $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Решение. Си низа операции, од почетната состојба (1,1,1,1,1,1) последователно се добива:

$$(1,1,1,0,3,1)\to(1,1,1,0,0,7)\to(1,1,0,2,0,7)\to(1,0,2,2,0,7)\to(0,2,2,2,0,7)$$
$$\to(0,2,2,1,7,0)\to(0,2,2,1,0,14)\to(0,2,2,0,14,0)\to(0,2,1,14,0,0).$$

Лема 1. За $a \in \mathbb{N}$, со низа операции на три кутии од состојба $(a,0,0)$ може да се дојде до состојба $(0,2^a,0)$.

Доказ. Индукција по a. Тврдењето е точно за $a=1$. Нека претпоставиме дека тоа е точно за $a-1$. Тогаш од состојбата $(a,0,0)$, занемарувајќи една монета во првата кутија може да се дојде до состојбата $(1,2^{a-1},0)$. Ја применуваме операцијата 1° точно 2^{a-1} пати и ја добиваме состојбата $(1,0,2^a)$, од каде со примена на операцијата 2° ја добиваме состојбата $(0,2^a,0)$. ■

Лема 2. Дефинираме $T_1 = 2$ и $T_{a+1} = 2^{T_a}$. За $a \in \mathbb{N}$, со низа операции на четири кутии, од состојбата $(a,0,0,0)$ може да се дојде до состојбата $(0,T_{a+1},0,0)$.

Доказ. Индукција по a. Тврдењето е точно за $a=1$. Нека претпоставиме дека тоа е точно за $a-1$. Тогаш од состојбата $(a,0,0,0)$ може да се дојде до состојбата $(1,T_a,0,0)$, па според лема 1 до состојбата $(1,0,T_{a+1},0)$, па ако уште еднаш го примениме чекорот 2° до состојбата $(0,T_{a+1},0,0)$. ■

Користејќи ги низите чекори опишани во лемите 1 и 2 добиваме

$$(0,2,1,14,0,0)\to(0,2,1,0,2^{14},0)\to(0,2,0,2^{14},0,0)\to(0,1,2^{14},0,0,0)$$
$$\to(0,1,0,T_{2^{14}},0,0)\to(0,0,T_{2^{14}},0,0,0)\to(0,0,0,T_{T_{2^{14}}},0,0).$$

Очигледно $T_{T_{2^{14}}}$ е многу поголем од $N = 2010^{2010^{2010}}$. Со примена на операцијата 2° точно $T_{T_{2^{14}}} - \frac{1}{4}N$ пати ја добиваме состојбата $(0,0,0,\frac{1}{4}N,0,0)$, од каде со примена на операцијата 1° добиваме $(0,0,0,0,\frac{1}{2}N,0)$, па добиваме $(0,0,0,0,0,N)$.

6. Нека $a_1, a_2, a_3, \dots$ е низа позитивни реални броеви. За некој природен број s важи

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \le k \le n-1\},$$

за секој $n > s$. Докажи дека постојат природни броеви l и N такви што $l \le s$ и $a_n = a_l + a_{n-l}$ за секој $n \ge N$.

Решение. *Прв начин.* Нека $n > r$. По дефиниција важи $a_n = a_{n_1} + a_{n_2}$ за некои индекси n_1, n_2 со $n_1 + n_2 = n$. Ако е, на пример $n_1 > r$, можеме да ја продолжиме постапката за a_{n_1} итн. се додека не добиеме

$$a_n = a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_k}, \tag{1}$$

за некои $1 \le i_1, ..., i_k \le r$. Притоа ако i_1 и i_2 се индексите добиени во последниот чекор, тогаш $i_1 + i_2 > r$. Од друга страна, ако $1 \le i_1, ..., i_k \le r$ и $i_1 + i_2 > r$, тогаш

$$a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_k} \le a_{i_1+i_2} + a_{i_3} + ... + a_{i_k} \le ... \le a_{i_1+i_2+...+i_k}.$$

Од досега изнесеното следува дека

$$a_n = \max\{a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_k} \mid 1 \le i_1, ..., i_k \le r, i_1 + i_2 > r\}, \text{ за сите } n > r. \tag{2}$$

Разгледуваме $l \in \{1, ..., r\}$ таков што $\frac{a_l}{l} = \max\limits_{1 \le i \le r} \frac{a_i}{i}$. Нека $n > r(rl + 2)$. Бидејќи во (1) е $k \ge \frac{n}{r} > rl + 2$, меѓу индексите $i_3, ..., i_k$ постои некој кој се појавува најмалку l пати: нека $i_{k-l+1} = ... = i_k = j$. Бидејќи од дефиницијата на l имаме $la_j \le ja_l$, од (2) следува

$$a_n \ge a_{i_1} + ... + a_{i_{k-l}} + ja_l \ge a_{i_1} + ... + a_{i_{k-l}} + la_j = a_n,$$

па затоа двете неравенства мора да се равенства. Според тоа, можеме да претпоставиме дека во (1) барем еден собирок е еднаков на a_l.

Ако сега во (1) важи $i_k = l$, тогаш од условот на задачата и релацијата (2) следува

$$a_{n-l} \le a_n - a_l = a_{i_1} + ... + a_{i_{k-1}} \le a_{n-l},$$

што значи $a_n = a_l + a_{n-l}$.

Втор начин. Повторно го разгледуваме $l \in \{1, ..., r\}$ за кој $s = \frac{a_l}{l} = \max\limits_{1 \le i \le r} \frac{a_i}{i}$.

Воведуваме низа $\{b_n\}$ со $b_n = a_n - ns$. Низата $\{b_n\}$ ја задоволува истата рекурентна релација како и низата $\{a_n\}$ и лесно со индукција се докажува дека $b_n \le 0 = l$ за секој n.

Ако $b_n = 0$ за $n = 1, 2, ..., r$, важи $b_n = 0$ и $a_n = ns$ за секој n, па тврдењето на задачата е тривијално. Во спротивно, нека M и m се соодветно најголемиот и најмалиот меѓу ненултите членови на низата $|b_i|, i = 1, 2, ..., r$. За $n > r$ важи $b_n \ge b_{n-l} + b_l = b_{n-l}$, па затоа $b_n \ge b_{n-l} \ge b_{n-2l} \ge ... \ge -M$.

Од друга страна, како во (1) при првиот начин на решавање, b_n припаѓа на множеството

$$T=\{b_{i_1}+b_{i_2}+...+b_{i_k}\mid i_1,...,i_k\le r\}\cap[-M,0].$$

Меѓутоа, ако $b_n=b_{i_1}+b_{i_2}+...+b_{i_k}$, бројот на ненултите собирци во ова претставување не е поголем од $\frac{M}{m}$. Според тоа, T е конечно множество. Конечно, низата $b_n,b_{n+l},b_{n+2l},...$ не опаѓа, па мора да биде константна почнувајќи од некоја точка. Според тоа, низата $\{b_n\}$ е периодична од некоја точка, од каде што следува тврдењето на задачата.

LII олимпијада

1. За множеството $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ кое е составено од четири различни природни броеви со s_A да го означиме збирот $a_1+a_2+a_3+a_4$. Нека n_A е бројот на паровите $(i,j), 1\le i<j\le 4$ за кои a_i+a_j е делител на s_A. Определи ги сите такви множества A за кои n_A ја достигнува најголемата можна вредност.

Решение. *Прв начин*. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $a_1<a_2<a_3<a_4$. Бидејќи $a_3+a_4 \nmid s_A$ (во спротивно важи $a_3+a_4 \mid a_1+a_2 < a_3+a_4$) и слично $a_2+a_4 \nmid s_A$, заклучуваме дека $n_A \le 4$.

Нека претпоставиме дека $n_A=4$. Тогаш $a_1+a_4, a_2+a_3 \mid s_A$, па затоа важи $a_1+a_4 \mid a_2+a_3 \mid a_1+a_4$, од каде што следува $a_1+a_4=a_2+a_3=\frac{s_A}{2}$. Понатаму,

$$\frac{s_A}{2}>a_1+a_3>\frac{a_2+a_3}{2}=\frac{s_A}{4},$$

па мора да е $a_1+a_3=\frac{s_A}{3}$. Сега добиваме

$$a_3=\frac{s_A}{3}-a_1,\ \ a_4=\frac{s_A}{2}-a_1 \text{ и } a_2=\frac{s_A}{6}+a_1,$$

од каде

$$\frac{s_A}{6}<a_1+a_2<a_1+a_3=\frac{s_A}{3},$$

па затоа $a_1+a_2=\frac{s_A}{6}+2a_1\in\{\frac{s_A}{4},\frac{s_A}{5}\}$.

Ако $a_1+a_2=\frac{s_A}{4}$, добиваме $a_1=\frac{s_A}{24}$ и $a_1:a_2:a_3:a_4=1:5:7:11$, а ако $a_1+a_2=\frac{s_A}{5}$ добиваме $a_1=\frac{s_A}{60}$ и $a_1:a_2:a_3:a_4=1:11:19:29$. Според тоа, максималната вредност $n_A=4$ се достигнува за множества од видовите $\{t,5t,7t,11t\}$ и $\{t,11t,19t,29t\}$, $t\in\mathbb{N}$.

Втор начин. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека важи $a_1<a_2<a_3<a_4$. Бидејќи $a_3+a_4 \nmid s_A$ (во спротивно важи $a_3+a_4 \mid a_1+a_2 < a_3+a_4$) и слично $a_2+a_4 \nmid s_A$, заклучуваме дека $n_A\le 4$ и можните поарови кои се делители на s_A се $a_1+a_2, a_1+a_3, a_1+a_4$ и a_2+a_3. Имаме

$$\begin{cases}(a_1+a_2)p=a_3+a_4,\\ (a_1+a_3)q=a_2+a_4,\\ (a_1+a_4)r=a_2+a_3,\\ (a_2+a_3)s=a_1+a_4,\end{cases}$$

каде p,q,r,s се прриродни роеви. Ако $r\ge 2$ или $s\ge 2$, со собирање на третата и четвртата равенка добиваме

$$(a_1+a_4)(r-1)+(a_2+a_3)(s-1)=0,$$

што е противречност. Според тоа, $r=s=1$ и системот го добива видот

$$\begin{cases}(a_1+a_2)p=a_3+a_4,\\(a_1+a_3)q=a_2+a_4,\\a_1+a_4=a_2+a_3,\end{cases}$$

при што очигледно важи $p\ge 2$ и $q\ge 2$. Ако ги собереме втората и третата равенка добиваме $(a_1+a_3)q=2a_2+a_3-a_1$. Ако $q\ge 3$, тогаш

$$(a_1+a_3)q\ge 3(a_1+a_3)>3a_3>2a_2+a_3>2a_2+a_3-a_1,$$

што е противречност. Според тоа, $q=2$. Сега од равенствата

$$a_1+a_4=a_2+a_3 \text{ и } 2(a_1+a_3)=a_2+a_4,$$

лесно наоѓаме $a_3=2a_2-3a_1$ и $a_3=3a_2-4a_1$. Заменуваме во првата равенка и добиваме

$$(a_1+a_2)p=5a_2-7a_1.$$

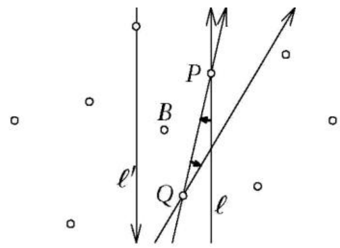
Ако $p\ge 5$, тогаш $(a_1+a_2)p\ge 5(a_1+a_2)>5a_2-7a_1$, што е противречност. За $p=2$ системот нема решение, а за $p=3$ и $p=4$ соодветно наоѓаме

$$\{t,5t,7t,11t\} \text{ и } \{t,11t,19t,29t\},\ t\in\mathbb{N}.$$

2. Нека $\mathbb{S}$ е конечно множество точки во рамнината кое содржи најмалку две точки. Множеството $\mathbb{S}$ не содржи три колинеарни точки. Ветерница се нарекува следнава постапка. На почетокот се избира права l која содржи точно една точка $P\in\mathbb{S}$. Правата l се ротира во насока на движењето на стрелките на часовникот околу центарот P до моментот во кој по прв пат содржи некоја друга точка Q од $\mathbb{S}$. Од тој момент таа точка Q станува нов центар, а правата продолжува да се ротира околу Q во насока на движењето на стрелките на часовникот до првиот момент во кој повторно содржи некоја друга точка од множеството $\mathbb{S}$. Оваа постапка бесконечно се повторува.

Докажи дека може да се избере некоја точка P од $\mathbb{S}$ и некоја права l која ја содржи P така што во добиената ветерница секоја точка на множеството $\mathbb{S}$ станува центар бесконечно многу пати.

Решение. *Прв начин*. Правата l во почетната позиција ја ориентираме произволно. Тогаш l во секој момент ја дели рамнината на лева и десна полурамнина. Во текот на работата на ветерницата, при премин на центарот од точката P во точката Q, точката P преминува од l во левата полурамнина, додека Q преминува од левата полурамнина на l. На овој начин броевите n_1 и n_2 на точките соодветно лево и десно од правата l остануваат исти во текот на целиот процес (со исклучок кога l содржи две точки).



Да земеме произволна точка $A \in \mathbf{S}$ и права l низ A таква што $|n_1 - n_2| \leq 1$ и да ја пуштиме ветерницата во погон. Нека претпоставиме дека постои точка B која ќе се најде на l само конечен број пати. Тоа значи дека почнувајќи од некој момент, B никогаш нема да биде на l, т.е. секогаш ќе се наоѓа од иста страна, да кажеме левата страна од правата l. Кога l ќе се заврти за 180°, ќе се најде во положба на некоја права l' паралелна со l, но со спротивна ориентација. Точката B е меѓу правите l и l', што значи дека лево од l се наоѓаат сите точки кои се десно од l, плус точката B и една точка која во тој момент лежи на l. Затоа $n_1 - n_2 \geq 2$, што е противречност. Од добиената противречност следува дека ветерницата минува низ секоја точка бесконечно многу пати.

Втор начин. Правата l ја дели рамнината на две полурамнини. Едната од нив да ја наречеме сина, а другата црвена. Да забележиме дека при промена на центарот на вртење новиот и стариот центар преминуваат од една полурамнина во друга. Според тоа, во секој момент (освен кога правата минува низ две точки) бројот на точките во синиот дел е непроменет и бројот на точките во црвениот дел е непроменет.

Нека $|\mathbf{S}| = 2n+1$. Ќе го користиме добро познатиот факт, дека низ секоја точка на $\mathbf{S}$ постои права која ја дели рамнината на две полурамнини со еднаков број точки. Да избереме точка P и права низ P, која ги разделува точките од $\mathbf{S}$ на два еднакви дела. Ќе докажеме дека при ротација за 180° правата минува низ секоја точка од $\mathbf{S}$.

Да разгледаме произволна точка Q од $\mathbf{S}$ и права l која ги разделува точките од $\mathbf{S}$. Точката Q е единствена точка од $\mathbf{S}$, за која права паралелна со l ги разделува точките на еднакви делови. Тоа значи дека кога правата на мелницата стане паралелна со l, таа всушност е правата l и затоа мелницата минува низ Q.

Нека $|\mathbf{S}| = 2n$. Повторно ќе го искористиме познатиот факт дека за секоја точка постои права која минува низ таа точка и за која има $n-1$ точка во синиот дел и n точки во црвениот дел.

Да избереме една таква права за почетна состојба на мелницата. Ќе докажеме дека при завртување за 360° правата минува низ секоја точка од $\mathbf{S}$.

Да разгледаме произволна точка Q од $\mathbf{S}$ и права l за која имаме $n-1$ точка во синиот дел и n точки во црвениот дел од рамнината. Кога правата на мелницата стане паралелна со l со истите сина и црвена полурамнина, таа мора да биде точно правата l и затоа мелницата минува низ точката Q. Конечно, од претходните разгледувања следува тврдењето на задачата.

3. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е функција за која важи
$$f(x+y)\le yf(x)+f(f(x)) \tag{1}$$
за секои реални броеви x и y. Докажи дека $f(x)=0$ за секој $x\le 0$.

Решение. *Прв начин.* Нека претпоставиме дека $f(a)>0$ за некој a. Бидејќи десната страна на неравенството
$$f(y+a)\le yf(a)+f(f(a))$$
е линеарна по y, постои b таков што $f(x)<0$ за секој $x<b$, а исто така постои и c таков што $f(x)<b$ (и $f(f(x))<0$) за $x<c$. Но, за $x<\min\{a,b,c\}$ важи
$$f(a)\le(a-x)f(x)+f(f(x))<0,$$
што е противречност. Според тоа, $f(x)\le 0$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

За $d=f(0)$ имаме $f(y)\le dy+f(d)$, а оттука
$$f(d)\le(d-x)f(x)+f(f(x))\le(d-x)f(x)+df(x)+f(d),$$
т.е. $0\le(2d-x)f(x)$. За $x<2d$ ова значи $f(x)\ge 0$, односно $f(x)=0$.

Да избереме e таков што $f(e)=0$. Од (1), за $(x,y)=(e,0)$ добиваме
$$0=f(e)\le f(f(e))=f(0),$$
па затоа $f(0)=0$. Сега,
$$0=f(x-x)\le -xf(x)+f(f(x)),\text{ т.е. } xf(x)\le f(f(x))\le 0.$$
Од последното неравенство следува дека за $x<0$ важи, $f(x)\ge 0$, што повлекува $f(x)=0$, со што доказот е завршен.

Втор начин. Ако во (1) замениме $(x,y)=(a,f(b)-a)$, добиваме
$$f(f(b))-f(f(a))\le f(a)f(b)-af(a).$$
Со собирање на аналогната релација при замена $(x,y)=(b,f(a)-b)$ добиваме:
$$af(a)+bf(b)\le 2f(a)f(b),\text{ за секои } a,b\in\mathbb{R}.$$
Сега, од последното неравенство за $b=2f(a)$ добиваме $af(a)\le 0$, па затоа $f(a)\ge 0$ за $a<0$.

Ако $f(c)>0$ за некој c, тогаш $f(y+c)\le yf(c)+f(f(c))<0$ за $y<\frac{f(f(c))}{f(c)}$, што не е можно. Според тоа, $f(x)\le 0$ за секој x. Сега, ако земеме предвид дека $f(x)\ge 0$ за $x<0$, добиваме дека $f(x)=0$ за $x<0$. Конечно, од (1) следува дека за $x<y=0$ важи $0=f(x)\le f(f(x))=f(0)\le 0$, т.е. $f(x)=0$.

Трет начин. Да означиме $f(0)=a$ и $f(a)=f(f(0))=b$. Ќе докажеме дека $a=b=0$. Ако во (1) ставиме $x=0$ добиваме

$$f(y)\le ay+b\text{, за секој } y\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Ако во (2) ставиме $y=f(x)$, добиваме $f(f(x))\le af(x)+b$, па затоа од (1) следува $f(x+y)\le yf(x)+f(f(x))\le yf(x)+af(x)+b$, т.е.

$$f(x+y)\le(y+a)f(x)+b\text{, за секои } x,y\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Во (3) ставаме $y=-a$ и добиваме $f(t)\le b$, за секој $t\in\mathbb{R}$. За $y=0$ и $x=a$ од (3) следува $ab\ge 0$. Сега, ако во (3) ставиме $y=-x$ добиваме

$$a\le(a-x)f(x)+b\text{, за секој } x\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Од (4) за $x<a$ имаме $a\le(a-x)b+b$ и затоа $b\ge 0$ (во спротивно добиваме противречност кога $x\to-\infty$). Повторно од (4) и од (2) за $x<a$ добиваме $a\le(a-x)(ax+b)+b$, па затоа $a\le 0$ (во спротивно добивамепротивречност кога $x\to-\infty$).

Сега од $ab\ge 0$, $b\ge 0$ и $a\le 0$ следува дека барем еден од броевите a и b е еднаков на 0. Нека $b=0$. Тогаш за $x=a$ и $y=0$ од (1) следува

$$0=f(a)\le f(f(a))=f(0)=a,$$

па како $a\le 0$ добиваме $a=0$. Ако $a=0$, тогаш $b=f(a)=f(0)=0$.

Сега, бидејќи $a=b=0$, од (2) следува $f(x)\le 0$ за секој $x\in\mathbb{R}$, а од (3) за $y=-x$ добиваме $0=f(0)\le -xf(x)$, од каде што следува дека $f(x)\ge 0$ за $x\le 0$. Конечно, $f(x)=0$ за $x\le 0$.

4. Нека n е природен број. Дадена е вага и n тегови со маси $2^0,2^1,...,2^{n-1}$. Сите n тегови се ставаат еден по друг на тасовите на вагата, односно во секој од $n-$те чекори се избира еден од теговите, кој не се наоѓа на тасовите, и се става или на левиот или на десниот тас. Притоа теговите се ставаат така што во ниту еден момент десниот тас не е потежок од левиот. Определи го бројот на начините на кои оваа постапка може да се реализира.

Решение. *Прв начин*. Нека f_n е бројот на начините на поставувањата на n тегови со опишаната постапка. Овие поставувања ќе ги наречеме *добри*. Секое вакво поставување му соодветствува на изразот $x_1+x_2+...+x_n$ во кој $\{|x_1|,|x_2|,...,|x_n|\}=\{2^0,2^1,...,2^{n-1}\}$ и кој задоволува $x_1+x_2+...+x_k\ge 0$, за $k=1,2,...,n$.

За распоредот на елементите и знакот на собирокот ±1 има $2n$ можности, при што за $x_1=-1$ нема добри поставувања. Во секој друг случај, вредноста на изразот $x_1+x_2+...+x_i$ е различна од нула за секои i, па затоа со изоставување на собирокот ± 1 и делење со 2 се добива добро поставување за $n-1$ тегови, а такви има f_{n-1}. Според тоа, $f_n = (2n-1) f_{n-1}$, што заедно со почетниот услов $f_1 = 1$ дава $f_n = (2n-1)!!$.

Втор начин. Бројот на добрите поставувања на n тегови да го означиме со a_n. Нека во првиот чекор се поставува тегот 2^i. Теговите полесни од него потоа може да се постават на било кој тас (бидејќи $2^0 + ... + 2^{i-1} < 2^i$). Чекорите во кои овие тегови може да се постават може да ги избереме на $\binom{n-1}{i}$ начини, нивниот редослед на $i!$ начини, а тасовите на 2^i начини. Од друга страна, во преостанатите потези потешките тегови може да се постават на a_{n-i-1} начини, бидејќи полесните тегови не влијаат на исправноста на нивното поставување. Според тоа,

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i i! \binom{n-1}{i} a_{n-i-1}, \quad a_0 = 1. \tag{1}$$

Ако означиме $b_n = \frac{a_n}{2^n n!}$, рекурентната релација го добива обликот

$$2nb_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i ,$$

па имаме

$$2nb_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i = b_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i = b_{n-1} + 2(n-1)b_{n-1} = (2n-1)b_{n-1} ,$$

т.е. $b_n = \frac{2n-1}{2n} b_{n-1}$, со почетен услов $b_0 = 1$. Според тоа, $b_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, па затоа

$$a_n = 2^n n! b_n = 2^n n! \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2n) \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = (2n)! \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = (2n-1)!! .$$

Забелешка. Наоѓањето на a_n од (1) може да се направи и на следниов начин. Од $(k+1) \cdot \binom{n}{k+1} = n\binom{n-1}{k}$ со замена во (1) добиваме

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{i=0}^{n} 2^i i! \binom{n}{i} a_{n-i} = a_n + \sum_{i=1}^{n} 2^i i! \binom{n}{i} a_{n-i} \\ &= a_n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} (k+1)! \binom{n}{k+1} a_{n-k-1} \\ &= a_n + 2n \sum_{k=0}^{n-1} 2^k k! \binom{n-1}{k} a_{n-k-1} \\ &= a_n + 2na_n = (2n+1)a_n. \end{aligned}$$

Сега, ако се земе предвид почетниот услов $a_0 = 1$ добиваме

$$a_n = (2n-1)a_{n-1} = (2n-1)(2n-3)a_{n-2} = ... = (2n-1)!! .$$

Трет начин. Нека f_n е бројот на начините на поставувањата на n тегови со опишаната постапка. Овие поставувања ќе ги наречеме *добри*.

Да разгледаме добро поставување на теговите $2^0, 2^1, ..., 2^{n-1}$. Да ја разгледаме истата низа на чекори без чекорот во кој ја поставуваме тежината 1. Бидејќи

$$2^k = 2^{k-1} + 2^{k-2} + ... + 2^1 + 2 > 2^{k-1} + 2^{k-2} + ... + 2^1 + 1$$

оваа низа од чекори е добра за теговите $2^1, 2^2, ..., 2^{n-1}$. Бидејќи бројот на добрите низи за $2^1, 2^2, ..., 2^{n-1}$ е еднаков на бројот на добрите низи за $2^0, 2^1, ...,$ 2^{n-2}, тој број е еднаков на f_{n-1}.

Сега да ги разгледаме можните поставувања на тегот 1. Ако тој е поставен во првиот чекор,тој треба да се постави на левиот тас. Ако е поставен во некој од следните чекори, тој може да се постави на кој било тас (разликата меѓу било кои два тега е најмалку 2). Според тоа,

$$f(n) = (2n-1) f_{n-1},$$

и бидејќи $f(1) = 1$ имаме

$$f_n = (2n-1) f_{n-1} = (2n-1)(2n-3) f_{n-2} = ... = (2n-1)!!.$$

5. Функцијата $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ е таква што за секои цели броеви m и n разликата $f(m) - f(n)$ е делива со $f(m-n)$. Докажи дека за секои цели броеви m и n такви што $f(m) \leq f(n)$, бројот $f(n)$ е делив со бројот $f(m)$.

Решение. *Прв начин*. Нека $x, y \in \mathbb{Z}$ се такви што $f(x) < f(y)$. Од

$$f(x-y) \mid f(y) - f(x) > 0$$

следува дека $f(x-y) < f(y)$. Од друга страна, $f(y)$ е делител на

$$| f(x) - f(x-y) | < f(y),$$

па мора да важи $f(x) = f(x-y)$. Оттука добиваме

$$f(x) = f(x-y) \mid f(y) - f(x),$$

па затоа $f(x) \mid f(y)$.

Втор начин. Нека вредностите на функцијата се $a_1 < a_2 < ...$ и нека $a_1 | ... | a_k$, $f(x) = a_k$, $f(y) = a_{k+1}$. Со замена на $(m,n) = (x, y)$ во условот на задачата добиваме $f(x-y) \mid f(y) - f(x) > 0$, па затоа

$$a_{k+1} = f(y) > f(x-y) = a_j$$

за некој $j \leq k$. Со замена $(m,n) = (x, x-y)$ во условот на задачата добиваме

$$a_{k+1} = f(y) \mid f(x) - f(x-y) = a_k - a_j,$$

па како $0 \leq a_k - a_j < a_{k+1}$, следува $a_k = a_j$. Според тоа,

$$a_k = f(x) = f(x-y) \mid f(x) - f(y) = a_k - a_{k+1},$$

што значи $a_k \mid a_{k+1}$, од што следува тврдењето на задачата.

Трет начин. Со замена на $(m,n)=((m+1)n,mn)$ во условот на задачата добиваме дека $f(n)\mid f((m+1)n)-f(mn)$, па како $f(n)\mid f(1\cdot n)$ со индукција следува $f(n)\mid f(mn)$ за $m,n\in\mathbb{Z}$. За $a,b\in\mathbb{Z}$, ако $c=\mathrm{NZD}(a,b)$, тогаш за некои $x,y\in\mathbb{Z}$ важи $c=ax+by$. Без ограничување на општоста, нека $f(by)\le f(ax)$. Тогаш $c\mid by$, па затоа $0\le f(by)-f(c)<f(ax)$. Меѓутоа, со замена $(m,n)=(c,by)$ во условот на задачата добиваме $f(ax)\mid f(c)-f(by)$, па затоа $f(by)=f(c)$, од што следува $f(by)=f(c)\mid f(b)\mid f(by)$ (бидејќи $c\mid b\mid by$), па затоа $f(b)=f(c)$ и $f(b)=f(c)\mid f(a)$ (бидејќи $c\mid a$).

Четврт начин. Ќе ги опишеме сите функции со саканото својство. Како и во третиот начин на решавање заклучуваме дека $f(n)\mid f(mn)$ за $m,n\in\mathbb{Z}$. Според тоа, $f(n)\mid f(-n)\mid f(n)$, па затоа $f(n)=f(-n)$. Понатаму, функцијата f е ограничена, бидејќи $f(n)\mid f(0)$ за секој $n\in\mathbb{Z}$. Нека $b_1=\max\limits_{x\in\mathbb{N}} f(x)$ и $a_1=\min\{x\in\mathbb{N}\mid f(x)=b_1\}$. За $m\in\mathbb{N}$ важи $f(a_1)\mid f(ma_1)\le f(a_1)$, што значи $f(ma_1)=b_1$, а исто така $f(a_1)\mid |f(x+a_1)-f(x)|<b_1$, па затоа f е периодична на $\mathbb{N}$ со периода a_1.

Понатаму, нека $b_2=\max\limits_{a_1\nmid x} f(x)$ и $a_2=\min\{x\in\mathbb{N}\mid f(x)=b_2\}$. За $m\in\mathbb{N}$ важи $b_2\mid f(ma_2)$ и уште повеќе $f(ma_2)=b_2$ ако $a_1\nmid ma_2$. Ако $a_2\nmid a_1$, тогаш $a_1<ra_2-q$ за некои $q,r\in\mathbb{N}$, $q<a_2$, па затоа $b_2\le f(ra_2)=f(q)$, што противречи на изборот на a_2. Според тоа, $a_2\mid a_1$ и оттука $b_2\mid b_1$. Како и погоре заклучуваме дека f е периодична на $\mathbb{N}\setminus a_2\mathbb{N}$ со период a_2.

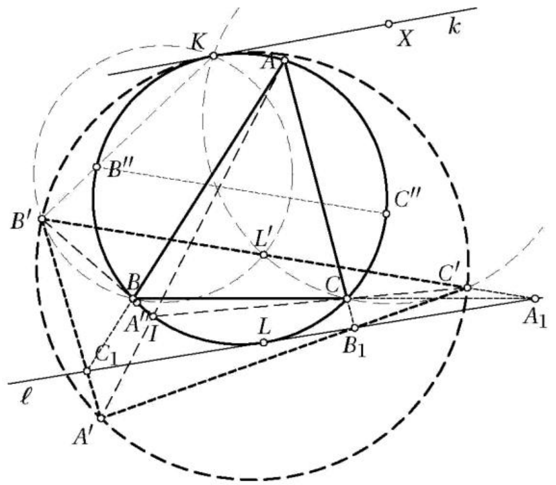
Продолжувајќи ја постапката заклучуваме дека за некои две строго опаѓачки низи природни броеви $\{a_i\}_{i=1}^k$ и $\{b_i\}_{i=1}^k$, такви што $a_k\mid a_{k-1}\mid\ldots\mid a_2\mid a_1$ и $b_k\mid b_{k-1}\mid\ldots\mid b_2\mid b_1$ важи

$$f(x)=b_{i(x)} \text{ каде } i(x) \text{ е најмалиот } i \text{ за кој важи } a_i\mid x,$$

за $x\neq 0$ и $a_1\mid f(0)$.

6. Нека ABC е остроаголен триаголник и Γ е неговата опишана кружница. Нека l е произволна тангента на Γ, а правите l_a,l_b,l_c се симетрични со l во однос на правите BC,CA,AB, соодветно. Докажи дека опишаната кружница околу триаголникот определен со правите l_a,l_b,l_c ја допира кружницата Γ.

Решение. *Прв начин*. Нека $A'=l_b\cap l_c$, $B'=l_a\cap l_c$ и $C'=l_a\cap l_b$ и нека l ја допира Γ во L и ги сече BC, CA, AB во A_1, B_1, C_1 (ако е на пример $l \parallel BC$, ќе сметаме дека A е бесконечна точка). Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека L е на лакот BC кој не ја содржи точката A, тогаш B_1 и C_1 се на отсечките AC и AB.



Бидејќи AB и AC се надворешни симетрали соодветно на аглите $\measuredangle A'C_1B_1$ и $\measuredangle A'B_1C_1$, заклучуваме дека A е центар на припишаната кружница на $\triangle A'B_1C_1$ наспроти A', па затоа $A'A$ е симетрала на $\measuredangle B'A'C'$. Слично, $B'B$ и $C'C$ се симетрали на $\measuredangle A'B'C'$ и $\measuredangle A'C'B'$, па затоа AA', BB' и CC' се сечат во центарот I на впишаната кружница во $\triangle A'B'C'$. Притоа

$$\measuredangle BIC = \measuredangle B'IC' = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\measuredangle B'A'C' \text{ и } \measuredangle CAB = \measuredangle B_1AC_1 = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\measuredangle B_1A'C_1.$$

Значи, $\measuredangle BIC + \measuredangle CAB = 180^\circ$, т.е. I припаѓа на Γ.

Точката L' симетрична на L во однос на BC лежи на правата $B'C'$. Нека кружниците $B'BL'$ и $C'CL'$ се сечат во точката $K \neq L'$. Бидејќи

$$\measuredangle BKC = \measuredangle BKL' + \measuredangle L'KC = \measuredangle BB'L' + \measuredangle L'C'C = 180^\circ - \measuredangle CIB,$$

заклучуваме дека точката K е на Γ. Понатаму,

$$\begin{aligned}\measuredangle B'KC' &= \measuredangle B'KL' + \measuredangle L'KC' = \measuredangle IBL' + \measuredangle L'CI = 360^\circ - \measuredangle BL'C - \measuredangle CIB \\ &= 360^\circ - 2\measuredangle C'IB' = 180^\circ - \measuredangle C'A'B',\end{aligned}$$

што значи дека K припаѓа на $\Gamma' \equiv (A'B'C')$.

Да ги разгледаме тангентата k на Γ во точката K и точка X на k од иста страна на правата KC на која е A. Имаме

$$\begin{aligned}\measuredangle XKC' &= \measuredangle XKC - \measuredangle C'KC = \measuredangle KBC - \measuredangle C'L'C = \measuredangle KBL' + \measuredangle L'BC - \measuredangle A_1L'C \\ &= \measuredangle KB'C' + \measuredangle CBL - \measuredangle CLA_1 = \measuredangle KB'C',\end{aligned}$$

што значи дека k ја допира кружницата L', од каде што следува тврдењето на задачата.

Втор начин. Точките A', B', C', L, L', I ги определуваме како погоре и на ист начин добиваме $AA' \cap BB' \cap CC' = I$. Нека A'', B'', C'' се точки на Γ такви што $LA = AA'', LB = BB'', LC = CC''$. Тогаш (во ориентирани агли)

$$\measuredangle(l, B''C'') = 2\measuredangle(l, BC) = \measuredangle(l, l_a),$$

па затоа $B''C'' \parallel l_a$. Аналогно се докажува дека $C''A'' \parallel l_b$ и $A''B'' \parallel l_c$.

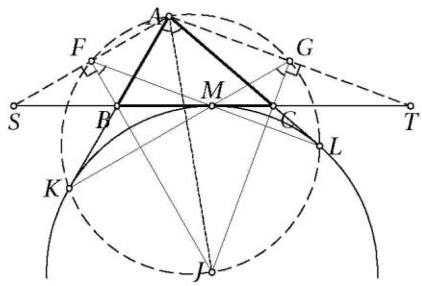
Бидејќи $\measuredangle L'BC = \measuredangle CBL = \measuredangle C''BC$, точката L' припаѓа на BC'' и аналогно $L' \in CB''$. Ја разгледуваме точката $K \neq B''$ во која правата $B'B''$ ја сече Γ. Од теоремата на Паскал применета на шестаголникот $KB''CIBC''$ следува дека точките $KB'' \cap IB = B', B''C \cap BC'' = L'$ и $CI \cap C''K$ се колинеарни, од што следува дека $CI \cap C''K = C'$, т.е. $K \in C'C''$. Аналогно $K \in A'A''$, па K е центар на хомотетија која го пресликува $\triangle A'B'C'$ во $\triangle A''B''C''$ и оттука следува тврдењето на задачата.

LIII олимпијада

1. Во триаголникот ABC точката J е центар на припишаната кружница наспроти темето A. Оваа кружница ја допира BC во M, а продолженијата на страните AB и AC во K и L, соодветно. Правите LM и BJ се сечат во F, а правите KM и CJ се сечат во G. Нека S е пресечната точка на правите AF и BC, а T е пресечната точка на правите AG и BC. Докажи дека M е средина на отсечката ST.

Решение. Од

$$\measuredangle JFL = \measuredangle JBC - \measuredangle LMC$$
$$= (90^\circ - \tfrac{\measuredangle ABC}{2}) - \tfrac{\measuredangle ACB}{2}$$
$$= \tfrac{\measuredangle BAC}{2} = \measuredangle JAL,$$



следува дека точката F припаѓа на кружницата која минува низ точките A, J и L, т.е. на кружницата над дијаметар AJ, па затоа $\measuredangle AFB = \measuredangle AFJ = 90^\circ$. Од $\measuredangle SBF = \measuredangle ABF$ следува дека триаголниците SBF и ABF се складни и $\overline{SB} = \overline{AB}$. Сега:

$$\overline{SM} = \overline{SB} + \overline{BM} = \overline{AB} + \overline{BK} = \overline{AK}$$

и аналогно $\overline{TM} = \overline{AL} = \overline{AK}$, па затоа $\overline{SM} = \overline{TM}$.

2. Нека $n \geq 3$ е природен број и $a_2, a_3, ..., a_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_2 a_3 ... a_n = 1$. Докажи, дека

$$(1+a_2)^2 (1+a_3)^3 ... (1+a_n)^n > n^n . \qquad (1)$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$(1+a_k)^k = (\tfrac{1}{k-1} + ... + \tfrac{1}{k-1} + a_k)^k \geq (k \cdot \sqrt[k]{(\tfrac{1}{k-1})^{k-1} a_k})^k = \tfrac{k^k}{(k-1)^{k-1}} a_k .$$

Множејќи ги овие неравенства за $k = 2, 3, ..., n$ добиваме

$$(1+a_2)^2 (1+a_3)^3 ... (1+a_n)^n \geq n^n .$$

Во последното неравенство знак за равенство ќе важи ако и само ако $a_k = \frac{1}{k-1}$ за $k = 2, 3, ..., n$. Но, во овој случај важи $a_2 a_3 ... a_n \neq 1$, па затоа е точно неравенството (1).

3. *Погодувалка* е игра која ја играат двајца играчи A и B. Правилата на играта зависат од природните броеви k и n кои се познати и на едниот и на другиот играч.

На почетокот на играта A избира броеви x и N такви што $1 \leq x \leq N$.

Играчот A на играчот B не му соопштува информација за бројот x, но му ја соопштува точната вредност на бројот N. Играчот B пробува да добие информации за бројот x поставувајќи му на играчот A прашања од следниот вид: во секое прашање B избира произволно подмножество S на множеството природни броеви (може да избира исто подмножество повеќе пати) и го прашува играчот A дали x припаѓа на S. Играчот B може да поставува колку сака прашања. По секое прашање играчот A одговара со *да* или со *не*, но може и да лаже. Единствено ограничување е меѓу $k+1$ последователни одговори барем еден мора да е вистинит.

Откако B ќе постави колку што сака прашања, тој треба да избере множество X кое се состои од најмногу n природни броеви. Ако x припаѓа на X тогаш B победува, а во спротивно B губи. Докажи дека:

а) Ако $n \geq 2^k$, тогаш B има победничка стратегија.

б) За секој доволно голем k постои природен број $n \geq 1{,}99^k$ така што A има победничка стратегија.

Решение. За одговорот o на играчот A на прашањето: „*Дали* $b \in S$“ ќе велиме дека *не е согласен* со бројот b ако $o = да$ и $b \notin S$, или $o = не$ и $b \in S$.

а) Ќе докажеме дека во секое множество Y со $2^k + 1$ броеви, B со сигурност може да определи барем еден број кој не е x. Нека без ограничување на општоста претпоставиме дека $Y = \{0, 1, 2, ..., 2^k\}$. Играчот B почнува така што го повторува прашањето „*Дали* $x = 2^k$“. Ако $k+1$ пати по ред добие одговор *не*, тој знае дека $x \neq 2^k$. Во спротивно, кога ќе добие одговор *да*, тој редоследно го поставува прашањето „*Дали* $i-$*тата бинарна цифра на бројот* x *е еднаква на* 1“ за $i = 1, 2, ..., k$. Без разлика какви се одговорите, сите тие не се согласни со некој број b, $0 \leq b \leq 2^k - 1$. Ако се има предвид претходниот одговор *да* за бројот 2^k, B може да заклучи дека $x \neq b$.

б) Нека $1 < \lambda < 2$. За секој $i = 1, 2, ..., N$, нека $a_i(m)$ го означува тековниот број последователни одговори по $m-$тото прашање кои не се согласни со i. Разгледуваме $\phi(m) = \sum_{i=1}^{N} \lambda^{a_i(m)}$. Јасно, A ја постигнува целта ако може да одговара така што ќе важи $\phi(m) < \lambda^{k+1}$ за секој m.

Со S_m да го означиме множеството броеви со кои одговорот *да* на $m-$тото прашање ќе биде несогласен. Ако A на $m-$тото прашање одговори *да,* тогаш важи $a_i(m) = a_i(m-1) + 1$, за $i \in S_m$ и $a_i(m) = 0$ за $i \notin S_m$, па затоа важи

$$\phi(m) = f_1 = \lambda \sum_{i \in S_m} \lambda^{a_i(m-1)} + \sum_{i \notin S_m} 1 .$$

Од друга страна, ако A одговори *не*, тогаш $a_i(m) = a_i(m-1)+1$, за $i \notin S_m$ и $a_i(m) = 0$ за $i \in S_m$, па затоа важи

$$\phi(m) = f_2 = \lambda \sum_{i \notin S_m} \lambda^{a_i(m-1)} + \sum_{i \in S_m} 1 .$$

Бидејќи $f_1 + f_2 = \lambda\phi(m-1) + N$, на $m-$тото прашање A може да одговори така што ќе биде $\phi(m) = \frac{\lambda}{2}\phi(m-1) + \frac{N}{2}$.

На почетокот е $\phi(0) = N$. Врз основа на претходните разгледувања со едноставна индукција се докажува дека A може да избира одговори така што секогаш ќе важи $\phi(m) \le \frac{N}{2-\lambda}$. Специјално, ако $N < (2-\lambda)\lambda^{k+1}$, тогаш $\phi(m) \le \lambda^{k+1}$, па затоа A има победничка стратегија.

Конечно, ако $1{,}99 < \lambda < 2$, тогаш за доволно голем k важи

$$(2-\lambda)\lambda^{k+1} > 1{,}99^k + 1 ,$$

со што тврдењето е докажано.

4. Определи ги сите функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такви што за секои цели броеви a, b, c за кои $a+b+c=0$ е точно равенството

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a) . \qquad (*)$$

Решение. Во (*) ставаме $a=b=c=0$ и добиваме $f(0)=0$. Сега за $c=0$ и $b=-a$ од (*) следува $f(-a) = f(a)$. Понатаму, со решавање на квадратната равенка

$$f(c)^2 - 2(f(a)+f(b))f(c) + (f(a)^2 - 2f(a)f(b) + f(b)^2) = 0$$

добиваме

$$f(c) = f(a) + f(b) \pm 2\sqrt{f(a)f(b)}$$

и ако земеме предвид дека $c = -a-b$ и $f(-x) = f(x)$ добиваме

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \pm 2\sqrt{f(a)f(b)} . \qquad (1)$$

Оттука следува дека $f(a)f(b) \ge 0$ за секои $a, b \in \mathbb{Z}$. Ако $f(1) = 0$, тогаш по индукција следува $f(a) = 0$ за секој $a \in \mathbb{N}$, т.е. $f \equiv 0$. Затоа во натамошните разгледувања ќе претпоставиме дека $f(1) \ne 0$. Од претходните разгледувања следува $\frac{f(a)}{f(1)} > 0$, за $a \in \mathbb{N}$. Да означиме $g(a) = \sqrt{\frac{f(a)}{f(1)}}$. Сега релацијата (1) се сведува на

$$g(a+b) = \pm g(a) \pm g(b), \text{ за секои } a, b \in \mathbb{N} . \qquad (2)$$

Имаме $g(1)=1$ и $g(2)\in\{0,2\}$. Понатаму, ако $g(2)=2$, тогаш $g(3)\in\{1,3\}$. Да забележиме дека ако $g(d)=0$, тогаш функцијата g е периодична со период d.

i) Ако $g(2)=0$, функцијата има период 2, па затоа $g(2a)=0$ и $g(2a+1)=1$, за $a\in\mathbb{N}_0$. Оваа функција ја задоволува релацијата (2). Навистина, ако $2\,|\,a+b$, тогаш важи $g(a)=g(b)$ и $g(a+b)=0$, а ако $2\nmid a+b$, тогаш важи $\{g(a),g(b)\}=\{0,1\}$ и $g(a+b)=1$.

ii) Нека $g(2)=2$ и $g(3)=1$. Тогаш од

$$g(4)=\pm g(3)\pm g(1)\in\{0,2\} \text{ и } g(4)=\pm g(2)\pm g(2)\in\{0,4\},$$

следува $g(4)=0$, што значи дека g има период 4. Според тоа, $g(4a)=0,\ g(4a+2)=2$ и $g(4a+3)=g(4a+1)=1$, за $a\in\mathbb{N}_0$.

Ако $g(a)=0$ (аналогно $g(b)=0$), тогаш $4\,|\,a$ и $g(a+b)=g(b)$. Ако $g(a)=1$ (аналогно $g(b)=1$), тогаш a е непарен, еден од броевите b и $a+b$ е парен, а другиот е непарен, па затоа $\{g(b),g(a+b)\}=\{0,1\}$ или $\{1,2\}$. Конечно, за $g(a)=g(b)=2$ имаме $a\equiv b\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ и $g(a+b)=0$. Значи, во секој случај важи (2).

iii) Конечно, ако $g(2)=2$ и $g(3)=3$, со индукција се докажува дека $g(a)=a$ за секој $a\in\mathbb{N}$. Тоа важи за $a\le 3$, а при претпоставка дека важи за $a<n$ ($n\ge 4$), имаме

$$g(n)=\pm g(n-1)\pm g(1)\in\{n-2,n\} \text{ и } g(n)=\pm g(n-2)\pm g(2)\in\{n-4,n\},$$

па следува дека $g(n)=n$. Јасно, оваа функција тривијално ја задоволува (2).

Од претходните разгледувања следува дека единствени решенија се следниве функции, за некоја константа $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$:

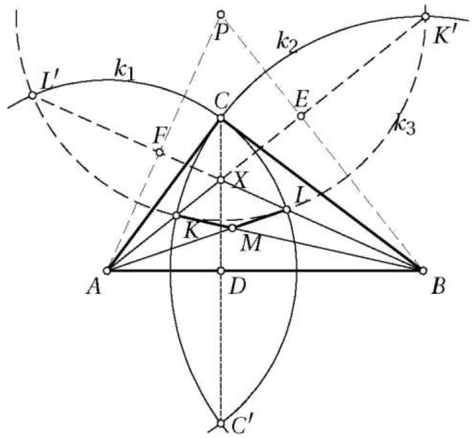
$$f_1(x)=0,\quad f_2(x)=kx^2,\ f_3(x)=\begin{cases}0, & 2\,|\,x\\ k, & 2\nmid x\end{cases} \text{ и } f_4(x)=\begin{cases}0, & x\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)\\ k, & x\equiv 1,3(\mathrm{mod}\,4)\\ 4k, & x\equiv 2(\mathrm{mod}\,4).\end{cases}$$

5. Нека ABC е триаголник во кој $\measuredangle BCA=90^\circ$ и нека D е подножјето на висината повлечена од темето C. Во внатрешноста на отсечката CD е избрана точка X. Нека K е точка на отсечката AX таква што $\overline{BK}=\overline{BC}$, а L е точка на отсечката BX таква што $\overline{AL}=\overline{AC}$. Правите AL и BK се сечат во точката M. Докажи дека $\overline{MK}=\overline{ML}$.

Решение. *Прв начин.* Да ги разгледаме кружниците $k_1(A,\overline{AC})$ и $k_2(B,\overline{BC})$. Нека AX повторно ја сече k_2 во K', а BX повторно ја сече k_1 во L', и нека k_1 и k_2 се сечат во C и C'. Од степенот на точката X во однос на кружниците k_1 и k_2 добиваме

$$\overline{XL}\cdot\overline{XL'}=\overline{XC}\cdot\overline{XC'}=\overline{XK}\cdot\overline{XK'},$$

што значи дека точките K,K', L,L' лежат на една кружница, да кажеме k_3. Бидејќи $\measuredangle BCA=90^\circ$, правата AC ја допира k_2 и правата BC ја допира k_1, па од степенот на точката A во однос на k_2 добиваме



$$\overline{AL}^2=\overline{AC}^2=\overline{AK}\cdot\overline{AK'},$$

т.е. AL ја допира k_3 во L. Аналогно, BK ја допира k_3 во K. Следува дека MK и ML тангентни отсечки од точката M на k_3, па затоа $\overline{MK}=\overline{ML}$.

Втор начин. Нека AF и BE се висините и P е ортоцентарот на триаголникот ABX. Од

$$\overline{AL}^2=\overline{AC}^2=\overline{AD}\cdot\overline{AB}=\overline{AF}\cdot\overline{AP}$$

следува дека правата AL е тангента на кружницата FLP. Дијаметар на оваа кружница е AP, па затоа $\measuredangle ALP=90^\circ$. Аналогно $\measuredangle BKP=90^\circ$. Сега

$$\overline{LP}^2=\overline{PF}\cdot\overline{PA}=\overline{PE}\cdot\overline{PB}=\overline{PK}^2,\text{ т.е. } \overline{PL}=\overline{PK}.$$

Според тоа, триаголниците MLP и MKP се складни, па затоа $\overline{MK}=\overline{ML}$.

6. Определи ги сите природни броеви n за кои постојат ненегативни цели броеви $a_1,a_2,...,a_n$ такви што важи

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+...+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+...+\frac{n}{3^{a_n}}=1.$$

Решение. *Прв начин.* Ако постојат $a_1,a_2,...,a_n$, тогаш множејќи го десното равенство со 3^a, каде $a=\max\{a_1,a_2,...,a_n\}$ и сведувајќи го по модул 2 добиваме

$$1+2+...+n=\tfrac{n(n+1)}{2}\equiv 1(\mathrm{mod}\,2).$$

Според тоа, $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ или $n\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$. Затоа во натамошните разгледувања ќе земеме $n\equiv 1,2(\mathrm{mod}\,4)$. Ќе докажеме дека во овие случаи броевите $a_1,a_2,...,a_n$ постојат.

Низата реални броеви $x_1,x_2,...,x_n$ ќе ја наречеме употреблива со степени $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{N}$, ако

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+...+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{x_1}{3^{a_1}}+\frac{x_2}{3^{a_2}}+...+\frac{x_n}{3^{a_n}}=1.$$

Лесно се проверува дека ако низата $x_1,x_2,...,x_{n-2},\frac{x_{n-1}+x_n}{3}$ е употреблива со степени $a_1,a_2,...,a_{n-2},a_{n-1}$, тогаш и низата $x_1,x_2,...,x_{n-2},x_{n-1},x_n$ е употреблива со степени $a_1,a_2,...,a_{n-2},a_{n-1}+1,a_{n-1}+1$.

Ќе ја наречеме чекор во низата $x_1,x_2,...,x_n$ операцијата на замена на два броја a,b со бројот $\frac{a+b}{3}$. Од претходните разгледувања следува дека низата $x_1,x_2,...,x_n$ е употреблива (за некои a_i) ако може да се применат $n-1$ чекори така што ќе остане бројот 1. Со индукција по n ќе докажеме дека низата $1,2,...,n$ е употреблива.

Да забележиме дека бројот $2x$ може да се избрише од низата ако во неа се наоѓа бројот x (замена на $x,2x$ со x).

1) Ако $n\equiv 2 \pmod 4$, според претходните разгледувања со бришење на n ја добиваме низата $1,2,...,n-1$.
2) Нека $n\equiv 1 \pmod 4$. Ако $n\geq 9$, постои $m\in\mathbb{N}$ таков што $6m\leq n\leq 10m$. Бројот $6m$ можеме да го избришеме, додека секој од паровите $(6m-i,$ $6m+i)$, за $1\leq i\leq n-6m$ можеме да го замениме со бројот $4m$. Исто така и секое појавување на бројот $4m$ можеме да го избришеме. Така ни останува низата $1,2,...,12m-1-n$ која според индуктивната претпоставка е употреблива бидејќи $12m-1-n\equiv 2 \pmod 4$.

Останува да ја провериме базата на индукција, а тоа се случаите $n\in\{1,5\}$. Случајот $n=1$ е тривијален, а за $n=5$ ја применуваме низата чекори $1,2,3,\underline{4,5}\to 1,2,\underline{3,3}\to \underline{1,2},2\to \underline{1,2}\to 1$.

Втор начин. Од второто равенство следува $1\cdot b_1+2\cdot b_2+...+n\cdot b_n=3^{b_0}$, каде за секој i бројот b_i е степен на бројот 3. Десната страна е непарна, а левата има парност на $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, па затоа $n=4k+1$ или $n=4k+2$.

Обратно, за такви n постојат соодветни броеви $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{N}$. На пример, по индукција следува дека

$$\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^{k+1}}+\frac{3}{3^2}+(\frac{4}{3^4}+\frac{5}{3^4}+\frac{6}{3^4}+\frac{7}{3^4})+...+$$
$$+(\frac{4k-4}{3^{k+2}}+\frac{4k-3}{3^{k+2}}+\frac{4k-2}{3^{k+2}}+\frac{4k-1}{3^{k+2}})+\frac{4k}{3^{k+2}}+\frac{4k+1}{3^{k+2}}=1,$$

$$\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^{k+1}}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^3}+(\frac{5}{3^4}+\frac{6}{3^4}+\frac{7}{3^4}+\frac{8}{3^4})+...+$$
$$+(\frac{4k-3}{3^{k+2}}+\frac{4k-2}{3^{k+2}}+\frac{4k-1}{3^{k+2}}+\frac{4k}{3^{k+2}})+\frac{4k+1}{3^{k+2}}+\frac{4k+2}{3^{k+2}}=1,$$

при што соодветните равенства за 2 се исто така точни.

LIV олимпијада

1. Докажи, дека за секои два природни броја k и n постојат k природни броеви $m_1, m_2, ..., m_k$ (не задолжително различни) такви што
$$1+\frac{2^k-1}{n}=(1+\frac{1}{m_1})(1+\frac{1}{m_2})...(1+\frac{1}{m_k}) .$$

Решение. *Прв начин*. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по k.

За $k=1$ и за секој $n\in\mathbb{N}$ имаме $1+\frac{2^k-1}{n}=1+\frac{1}{n}$, па ако земеме $m_1=n$, добиваме дека равенството (1) е исполнето, т.е. тврдењето важи за $k=1$ и за секој $n\in\mathbb{N}$.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $k=r-1$ и за секој $n\in\mathbb{N}$. Нека $k=r$ и $n\in\mathbb{N}$. Можни се два случаја: $2\,|\,n=2n_1$ и $2\nmid n=2n_1-1$.

1) Ако $2\,|\,n=2n_1$, тогаш
$$1+\frac{2^r-1}{n}=\frac{n+2^r-1}{n+2^r-2}\cdot\frac{n+2^r-2}{n}=(1+\frac{1}{n+2^r-2})(1+\frac{2^{r-1}-1}{n_1}) .$$
Од индуктивната претпоставка следува дека постојат $m_1, m_2, ..., m_{r-1}$ такви што
$$1+\frac{2^{r-1}-1}{n_1}=(1+\frac{1}{m_1})(1+\frac{1}{m_2})...(1+\frac{1}{m_{r-1}})$$
па затоа доволно е да земеме $m_r=n+2^r-2$.

2) Ако $2\nmid n=2n_1-1$, тогаш
$$1+\frac{2^r-1}{n}=\frac{n+2^r-1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{2n_1-1+2^r-1}{2n_1-1+1}\cdot\frac{n+1}{n}=(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2^{r-1}-1}{n_1}) .$$
Од индуктивната претпоставка следува дека постојат $m_1, m_2, ..., m_{r-1}$ такви што
$$1+\frac{2^{r-1}-1}{n_1}=(1+\frac{1}{m_1})(1+\frac{1}{m_2})...(1+\frac{1}{m_{r-1}}) ,$$
па затоа доволно е да земеме $m_r=n$.

Според тоа, и во двата случаја тврдењето важи за $k=r$ и секој $n\in\mathbb{N}$, со што доказот е завршен.

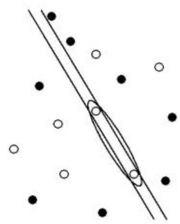
Втор начин. Даљ забележиме дека
$$1+\frac{2^k-1}{n}=(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n+1})...(1+\frac{1}{n+2^k-2}) ,$$
при што од десната страна имаме 2^k-1 множители. Сега од равенството
$$(1+\frac{1}{2x})(1+\frac{1}{2x+1})=1+\frac{1}{x}$$
Се гледа како соседните множители се групираат во парови, при што секој пар дава еден множител од истиот вид и новите множители се од истиот вид. На читателот му препуштаме оваа постапка да ја примени се со цел да добие

k множители на десната страна.

2. Конфигурацијата од 4027 точки во рамнината ја нарекуваме *колумбиска* ако се состои од 2013 црвени и 2014 сини точки, при што никои три точки од конфигурацијата не се колинерани. Со повлекување на прави рамнината се дели на области. За распоредот на правите ќе велиме дека е *добар* за колумбиската конфигурација, ако се исполнети следниве услови:
   - ниту една права не минува низ некоја точка од конфигурацијата,
   - ниту една област не содржи различно обоени точки.

   Определи го најмалиот број k таков што за секоја колумбиска конфигурација од 4027 постои добар распоред на k прави.

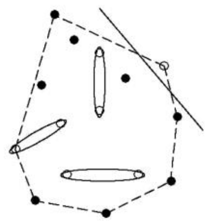
   Решение. *Прв начин.* Да разгледаме конфигурација на точки $A_1, A_2, ..., A_{4027}$ во која $A_1 A_2 ... A_{4027}$ е правилен 4027-аголник и точката A_n е сина за $2 \nmid n$ и црвена за $2 \mid n$. Во добиениот распоред на прави, секоја од 4026 отсечки $A_n A_{n+1}$, за $n = 1, 2, ..., 4026$ мора да биде пресечена барем со една права. Од друга страна, секоја права може да сече најмногу две такви отсечки. Затоа во овој случај, за добар распоред ни се потребни барем $2013 = \frac{4026}{2}$ прави, односно $k \geq 2013$.

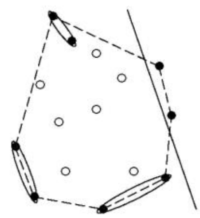
   Ќе докажеме дека за секоја колумбиска конфигурација постои добар распоред на 2013 прави.

   На почетокот да забележиме дека било кои две еднобојни точки може да се одделат од конфигурацијата со помош на две прави. Доволно е да се земат две прави кои се паралелни со правата определена со овие две точки и кои се доволно блиску до неа (цртеж десно).

   Ја разгледуваме конвексната обвивка $\mathcal{P}$ на дадените 4027 точки. Можни се два случаја.

   1) Ако на $\mathcal{P}$ постои теме кое е црвена точка, тогаш неа можеме да ја одделиме со една права (цртеж десно). Преостанатите 2012 црвени точки можеме да ги поделиме во 1006 парови и според претходно изнесеното да ги одделиме со помош на 2012 прави. На овој начин повлековме 2013 прави кои формираат добар распоред.

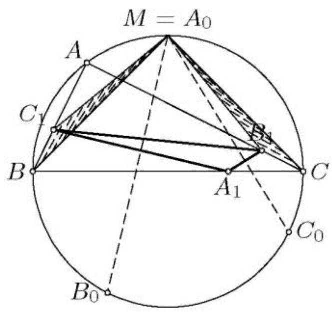
   

   2) Ако сите темиња на конвексната обвивка $\mathcal{P}$ се сини, тогаш со помош на една права може да одделиме две сини точки (цртеж десно). На ист начин како во случајот 1), преостанатите 2012 сини точки можеме да ги одделиме со помош на 2012 прави, со што добивме добар распоред на 2013 прави.

Втор начин. Со индукција по n ќе докажеме дека за произволно множество од n точки обоени во црвено или сино постои добар распоред на $[\frac{n}{2}]$ прави. За $n \leq 2$ тврдењето тривијално важи. Нека $n > 2$. Ја разгледуваме конвексната обвивка на дадените n точки и нека A и B се две нејзини соседни темиња. Според индуктивната претпоставка, за преостанатите $n-2$ точки можеме да повлечеме $[\frac{n-2}{2}] = [\frac{n}{2} - 1] = [\frac{n}{2}] - 1$ прави во добар распоред. Можни се три случаи:

1) Ако точките A и B се истобојни, тогаш од преостанатите $n-2$ точки можеме да ги одделиме со една права l. Така добиваме добар распоред на вкупно $[\frac{n}{2}] - 1 + 1 = [\frac{n}{2}]$ прави.
2) Ако A и B се различно обоени, но се одделени со некоја од веќе нацртаните прави, повторно е доволно да се додаде правата l.
3) Ако A и B се различно обоени, но лежат во иста област определена со повлекувањето на $[\frac{n}{2}] - 1$ прави, тогаш во таа обаст точките кои се различни од A и B се еднобојни, да кажеме дека се сини. Точно една од точките A и B е црвена, па неа можеме да ја одделиме од другите точки со една права, со што добиваме добар распоред на $[\frac{n}{2}] - 1 + 1 = [\frac{n}{2}]$ прави.

3. Припишаната кружница на триаголникот ABC наспроти темето A ја допира страната BC во точката A_1. Аналогно се дефинираат точките B_1 на CA и C_1 на AB, како допирни точки на припишаните кружници наспроти темињата B и C, соодветно. Нека центарот на опишаната кружница околу триаголникот $A_1B_1C_1$ лежи на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Докажи дека триаголникот ABC е правоаголен.



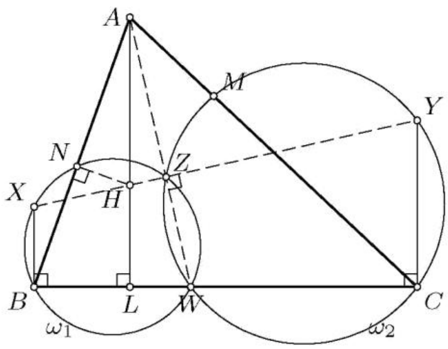
Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека центарот M на опишаната кружница околу триаголникот $A_1B_1C_1$ е во внатрешноста на $\measuredangle B_1A_1C_1$. Освен во M симетралата на отсечката B_1C_1 ја сече опишаната кружница на $\triangle ABC$ во некоја точка M' на спротивната страна на правата B_1C_1 во однос на точката A_1.

Со A_0, B_0, C_0 да ги означиме средините на лаците CAB, ABC, BCA, соодветно. Бидејќи $\overline{C_1B} = \overline{B_1C}, \overline{A_0B} = \overline{A_0C}$ и $\measuredangle A_0BC_1 = \measuredangle A_0CB_1$, заклучуваме дека $\triangle A_0BC_1$ е складен со $\triangle A_0CB_1$, па затоа $\overline{A_0B_1} = \overline{A_0C_1}$, т.е. A_0 припаѓа на симетралата на отсечката B_1C_1. Оттука следува дека важи $\measuredangle AB_1A_0 = \measuredangle AC_1A_0$, па затоа A_0 припаѓа на кружницата B_1AC_1. Бидејќи A_0 е точка на надворешната симетрала на $\measuredangle B_1AC_1$, таа е на иста страна на правата B_1C_1 на која е точката A. Оттука следува дека $A_0 \not\equiv M'$, т.е. $A_0 \equiv M$ е центарот на кружницата $A_1B_1C_1$.

Од равенството $\measuredangle B_1A_0C_1 = \measuredangle B_1AC_1 = \alpha$ следува $\measuredangle B_1A_1C_1 = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Од друга страна, бидејќи B_0A_0 и C_0A_0 се соодветно симетралите на страните A_1C_1 и A_1B_1, добиваме дека $\measuredangle B_1A_1C_1 = 180^\circ - \measuredangle B_0A_0C_0 = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Од последните две равенства следува $\alpha = 90^\circ$.

4. Нека H е ортоцентарот на остроаголниот триаголник ABC, а W е точка на страната BC различна од темињата B и C. Точките M и N се подножја на висините повлечени од темињата B и C, соодветно. Нека ω_1 е опишаната кружница околу триаголникот BWN, а X е точка на ω_1 таква што WX е дијаметар на ω_1. Аналогно, нека ω_2 е опишаната кружница околу триаголникот CWM, а Y точка на ω_2 таква што WY е дијаметар на ω_2. Докажи дека точките X, Y и H се колинеарни.

Решение. *Прв начин.* Со Z да ја означиме втората пресечна точка на кружниците ω_1 и ω_2 ($Z \neq W$). Точката Z припаѓа на правата XY, бидејќи $\measuredangle XZW = \measuredangle YZW = 90^\circ$.



Точките B, C, M, N лежат на кружницата чиј дијаметар е BC. Радикалните оски на паровите кружници (ω, ω_1), (ω, ω_2) и (ω_1, ω_2) се соодветно правите BN, CM и WZ, па затоа радикалниот центар на овие три кружници е $A = BN \cap CM$, што значи дека $A \in WZ$.

Нека L подножјето на висината повлечена од темето A. Од

$$\overline{AZ} \cdot \overline{AW} = \overline{AN} \cdot \overline{AB} = \overline{AH} \cdot \overline{AL},$$

следува дека точките H, L, W и Z се конциклични. Ако $W \not\equiv L$, оттука следува дека $\measuredangle AZH = \measuredangle ALW = 90^\circ = \measuredangle AZX$, па затоа H лежи на правата XYZ. Тврдењето важи и за $W \equiv L$, бидејќи тогаш $H \equiv Z$.

Втор начин. Нека Z е втората пресечна точка на правата AW и опишаната кружница ω^* околу $\triangle AMN$. Бидејќи $H \in \omega^*$, заклучуваме дека $HZ \perp AZ$, па затоа $\measuredangle MZW = 90^\circ + \measuredangle MAH = 180^\circ - \measuredangle C$. Според тоа, $Z \in \omega_2$ и аналогно

$Z \in \omega_1$. Последното значи дека AZ е радикална оска на ω_1 и ω_2. Тогаш $XZ, YZ \perp AZ \perp HZ$, што значи дека точките X, Y и H се колинеарни.

5. Нека $\mathbb{Q}^+$ е множеството позитивни рационални броеви. Нека функцијата $f:\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}$ ги задоволува условите:

i) за секои $x, y \in \mathbb{Q}^+$ важи $f(x)f(y) \geq f(xy)$,

ii) за секои $x, y \in \mathbb{Q}^+$ важи $f(x+y) \geq f(x)+f(y)$,

iii) постои рационален број $a > 1$ таков што $f(a) = a$.

Докажи дека $f(x) = x$, за секој $x \in \mathbb{Q}^+$.

Решение. Од $f(1)f(a) \geq f(1\cdot a)$ следува $f(1) \geq 1$. Од *ii*) со едноставна индукција добиваме $f(nx) \geq nf(x)$ за секои $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{Q}^+$. Така, $f(n) \geq nf(1) \geq n$ и $f(n)f(\frac{m}{n}) \geq f(m) > 0$, па затоа $f(x) > 0$, за секој $x \in \mathbb{Q}^+$. Оттука, според *ii*) заклучуваме дека функцијата f строго расте, па затоа

$$f(x) \geq f([x]) \geq [x] > x-1 \text{ за секој } x \in \mathbb{Q}^+.$$

Нека $x > 1$. Од *i*) со индукција добиваме $f(x)^n \geq f(x^n) \geq x^n - 1$, па за секој $n \in \mathbb{N}$ имаме $\frac{f(x)}{x} \geq \sqrt[n]{1-\frac{1}{x^n}} \geq 1-\frac{1}{x^n}$, од каде добиваме $\frac{f(x)}{x} \geq 1$, т.е. $f(x) \geq x$ за секој $x \in \mathbb{Q}^+$.

Сега, од $a^n = f(a)^n \geq f(a^n) \geq a^n$ следува $f(a^n) = a^n$. Значи, за $x > 1$ и $n \in \mathbb{N}$ таков што $a^n - x > 1$ важи

$$a^n = f(a^n) \geq f(x) + f(a^n - x) \geq x + (a^n - x) = a^n \ ,$$

па затоа $f(x) = x$. Конечно, бидејќи $f(n) = n$ за $n \in \mathbb{N}$, имаме

$$nf(x) = f(n)f(x) \geq f(nx) \geq nf(x),$$

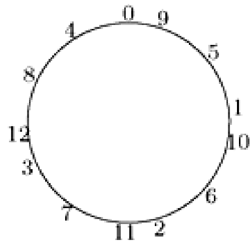
па затоа $f(nx) = nf(x)$, од каде што следува дека $f(x) = x$ за секој $x \in \mathbb{Q}^+$.

6. Дадени се природен број $n \geq 3$ и $n+1$ точка кои дадена кружница ја делат на лаци со еднакви должини. Ги разгледуваме сите можни означувања на овие точки со броевите $0,1,...,n$, каде секоја ознака се користи точно еднаш и две такви означувања се сметаат за еднакви ако едното може да се добие од другото со ротација на кругот. За означувањето ќе велиме дека е *убаво* ако за секои четири ознаки $a < b < c < d$, такви што $a+d = b+c$, тетивата која ги поврзува точките означени си a и d не ја сече тетивата која ги поврзува точките означени со b и c.

Нека M е бројот на убавите означувања, а N е бројот на подредени парови природни броеви (x, y) такви што $x + y \leq n$ и $\text{NZD}(x, y) = 1$. Докажи дека $M = N + 1$.

Решение. Наместо означување на дадените $n+1$ точка ќе работиме со циклични распореди на броевите $0,1,...,n$ на кружницата, каде распоредот е *убав* ако соодветствува на убаво означување.

Избираме ирационален број $\alpha \in (0,1)$. Произволна точка на кружницата да ја означиме со 0, а за $k \in \mathbb{N}$ со k ја означуваме точката на кружницата на аголно растојание $\alpha\pi$ од точката $k-1$ во насока на движењето на стрелките на часовникот. Добиениот распоред на броевите $0,1,...,n$ го нарекуваме *цикличен* и го означуваме со $R(\alpha)$, цртеж десно.



$R(\alpha)$ за $n=12$ и $\frac{2}{9} < \alpha < \frac{1}{4}$

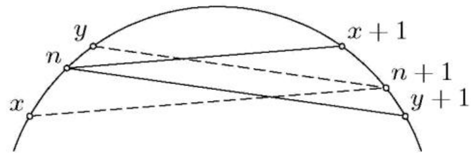
Со $[p,q]$ да ја означиме тетивата на кружницата определена со точките p и q, а со $[p,q]$ соодветниот лак во насока на движењето на стрелките на часовникот. Ако броевите $a < b < c < d$ го задоволуваат условот $a + d = b + c$, тогаш точките означени со a,b,c,d се темиња на рамнокрак трапез, па затоа $[a,d]$ е паралелна со $[b,c]$. Следува дека распоредот $R(\alpha)$ е убав.

Бидејќи α се менува од 0 до 1, распоредот $R(\alpha)$ единствено се менува кога минува низ рационалниот број $\frac{p}{q}$ со $\text{NZD}(p,q) = 1$ и $q \leq n$. Бидејќи $\frac{p}{q} \to (p, q-p)$ е биекција меѓу ваквите дропки $\frac{p}{q}$ и паровите (x, y) природни броеви со $\text{NZD}(x, y) = 1$ и $x + y \leq n$, вакви рационални броеви $\frac{p}{q}$ има точно N; нека $0 = \frac{p_0}{q_0} < \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < ... < \frac{p_N}{q_N} < 1 < \frac{p_{N+1}}{q_{N+1}}$. Секој интервал $(\frac{p_i}{q_i}, \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}})$ определува по еден цикличен распоред, па затоа има точно $N+1$ различни циклични распореди.

Да забележиме дека за $\alpha \in (\frac{p_i}{q_i}, \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}})$ броевите непосредно пред и по бројот 0 во насока на движењето на стрелката на часовникот се еднакви на q_{i+1} и q_i, соодветно. Навистина, за доволно мало ε, јасно е дека во $R(\frac{p_i}{q_i} + \varepsilon)$ точката q_i е непосредно по 0, а додека во $R(\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} - \varepsilon)$ точката q_{i+1} е непосредно пред 0.

Останува со индукција по n да докажеме дека секој убав распоред е цикличен. Ова е точно за $n \leq 2$. Да разгледаме убав распоред R на броевите $0,1,...,n+1$. Според индуктивната претпоставка, распоредот на броевите

$0,1,...,n$ се совпаѓа со распоредот $R(\alpha)$ за α од некој интервал $(\frac{p_i}{q_i},\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}})$. Нека бројот n се наоѓа на лакот $[x,y]$ на кој нема други точки. Бидејќи тетивите $[x+1,n]$ и $[y,n+1]$ не се сечат, $n+1$ се наоѓа на лакот $[x+1,x]$. Тетивите $[y+1,n]$ и $[y,n+1]$ не се сечат, па затоа $n+1$ се наоѓа на лакот $[y,y+1]$. Значи, $n+1$ е на лакот $[x+1,y+1]$, цртеж десно. Од друга страна, заради цикличноста, единствена точка која може да лежи на овој лак е точката 0.



1) Ако точката 0 не е на лакот $[x+1,y+1]$, распоредот R е еднозначно определен и тој мора да се совпадне со $R(\alpha)$.
2) Точката 0 е на лакот $[x+1,y+1]$ ако и само ако $\frac{k}{n+1}\in(\frac{p_i}{q_i},\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}})$ за некој $k\in\mathbb{N}$. Во овој случај, ако бројот $n+1$ го ставиме меѓу $x+1$ и 0, односно меѓу 0 и $y+1$, добиваме две можности за распоредот R. Во распоредот $R(\alpha)$ за $\frac{p_i}{q_i}<\alpha<\frac{k}{n+1}$ и $\frac{k}{n+1}<\alpha<\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$, точката $n+1$ припаѓа на лаците $[x+1,0]$ и $[0,y+1]$, соодветно. Значи, двата можни распореди се циклични.

LV олимпијада

1. Нека $a_0 < a_1 < a_2 < ...$ е бесконечна низа природни броеви. Докажи, дека постои точно еден природен број n таков што важи

$$a_n < \frac{a_0+a_1+...+a_n}{n} \le a_{n+1}.$$

Решение. *Прв начин*. Да означиме $s_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$. Условот

$$a_n < \frac{s_n}{n} \le a_{n+1},$$

по множењето со n го добива обликот

$$na_n - s_n < 0 \le na_{n+1} - s_n \text{, т.е. } f_n < 0 \le f_{n+1},$$

каде $f_n = na_n - s_n$. Од

$$f_{n+1} - f_n = n(a_{n+1} - a_n) > 0$$

следува дека низата $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ строго монотоно расте, при што $f_0 = -a_0 < 0$. Според тоа, бројот 0 припаѓа точно на еден од интервалите $(f_n, f_{n+1}]$, од што следува тврдењето на задачата.

Втор начин. Да претпоставиме дека не постои n со саканите својства. Бидејќи $a_1 < a_0 + a_1$, заклучуваме дека $2a_2 < a_0 + a_1 + a_2$ ако и само ако $a_2 < a_0 + a_1$. Сега со индукција по n лесно се докажува дека $a_n < a_0 + a_1$, што е противречност бидејќи дадената низа неограничено расте.

Нека n ги има саканите својства и е најмал таков природен број. Имаме:

$$na_n < a_0 + a_1 + ... + a_n \le na_{n+1}.$$

Од десното неравенство добиваме

$$a_0 + a_1 + ... + a_n + a_{n+1} \le (n+1)a_{n+1},$$

што значи дека $n+1$ ги нема саканите својства. Освен тоа,

$$a_0 + a_1 + ... + a_n + a_{n+1} \le (n+1)a_{n+1} < (n+1)a_{n+2},$$

па затоа

$$a_0 + a_1 + ... + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} < (n+2)a_{n+2},$$

и по индукција следува дека

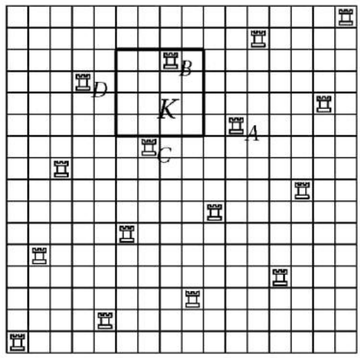
$$a_0 + a_1 + ... + a_m \le ma_m,$$

за секој $m \ge n+1$, т.е. ниту еден $m \ge n+1$ ги нема саканите својства, со што е докажана единственоста на бројот n.

2. Даден е природен број $n \ge 2$. Разгледуваме шаховска табла $n \times n$ која се состои од n^2 полиња. За распоредот на n топови на таблата ќе велиме дека е *мирољублив* ако во секој ред и во секоја колона се наоѓа тачно едан топ. Определи го најголемиот природен број k таков што за секој мирољублив распоред на n топови постои квадрат $k \times k$ кој не содржи топ ниту на едно од

своите k^2 полиња.

Решение. Прво ќе докажеме дека за $k^2 < n$ таков квадрат секогаш постои. За произволен мирољубив распоред, го разгледуваме полето A на првата колона во кое се наоѓа топ, како и k последователни редови кои го содржат ова поле. Унијата на овие k редови е правоаголник $k \times n$ со точно k топови. Од овој правоаголник да го отстраниме полето A. Остатокот садржи $k-1$ топови, но од него може да се исечат k дисјунктни квадрати $k \times k$, од којих барем еден мора да биде празен.



Сега за $n = k^2$ $(k > 1)$ ќе конструираме мирољубив распоред во кој бараниот квадрат не постои. Со (a,b) да го означиме полето во $(a+1)-$от ред и $(b+1)-$та колона. За секој $0 \le i, j \le k$ ќе ставиме топ во полето $(ik + j, jk + i)$. Бидејќи секој цел број од 0 до $n-1$ може на единствен начин да се запише во облик $ik + j$, овој распоред навистина е мирољубив. Останува да докажеме дека во секој квадрат $k \times k$ се наоѓа барем еден топ. Да го разгледаме квадратот K со долно лево поле $(a,b), 0 \le a,b \le k^2 - k + 1$. Постои поле $A(x, y)$ со $x \ge a$ и $y \ge b$ на кое се наоѓа топ. Разгледуваме такво поле со најмал збир $x + y$. Да претпоставиме дека полето A е надвор од квадратот K. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x \ge a + k$. По конструкција, на полињата

$$B(x-k+1, y+k-1), C(x-k, y-1) \text{ и } D(x-2k+1, y+k-2)$$

исто така се наоѓаат топови (ако се на таблата). Од условот за минималност на полето A следува дека $x-2k+1 < a$ и $y-1 < b$, од каде добиваме $x \le a + 2k - 2$ и $y = b$, но, тогаш квадратот K содржи поле B на кој има топ.

Конечно, за $n < k^2$, со бришење на првите $k^2 - n$ редови и првите $k^2 - n$ колони од опишаниот распоред добиваме распоред со најмногу n топови таков што ниту еден квадрат $k \times k$ не е празен. Овој распоред по потреба може да се дополни до мирољубливо биективно спарување на празните колони и празните редови. Според тоа, одговорот е најголемиот k за кој $k^2 < n$, т.е. $k = [\sqrt{n-1}]$.

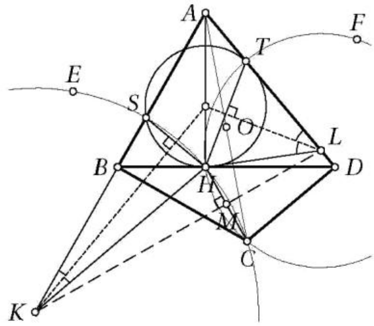
3. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи $\measuredangle ABC = \measuredangle CDA = 90^\circ$. Точката H е подножје на нормалата повлечена од точката A на правата BD. Точките

S и T припаѓаат соодветно на страните AB и AD и се такви што H е во внатрешноста на триаголникот SCT и важи

$$\measuredangle CHS - \measuredangle CSB = 90^\circ \text{ и } \measuredangle THS - \measuredangle DTC = 90^\circ .$$

Докажи дека правата BD ја допира опишаната кружница на триаголникот TSH.

Решение. *Прв начин*. Нека K е центар на опишаната кружница на триаголникот CHS. Од $\measuredangle KSC = \measuredangle SHC - 90^\circ = \measuredangle BSC$ скедува дека K лежи на правата AB. Аналогно, центарот L на опишаната кружница на триаголникот CHT лежи на правата AD. Точките K и L лежат на симетралата на отсечката CH, како и средината M на отсечката CH.



Опишаната кружница околу $\triangle SHT$ ја допира правата BD ако и само ако симетралите на страните SH и TH се сечат на правата AH. Бидејќи овие две симетрали воедно се и симетрали на $\measuredangle AKH$ и $\measuredangle ALH$, доволно е да се докаже дека $\frac{\overline{KA}}{\overline{KH}} = \frac{\overline{LA}}{\overline{LH}}$.

Центарот O на опишаната кружница на $\triangle ABD$ е средина на отсечката AC, па затоа $MO \parallel AH$. Значи, MO е симетрала на отсечката BD и $\overline{MB} = \overline{MD}$.

Точките B и M се на кружница над дијаметар KC, па затоа $\overline{KC} = \frac{\overline{MB}}{\sin \measuredangle AKL}$.

Аналогно, $\overline{LC} = \frac{\overline{MD}}{\sin \measuredangle ALK}$. Сега

$$\frac{\overline{KH}}{\overline{LH}} = \frac{\overline{KC}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{MB} \sin \measuredangle ALK}{\overline{MD} \sin \measuredangle AKL} = \frac{\sin \measuredangle ALK}{\sin \measuredangle AKL} = \frac{\overline{KA}}{\overline{LA}},$$

што и требаше да се докаже.

Втор начин. Ќе ги користиме ознаките како во првиот начин на решавање, како и равенството $\overline{MB} = \overline{MD}$. Нека E и F се симетричните точки на точката H во однос на AB и AD, соодветно. Ако E_1 и F_1 се соодветно средините на отсечките HE и HF, тогаш

$$\overline{CE} = 2\overline{ME_1} = 2\overline{MB} = 2\overline{MD} = 2\overline{MF_1} = \overline{CF} .$$

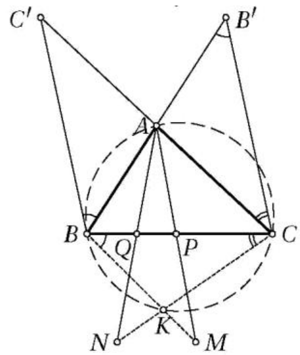
Кружницата EHF има центар во точката A и ја допира BD во точката H, па доволно е да докажеме дека кружниците SHT и EHF се допираат во точката H.

Земаме инверзија со центар H и радиус CE. Точките E и F се пресликуваат во себе, точката H во H', а точките S и T во пресеците S' и T' на симетралите на $\measuredangle ECH'$ и $\measuredangle FCH'$ со отсечките EH' и FH', соодветно. Од

$$\frac{\overline{H'S'}}{\overline{S'E}} = \frac{\overline{H'C}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{H'C}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{H'T'}}{\overline{T'F}}$$

следува дека $S'T' \| EF$. Според тоа, кружниците $S'H'T'$ и $EH'F$ се хомотетични со центар H', па затоа се допираат во H', од каде што следува тврдењето на задачата.

4. Точките P и Q на страната BC на остроаголниот триаголник ABC се такви што важи $\measuredangle PAB = \measuredangle BCA$ и $\measuredangle CAQ = \measuredangle ABC$. Точките M и N на правите AP и AQ, соодветно, се такви што точката P е средина на отсечката AM, а точката Q е средина на отсечката AN. Докажи дека правите BM и CN се сечат на опишаната кружница на триаголникот ABC.



Решение. Триаголникот PBA по конструкција е сличен со триаголникот ABC. Во оваа сличност на точката M ѝ соодветствува точката C' симетрична на точката C во однос на A, од каде што следува $\measuredangle MBP = \measuredangle ABC'$. Слично, важи $\measuredangle NCQ = \measuredangle ACB'$, каде B' е симетричната точка на B во однос на A. Ако правите BM и CN се сечат во точката K, тогаш

$$\begin{aligned}180^\circ - \measuredangle BKC &= \measuredangle KBC + \measuredangle KCB = \measuredangle ABC' + \measuredangle ACB' \\ &= \measuredangle AB'C + \measuredangle ACB' = \measuredangle BAC,\end{aligned}$$

што значи дека четириаголникот $BACK$ е тетивен.

5. Кејптаунската банка издава монети со вредност $\frac{1}{n}$ за секој природен број n. Ако имаме конечно многу такви монети (не задолжително со различни вредности) со вкупна вредност не поголема од $99+\frac{1}{2}$, докажи дека можеме да ги поделиме во најмногу 100 групи така што вкупната вредност на монетите во секоја група не е поголема од 1.

Решение. Ќе докажеме дека, ако вкупната вредност на монетите е $n-\frac{1}{2}$ за некој $n \in \mathbb{N}$, тогаш монетите можеме да ги поделиме во n групи во секоја од кои сумата не е поголема од 1. Монетите со вредност 1 се групи сами за себе, па можеме да сметаме дека такви монети нема. Понатаму, ако имаме $d > 1$ монети со вредност $\frac{1}{k}$, каде $d \mid k$, тогаш можеме да ги замениме со една монета со вредност $\frac{1}{e}$ за $e = \frac{k}{d}$. На овој начин можеме да претпоставиме дека:

(1) монета со вредност $\frac{1}{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$ се појавува најмногу $2k-2$ пати, и

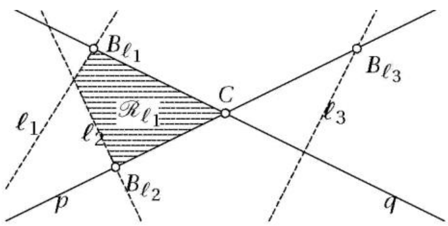
(2) монета со вредност $\frac{1}{2k}$, $k \in \mathbb{N}$ се појавува најмногу еднаш.

За $k=1,\ldots,n$, во $k-$тата група ги ставаме сите монети со вредност $\frac{1}{2k-1}$ и $\frac{1}{2k}$ и вкупната сума во оваа група не е поголема од $\frac{2k-2}{2k-1}+\frac{1}{2k}<1$. Преостанатите монети, кои се со вредности помали од $\frac{1}{2n}$, ќе ги распоредуваме една по една. Да земеме една од овие монети. Барем во една група сумата не е поголема од $\frac{1}{n}(n-\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2n}$, па оваа монета ќе ја ставиме во таа група. На овој начин ја завршуваме поделбата.

6. За множеството прави во рамнината ќе велиме дека се во општа положба ако никои две прави не се паралелни и никои три не минуваат низ иста точка. Множеството прави во општа положба ја дели рамнината на области; *ограничени* области во поделбата ги нарекуваме оние кои имаат конечна плоштина. Докажи дека за секој доволно голем n, во секое множество од n прави во општа положба може да се обојат во сино барем $\sqrt{n}$ прави така што ниту една од ограничените области во поделбата нема потполно сина граница.

Решение. Пресечната точка на две сини прави ја нарекуваме *сина*. Да претпоставиме дека сме обоиле k прави и дека веќе ниту една права не може да се обои без да се наруши условот на задачата. Тоа значи дека за секоја необоена права ℓ постои ограничена област $\Re_\ell$ чија единствена необоена страна лежи на ℓ. Нека A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ се три последователни темиња на областа $\Re_\ell$ во насока на движењето на стрелките на часовникот, при што A_ℓ и B_ℓ лежат на правата ℓ. На правата ℓ и доделуваме сина точка C_ℓ. Ќе докажеме дека секоја сина точка е доделена најмногу на две прави. Бидејќи сини точки има $\binom{k}{2}$, а необоени прави $n-k$, ќе следува дека $n-k\le 2\binom{k}{2}=k(k-1)$, т.е. $k^2\ge n$.

Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека постојат три прави ℓ_1,ℓ_2, ℓ_3 на кои им е доделена иста точка $C=C_{\ell_1}=C_{\ell_2}=C_{\ell_3}$. Нека правите p и q се сечат во точката C. Точките $B_{\ell_1}, B_{\ell_2}, B_{\ell_3}$ се различни и лежат на сини прави p и q, при што на отсечките $CB_{\ell_i}\,(i=1,2,3)$ нема други пресечни точки на дадените прави. Нека B_{ℓ_2} и B_{ℓ_3} лежат на правата p. Четирите последователни страни на областа $\Re_{\ell_1}$ во насока ма движењето на стрелките на часовникот се ℓ_1, p, q и (без ограничување на општоста) ℓ_2, па оваа област има две необоени страни, што е спротивно на претпоставката.



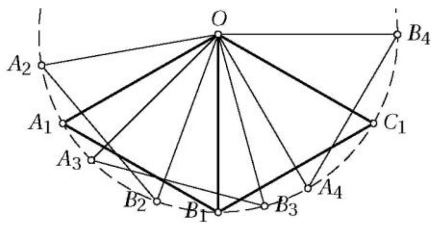
LVI олимпијада

1. Конечното множество $\mathbf{S}$ точки во рамнината го нарекуваме урамнотежено ако за секои две различни точки A и B од множеството $\mathbf{S}$ постои точка C во множеството $\mathbf{S}$ таква што $\overline{AC} = \overline{BC}$. Множеството $\mathbf{S}$ го нарекуваме бесцентрично ако за никои три точки A, B и C од множеството $\mathbf{S}$ не постои точка P во $\mathbf{S}$ таква што $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$.

   а) Докажи дека за секој природен број $n \geq 3$ постои урамнотежено множество кое се состои од n точки.

   б) Определи ги сите природни броеви $n \geq 3$ за кои постои урамнотежено бесцентрично множество.

   Решение. а) Избираме различни точки $A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_m, C_1$ на кружница k со центар O такви што триаголниците OA_iB_i $(i = 1, 2, ..., m)$ и OB_1C_1 се рамнострани. Множествата



$$\{O, A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_m\} \text{ и}$$
$$\{O, A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_m, C_1\}$$

   се урамнотежени и имаат $2m+1$ и $2m+2$, $m \in \mathbb{N}$ елементи.

   б) Одговор: сите непарни броеви.

   За непарен n множеството темиња на правилен $n-$аголник е урамнотежено и бесцентрично множество. Останува да докажеме дека за парен n такво множество $\mathbf{S}$ не постои.

   Нека го претпоставиме спротивното. На секој од $\frac{n(n-1)}{2}$ подредени парови (A, B) точки од $\mathbf{S}$ му соодветствува точка P таква што $\overline{PA} = \overline{PB}$, па според принципот на Дирихле постои точка P на која и соодветствуваат најмалку $[\frac{n-1}{2}] = \frac{n}{2}$ парови точки од $\mathbf{S}$. Бидејќи ниту еден од ови парови не ја соржи точката P некои два пара имаат заедничка точка: нека се тоа (A, B) и (A, C). Тогаш $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$, што противречни на бесцентричноста на множеството $\mathbf{S}$.

2. Определи ги сите тројки природни броеви (a, b, c) такви што секој од броевите

$$ab - c, bc - a, ca - b$$

   е степен на бројот 2.

   Решение. Нека претпоставиме дека $a = b$. Тогаш $b(c-1)$ и $b^2 - c$ се степени на бројот 2, па затоа $b=2^k$ и $c=2^l+1$ за некои $k,l\in\mathbb{N}_0$ и $b^2-c=$ $2^{2k}-2^l-1$ е степен на бројот 2, што е можно единствено за $k=1$ и $l\in\{0,1\}$. Одовде ги добиваме решенијата $(2,2,2)$ и $(2,2,3)$.

Понатаму, заради симетрија можеме да сметаме дека $a<b<c$. Јасно, мора да важи $a>1$. Да означиме

$$bc-a=2^{\alpha},\ ca-b=2^{\beta} \text{ и } ab-c=2^{\gamma}.$$

Тогаш $\alpha>\beta>\gamma$.

Броевите

$$2^{\alpha}+2^{\beta}=(c-1)(b+a) \text{ и } 2^{\alpha}-2^{\beta}=(c+1)(b-a)$$

се деливи со 2^{β}. Но, барем еден од броевите $c\pm1$ не е делив со 4, па затоа $2(a+b)$ или $2(a-b)$ е делив со 2^{β}. Според тоа,

$$2^{\beta}=ca-b\le 2(a+b), \text{ т.е. } a(b+1)\le ac\le 2a+3b<a+4b,$$

па затоа $ab<4b$, т.е. $a<4$.

1) Нека $a=3$. Претходно видовме дека 2^{β} е делител на $2(b+3)$ или на $2(b-3)$. Но, $2^{\beta}=3c-b>\max\{2(b-3),b+3\}$, па единствена можност е $3c-b=2(b+3)$, т.е. $c=b+2$. Сега $2^{\alpha}=bc-a=(b-1)(b+3)$, што значи дека $b-1$ и $b+3$ се степени на бројот 2 чија разлика е еднаква на 4. Оттука следува дека $b=5$, што го дава решението $(3,5,7)$.
2) Нека $a=2$. Имаме $2c-b=2^{\beta}$ и $2b-c=2^{\gamma}$. Ако $\gamma>0$, тогаш броевите b и c се парни, па затоа $bc-2=2^{\alpha}$ не е делив со 4, што не е можно. Според тоа, $\gamma=0$ и $c=2b-1$. Од $2^{\beta}=2c-b=3b-2$ следува

$$b=\tfrac{2^{\beta}+2}{3} \text{ и } 2^{\alpha}=b(2b-1)-2=\tfrac{2^{2\beta+1}+5\cdot2^{\beta}-16}{9}.$$

   Ако $\beta>4$, последниот израз не е делив со 2^5, па затоа не е делив со 2^{α}, што е противречност. Според тоа, $\beta\le4$. Со проверка на можните случаи го добиваме решението $(2,6,11)$.

   Конечно, решенија на задачата се подредените тројки $(2,2,2)$, $(2,2,3)$, $(2,6,11)$ и $(3,5,7)$ и нивните пермутации.

Втор начин. Како и при првиот начин на решавање ако $a=b$, ги определуваме решенијата $(2,2,2)$ и $(2,2,3)$. Нека a,b,c се различни природни броеви. Во зависност од нивната парност ги разликуваме следниве случаи.

1) a,b,c се парни. Нека $2^x\parallel a$, $2^y\parallel b$ и $2^z\parallel c$, при што $1\le x\le y\le z$. Од $2^x\parallel bc-a$ и $2^y\parallel ac-b$, следува $bc-a=2^x\le a$ и $ac-b=2^y\le b$. Ако ги собереме последните две неравенства добиваме $(a+b)(c-1)\le a+b$, од каде добиваме $c=2$ и $x=y=z=1$, односно $(a,b,c)=(2,2,2)$.

2) a,b,c се непарни. Нека $a<b<c$ и $bc-a=2^x$ и $ac-b=2^y$. Тогаш $x>y$ и затоа 2^y е делител на $a(bc-a)-b(ac-b)=(b+a)(b-a)$. Едниот од множителите на $b\pm a$ не е делив со 4, па затоа другиот е делив со 2^{y-1} и важи $4b>2(a+b)\geq 2^y=ac-b>(a-1)b$. Оттука следува дека $a=3$, па од $2(b+3)\geq 3c-b$ добиваме $c\leq b+2$, т.е. $c=b+2$. Сега, $bc-a=(b-1)(b+3)$ е степен на бројот 2, па мора да е $b=5$ и $(a,b,c)=(3,5,7)$.

3) c е непарен, а ab е парен. Мора да е $c=ab-1$, па затоа

$$ab^2-a-b=bc-a=2^x \text{ и } a^2b-a-b=ac-b=2^y.$$

Нека $a<b$. Не може да е $y=0$, па затоа $x>y\geq 1$ и a и b се парни. Бидејќи $2^x+2^y=(a+b)(ab-2)$ и $4\nmid ab-2$, добиваме $2^{y-1}\,||\,a+b$ и оттука $2^{y-1}\,||\,a^2b$ и $2^{y-1}\,||\,ab^2$. Сега добиваме $a=2^kA, b=2^kB$, $y=3k+1$ и $A+B=2^{2k}C\geq 4C$ за некој $k\in\mathbb{N}$ и непарни A,B,C. Понатаму, $2^{3k+1}=2^{3k}(A^2B-C)$, па затоа $A^2B-C=2$ и оттука

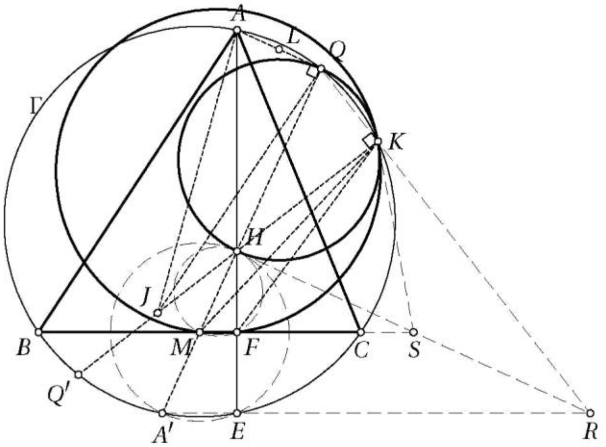
$$8\geq 4A^2B-A-B\geq A^2(3B-1),$$

што е можно само за $A=1, B=3$ и $k=1$. Така го добиваме решението $(a,b,c)=(2,6,11)$.

3. Нека ABC е остроаголен триаголник во кој $\overline{AB}>\overline{AC}$, Γ е неговата опишана кружница, H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и F е подножјето на висината повлечена од темето A. Точката M е средина на отсечката BC. Нека Q е точка на кружницата Γ таква што $\measuredangle HQA=90^\circ$, а K е точка на кружницата Γ таква што $\measuredangle HKQ=90^\circ$. Сметаме дека точките A,B,C,K и Q се меѓу себе различни и лежат на кружницата Γ во овој редослед.
Докажи дека опишаните кружници на триаголниците KQH и FKM се допираат.

Решение. *Прв начин*. Нека A' и Q' се точки на Γ дијаметрално спротивни на точките A и Q, соодветно. Од $\measuredangle AQH=\measuredangle AQA'=90^\circ$ следува дека точките A',H и Q се колинеарни. Слично, точките Q',H и K се колинеарни. Нека E е вториот пресек на правата AF со кружницата Γ. Точките F и M се средини на отсечките HE и HA', соодветно. Со J да ја означиме средината на отсечката HQ'. За произволна точка T на тангентата на кружницата KQH во K таква што Q и T се од различни страни на правата HK важи $\measuredangle HKT=\measuredangle HQK=90^\circ-\measuredangle A'HQ'$. Треба да докажеме дека KT е тангента на кружницата KFM, т.е. дека важи $\measuredangle MKT=\measuredangle CFK$, што е еквивалентно со

$$90^\circ - \measuredangle A'HQ' = \measuredangle CFK + \measuredangle HKM \ . \qquad (1)$$



Од $\triangle KHE \sim \triangle AHQ$ следува $\triangle KHF \sim \triangle AHJ$, па затоа

$$\measuredangle CFK = 90^\circ - \measuredangle KFH = 90^\circ - \measuredangle AJH \ .$$

Слично, $\triangle HKM \sim \triangle HQJ$ и оттука $\measuredangle HKM = \measuredangle JQH$. Така равенството (1) се сведува на равенството $\measuredangle A'HQ' = \measuredangle AJH - \measuredangle JQH$.

Четириаголникот $AQA'Q'$ е правоаголник, а точката J е еднакво оддалечена од правите AQ' и QH, од каде што следува $\overline{JA} = \overline{JQ}$. Затоа, ако L е средина на отсечката AQ, тогаш $JL \parallel AQ'$ и конечно

$$\measuredangle JQH = \measuredangle QJL = \measuredangle AJL = \measuredangle AJH - \measuredangle A'HQ' \ .$$

Втор начин. Како во првиот начин на решавање ги дефинираме точките A' и Q' и докажуваме дека точките A', M, H, Q се колинеарни.

Кружниците KQH и $EA'H$ имаат колинеарни дијаметри QH и $A'H$, што значи дека имаат заедничка тангента t во точката H нормална на правата MH. Радикалните оски на кружниците $KQH, EA'H$ и ABC по парови се $QK, A'E$ и t, и сите минуваат низ нивниот радикален центар R. Четириаголникот $HERK$ е тетивен бидејќи $\measuredangle QKH = \measuredangle HEA' = 90^\circ$, а негов центар на опишаната кружница е средината S на отсечката HR. Точката S припаѓа на симетралата на отсечката HE, а тоа е правата BC. Бидејќи кружницата HFM исто така ја допира правата t во точката H, важи $\overline{SF} \cdot \overline{SM} = \overline{SH}^2$ $= \overline{SK}^2$, што значи дека правата SK ја допира кружницата KFM. Според тоа, SK е заедничка тангента на кружниците KQH и KFM.

4. Нека Ω е опишаната кружница околу триаголникот ABC, а O е нејзиниот центар. Кружница Γ со центар во точката A ја сече отсечката BC во точ-

ките D и E така што точките B,D,E,C се различни меѓу себе и лежат на правата BC во овој редослед. Нека F и G се пресечните точки на кружниците Γ и Ω, при што точките A,F,B,C,G лежат на кружницата Ω во овој редослед. Нека K е втората пресечна точка на опишаната кружница околу триаголникот BDF и отсечката AB. Нека L е втората пресечна точка на опишаната кружница околу триаголникот CGE и отсечката CA.

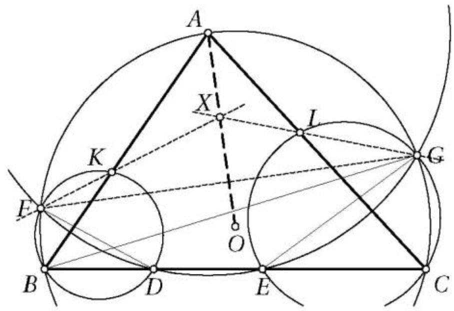
Да претпоставиме дека правите FK и GL се различни и дека се сечат во точката X. Докажи дека точката X припаѓа на правата AO.

Решение. Правите AF и AQ се симетрични во однос на AO. Доволно е да докажеме дека правите FK и GL се симетрични во однос на AO, т.е. дека

$$\measuredangle AFK = \measuredangle AGL.$$

Последното равенство следува од

$$\begin{aligned}\measuredangle AFK &= \measuredangle GFD + \measuredangle AFG - \measuredangle DFK\\ &= \measuredangle GEC + \measuredangle ABG - \measuredangle DBK\\ &= \measuredangle GEC - \measuredangle GBC\\ &= \measuredangle GLC - \measuredangle GAC\\ &= \measuredangle AGL.\end{aligned}$$



5. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(x+f(x+y))+f(xy)=x+f(x+y)+yf(x), \qquad (*)$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Во (*) ставаме $y=1$ и добиваме $f(x+f(x+1))=x+f(x+1)$, за секој $x\in\mathbb{R}$, што значи дека $g_x=x+f(x+1)$ е фиксна точка за функцијата f. Разликуваме два случаја.

1) $f(0)\neq 0$. Ако во (*) ставиме $x=0$ добиваме $f(f(y))=f(y)+(y-1)f(0)$. Ако y е фиксна точка, оттука следува дека $y=1$. Значи, $x+f(x+1)=1$, т.е. $f(x)=2-x$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

2) $f(0)=0$. Тогаш $g_{-1}=-1$ е фиксна точка, т.е. $f(-1)=-1$. Во (*) ставаме $(x,y)=(1,-1)$ и добиваме $f(1)=1$. Со замена $(x+1,0)$ во (*) добиваме $f(g_x+1)=g_x+1$. Значи, за $x=1$ во (*) имаме:

$$f(1+f(y+1))+f(y)=1+f(y+1)+y. \qquad (1)$$

Оттука заклучуваме дека ако y и $y+1$ се фиксни точки на функцијата f, тогаш и $y+2$ е фиксна точка на функцијата f. Меѓу другото, g_x+2 е фиксна точка, а со самото тоа и $g_{x-2}+2=x+f(x-1)$. Сега во (*) ставаме $y=-1$ и добиваме $f(-x)=-f(x)$. Ако во (*) замениме $(-1,-y)$ добиваме $f(-1+f(-y-1))+f(y)=f(-y-1)+y-1$, што се сведува на

$-f(1+f(y+1))+f(y)=-f(y+1)+y-1$.

Конечно, од последното равенство и од (1) добиваме $f(y)=y$.

Од досега изнесеното следува дека единствени решенија на (*) се $f(x)=f$ и $f(x)=2-x$.

6. Низата цели броеви $a_1, a_2, \ldots$ ги задоволува условите

1) $1 \le a_j \le 2015$ за секој $j \ge 1$,

2) $k+a_k \ne l+a_l$ за секои $1 \le k < l$.

Докажи дека постојата природни броеви b и N такви што важи

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n}(a_j-b)\right| \le 1007^2$$

за секои природни броеви m и n такви што $n > m \ge N$.

Решение. Дефинираме $c_n = n + a_n$, за $n \in \mathbb{N}$. Нека претпоставиме дека сите членови на низата $\{c_n\}$ се различни и $n+1 \le c_n \le n+2015$.

Да го разгледаме множеството $M = \mathbb{N} \setminus \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. За секој $n \in \mathbb{N}$, множеството $\{1,2,\ldots,n+2015\}$ ги содржи членовите на низата $c_1, c_2, \ldots, c_n$, па во овој случај има најмногу 2015 елементи на множеството M. Според тоа, $|M| \le 2015$ и како $1 \notin M$ важи $|M| \ge 1$. Ќе докажеме дека броевите $b = |M|$ и $N = \max M$ ги задоволуват условите на задачата.

Нека $k \ge N$. Од претходните разгледувања следува дека множеството $I_k = M \cup \{c_1,\ldots,c_k\}$ е подмножество од множеството $\{1,2,\ldots,k+2015\}$ и ги содржи броевите $1,2,\ldots,k+1$. Тоа значи $I_k = \{1,2,\ldots,k+1\} \cup \{k+1+i \mid i \in R_k\}$, за некое $(b-1)-$елементно подмножество од $R_k \subset \{1,2,\ldots,2014\}$. Со $S(X)$ да го означиме збирот на елементите на множеството X. Од една страна важи $S(I_k) = S(M) + \sum_{i=1}^{k}(i+a_i)$, а од друга $S(I_k) = \sum_{i=1}^{k} i + b(k+1) + S(R_k)$, па со одземање на последните равенства добиваме

$$\sum_{i=1}^{k}(a_i-b) = S(R_k) + b - S(M),$$

па затоа

$$\sum_{i=m+1}^{n}(a_i-b) = S(R_n) - S(R_m), \text{ за } n > m \ge N.$$

Притоа за секој $k \ge N$ важи

$$1+2+\ldots+(b-1) \le S(R_k) \le 2014+2013+\ldots+(2016-b),$$

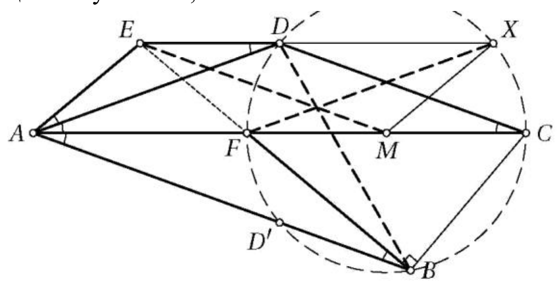
па затоа

$$|S(R_n)-S(R_m)| \le (b-1)(2-15-b) \le \tfrac{1}{4}((b-1)+(2015-b))^2 = 1007^2.$$

LVII олимпијада

1. Нека BCF е правоаголен триаголник со прав агол во темето B. Нека A е точка на правата CF таква што $\overline{FA}=\overline{FB}$, при што точката F е меѓу точките A и C. Точката D е таква што $\overline{DA}=\overline{DC}$ и правата AC го полови $\measuredangle DAB$, а точката E е таква што $\overline{EA}=\overline{ED}$ и правата AD го полови $\measuredangle EAC$. Нека M е средина на отсечката CF, а X точка таква што четириаголникот $AMXE$ е паралелограм ($AM \parallel EX$ и $AE \parallel MX$). Докажи дека правите BD, FX и ME се сечат во една точка.

Решение. *Прв начин*. Да означиме $\measuredangle BAC=\measuredangle CAD=\measuredangle DAE=x$. Бидејќи $\overline{DA}=\overline{DC}$ и $\measuredangle ADC=180^\circ-2x=360^\circ-2\measuredangle ABC$, точката D е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, па затоа $\overline{DB}=\overline{DA}$.



Точката M е центар на опишаната кружница γ околу $\triangle BCF$. Ако кружницата γ по вторпат ја сече правата AB во точката D', тогаш

$$\measuredangle D'AC=\measuredangle D'BF=\measuredangle DAC=x,$$

па затоа точките D и D' се симетрични во однос на правата AC. Според тоа, $D\in\gamma$. Од $\measuredangle EDA=\measuredangle DAC$ следува $ED \parallel AC$. Нека правата ED по втор пат ја сече кружницата γ во точката X'. Тогаш $\measuredangle X'FC-\measuredangle DFC=\measuredangle DAC$, па затоа четириаголникот $AFX'D$ е паралелограм и оттука $\overline{AF}=\overline{DX'}$. Но, истотака $\overline{FM}=\overline{MX}=\overline{AE}=\overline{ED}$, па следува дека четириаголниците $DEFM$ и $AMX'E$ се паралелограми, што значи дека $X=X'\in\gamma$.

Сега од $\measuredangle AFE=\measuredangle AMD=2x=\measuredangle BFC$ следува дека точките B, E и F се колинеарни. Бидејќи $\overline{BD}=\overline{AD}=\overline{FX}$, четириаголникот $BXDF$ е рамнокрак трапез и неговите дијагонали BD и FX се сечат на оската на симетрија, а тоа е правата ME.

Втор начин. Како и во првиот начин на решавање, D е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Следува, $\measuredangle ABD=90^\circ-\measuredangle ACB=2x=180^\circ-\measuredangle AED$, што значи дека точките A, B, D, E лежат на иста кружница ω. Тогаш важи $\measuredangle ABE=\measuredangle ADE=\measuredangle ABF$, што значи дека точките B, F, E се колинеарни. Притоа важи $\measuredangle AFE=2x$, па затоа $\overline{EA}=\overline{EF}$, од каде што следува дека четириаголникот $EFMX$ е рамнокрак трапез. Според тоа, точките E, F, M, X припаѓаат на некоја кружница Ω.

Понатаму, бидејќи ротационата хомотетија со центар A го пресликува $\triangle ADC$ во $\triangle AFD$, важи $\triangle ADF \sim \triangle ACB$, па затоа $\measuredangle AFD = \measuredangle ABC = 90^\circ + x$, од каде следува $\measuredangle FDC = 90^\circ$, т.е. D припаѓа на опишаната кружница γ на $\triangle BFC$ со центар M. Сега, $\measuredangle DBM = 90^\circ - \measuredangle DCB = x = \measuredangle DAM$, па затоа $M \in \omega$. Исто така, од $\measuredangle MXD = \measuredangle AMD = 2x$ следува $X \in \gamma$.

Сега BD, FX и ME се радикалните оски на трите пара кружници формирани од γ, Ω и ω, од каде што следува тврдењето на задачата.

2. Определи ги сите природне броеви *n* за кои е можно во секое поле на $n \times n$ табела да се запише една од буквите *I*, *M* и *O* така што се исполнети следниве услови:
- во секој ред и секоја колона, една третина од запишаните букви се *I*, третина се *M* и третина се *O*;
- на секоја дијагонала на која бројот на запишаните букви е делив со три, една третина ја сочинуваат буквите *I*, третина буквите *M* и третина буквите *O*.

Напомена. Редовите и колоните на $n \times n$ табелата се означни со броевите од 1 до *n* на вообичаениот начин. На секое поле соодветствува пар природни броеви (i, j), $1 \le i, j \le n$ За $n > 1$, табелата има $4n - 2$ дијагонали од два вида. Дијагонала од првиот вид се состои од сите полиња (i, j) за кои збирот $i + j$ е константен, додека дијагонала од вториот вид се састои од сите полиња (i, j) за кои разликата $i - j$ е константна.

Решение. Пример за $n = 9$ е прикажан на цртежот десно. Со сложување на така пополнети квадрати во квадрат со страна $9k$ може да се добие пример за било кој *n* делив со 9.

I	*I*	*I*	*M*	*M*	*M*	*O*	*O*	*O*
M	*M*	*M*	*O*	*O*	*O*	*I*	*I*	*I*
O	*O*	*O*	*I*	*I*	*I*	*M*	*M*	*M*
I	*I*	*I*	*M*	*M*	*M*	*O*	*O*	*O*
M	*M*	*M*	*O*	*O*	*O*	*I*	*I*	*I*
O	*O*	*O*	*I*	*I*	*I*	*M*	*M*	*M*
I	*I*	*I*	*M*	*M*	*M*	*O*	*O*	*O*
M	*M*	*M*	*O*	*O*	*O*	*I*	*I*	*I*
O	*O*	*O*	*I*	*I*	*I*	*M*	*M*	*M*

Да претпоставиме дека табела $n \times n$ е пополнета на саканиот начин. Јасно, $3 \mid n$, т.е. $n = 3k$ за $k \in \mathbb{N}$. *Среќни полиња* ги нарекуваме сите полиња (i, j) за кои $i \equiv j \equiv 2 (mod\ 3)$, а *среќни линии* сите редови, колони и дијагонали кои садржат барем едно среќно поле. Секоја среќна дијагонала има број полиња делив со 3. На два начина ќе го преброиме бројот N на парови (ℓ, c), каде ℓ е среќна линија, а c е поле на неа кое ја содржи буквата *M*.

Секој од $2k$ среќни редови и колони содржи по *k* букви *M*. Исто така, на среќните дијагонали од секој тип вкупно има по

$$\tfrac{1}{3}(3+6+....+n+...+6+3)=k^2$$

букви M. Според тоа, $N=4k^2$. Од друга страна, секоја од $3k^2$ букви M лежи на точно една или четири срећни линии, па затоа $N\equiv 3k^2(\mathrm{mod}\,3)$. Според тоа, $3\,|\,4k^2$, па затоа $3\,|\,k$, т.е. $9\,|\,n$.

Втор начин. Да претпоставиме дека за некој $n=3k$ бараното пополнување е можно. За $i,j\in\{1,2,3\}$ со a_{ij} да го означиме вкупниот број букви M во полињата (x,y) со $x\equiv i$ и $y\equiv j(\mathrm{mod}\ 3)$. Според условот на задачата важи:

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=a_{21}+a_{22}+a_{23}=a_{31}+a_{22}+a_{13}=k^2, \tag{1}$$

$$a_{11}+a_{21}+a_{31}=a_{13}+a_{23}+a_{33}=k^2. \tag{2}$$

Со собирање на равенствата (1) и одземање на равенствата (2) добиваме $3a_{22}=k^2$, па затоа $3\,|\,k$, т.е. $9\,|\,n$. Пример за $9\,|\,n$ се прави како во првиот начин на решавање.

3. Во рамнината е даден конвексен многуаголник $\mathrm{P}=A_1A_2...A_k$. Темињата $A_1,A_2,...,A_k$ имаат целобројни кординати и лежат на иста кружница. Нека S е плоштината на многуаголникот P. Непарниот природен број n е таков што квадратите на должините на сите страни на многуаголникот P се природни броеви деливи со n. Докажи дека $2S$ е природен број делив со n.

Решение. Според Пиковата теорема бројот $2S$ е природен. Јасно, доволно е да го разгледаме случајот $n=p^r$, каде $p>2$ е природен број и $r\geq 1$.

Тврдењето за $k=3$ е едноставно. Навистина, ако се $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ страните на триаголникот P и $n\,|\,a,b,c$, според Хероновата формула имаме

$$(4S)^2=2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2, \tag{1}$$

па како десната страна на (1) е делива со n^2 заклучуваме дека $n\,|\,4S$. Но, n е непарен број, па затоа $n\,|\,2S$.

За $k\geq 4$ тврдењето ќе го докажеме со индукција. Ако постои дијагонала чиј квадрат на должината е делив со n, тогаш таа го дели многуаголникот P на два помали многуаголници на кои може да се примени индуктивната претпоставка. Затоа да претпоставиме дека таква дијагонала не постои. Со $v_p(x)$ го означуваме експонентот на простиот број p во каноничното разложување на бројот x.

Лема. За $i=2,3,...,k-1$ важи $v_p(\overline{A_1A_{i+1}}^2)\leq v_p(\overline{A_1A_i}^2)$.

Доказ. Случајот $i=2$ е тривијален, бидејќи по претпоставка е $p^r\,|\,\overline{A_1A_2}^2$ и

$p^r \nmid \overline{A_1A_3}^2$.

Нека $i \geq 3$ и

$\overline{A_1A_{i-1}}^2 = a,\ \overline{A_1A_i}^2 = b,\ \overline{A_1A_{i+1}}^2 = c,\ \overline{A_iA_{i+1}}^2 = x,\ \overline{A_{i-1}A_{i+1}}^2 = y$ и $\overline{A_{i-1}A_i}^2 = z$.

Од теоремата на Птоломеј следува $\sqrt{ax} + \sqrt{cz} = \sqrt{by}$, па со квадрирање добиваме

$$ax + cz - 2\sqrt{acxz} = by .$$

Оттука следува дека $2\sqrt{acxz}$ е природен број. Според индуктивната претпоставка $v_p(x), v_p(z) \geq r > v_p(y)$ и $s = v_p(b) < v_p(a)$. Да претпоставиме дека $v_p(c) \geq s$. Тогаш броевите ax, cz и $2\sqrt{acxz}$ се деливи со p^{r+s}. Но, $p^{r+s} \nmid by$, што не е можно. ■

Од лемата непосредно следува контрадикцијата

$$r > v_p(\overline{A_1A_3}^2) > v_p(\overline{A_1A_4}^2) > ... > v_p(\overline{A_1A_k}^2) = r .$$

4. Множеството природни броеви го нарекуваме *убаво* ако содржи најмалку два елементи и секој негов елемент има заеднички прост делител со барем еден од преостанатите елементи. Нека $P(n) = n^2 + n + 1$. Определи ја најмалата вредност на природниот број b за која постои ненегативен цел број a таков што множеството

$$\{P(a+1), P(a+2), ..., P(a+b)\}$$

е убаво.

Решение. На почетокот да забележиме дека $P(n)$ е непарен број за секој $n \in \mathbb{N}$. Понатаму, ако простиот број $p > k$ е делител на $P(n)$ и $P(n+k)$, тогаш $p \mid P(n+k) - P(n) = k(2n+k+1)$, па затоа $2n \equiv -k-1 (\bmod p)$ и оттука $4P(n) \equiv (k+1)^2 - 2(k+1) + 4 = k^2 + 3 (\bmod p)$, па затоа $p \mid k^2 + 3$. Според тоа:

1) $\text{NZD}(P(n), P(n+1) = 1$,

2) $\text{NZD}(P(n), P(n+2)) \in \{1, 7\}$, и притоа $\text{NZD}(P(n), P(n+2)) = 7$ ако и само ако $n \equiv 2 (\bmod 7)$,

3) $\text{NZD}(P(n), P(n+3)) \in \{1, 3\}$, и притоа $\text{NZD}(P(n), P(n+3)) = 3$ ако и само ако $n \equiv 0 (\bmod 3)$,

4) $\text{NZD}(P(n), P(n+4)) \in \{1, 19\}$, и притоа $\text{NZD}(P(n), P(n+4)) = 19$ ако и само ако $n \equiv 7 (\bmod 19)$.

Пример на убаво множество за $b = 6$ може да се добие ако земеме број a таков што

$$a \equiv 2 (\bmod 3),\ a \equiv 6 (\bmod 7) \text{ и } a \equiv 5 (\bmod 19),$$

што се сведува на $a \equiv 62 \pmod{399}$, бидејќи тогаш

$$3 \mid P(a+1), P(a+4),\ 7 \mid P(a+3), P(a+5) \text{ и } 19 \mid P(a+2), P(a+6).$$

Нека претпоставиме дека постои убаво множество за $b \le 5$. Бидејќи $P(a+2)$ е заемно прост со $P(a+1)$ и $P(a+3)$, мора да важи $b \ge 4$. Понатаму, $P(a+3)$ е заемно прост со $P(a+2)$ и $P(a+4)$, па мора да важи

$$\mathrm{NZD}(P(a+3), P(a+1)) > 1$$

(случајот $\mathrm{NZD}(P(a+3), P(a+5)) > 1$ е аналоген). Значи, $a \equiv 1 \pmod 7$, но тогаш $\mathrm{NZD}(P(a+2), P(a+4)) = 1$. Затоа $P(a+2)$ и $P(a+4)$ може да имаат заеднички прост делител само со $P(a+5)$ и $P(a+1)$, соодветно. Но, тогаш $3 \mid a+1, a+2$, што не е можно.

5. На таблата е запишана равенката

$$(x-1)(x-2)...(x-2016) = (x-1)(x-2)...(x-2016)$$

со по 2016 линеарни множители на секоја страна. Која е најмалата вредност на k за која може да се избришат точно k множители од овие 4032 линеарни множители така што на секоја страна ќе остане најмалку еден множител и притоа добиената равенка ќе нема реални решенија?

Решение. Бидејќи ниту еден множител не смее да се појави од двете страни на равенката, мораме да избришеме најмалку 2016 множители.

За да докажеме дека 2016 множители се доволни, од левата страна ќе ги избришеме множителите $x-k$ за $k \equiv 2,3 \pmod 4$, а од десната страна ќе ги избришеме множителите $x-l$ за $l \equiv 0,1 \pmod 4$. Ја добиваме равенката $A(x) = B(x)$ каде

$$A(x) = \prod_{i=0}^{503} (x-4i-1)(x-4i-4) \text{ и } B(x) = \prod_{i=0}^{503} (x-4i-2)(x-4i-3).$$

Тврдиме дека оваа равенка нема реални решенија.

1) Ако $x = 1, 2, ..., 2016$, тогаш едната страна на равенката е еднаква на нула, а другата е различна од нула.
2) Ако $2k-1 < x < 2k$ за некој $k = 1, 2, ..., 1008$, тогаш $A(x) < 0 < B(x)$.
3) Нека $x < 1$ или $x > 2016$ или $4k < x < 4k+1$ за некој $k = 1, 2, ..., 503$. Тогаш важи

$$0 < (x-4i-1)(x-4i-4) < (x-4i-2)(x-4i-3) \text{ за } i = 0, 1, ..., 503,$$

па со множење на овие неравенства добиваме $0 < A(x) < B(x)$.

4) Нека $4k+2 < x < 4k+3$ за некој $k = 0, 1, 2, ..., 503$. Тогаш важи

$$(x-1)(x-2016) < (x-2)(x-2015) < 0 \text{ и}$$

$$(x-4i)(x-4i-1) > (x-4i+1)(x-4i-2) > 0 \text{ за } i = 1, 2, ..., 503,$$

а со множење на овие неравенства добиваме $A(x) < B(x) < 0$.

Со ова сите случаи се испитани. Значи, одговорот на задачата е 2016.

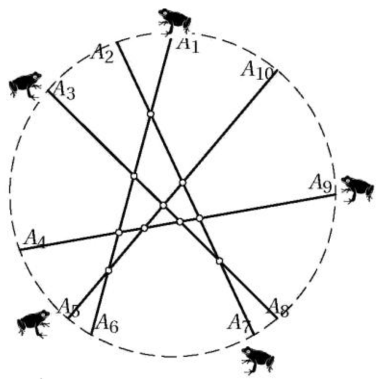
6. Во рамнита се дадени $n \geq 2$ отсечки така што секои две отсечки се сечат во внатрешна точка и никои три не се сечат во една точка. Ѓорѓи треба да избере по еден крај на секоја отсечка и на него да постави жаба свртена кон другиот крај на отсечката. Потоа тој ќе плесне со рацете $n-1$ пати. Секој пат кога ќе плесне со рацете, секоја жаба одма скокнува напред во следната пресечна точка на својата отсечка. Жабите никогаш не ја менуваат насоката во која скокаат. Ѓорѓи сака да ги постави жабите така што ниту во еден момент две жаби нема да се најдат во иста пресечна точка.

а) Ако n е непарен, докажи дека Ѓоѓжи секогаш може да ја постигне целта.

b) Ако n е парно, докажи дека Ѓорѓи никогаш не може да ја постигне целта.

Решение. Разгледуваме голема кружница која ги содржи сите отсечки и да ги продолжиме отсечките на двете страни до пресекот со кружницата. Пресечните точки да ги означиме со $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ во насока на движењето на стрелките на часовникот. Дадените отсечки лежат на правите $A_i A_{n+i}$, $1 \leq i \leq n$.

а) Ќе докажеме дека Ѓорѓи ја постигнува целта ако жабите ги постави во точките $A_1, A_3, A_5, ..., A_{2n-1}$. Ги разгледуваме жабите во точките A_i и A_j, каде i и j се непарни броеви и $i < j < n+i$ (индексите се по модул $2n$). Нека X е пресечната точка на отсечките $A_i A_{n+i}$ и $A_j A_{n+j}$. На лакот $A_i A_{i+1} A_j$ има непарен број означени точки, а секоја отсечка со еден крај во овие точки сече точно една од отсечките $A_i X$ и $A_j X$. Сите останати отсечки ги сечат или двете отсечки $A_i X$ и $A_j X$, или ниту една. Следува дека на отсечките $A_i X$ и $A_j X$ вкупно има непарен број пресечни точки, па затоа овие две жаби нема да се судрат.



b) Ако n е парен, некои две жаби на Ѓорѓи ќе бидат во соседни точки на кружницата, да кажеме во A_i и A_{i+1}. Нека отсечките со краеви во овие две точки се сечат во точката X. Бидејќи секоја отсечка која сече една од отсечките $A_i X$ и $A_{i+1} X$, мора да ја сече и другата, на отсечките $A_i X$ и $A_{i+1} X$ има еднаков број пресечни точки. Затоа овие две жаби ќе се судрат во точката X.

LVIII олимпијада

1. За даден природен број $a_0 > 1$ дефинираме низа $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ таква што за секој $n \ge 0$ важи

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{ако } \sqrt{a_n} \text{ е цел број,} \\ a_n + 3, & \text{во спротивно.} \end{cases}$$

Определи ги сите вредности на a_0 за кои постои број A таков што $a_n = A$ за бесконечно многу вредности на n.

Решение. *Одговор*: сите природни броеви деливи со 3.

1) Ако за некој m важи $a_m \equiv 2(\bmod 3)$, тогаш a_m не е точен квадрат и затоа $a_{m+1} = a_m + 3$. Со индукција следува дека $a_{m+i} = a_m + 3i$, за секој $i \ge 0$, што значи дека низата строго монотоно расте, па затоа не е периодична.

2) Ако $a_0 \equiv 0(\bmod 3)$, тогаш сите членови на низата се деливи со 3. Нека најмалиот член на низата е $a_m = 3k$. Ако $k \ge 2$, тогаш

$$(3k-3)^2 - 3k = 9k^2 - 21k + 9 > 0,$$

па затоа првиот следен квадрат не е поголем од $(3k-3)^2$. Тоа значи дека $a_n \le 3k-3$ за некој $n \in \mathbb{N}$, што е противречност. Според тоа, најмалиот член на низата е 3, па затоа во низата понатаму периодично се повторуваат членовите 3, 6, 9, ...

3) Нека $a_0 \equiv 1(\bmod 3)$ и нека a_m е најмалиот член на низата. Јасно, $3 \nmid a_m$. Да претпоставиме дека $a_m \equiv 1(\bmod 3)$, т.е. $a_m = 3k+1$. За $k > 0$ важи

$$(3k-1)^2 - (3k+1) = 9k^2 - 9k \ge 0,$$

па затоа првиот следен квадрат не е поголем од $(3k-1)^2$. Тоа значи дека $a_n \le 3k-1$ за некој $n \in \mathbb{N}$, што е противречност. Значи, мора да важи $a_m \equiv 2(\bmod 3)$, па затоа од 1) следува дека низата не е периодична.

2. Определи ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што за секои реални броеви x и y важи

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy). \qquad (*)$$

Решение. *Одговор*: $f(x) = k(x-1)$, за $k \in \{-1, 0, 1\}$.

Прв начин. Ако во (*) ставиме $x = y = 0$ добиваме $f(f(0)^2) = 0$. Од друга страна, ако $f(a) = 0$ за некој $a \ne 1$, тогаш за $x = a$ и $y = \frac{a}{a-1}$ важи $xy = x + y$ и со замена во (*) добиваме

$$f(0) = f(f(a)f(\tfrac{a}{a-1})) = 0.$$

Сега, ако во (*) ставиме $y=0$ добиваме $f(x)=0$ за секој $x\in\mathbb{R}$ и тоа е едно решение на (*).

Понатаму, ќе сметаме дека $f\not\equiv 0$, па од претходните разгледувања ќе следува дека

$$f(a)=0 \text{ ако и само ако } a=1.$$

Од $f(f(0)^2)=0$ следува $f(0)^2=1$. Да забележиме дека ако функцијата f е решение на (*), тогаш и функцијата $-f$ е решение на (*). Затоа можеме да сметаме дека $f(0)=-1$. Во (*) ставаме $y=1$ и добиваме $f(x+1)=f(x)+1$. Сега, со индукција се докажува дека

$$f(x+n)=f(x)+n, \text{ за секој } n\in\mathbb{Z}.$$

Ќе докажеме дека фукцијата f е инјекција. Нека $f(a)=f(b)$. Тогаш

$$f(a+n+1)=f(b+n)+1, \text{ за секој } n\in\mathbb{Z}. \tag{1}$$

Земаме $n<-b$. Тогаш $(a+n+1)^2-4(b+n)>0$, па затоа постојат реални броеви x и y такви што

$$x+y=a+n+1 \text{ и } xy=b+n.$$

Понатаму, од (*) и (1) следува

$$f(f(x)f(y))=f(b+n)-f(a+n+1)=-1,$$

а оттука $f(f(x)f(y)+1)=0$. Сега, $f(x)f(y)+1=1$, односно $f(x)=0$ или $f(y)=0$, што значи $x=1$ или $y=1$. Но, во тој случај важи $xy=x+y-1$, односно $a=b$.

Конечно, ако во (*) ставиме $x+y=n\in\mathbb{Z}$ добиваме

$$f(f(x)f(n-x))=f(nx-x^2)-f(n)=f(nx-x^2-n+1)=f((x-1)(n-x-1)),$$

па од инјективноста на функцијата следува

$$f(x)f(n-x)=(x-1)(n-x-1). \tag{2}$$

Сега, ако во (2) ставиме $n=0$ и $n=1$ добиваме

$$f(x)f(-x)=-x^2+1 \text{ и } f(x)f(-x)-f(x)=-x^2+1-(x-1),$$

од каде следува $f(x)=x-1$. Оваа функција е решение на (*).

Втор начин. Ако $f\not\equiv 0$, како во првиот начин на решавање се покажува дека $f(1)=0$, $f(x)\neq 0$ за $x\neq 1$, па без ограничување наопштоста $f(0)=-1$ и $f(x+1)=f(x)+1$. Исто така од $f(f(x)f(\frac{x}{x-1}))=0$ следува $\frac{1}{f(x)}=f(\frac{x}{x-1})$.

Ќе докажеме дека множеството $A=f(\mathbb{R})$ е затворено во однос на собирањето, одземањето и множењето. Знаеме дека $a\in A\Rightarrow\frac{1}{a}\in A$. Нека $a,b\in A$, $a=f(u), b=f(v)$. За некој $n\in\mathbb{Z}$ системот $x+y=n+u, xy=n+v$ има реални решенија, и тогаш

$$b-a=f(v)-f(u)=f(v+n)-f(u+n)=f(f(x)f(y))\in A.$$

Понатаму, $0-a=-a\in A \Rightarrow a+b=b-(-a)\in A$. Сега $\frac{4}{x^2-1}=\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}\in A$, па затоа $\frac{x^2-1}{4}\in A$ за секој $x\in A$ и оттука $ab=\frac{(a+b)^2-1}{4}-\frac{(a-b)^2-1}{4}\in A$.

Ако во (*) ставиме $y=0$ добиваме $f(f(x))=f(x)-1$, па затоа $f(t)=t-1$ за секој $t\in A$. Но, $f(x)f(y)\in A$, па затоа $f(xy)-f(x+y)=f(x)f(y)-1$. Ако земниме $g(t)=f(t)-1$ добиваме

$$g(xy)-g(x+y)=g(x)g(y)-g(x)-g(y). \tag{3}$$

Оттука за $y=-1$ (бидејќи $g(-1)=-1$) добиваме $g(-x)=-g(x)$. Понатаму, ако во (3) x и y ги замениме со $-x$ и $-y$ добиваме

$$g(xy)+g(x+y)=g(x)g(y)+g(x)+g(y),$$

Што заедно со (3) дава

$$g(x+y)=g(x)+g(y) \text{ и } g(xy)=g(x)g(y).$$

Оттука следува $g(x)=x$ и $f(x)=x-1$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

3. Ловец и невидлив зајак играат игра во рамнината. Почетните точки во рамнината на зајакот и ловецот, соодветно означени со A_0 и B_0, се исти. По $n-1$ кругови играње, зајакот е во точката A_{n-1}, а ловецот е во точката B_{n-1}. Во $n-$тиот круг редоследно се случуваат следниве настани:

i) Зајакот незабележливо се поместува во точка A_n која е на растојание 1 од точката A_{n-1},

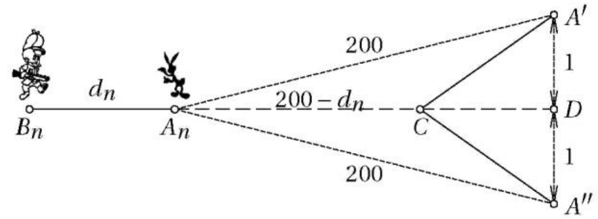
ii) Ловецот на радар отчитува точка P_n. Единствено што гарантира радарот е дека растојанието меѓу точките P_n и A_n е најмногу 1.

iii) Ловецот се поместува во точка B_n на растојание точно 1 од точката B_{n-1}, што зајакот го гледа.

Дали ловецот секогаш, без разлика како ќе се движи зајакот и какви се извештаите на радарот, може да се движи така што ќе обезбеди по 10^9 кругови растојанието меѓу него и зајакот да биде најмногу 100?

Решение. *Одговор*: НЕ, сигналите на радарот може да бидат такви што ловецот не може да ја има саканата стратегија.

Со $d_n=\overline{A_nB_n}$ да го означиме растојанието меѓу зајакот и ловецот по n чекори. Ако $d_n\le 100$, ќе докажеме дека со помош на ра-



дарот и малку среќа зајакот во 200 чекори може да го зголеми квадратот на растојанието од ловецот за $\frac{1}{2}$.

Да ги разгледаме точката C на полуправата B_nA_n таква што $\overline{B_nC}=200$ и точките A' и A'' на растојание 1 од правата B_nA_n и растојание 200 од точката A_n (каде $\measuredangle B_nA_nA'=\measuredangle B_nA_nA''>90^\circ$). Зајакот може да ја избере една од точките A' и A'' и да направи 200 скокови кон неа. Меѓутоа, бидејќи за тоа време неговото растојание од правата B_nA_n нема да е поголемо од 1, можно е сите сигнали $P_n,P_{n+1},...,P_{n+200}$ да се на правата B_nA_n. Така, ловецот по 200 чекори стигнува во точката $B=B_{n+200}$ за која важи $\overline{B_nB}\le 200$, при што нема начин да знае дали зајакот стигнал до точката A' или A''. Бидејќи

$$\max\{\overline{BA'},\overline{BA''}\}\ge\overline{CA'}$$

ниту една стратегија не му гарантира на ловецот растојание помало од $\overline{CA'}$. Со други зборови оптималната стратегија на ловецот е да оди право кон точката C. Меѓутоа, ако D е подножјето на нормалата од A' на правата A_nB_n, тогаш лесно се добива

$$\overline{CA'}^2=\overline{CD}^2+1=(d_n-x)^2+1=x^2+1+d_n^2-2d_nx,$$

каде $x=200-\sqrt{200^2-1}$. Од $x>\frac{1}{400}$ и $x^2+1=400x$ следува

$$\overline{CA'}^2=d_n^2+(400-2d_n)x>d_n^2+\tfrac{1}{2}.$$

Според тоа, со малку среќа зајакот постигнува да важи $d_{n+200}^2>d_n^2+\frac{1}{2}$. На овој начин по $400\cdot 100^2=4\cdot 10^6$ чекори зајакот може да му побегне на ловецот на растојание поголемо од 100, без разлика каква стратегија ќе користи ловецот.

4. Дадени се различни точки *R* и *S* на кружница Ω така што *RS* не е нејзин дијаметар. Нека ℓ е тангента на кружницу Ω во точката *R*. Точката *T* е таква што *S* е средина на отсечката *RT*. Точката *J* на пократкиот лак *RS* на кружницата Ω е таква што опишаната кружница Γ на триаголникот *JST* ја сече правата ℓ во две различни точки. Нека *A* е онаа од тие две точки која е поблиска до точката *R*. Правата *AJ* повторно ја сече кружницата Ω во точката *K*. Докажи дека правата *KT* ја допира кружницата Γ.

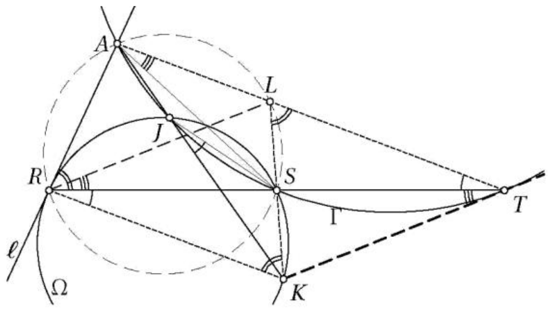
Решение. *Прв начин*. Од $\measuredangle KRS=\measuredangle KJS=\measuredangle ATS$ следува $AT\parallel KR$. Нека *L* е точка симетрична на точката *K* во однос на *S*. Четириаголникот *RKTL* е паралелограм, па затоа *L* лежи на правата AT. Сега од

$$\measuredangle ARS=\measuredangle RKS=\measuredangle TLS$$

следува дека четириаголникот $ARSL$ е тетивен, а оттука следува

$$\measuredangle KTS = \measuredangle LRS = \measuredangle LAS = \measuredangle TAS,$$

што значи дека правата KT ја допира кружницата Γ.



Втор начин. Од

$$\measuredangle KRS = \measuredangle KJS = \measuredangle ATS$$

и $\measuredangle ARS = \measuredangle RKS$ следува дека триаголниците ART и SKR се слични. Оттука $\frac{\overline{RT}}{\overline{KR}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{SR}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{ST}}$, што заедно со равенството $\measuredangle ATS = \measuredangle KRT$ дава $\triangle ATS \sim \triangle TRK$. Според тоа, $\measuredangle KTR = \measuredangle TAS$, па правата KT ја допира кружницата Γ.

5. Даден е природен број $N \geq 2$. Во редица се наоѓаат $N(N+1)$ фудбалери со меѓусебно различни висини. Тренерот Ванчо сака да отстрани $N(N-1)$ играчи, така што ќе остане редица со $2N$ фудбалери во која се задоволени следниве N услови:
1) меѓу двајцата највисоки играчи не стои никој,
2) меѓу третиот и четвртиот играч по висина не стои никој,
....
N) меѓу двајцата најниски играчи не стои никој.
Докажи дека ова секогаш може да се постигне.
Решение. Да ја поделиме редицата на N групи со по $N+1$ последователни играчи и со A_i и B_i соодветно да ги означиме највисокиот и вториот највисок играч во $i-$тата група. Нека B_k е највисокиот од сите играчи $B_1, B_2, ..., B_n$. Тренерот Ванчо ги отстранува сите играчи A_i за $i \neq k$ и сите играчи од $k-$тата група освен B_k. На играчите A_k и B_k им дава дресови и веќе не се осврнува на нив: тие се повисоки од сите играчи во редицата и меѓу нив не стои ниту еден играч. Остануваат уште $N-1$ група со по N играчи. Ако претходната постапка ја повтори N пати, тогаш Ванчо ја постигнува целта.

6. Подредениот пар цели броеви (x, y) го нарекуваме *примитивна точка* ако најголемиот заеднички делител на броевите x и y е еднаков на 1. Нека S е конечно множество примитивни точки. Докажи дека постојат природен број n и цели броеви $a_0, a_1, ..., a_n$ такви што за секои точки (x, y) од S важи:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + ... + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = 1.$$

Решение. *Прв начин*. Нека

$$S=\{(x_1,y_1),...,(x_k,y_k)\}.$$

Доволно е да се докаже дека постои хомоген полином $P(x,y)$ таков што $P(x_i,y_i)=\pm1$ за $i=1,2,...,k$. Навистина, тогаш $P(x_i,y_i)^2=1$ за секој i. Понатаму, бидејќи за секој хомоген полином P важи $P(-x,-y)=\pm P(x,y)$ можеме да сметаме дека $(x_i,y_i)\neq(-x_j,-y_j)$ за секои i,j, т.е. дека никои две точки на множеството S не лежат на иста права која минува низ координатниот почеток.

Ги разгледуваме хомогените полиноми

$$G_i(x,y)=\prod_{j\neq i}(y_jx-x_jy),\text{ за } i=1,2,...,k.$$

Степенот на овие полиноми е $k-1$ и притоа важи $G_i(x_j,y_j)=0$ за $j\neq i$ и $G_i(x_i,y_i)=c_i\neq0$. Нека $c=\text{NZS}(c_1,...,c_k)$. Постојат линеарни хомогени полиноми E_i такви што $E_i(x_i,y_i)=1$ за $i=1,2,...,k$. Саканиот полином P ќе го дадеме во обликот

$$P(x,y)=F_c(x,y)-\sum_{i=1}^{k}b_iE_i(x,y)^{m-k+1}G_i(x,y),$$

каде F_c е хомоген полином од некој степен $m\geq k-1$ таков што $F_c(x_i,y_i)\equiv1(\operatorname{mod}c)$ за секој i, а $b_i=\frac{F_c(x_i,y_i)-1}{c_i}\in\mathbb{Z}$ се соодветните константи. Потребно е само да се докаже дека ваков полином F_c постои.

Лема. За секој природен број c постои хомоген полином Q_c таков што за секоја примитивна точка (x,y) важи $Q_c(x,y)\equiv1(\operatorname{mod}c)$.

Доказ. Ако $c=p^a$ е степен на прост број, може да се земе

$$Q_c(x,y)=\begin{cases}(x^2+xy+y^2)^{\varphi(c)}, & p=2\\ (x^{p-1}+y^{p-1})^{\varphi(c)}, & p>2.\end{cases}$$

Нека $c=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$ е каноничното разложување на бројот c. Бидејќи броевите $\frac{c}{p_i^{a_i}},\ i=1,2,...,r$ се заемно прости, постојат цели броеви $A_1,...,A_r$ такви што $\sum_{i=1}^{r}A_i\frac{c}{p_i^{a_i}}=1$, а тогаш можеме даземеме

$$Q_c(x,y)=\sum_{i=1}^{r}A_i\frac{c}{p_i^{a_i}}Q_{p_i^{a_i}}(x,y)\equiv\sum_{i=1}^{r}A_i\frac{c}{p_i^{a_i}}=1(\operatorname{mod}c).\ \blacksquare$$

Втор начин. Нека $S=\{(x_1,y_1),...,(x_k,y_k)\}$. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по k. Случајот $k=1$ е тривијален. Нека $k\geq2$. Според индуктивната претпоставка постојат хомогени полиноми $Q(x,y)$ и $R(x,y)$ со целобројни коефициенти такви што

$$Q(x_i,y_i)=1 \text{ за } i\neq k-1 \text{ и } R(x_i,y_i)=1 \text{ за } i\neq k\,,\ (1\leq i\leq k)\,.$$

Бараниот полином $P(x,y)=\sum_j a_j x^{n-j}y^j$ го бараме во облик

$$P(x,y)=F(Q(x,y),R(x,y))\,,$$

каде $F(u,v)$ е некој хомоген полином. Ако $Q(x_{k-1},y_{k-1})=a$ и $R(x_k,y_k)=b$, тогаш важи

$$P(x_i,y_i)=\begin{cases}F(1,1), & i=1,2,...,k-2\\ F(a,1), & i=k-1\\ F(1,b), & i=k.\end{cases}$$

Значи, доволно е да докажеме дека постои полином $F\in\mathbb{Z}[x,y]$ таков што

$$F(1,1)=F(a,1)=F(1,b)=1\,.$$

Сметаме дека $|b|>1$, а во спротивно ќе земеме

$$F(x,y)=(x-y)(x-a)(x+y)^2+y^4\,.$$

Запишуваме $F(x,y)=y^m f(\frac{x}{y})$, каде $f\in\mathbb{Z}[x]$ и $m=\deg f$. Треба да важи

$$f(1)=f(a)=1 \text{ и } f(\tfrac{1}{b})=\tfrac{1}{b^m}\,,$$

па доволно е да најдеме полином $g\in\mathbb{Z}[x]$ со степен $m-2$ таков што

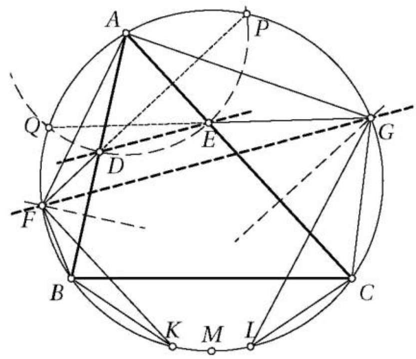
$$f(t)=(t-1)(t-a)g(t)+1, \text{ при што важи } g(\tfrac{1}{b})=\tfrac{1}{b^{m-2}}\cdot\tfrac{b^m-1}{(b-1)(ab-1)}\,.$$

Ваков полином g постои ако и само ако $(b-1)(ab-1)$ е делител на b^m-1, па така може да се земе $m=\varphi(|b-1|\cdot|ab-1|)$ и индукцијата е готова.

LIX олимпијада

1. Нека Γ е опишаната кружница на остроаголниот триаголник ABC. Точките D и E се наоѓаат на отсечките AB и AC, соодветно, така што важи $\overline{AD}=\overline{AE}$. Симетралите на отсечките BD и CE ги сечат пократките лаци AB и AC на кружницата Γ во точките F и G, соодветно. Докажи дека правите DE и FG се паралелни (или се совпаѓаат).

Решение. *Прв начин.* Да ги разгледаме точките K и L на кружницата Γ такви што $\measuredangle FBK=\measuredangle FDA$ и $\measuredangle GCL=\measuredangle GEA$. Бидејќи $\overline{FB}=\overline{FD}$ и $\measuredangle FKB=\measuredangle FDA$ важи $\triangle FBK\cong\triangle FDA$. Аналогно важи $\triangle GCL\cong\triangle GEA$. Според тоа, $\overline{FK}=\overline{FA}$ и $\overline{GL}=\overline{GA}$, а исто така и $\overline{KB}=\overline{AD}=\overline{AE}=\overline{LC}$, од каде следува $KL\,||\,BC$. Ако сега M е средина на пократкиот лак BC, тогаш важи



$$MG+AF=ML+LG+FK=KM+GA+FK=FM+GA,$$

од каде следува $AF\perp FG$. Бидејќи $AM\perp DE$, добиваме $DE\,||\,FG$.

Втор начин. Нека правите FD и GE по втор пат ја сечат кружницата Γ во точките P и Q, соодветно. Од сличностите $\triangle DAP\sim\triangle DFB$ и $\triangle EAQ\sim\triangle EGC$ следува $\overline{AP}=\overline{AD}=\overline{AE}=\overline{AQ}$, што значи дека точките P,D,E,Q се концикличні. Сега $\measuredangle QGF=\measuredangle QPF=\measuredangle QPD=\measuredangle QED$, т.е. $FG\,||\,DE$.

2. Определи ги сите природни броеви $n\geq 3$ за кои постојат реални броеви $a_1,...,a_{n+2}$ такви што $a_{n+1}=a_1,\, a_{n+2}=a_2$ и

$$a_ia_{i+1}+1=a_{i+2}$$

за секој $i\in\{1,2,...,n\}$.

Решение. *Прв начин.* Индексите ги разгледуваме по модул n. Од условот на задачата следува $a_{i+2}^2=a_ia_{i+1}a_{i+2}+a_{i+2}$, па со собирање по $i=1,2,...,n$ добиваме

$$\sum_{i=1}^n a_i^2=\sum_{i=1}^n a_ia_{i+1}a_{i+2}+\sum_{i=1}^n a_i=\sum_{i=1}^n a_i(a_{i+1}a_{i+2}+1)=\sum_{i=1}^n a_ia_{i+3}$$
$$\leq\sum_{i=1}^n \tfrac{1}{2}(a_i^2+a_{i+3}^2)=\sum_{i=1}^n a_i^2,$$

при што значк за равенство важи ако и само ако $a_i=a_{i+3}$.

Бидејќи не се сите членови на низата еднакви (во спротивно ќе важи $a_1 = a_1^2 + 1$, што не е можно), следува дека $3 \mid n$. Од друга страна, ако $3 \mid n$, низата

$$a_{3i-2} = a_{3i-1} = -1,\ a_{3i} = 2,\ \text{за}\ i = 1, 2, \dots, \tfrac{n}{3} - 1$$

ги задоволува условите на задачата.

Втор начин. Индексите ги разгледуваме по модул n. Во низата не може да постојат два последователни ненегативни членови. Навистина, ако на пример $a_1, a_2 > 0$, тогаш $a_3, a_4 \geq 1$ и понатаму $a_4 < a_5 < a_6 < \dots$ што не е можно.

Да претпоставиме дека постојат два последователни негативни членови, на пример $a_1, a_2 < 0$. Тогаш $a_3 > 1$, па затоа $a_4 < 0$ и $a_5 = a_3 a_4 + 1 < 1$. Ако $a_5 \geq 0$, тогаш $a_6 = a_4 a_5 + 1 \geq a_4 a_3 + 1 = a_5$, односно $a_6 \geq 0$, што не е можно. Значи, $a_5 < 0$. Со индукција се докажува дека $a_{3k} > 0 > a_{3k+1}, a_{3k+2}$, за секој $k \in \mathbb{N}$, па затоа $3 \mid n$.

Останува случајот кога знакот наизменично се менува: $a_{2i+1} > 0 > a_{2i+2}$, за секој i. Тогаш $a_{2k+1} = a_{2k} a_{2k-1} + 1 < 1$, па е $a_{2k+2} = a_{2k} a_{2k+1} + 1 \geq a_{2k} + 1$, за секој k, што не е можно.

3. *Антипаскалов* триаголник е таблица во облик на рамностран триаголник која се состои од броеви такви што, освен за броевите во последниот ред, важи да секој број е еднаков на апсолутната вредност на разликата на двата броја кои се непосредно под него. На пример, следната таблица е антипаскалов триаголник со четири реда кој се состои од сите природни броеви од 1 до 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Дали постои антипаскалов триаголник со 2018 реда кој се состои од сите природни броеви од 1 до $1 + 2 + \dots + 2018$?

Решение. *Одговор*: НЕ.

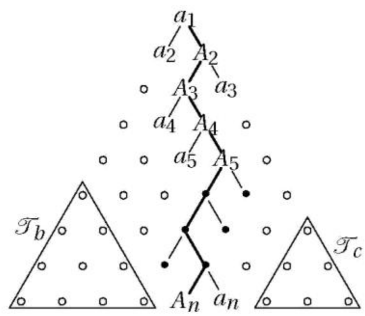
Да ставиме $n = 2018$. Нека $a_1 = A_1$ е бројот во горниот ред, а за $i = 2, 3, \dots, n$ нека a_i и A_i се броевите непосредно под бројот A_{i-1}, при што $A_i - a_i = A_{i-1}$. Бидејќи

$$\frac{n(n+1)}{2} \geq A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

следува дека $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ е пермутација на броевите $1, 2, \dots, n$ и $A_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Да разгледаме два антипаскалови триаголници: F_b, определен со броевите лево од парот (a_n, A_n), F_c, определен со броевите десно од парот (a_n, A_n).

Да забележиме дека во $\mathcal{T}_b$ и $\mathcal{T}_c$ нема броеви помали од $n+1$. Нека триаголниците $\mathcal{T}_b$ и $\mathcal{T}_c$ се составени од k и $n-2-k$ редови. На ист начин како и во големиот триаголник, да ги означиме соодветно со $b_1 = B_1$ и $c_1 = C_1$ броевите во горните редови на триаголниците $\mathcal{T}_b$ и $\mathcal{T}_c$, а со b_i и B_i ($2 \le i \le k$), односно c_j и C_j ($2 \le j \le n-2-k$), соодветно паровите броеви непосредно под B_{i-1} и B_{j-1}, при што $B_i - b_i = B_{i-1}$ и $C_j - c_j = C_{j-1}$. Бидејќи $b_i, c_j \ge n+1$, важи



$$n^2 + n - 3 \ge B_k + C_l = b_1 + ... + b_k + c_1 + ... + c_l$$

$$\ge (n+1) + (n+2) ... + (2n-2) = \tfrac{3n^2 - 7n + 2}{2},$$

што не е точно за $n \ge 9$.

Забелешка. Антипаскалов триаголник составен од сите броеви од 1 до $\frac{n(n+1)}{2}$ не постои ниту за еден $n \ge 6$. За $n = 5$ единствениот пример (до симетрија) е прикажан на цртежот десно.

5
4 9
7 11 2
8 1 12 10
6 14 15 3 13

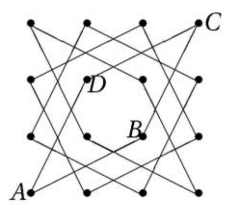
4. *Позиција* е секоја точка (x, y) во рамнината таква што x и y се природни броеви не поголеми од 20.

На почетокот, сите 400 позиции се слободни. Ана и Бојан играат игра во која наизменично повлекуваат потези, при што Ана игра прва. Во секој свој потез Ана поставува нов црвен жетон на слободна позиција така што растојанието меѓу секои две позиции на кои се наоѓаат црвени жетони е различно од $\sqrt{5}$. Во секој свој потез Бојан поставува нов син жетон на некоја слободна позиција. (Позицијата на која се наоѓа син жетон може да биде на било кое растојание од другите позиции на кои се наоѓа некој жетон.) Играта завршува кога некој од играчите не може да повлече потез.

Определи го најголемиот број K така што Ана сигурно може да постави K црвени жетони, без разлика како Бојан ги поставува сините жетони.

Решение. *Одговор*: $K = 100$.

Квадратната решетка 20×20 на која се игра играта може да се подели на 25 подрешетки 4×4, секоја од кои може да се подели на 4 циклуси $ABCDA$ во кои $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = \sqrt{5}$. Бојан може да ја спречи Ана во ист циклус да постави повеќе од еден црвен жетон – доволно е а секој нејзин потез да одговори со



поставување на свој жетон во спротивната точка на истиот циклус (на пример, ако Ана стави жетон во точката A, Бојан става жетон во точката C). На овој начин Ана не може да постави повеќе од 100 жетони,

Од друга страна, позиции (i, j) во кои i и j се со иста парност има 200 и никои две не се на растојание $\sqrt{5}$. Со поставување на црвени жетони само на вакви позиции Ана ќе успее да постави најмалку 100 жетони.

5. Нека $a_1, a_2, ...$ е бесконечна низа природни броеви. Да претпоставиме дека постои природен број $N > 1$ таков што за секој $n \geq N$ вредноста на изразот

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + ... + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

е природен број. Докажи дека постои природен број M таков што $a_m = a_{m+1}$ за секој $m \geq M$.

Решение. Ја користиме вообичаената ознака $v_p(a) = k$ ако $k \in \mathbb{Z}$ е степенот на простиот број p во каноничното разложување на рационалниот број a.

Од условот на задачата следува дека $D_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} - \frac{a_n}{a_1}$ е цел број за секој $n \geq N$. За фиксирано n и прост број p да означиме $v_p(a_1) = A, v_p(a_n) = B$ и $v_p(a_{n+1}) = C$. Разликуваме два случаи:

1) $B < A$. Бидејќи $v_p(\frac{a_n}{a_1}) = B - A < 0$, а D_n е цел број, следува дека $B - C = v_p(\frac{a_n}{a_{n+1}}) = B - A$ или $C - A = v_p(\frac{a_{n+1}}{a_1}) = B - A$, па мора $C \in \{A, B\}$.

2) $B \geq A$. Ако $C > B$ или $C < A$, тогаш $v_p(D_n) = \min\{v_p(\frac{a_n}{a_{n+1}}), v_p(\frac{a_{n+1}}{a_1})\} < 0$ што не е можно. Според тоа, $A \leq C \leq B$.

Во двата случаја имаме $\min\{v_p(a_1), v_p(a_n)\} \leq v_p(a_{n+1}) \leq \max\{v_p(a_1), v_p(a_n)\}$.

Бидејќи ова важи за секој прост број p, следува дека

$$d_n = \text{NZD}(a_1, a_n) \mid a_{n+1} \mid s_n = \text{NZS}(a_1, a_n).$$

Оттука следува

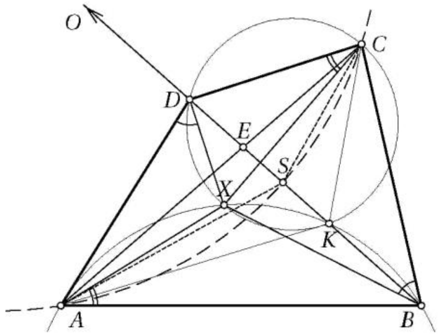
$$d_n \leq d_{n+1} \leq s_{n+1} \leq s_n \text{, за секој } n \geq N.$$

Според тоа, низите d_n и s_n се константни почнувајќи од некој член, да кажеме $n \geq M$, па тогаш имаме $a_1 a_n = d_n s_n = d_M s_M = a_1 a_M$, т.е. $a_n = a_M$.

6. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков што $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{BC} \cdot \overline{DA}$. Точката X се наоѓа во внатрешноста на четириаголникот $ABCD$ и важи

$$\measuredangle XAB = \measuredangle XCD \text{ и } \measuredangle XBC = \measuredangle XDA.$$

Докажи дека $\measuredangle BXA + \measuredangle DXC = 180^\circ$.



Решение. *Прв начин*. Со E да го означиме пресекот на дијагоналите AC и BD. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека точката X е во триаголникот ABE. Нека кружниците ABX и CDX по втор пат се сечат во точката K. Од

$$\measuredangle XKD = \measuredangle XCD = \measuredangle XAB$$
$$= 180^\circ - \measuredangle BKX$$

следува K е на правата BD. Уште повеќе, бидејќи X е во внатрешноста на кружниците BDA и BDC (навистина $\measuredangle BXD = \measuredangle BAD + \measuredangle XBA + \measuredangle ADX = \measuredangle BAD + \measuredangle CBA > 180^\circ - \measuredangle DCB$) точката K лежи на отсечката BE.

Симетралите на $\measuredangle BAD$ и $\measuredangle BCD$ ја сечат отсечката BD во иста точка S таква што $\frac{\overline{BS}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$, при што точките A, S, C лежат на Аполониевата кружница со центар O на правата BD. Ако сега K' е точка на отсечката BE таква што $\measuredangle K'CS = \measuredangle SCE$, тогаш од

$$\measuredangle ASK = 180^\circ - \measuredangle ASO = 90^\circ + \measuredangle ACS$$

следува дека S е центар на впишаната кружница на триаголникот ACK. Оттука $\measuredangle AK'B + \measuredangle CK'D = 180^\circ$. Меѓутоа, бидејќи

$$\measuredangle AKC = \measuredangle AKX + \measuredangle XKC = \measuredangle ABX + 180^\circ - \measuredangle CDX = \measuredangle ABC + 180^\circ - \measuredangle CDA$$
$$= \measuredangle ABC + \measuredangle DAC + \measuredangle ACD = \measuredangle ABC + \measuredangle K'AB + BCK' = \measuredangle AK'C,$$

точките K и K' се совпаѓаат. Значи,

$$\measuredangle AXB + \measuredangle CXD = \measuredangle AKB + \measuredangle CKD = 180^\circ.$$

Втор начин. Во ова решение аглите се ориентирани со пресметувања по модул 180°. Нека F е пресекот на правите AB и CD, G е пресекот на правите AD и BC, а O е центарот на Аполониевата кружница k за точките B и D која минува низ A и C. Од $\measuredangle XAB = \measuredangle XCD$ и $\measuredangle XBC = \measuredangle XDA$ следува дека точката X припаѓа на кружниците ACF и BDG.

При инверзија во однос на кружницата k, точката G се пресликува во точка G', A и C се фиксни, а B и D се пресликуваат една во друга. Според тоа, кружницата BDG се пресликува сама во себе, а точката G' е на неа. Бидејќи

$$\measuredangle AG'C = \measuredangle AG'O + \measuredangle OG'C = \measuredangle OAG + \measuredangle GCO = \measuredangle ABO + \measuredangle ODC = \measuredangle AFC$$

точката G' исто така припаѓа на кружницата AFC. Сега имаме:

$$\measuredangle AXD = \measuredangle AXG' + \measuredangle G'XD = \measuredangle ACG' + \measuredangle G'BD = \measuredangle ACO + \measuredangle OCG' + \measuredangle G'BO$$
$$= \measuredangle ACO + \measuredangle CGO + \measuredangle OGD = \measuredangle ACO + \measuredangle CGA.$$

Слично се добива $\measuredangle CXB = \measuredangle CAO + \measuredangle AGC$, па затоа $\measuredangle AXD + \measuredangle CXB = 180^\circ$.

LX олимпијада

1. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ такви што за секои цели броеви a и b важи

$$f(2a)+2f(b)=f(f(a+b)). \qquad (1)$$

Решение. Со замена во (1) за $a=0, b=x$ добиваме $f(f(x))=2f(x)+f(0)$. Според тоа, ако во (1) ставиме $a=1$ добиваме

$$f(2)+2f(b)=f(f(b+1))=2f(b+1)+f(0),$$

т.е.

$$f(b+1)-f(b)=\tfrac{1}{2}(f(2)-f(0)).$$

Последното значи дека функцијата f е линеарна, т.е. $f(x)=kx+n$, за некои константи k и n. Со замена во (1) добиваме

$$2k(a+b)+3n=k^2(a+b)+(k+1)n,$$

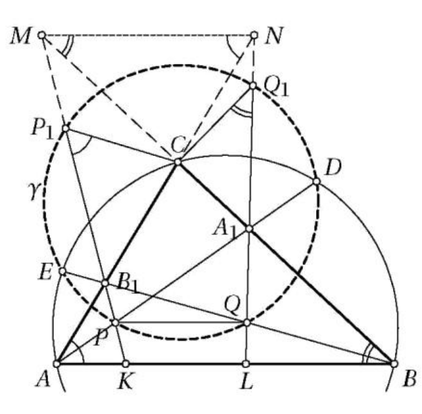
за секои цели броеви a и b, што е исполнето само за $k=2$ или $k=n=0$. Значи, единствени решенија се функциите $f(x)=0$ и $f(x)=2x+n$, за произволен $n\in\mathbb{Z}$.

2. Нека ABC е остроаголен триаголник и A_1 и B_1 се точки на страните BC и AC, соодветно. Нека P и Q се точки на отсечките AA_1 и BB_1, соодветно, такви што правата PQ е паралелна на правата AB. Нека P_1 е точка на правата PB_1 таква што B_1 е меѓу точките P и P_1 и важи $\measuredangle PP_1C=\measuredangle BAC$. Слично, нека Q_1 е точка на правата QA_1 таква што A_1 е меѓу точките Q и Q_1 и важи $\measuredangle CQ_1Q=\measuredangle CBA$.

Докажи дека точките P,Q,P_1 и Q_1 се конциклични.

Решение. *Прв начин*. Нека правите AA_1 и BB_1 по втор пат ја сечат опишаната кружница околу триаголникот ABC во точките D и E, соодветно. Бидејќи

$$\measuredangle EDP=\measuredangle EDA=\measuredangle EBA=\measuredangle EQP,$$



точките D,E,P и Q припаѓаат на иста кружница γ. Со K да ја означиме пресечната точка на правите PB_1 и AB. Бидејќи $\measuredangle AP_1K=\measuredangle CAK$, четириаголникот AP_1CK е тетивен, па од степенот на точката B_1 добиваме

$$\overline{B_1K}\cdot\overline{B_1P_1}=\overline{B_1A}\cdot\overline{B_1C}=\overline{B_1B}\cdot\overline{B_1E}\ .$$

Според Талесовата теорема $\overline{B_1P}:\overline{B_1K}=\overline{B_1Q}:\overline{B_1B}$, па оттука следува

$$\overline{B_1P}\cdot\overline{B_1P_1}=\overline{B_1Q}\cdot\overline{B_1E}\ ,$$

што значи дека точката P_1 припаѓа на кружницата γ. Аналогно се докажува дека и точката Q_1 припаѓа на кружницата γ, со што доказот е завршен.

Втор начин. Нека правата PB_1 ги сече правите AB и BC соодветно во точките K и M, а правата QA_1 ги сече правите AB и AC соодветно во точките L и N. Од теоремата на Пап за точките A_1,P,A и B_1,B,Q, следува дека точките M и N (кои се двете конечни или бесконечни) и бесконечната точка $AB\cap PQ$ се колинеарни, т.е. $MN\,||\,AB\,||\,PQ$. Ако точките M и N се конечни, тогаш од $\measuredangle KP_1C=\measuredangle KAC=180^\circ-\measuredangle MNC$ следува дека точката P_1 лежи на опишаната кружница околу $\triangle MNC$. Аналогно и точката Q_1 лежи на оваа кружница. Сега $\measuredangle PP_1Q_1=\measuredangle MNQ_1=180^\circ-\measuredangle Q_1QP$, па значи четириаголникот PQQ_1P_1 е тетивен.

Ако M и N се бесконечни точки, т.е. $PB_1\,||\,BC$ и $QA_1\,||\,AC$, тогаш точките P_1,C и Q_1 се колинеарни ($\measuredangle P_1CA=\measuredangle P_1KA=\measuredangle CBA$ и $\measuredangle BCQ_1=\measuredangle BAC$, па затоа $\measuredangle P_1CQ_1=180^\circ$), што значи $\measuredangle PP_1Q_1=\measuredangle PP_1C=\measuredangle BAC=180^\circ-\measuredangle Q_1QP$, и повторно четириаголникот PQQ_1P_1 е тетивен.

3. Една општествена мрежа има 2019 корисници од кои некои парови се пријатели. Притоа, ако A е пријател на B, тогаш и B е пријател на A. Една по друга може да се случат промени од следниов вид:

   Три корисници A,B и C такви што A е пријател и со B и со C, но B и C не се пријатели, ги менуваат статусите на своите пријателства така што сега B и C се пријатели, но A не е пријател ниту со B ниту со C, додека статусите на останатите пријателства не се менуваат.

   На почетокот 1010 корисници имаат по 1009 пријателства, а 1009 корисници по 1010 пријателства. Докажи дека постои низа од опишаните промени по која секој корисник има најмногу еден пријател меѓу останатите корисници на мрежата.

Решение. Општествената мрежа претставува граф $\mathbb{G}$ во кој темињата се корисниците, а ребрата се пријателствата. Опишаните промени ќе ги нарекуваме *пресврти*.

Графот $\mathbb{G}$ е сврзан, бидејќи во спротивно темињата во помалата компонента на сврзаност ќе имаат степен помал од 1009. Ќе применуваме пресврти така што ќе останува сврзан граф се додека тоа е можно. Бидејќи со секој пресврт бројот на ребрата се намалува, овој процес мора да заврши. Така, ни останува граф $\mathbb{H}$ кој е сврзан, но кој со секој следен пресврт веќе нема да биде сврзан. Очигледно графот $\mathbb{H}$ не е комплетен. Исто така, бидејќи пресвртите не ја менуваат парноста на степените на темињата, а за почетниот граф $\mathbb{G}$ не се сите степени парни, заклучуваме дека графот $\mathbb{H}$ има темиња со непарен степен, па затоа тој не е цикличен.

1) Ако во графот $\mathbb{H}$ постојат триаголници, го разгледуваме максималниот комплетен подграф $\mathbb{K}$ и да земеме ребро AB такво што $A \in \mathbb{K}$ и $B \notin \mathbb{K}$. Постои теме $C \in \mathbb{K}$ кое не е поврзано со ребро со B. Тогаш по пресвртот на тројката ABC графот останува сврзан.
2) Ако нема триаголници, ама има циклуси, го разгледуваме најмалиот циклус $\mathbb{O}$ и ребро AB такво што $A \in \mathbb{O}$ и $B \notin \mathbb{O}$. Нека $C \in \mathbb{O}$ е соседно теме на темето A. Бидејќи ABC не е триаголник, BC не е ребро. И во овој случај по пресвртот на тројката ABC графот останува сврзан.

Според тоа, во графот $\mathbb{H}$ не постојат циклуси, т.е. $\mathbb{H}$ е дрво. Бидејќи пресвртите не може да формираат циклуси, понатаму е доволно да правиме пресврти се додека постојат темиња со степен поголем или еднаков на 2. Во графот кој ќе остане на крајот степените на сите темиња ќе бидат 1 или 0.

4. Определи ги сите парови природни броеви (k,n) такви што важи

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)...(2^n - 2^{n-1}).$$

Решение. Најголемиот цел број r таков што $2^r \mid k!$ е еднаков на

$$[\tfrac{k}{2}] + [\tfrac{k}{2^2}] + [\tfrac{k}{2^3}] + ... < k.$$

Бидејќи бројот $(2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)...(2^n - 2^{n-1})$ е делив со $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$, добиваме $k > \frac{n(n-1)}{2}$. Според тоа,

$$2^{n^2} > f(n) = k! > (\tfrac{n(n-1)}{2})!.$$

Меѓутоа, за $n \geq 6$ ова неравенство не важи. Навистина, за $n = 6$ имаме $15! > 2^{36}$, додека за $n > 6$ имаме

$$(\tfrac{n(n-1)}{2})! > 15! \cdot 16^{\frac{n(n-1)}{2} - 15} > 2^{36} \cdot 2^{2n(n-1) - 60} = 2^{2n^2 - 2n - 24} > 2^{n^2},$$

бидејќи $n^2 - 2n - 24 > 0$.

Конечно, бидејќи $f(3) = 168$, $f(4) = \frac{1}{4} \cdot 8!$ и $31 \mid f(5) < 31!$, ниту во овие случаи нема решение, па затоа единствени решенија се $(k,n) \in \{(1,1), \{3,2\}$.

5. Банката на градот Бата издава монети кои од едната страна имаат ознака H, а од другата ознака T. Хари наредил n вакви монети во низа од лево на

десно. Со овие монети тој ја повторува следнава операција: ако во низата има точно $k>0$ монети кои покажуваат H, тогаш тој ја превртува $k-$тата монета од лево, а во спротивно сите монети покажуваат T и постапката завршува. На пример, ако $n=3$ и почетниот распоред е THT, Хари ја извршува низата оперции $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ и постапката завршува по овие три операции.

а) Докажи дека за секој почетен распоред на монетите Хари ја завршува опишаната постапка по конечно многу операции.

б) За почетен распоред C, нека со $L(C)$ е означен бројот на операциите кои Хари ги извршува пред постапката да заврши. На пример, $L(THT)=3$ и $L(TTT)=0$. Определи ја аритметичката средина на броевите $L(C)$ по сите 2^n можни почетни распореди C.

Решение. *Прв начин*. Нека $l(n)$ е аритметичката средина на $L(C)$ по сите распореди на n монети. Имаме $l(0)=0$ и $l(1)=1$. Тврдењето под а) ќе го докажеме ако докажеме дека $l(n)$ е конечен број.

Со $f(c)$ да го означиме распоредот кој се добива од распоредот $c=a_1a_2...a_n$ по една операција. Исто така воведуваме ознака $\bar{c}=\overline{a_1}\,\overline{a_2}...\overline{a_n}$, каде $\overline{H}=T$ и $\overline{T}=H$.

1) За произволен распоред на n монети важи $f(cT)=f(c)T$. Според тоа, аритметичката средина на $L(cT)$ е еднаква на $l(n)$.

2) Од друга страна $f(\bar{c}H)=\overline{f(c)}H$. Навистина, ако точно k монети во распоредот покажува H, тогаш $f(c)$ се разликува од c само во $(n-1-k)-$тата позиција, па $\overline{f(c)}H$ се разликува од $\bar{c}H$ само во $(k+1)-$та позиција, т.е. се совпаѓа со $f(\bar{c}H)$.

   Од распоредот $\bar{c}H$ по $L(c)$ операции се добива распоредот $HH...HH$, од кој потоа со $n+1$ операција се добива распоредот $TT..TT$. Според тоа аритметичката средина на броевите $L(cH)$ е еднаква на $l(n)+n+1$.

   Значи, точна е формулата $l(n+1)=l(n)+\frac{n+1}{2}$, од каде со индукција се добива дека $l(n)=\frac{n(n+1)}{4}$.

Втор начин. За распоред на n монети $C=a_1a_2...a_n$ со $\tau(C)$ да го означиме бројот на монетите кои покажуваат H, а со $\sigma(C)$ збирот на позициите i на кои $a_i=H$. На пример, $\tau(HHTTH)=3$ и $\sigma(HHTTH)=1+2+5=8$.

Нека со операцијата од распоредот C се добива распоредот C'. Тогаш
$$\tau(C')=\tau(C)\pm 1 \text{ и } \sigma(C')=\sigma(C)\pm\tau(C),$$

во зависност од тоа дали на позицијата $\tau(C)$ е T или H. Во двата случаја важи

$$\lambda(C')=\lambda(C)-1, \text{ каде } \lambda(C)=2\sigma(C)-\tau(C)^2.$$

Бидејќи

$$\lambda(C)\geq 2(1+2+...+\tau(C))-\tau(C)^2\geq 0,$$

за секој распоред C, следува дека $L(C)=\lambda(C)$ е секогаш конечен.

Аритметичката средина на $\sigma(C)$ е еднаква на $\frac{1}{2}(1+2+...+n)=\frac{n(n+1)}{4}$, бидејќи за секој i монетата на $i-$тото место покажува H точно во половината случаи. Аритметичката средина на $\tau(C)^2$ е:

$$\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot i^2=\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\frac{i^2 n!}{i!(n-i)!}=\frac{n}{2^n}\sum_{i=1}^{n}i\binom{n-1}{i-1}=\frac{n}{2^n}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)\binom{n-1}{i-1}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2^n}\sum_{i=1}^{n}(n+1)\binom{n-1}{i-1}=\frac{n(n+1)}{2^{n+1}}\cdot 2^{n-1}=\frac{n(n+1)}{4}.$$

Според тоа, аритметичката средина на броевите $L(C)$ по сите 2^n можни почетни распореди C е еднаква на $2\cdot\frac{n(n+1)}{4}-\frac{n(n+1)}{4}=\frac{n(n+1)}{4}$.

6. Нека I е центар на впишаната кружница ω на остроаголниот триаголник ABC во кој $\overline{AB}\neq\overline{AC}$. Кружницата ω ги допира страните BC, CA, AB во точките D, E, F, соодветно. Правата која ја содржи D и е нормална на EF повторно ја сече кружницата ω во точката R. Правата AR повторно ја сече кружницата ω во точката P. Кружниците опишани околу триаголниците PCE и PBF повторно се сечат во точката Q.

Докажи дека правите DI и PQ се сечат на правата која ја содржи точката A и е нормална на AI.

Решение. *Прв начин*. Нека нормалата во A на AI ја сече правата DI во точката S. Од $AI \parallel RD \perp EF$ следува

$$\measuredangle PDS=90^\circ-\measuredangle BDP=90^\circ-\measuredangle DRP=90^\circ-\measuredangle IAP=180^\circ-\measuredangle SAP,$$

што значи дека четириаголникот $APDS$ е тетивен. Понатаму,

$$\measuredangle BQC=\measuredangle BQP+\measuredangle PQC=\measuredangle BFP+\measuredangle PEC=\measuredangle FEP+\measuredangle PEC$$

$$=\measuredangle FEC=90^\circ+\tfrac{1}{2}\measuredangle A=\measuredangle BIC,$$

па затоа и четириаголникот $BQIC$ е тетивен.

Нека правата PS по вторпат ја сече впишаната кружница во точката K. Тогаш важи $\measuredangle EDS=\measuredangle RDF$ и $\measuredangle SDA=\measuredangle SPA=\measuredangle KPR=\measuredangle KDR$, т.е. DA и DK се симетрични во однос на симетралата на $\measuredangle EDF$, па како е DA симедијана во $\triangle DEF$, заклучуваме дека правата DK ја содржи средината A' на отсечката EF.

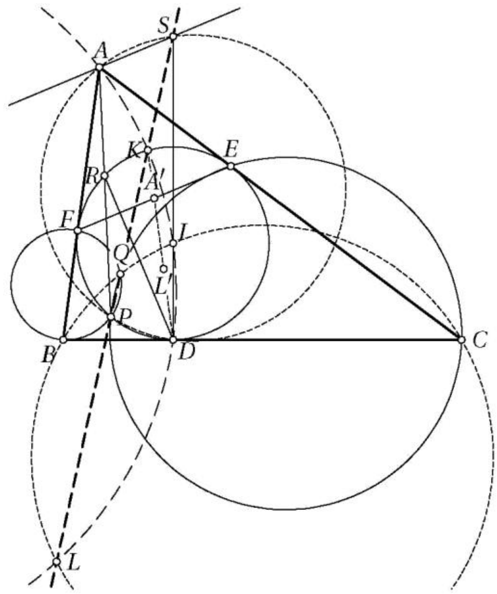
Од $\triangle APE \sim \triangle AER$ и $\triangle APF \sim \triangle AFR$ следува

$$\frac{\overline{RF}}{\overline{FP}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{RE}}{\overline{EP}},$$

т.е. четириаголникот $FREP$ е хармониски. Во сличноста $\triangle FRE \sim \triangle BCI$ на точката P и соодветствува точка L таква што $FREP \sim BICL$. Тогаш $\frac{\overline{IB}}{\overline{BL}} = \frac{\overline{IC}}{\overline{CL}}$. Бидејќи

$$\begin{aligned}\measuredangle PQB &= \measuredangle PFB = \measuredangle PEF \\ &= \measuredangle LCB = \measuredangle LQB,\end{aligned}$$

точката Q лежи на правата PL. Останува да докажеме дека точките L, P и K се колинеарни.



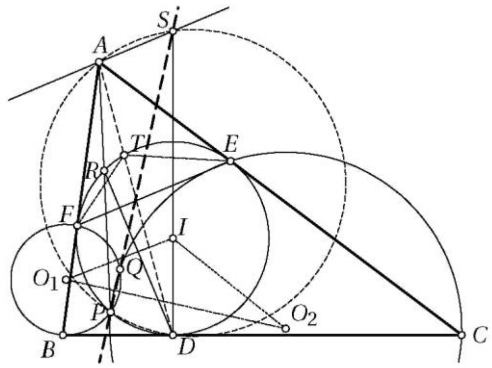
При инверзија во однос на впишаната кружница точките D, E, F, K се фиксни, точките A, B, C се пресликуваат соодветно во средините A', B', C' на отсечките EF, DF, DE, а L се пресликува во точка L' таква што $\frac{\overline{IL'}}{\overline{L'B'}} = \frac{\overline{IB}}{\overline{BL}} = \frac{\overline{IC}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{IL'}}{\overline{L'C'}}$, па затоа $\overline{L'B'} = \overline{L'C'}$, т.е. L' е средина на отсечката $B'C'$. Според тоа, точките D, L', A', K се колинеарни, што значи дека точките D, L, A, K лежат на кружница која минува низ точката I, т.е. петаголникот $AKIDL$ е тетивен. Сега, од сличноста $FREP \sim BICL$ следува

$$\measuredangle LKD = \measuredangle LID = \measuredangle PRD = \measuredangle PKD,$$

т.е. L лежи на правата PK, со што доказот е завршен.

Втор начин. Пресечната точка S на правата DI и нормалата на AI во A припаѓа на кружницата APD бидејќи

$$\begin{aligned}\measuredangle PDS &= 90^\circ - \measuredangle BDP \\ &= 90^\circ - \measuredangle DRP \\ &= 90^\circ - \measuredangle IAP \\ &= 180^\circ - \measuredangle SAP.\end{aligned}$$



Нека правата AD ја сече впишаната кружница во точката

$T \neq D$. Од $\triangle ATE \sim \triangle AED$ и $\triangle ATF \sim \triangle AFD$ следува $\frac{\overline{ET}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{FT}}{\overline{FD}}$, т.е. $\frac{\overline{ET}}{\overline{FT}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{FD}}$. На сличен начин се добива $\frac{\overline{EP}}{\overline{FP}} = \frac{\overline{ER}}{\overline{FR}}$. Со O_1 и O_2 да ги означиме центрите на опишаните кружници на триаголниците BPF и CPE, соодветно. Тогаш важи $O_1I \perp FP, O_2I \perp EP$ и $O_1O_2 \perp PQ$. Бидејќи

$$\measuredangle PO_1B = 2\measuredangle PFB = 2\measuredangle PEF = \measuredangle PIF ,$$

триаголниците PO_1B и PIF се ротационо хомотетични, од каде што следува $\triangle PO_1B \sim \triangle PBF$. Слично важи $\triangle PO_2I \sim \triangle PCE$. Од овие две сличности имаме $\overline{O_1I} = \overline{BF} \cdot \frac{\overline{IP}}{\overline{FP}}$ и $\overline{O_2I} = \overline{CE} \cdot \frac{\overline{IP}}{\overline{EP}}$, па е $\frac{\overline{O_1I}}{\overline{O_2I}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{EP}}{\overline{FP}}$. Сега од

$$\frac{\overline{EP}}{\overline{FP}} = \frac{\overline{ER}}{\overline{FR}} = \frac{\sin\measuredangle EFR}{\sin\measuredangle FER} = \frac{\cos\measuredangle DEF}{\cos\measuredangle DFE} = \frac{\cos\measuredangle DFB}{\cos\measuredangle DEC} ,$$

следува

$$\frac{\overline{O_1I}}{\overline{O_2I}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\cos\measuredangle DFB}{\cos\measuredangle DEC} = \frac{\overline{FD}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{FT}}{\overline{ET}} .$$

Притоа важи $\measuredangle O_1IO_2 = 180^\circ - \measuredangle EPF = \measuredangle FTE$, па затоа $\triangle O_1IO_2 \sim \triangle FTE$.

Сега имаме

$$\measuredangle EPQ = \measuredangle IO_2O_1 = \measuredangle TEF = \measuredangle ADF = \measuredangle SDF - \measuredangle SDA = \measuredangle EPR - \measuredangle SPA = \measuredangle EPS ,$$

па затоа точките P, Q и S се колинеарни.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andreescu, A., Feng, Z.: Mathematical Olympiads 1998–1999, Problems and Solutions from Around the World, TheMathematical Association of America, 2000
2. Andreescu, T. , Feng, Z. : Mathematical Olympiads 1999–2000, Problems and Solutions from Around the World, TheMathematical Association of America, 2002
3. Andreescu, T., Feng, Z.: A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies, Birkhauser, Boston, 2003
4. Andreescu, T., Feng, Z.: Mathematical Olympiads 2000–2001, Problems and Solutions from Around the World, TheMathematical Association of America, 2003
5. Andreescu, T., Feng, Z.: USA and International Mathematical Olympiads 2003, The Mathematical Association of America, 2004
6. Andreescu, T., Gelca, R.: Mathematical Olympiad Challenges, Birkhäuser, Boston, 2000
7. Andreescu, T., Kedlaya, K., Zeitz, P.: Mathematical Contests 1995-1996, Olympiads Problems and Solutions from Around the World, American Mathematics Competitions, 1997
8. Andreescu, T., Kedlaya, K.: Mathematical Contests 1996-1997, Olympiads Problems and Solutions from Around the World, American Mathematics Competitions, 1998
9. Andreescu, T., Kedlaya, K.: Mathematical Contests 1997-1998, Olympiads Problems and Solutions from Around the World, American Mathematics Competitions, 1999
10. Andreescu, T., Mushkarov, O., Stoyanov, L.: Geometric Problems on Maxima and Minima, Birkhauser Boston, 2005
11. Becheanu, M.: International Mathematical Olympiads 1959–2000. Problems. Solutions. Results, Academic Distribution Center, Freeland, USA, 2001
12. Bin, X., Yee, L. P.: Mathematical Olympiad in China (Problems and Solutions), East China Normal University Press and World Scientific Pblishing Co. Pte. Ltd., Shanghai-Singapore, 2007
13. Djukić, D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N.: The IMO Compendium - A Collection of Problems Suggested for The International Mathematical Olympiads: 1959-2009 (Second Edition), Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011
14. Feng, Z., Zhao, Y.: USA and International Mathematical Olympiads 2006-2007, The Mathematical Association of America, 2007
15. Gardiner, A.: The Mathematical Olympiad Handook, Oxford, 1997
16. Hanjš, Ž.: Međunarodne matematičke olimpijade, Element, Zagreb, 1997
17. Klamkin, M: International Mathematical Olympiads, 1979-1985, The Mathematical Association of America, 1986
18. Malcheski, R., Grozdev, S., Anevska, K.: Geometry of complex numbers, Arhimed, Sofia, 2015

19. Pranesachar, C. R., Shirali, S. A., Venkatachala, B. J., Yogananda, C. S.: International Mathematical Olympiads, 1986-1994, Interline Publishing Pvt. Ltd., Bangalore, 1995
20. Shortlisted Problems with Solutions, 47th International Mathematical Olympiad, Slovenia, 2006
21. Shortlisted Problems with Solutions, 48th International Mathematical Olympiad, Vietnam, 2007
22. Shortlisted Problems with Solutions, 49th International Mathematical Olympiad, Spain, 2008
23. Shortlisted Problems with Solutions, 50th International Mathematical Olympiad, Germany, 2009
24. Shortlisted Problems with Solutions, 51th International Mathematical Olympiad, Kazakhstan, 2010
25. Shortlisted Problems with Solutions, 52th International Mathematical Olympiad, Netherlands, 2011
26. Shortlisted Problems with Solutions, 53th International Mathematical Olympiad, Argentina, 2012
27. Shortlisted Problems with Solutions, 54th International Mathematical Olympiad, Colombia, 2013
28. Shortlisted Problems with Solutions, 55th International Mathematical Olympiad, South Africa, 2014
29. Shortlisted Problems with Solutions, 56th International Mathematical Olympiad, Thailand, 2015
30. Shortlisted Problems with Solutions, 57th International Mathematical Olympiad, Hong Kong, 2016
31. Shortlisted Problems with Solutions, 58th International Mathematical Olympiad, Brazil, 2017
32. Shortlisted Problems with Solutions, 59th International Mathematical Olympiad, Romania, 2018
33. Shortlisted Problems with Solutions, 60th International Mathematical Olympiad, United Kingdom, 2019
34. Ашић, М. и други: Међународне математичке олимпијаде, II издање, ДМС, Београд, 1986
35. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
36. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
37. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
38. Димовски, Д., Малчески, Р., Малчески, А., Атанасов, Р., Манова-Ераковиќ, В., Јанев, И.: Мешународни математички олимпијади, СММ, Скопје, 2000

39. Ђукић, Д., Радовановић, М.: Математичке олимпијаде средљошколаца од 2012 до 2019 године, ДМ Србије, Београд, 2012
40. Јанковић, В., Каделбург, З., Младеновић, П.: Међународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1996
41. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, Београд, 2012
42. Малчески, А., Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика во средното образование во учебната 1998/99 година, СММ, Скопје, 2000
43. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997
44. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
45. Малчески, Р., Малчески, А.: Функции и функционални равенки (второ издание), Армаганка, Скопје, 2019
46. Малчески, Р.: Елементарни алгебарски и аналитички неравенства (второ издание), Армаганка, Скопје, 2019
47. Младеновић, П., Кртинић, Ђ.: Међународне и балканске математичке олимпијаде 1996-2006, ДМ Србије, Београд, 2007
48. Морозова, Е. А., Петраков, И. С., Скворцов, В. А.: Международные математические олимпиады, Просвещение, Москва, 1976
49. Тренчевски, К., Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика (задачи и решенија), Природно-математички факултет, Скопје, 2000
50. Фомин, А. А., Кузнецова, Г. М.: Международные математические олимпиады 1976-1996, Дрофа, Москва, 1998