Статијата прв пат е објавена во списанието Математичко-физички лист на ДМФА на Хрватска 1988

Kada će četvorougao biti trapez?

DRAGOLJUB S. JOVIĆ, Zaječar

Po definiciji, trapez je četvorougao sa jednim parom paralelnih stranica. Otuda proizlazi da trapez pripada klasi konveksnih četvorouglova ravni E^2.

Prema tome, u ravni E^2 konveksni četvorougao biće trapez, ako posjeduje jedan par paralelnih stranica.

Sem ovog definicionog uslova, postoje i drugi uslovi pod kojima će konveksni četvorougao u ravni E^2 biti trapez te iste ravni E^2. Te uslovc daju sledeće teoreme:

Teorema 1.

U ravni E^2 konveksni čctvorougao $ABCD$ biće trapez, ako i samo ako je duž MN, koja spaja središta M i N njegovih naspramnih stranica AD i BC, jednaka poluzbiru ostalih dveju stranica AB i CD datog konveksnog četvorougla $ABCD$, tj. ako i samo ako je:

$$MN = \frac{1}{2}(AB + CD),$$

pri čmu je $AM = MD$ i $BN = NC$.

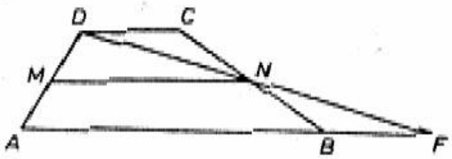
Dokaz:

1) *Uslov teoreme je potreban.*

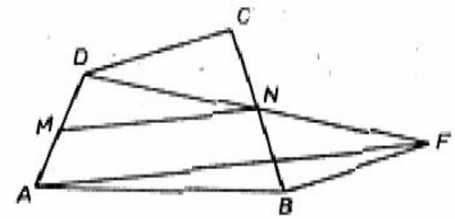
Neka su u ravni E^2 tačke M i N središta krakova AD i BC trapeza $ABCD$ u kome je $AB \parallel CD$, (sl. 1).

Treba dokazati da je $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

U tom cilju produžimo duž DN preko tačke N do preseka F sa produženjem stranice AB datog trapeza $ABCD$. Tada je $\sphericalangle BNF = \sphericalangle CND$ (kao unakrsni), $\sphericalangle FBN = \sphericalangle NCD$ (kao naizmenični) i $BN = NC$, pa je zato $\triangle BFN \cong \triangle NCD$, odakle, pak, sledi da je $BF = CD$ i $FN = ND$.



Sl. 1.



Sl. 2.

S druge strane, kako je $AM = MD$ i $FN = ND$, proizlazi da je MN središna duž trougla AFD, pa je stoga:

$$MN = \frac{1}{2} AF = \frac{1}{2}(AB + BF) = \frac{1}{2}(AB + CD),$$

što je u ovom delu teoreme i trebalo dokazati.

2) *Uslov teoreme je dovoljan.*

Neka su u ravni E^2 tačke M i N središta naspramnih stranica AD i BC konveksnog četvorougla $ABCD$, (sl. 2), takve da je:

$$MN = \frac{1}{2}(AB + CD). \tag{1}$$

Treba dokazati da je dati konveksni četvorougao $ABCD$ trapez.

U tom cilju produžimo duž DN preko tačke N za $NF = ND$, a zatim tačku F spojimo sa tačkama A i B. Tada je $BN = NC$, $NF = ND$ i $\sphericalangle BNF = \sphericalangle CND$ (kao unakrsni), pa je zato $\triangle BFN \cong \triangle NCD$, odakle, pak, sledi da je $BF = CD$ i $\sphericalangle BFN = \sphericalangle CDN$.

Međutim, kako su uglovi BFN i CDN naizmenični po položaju, onda zbog jednakosti ovih uglova proizlazi da je $BF \parallel CD$.

S druge strane, kako je $AM = MD$ i $FN = ND$, sledi da je MN središna duž trougla OFD, pa je stoga

$$MN = \frac{1}{2} AF. \tag{2}$$

Iz jednakosti (1) i (2) proizlazi da je $AB + CD = AF$. Međutim, kako je $CD = BF$, poslednja jednakost postaje:

$$AB + BF = AF.$$

To znači da su tačke A, B i F kolinearne, pa zbog $BF \parallel CD$, sledi da je $AB \parallel CD$, odakle, pak, neposredno proizlazi da je dati konveksni četvorougao $ABCD$ trapez, što je u ovom delu teoreme i trebalo dokazati.

Time je ova teorema u potpunosti dokazana.

Teorema 2.

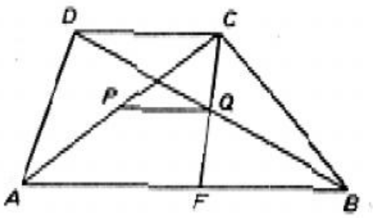
U ravni E^2 konveksni četvorougao $ABCD$ biće trapez, ako i samo ako je duž PQ, koja spaja središta P i Q njegovih dijagonala AC i BD, jednaka polurazlici stranica AB i CD datog konveksnog četvorougla $ABCD$, tj. ako i samo ako je $PQ = \dfrac{1}{2}(AB - CD)$, pri čemu je $AP = PC$ i $BQ = QD$.

Dokaz:

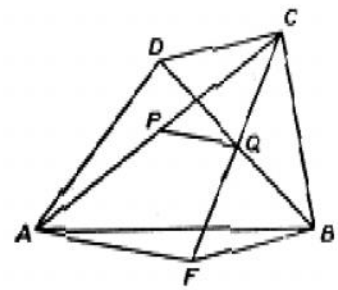
1) *Uslov teoreme je potreban.*

Neka su u ravni E^2 tačke P i Q središta dijagonala AC i BD trapeza $ABCD$ u kome je $AB \parallel CD$, (sl. 3).

Treba dokazati da je $PQ = \frac{1}{2}(AB - CD)$.



Sl. 3.



Sl. 4.

U tom cilju produžimo duž CQ preko tačke Q do preseka F sa stranicom AB datog trapeza $ABCD$. Tada je $\sphericalangle BQF = \sphericalangle CQD$ (kao unakrsni), $\sphericalangle FBQ = \sphericalangle CDQ$ (kao naizmenični) i $BQ = QD$, pa je zato $\triangle FBQ \cong \triangle CDQ$, odakle, pak, sledi da je $FB = CD$ i $FQ = QC$.

S druge strane, kako je $AP = PC$ i $FQ = QC$, proizlazi da je PQ središna duž trougla AFC, pa je stoga:

$$PQ = \frac{1}{2} AF = \frac{1}{2}(AB - FB) = \frac{1}{2}(AB - CD),$$

što je u ovom delu teoreme i trebalo dokazati.

2) *Uslov teoreme je dovoljan.*

Neka su u ravni E^2 tačke P i Q središta dijagonala AC i BD konveksnog četvorougla $ABCD$ (sl. 4), takva da je:

$$PQ = \frac{1}{2}(AB - CD). \tag{3}$$

Treba dokazati da je dati konveksni četvorougao $ABCD$ trapez.

U tom cilju produžimo duž CQ preko tačke Q za $QF = CQ$, a zatim tačku F spojimo sa tačkama A i B. Tada je $\sphericalangle BQF = \sphericalangle CQD$ (kao unakrsni), $BQ = QD$ i $FQ = QC$, pa je zato $\triangle FBQ \cong \triangle CDQ$, odakle, pak, neposredno sledi da je $FB = CD$ i $\sphericalangle FBQ = \sphericalangle CDQ$.

Međutim, kako su uglovi FBQ i CDQ naizmenični po položaju, onda zbog jednakosti ovih uglova proizlazi da je $FB \parallel CD$.

S druge strane, kako je $AP = PC$ i $FQ = QC$, sledi da je PQ središna duž trougla AFC, pa je stoga:

$$PQ = \frac{1}{2} AF. \tag{4}$$

Iz jednakosti (3) i (4) proizlazi da je $AB - CD = AF$. Međutim, kako je $CD = FB$, poslednja jednakost postaje $AB - FB = AF$, odakle, pak, neposredno sledi da je:

$$AB = AF + FB.$$

To znači da su tačke A, B i F kolinearne, pa zbog $FB \parallel CD$, proizlazi da je $AB \parallel CD$, odakle, pak, neposredno sledi da je dati konveksni četvorougao $ABCD$ trapez, što je u ovom delu teoreme i trebalo dokazati.

Time je ova teorema u potpunosti dokazana.

Teorema 3.

U ravni E^2 konveksni četvorougao $ABCD$ biće trapez, ako i samo ako je $MP = NQ$, pri čemu su tačke M i N središta njegovih naspramnih stranica AD i BC, a P i Q presečne tačke duži MN sa dijagonalama AC i BD datog konveksnog četvorougla $ABCD$.

Dokaz:

1) *Uslov teoreme je potreban.*

Neka su ravni E^2 tačke M i N središta krakova AD i BC trapeza $ABCD$ (sl. 5), a P i Q presečne tačke duži MN sa dijagonalama AC i BD datog trapeza $ABCD$ u kome je $AB \parallel CD$.
Treba dokazati da je $MP = NQ$.

I zaista, kako su po pretpostavci u ovom delu teoreme tačke M i N središta krakova AD i BC trapeza $ABCD$, sledi da je MN središna duž datog trapeza $ABCD$, pa je zato $MN \parallel AB \parallel CD$, odakle, pak, na osnovu Talesove teoreme sledi da je $\frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MD} = 1$ i $\frac{BQ}{QD} = \frac{BN}{NC} = 1$, jer je po pretpostavci $AM = MD$ i $BN = NC$. Otuda proizlazi da je $AP = PC$ i $BQ = QD$.

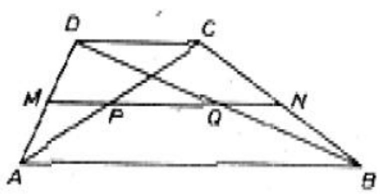
I sad, kako je $AM = MD$ i $AP = PC$, sledi da je MP središna duž trougla ACD, pa je stoga:

$$MP = \frac{1}{2} CD. \tag{5}$$

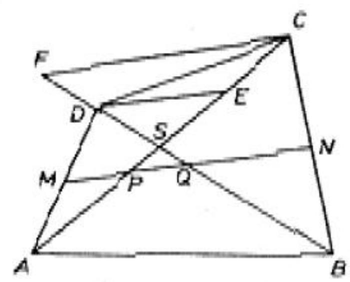
S druge strane, kako je $BN = NC$ i $BQ = QD$, proizlazi da je NQ središna duž trougla BCD, pa je zato:

$$NQ = \frac{1}{2} CD. \tag{6}$$

Neposredno iz jednakosti (5) i (6) sledi da je $MP = NQ$, što je u ovom delu teoreme i trebalo dokazati.



Sl. 5.



Sl. 6.

2) *Uslov teoreme je dovoljan.*

Neka su u ravni E^2 tačke M i N središta naspramnih stranica AD i BC konveksnog četvorougla $ABCD$, a P i Q presečne tačke duži MN sa dijagonalama AC i BD datog konveksnog četvorougla $ABCD$, takve da je $MP = QN$ (sl. 6).

Treba dokazati da je dati konveksni četvorougao $ABCD$ trapez u kome je $AB \parallel CD$.

U tom cilju postupićemo indirektno, tj. pretpostavićemo da nije $AB \parallel CD$. Ako je tako, onda nije ni $MN \parallel AB \parallel CD$, pa zato na pravama AC i BD postoje tačke E i F, različite od tačaka C i D, takve da je $DE \parallel MN$ i $CF \parallel MN$. Otuda, na osnovu Talesove teoreme, sledi da je $\frac{AP}{PE} = \frac{AM}{MD} = 1$ i $\frac{BQ}{QF} = \frac{BN}{NC} = 1$, jer je po pretpostavci $AM = MD$ i $BN = NC$. Odavde, dalje, proizlazi da je $AP = PE$ i $BQ = QF$.

I sad, kako je $AM = MD$ i $AP = PE$, sledi da je MP središna duž trougla ADE, pa je stoga:

$$MP = \frac{1}{2} DE. \tag{7}$$

S druge strane, kako je $BN = NC$ i $BQ = QF$, proizlazi da je NQ središna duž trougla BCF, pa je zato:

$$NQ = \frac{1}{2} CF. \tag{8}$$

Međutim, po pretpostavci u ovom delu teoreme je $MP = NQ$, odakle, pak, na osnovu jednakosti (7) i (8) sledi da je $DE = CF$, pri čemu je još $DE \parallel CF \parallel MN$.

Prema tome, naspramne stranice DE i CF četvorougla $DECF$ su paralelne i jednake među sobom, pa je zato četvorougao $DECF$ paralelogram. Međutim, ovo je nemoguće, jer se prave, koje sadrže naspramne stranice CE i DF četvorougla $DECF$ seku u tački S.

Dakle, naša pretpostavka da nije $AB \parallel CD$ dovodi do apsurda, da je četvorougao $DECF$ paralelogram, koji to nije. Dobijeni apsurd dokazuje da je $AB \parallel CD$, što je u ovom delu teoreme i trebalo dokazati.

Time je ova teorema u potpunosti dokazana.

Posledica

U ravni E^2 konveksni četvorougao $ABCD$ biće trapez, ako i samo ako je $MQ = NP$, pri čemu su M i N središta njegovih naspramnih stranica AD i BC, a P i Q presečne tačke duži MN sa dijagonalama AC i BD datog konveksnog četvorougla $ABCD$ (sl. 6).

Teorema 4.

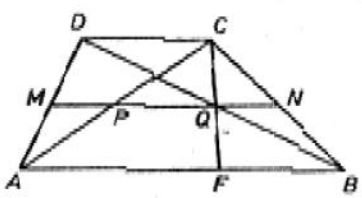
U ravni E^2 konveksni četvorougao $ABCD$ biće trapez, ako i samo ako je $PM = QN$, pri čemu su tačke P i Q središta njegovih dijagonala AC i BD, a M i N presečne tačke prave PQ sa stranicama AD i BC datog konveksnog četvorougla $ABCD$.

Dokaz:

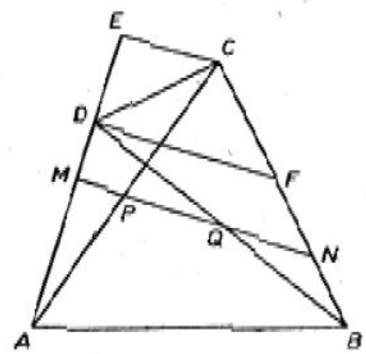
1) *Uslov teoreme je potreban.*

Neka su u ravni E^2 tačke P i Q središta dijagonala AC i BD trapeza $ABCD$, a M i N presečne tačke prave PQ sa stranicama AD i BC datog trapeza $ABCD$ u kome je $AB \parallel CD$, (sl. 7).

Treba dokazati da je $PM = QN$.



Sl. 7.



Sl. 8.

U tom cilju produžimo duž CQ preko tačke Q do preseka F sa stranicom AB datog trapeza $ABCD$. Tada je $\sphericalangle BQF = \sphericalangle CQD$ (kao unakrsni), $\sphericalangle FBQ = \sphericalangle CDQ$ (kao naizmenični) i $BQ = QD$ (po pretpostavci), pa je zato $\triangle FBQ \cong \triangle CDQ$, odakle, pak, sledi da je $FQ = QC$.

I sad, kako je $AP = PC$ (po pretpostavci) i $PQ = QC$, proizlazi da je PQ središna duž trougla AFC, pa je stoga $PQ \parallel AF$, tj. $MN \parallel AB$, odakle, pak, na osnovu Talesove teoreme sledi da je $\frac{AM}{MD} = \frac{AP}{PC} = 1$ i $\frac{BN}{NC} = \frac{BQ}{QD} = 1$, jer je, po pretpostavci, $AP = PC$ i $BQ = QD$. Odavde, dalje, sledi da je $AM = MD$ i $BN = NC$.

Budući da je $AM = MD$ i $AP = PC$, proizlazi da je MP središna duž trougla ACD, pa je zato:

$$MP = \frac{1}{2} CD. \tag{9}$$

S druge strane, kako je $BN = NC$ i $BQ = QD$, sledi da je QN središna duž trougla BCD, pa je stoga:

$$QN = \frac{1}{2} CD. \tag{10}$$

Neposredno iz jednakosti (9) i (10) proizlazi da je $MP = QN$, što je u ovom delu teoreme i trebalo dokazati.

2) *Uslov teoreme je dovoljan.*

Neka su u ravni E^2 tačke P i Q središta dijagonala AC i BD konveksnog četvorougla $ABCD$, a M i N presečne tačke prave PQ sa stranicama AD i BC datog konveksnog četvorougla $ABCD$, takve da je $PM = QN$ (sl. 8).

Treba dokazati da je dati konveksni četvorougao $ABCD$ trapez u kome je $AB \parallel CD$.

U tom cilju postupićemo indirektno, tj. pretpostavićemo da nije $AB \parallel CD$. Ako je tako, onda nije ni $MN \parallel AB \parallel CD$, pa zato na pravama AD i BC postoje tačke E i F, različite od tačaka D i C, takve da je $CE \parallel MN$ i $DF \parallel MN$. Otuda, na osnovu Talesove teoreme, sledi da je $\frac{AM}{ME} = \frac{AP}{PC} = 1$ i $\frac{BN}{NF} = \frac{BQ}{QD} = 1$, jer je po pretpostavci $AP = PC$ i $BQ = QD$. Odavde, dalje, proizlazi da je $AM = ME$ i $BN = NF$.

I sad, kako je $AM = ME$ i $AP = PC$, sledi da je MP središna duž trougla ACE, pa je stoga:

$$PM = \frac{1}{2} CE. \tag{11}$$

S druge strane, kako je $BN = NF$ i $BQ = QD$, proizlazi da je QN središna duž trougla BFD, pa je zato:

$$QN = \frac{1}{2} DF. \tag{12}$$

Međutim, po pretpostavci u ovom delu teoreme je $PM = QN$, odakle, pak, na osnovu jednakosti (11) i (12), sledi da je $CE = DF$, pri čemu je još $CE \parallel DF \parallel MN$.

Prema tome, naspramne stranice CE i DF četvorougla $DFCE$ su paralelne i jednake među sobom, pa je zato četvorougao $DFCE$ paralelogram. Međutim, ovo je nemoguće, jer se prave, koje sadrže naspramne stranice DE i FC četvorougla $DFCE$ seku.

Dakle, naša pretpostavka da nije $AB \parallel CD$ dovodi do apsurda, da je četvorougao $DFCE$ paralelogram, koji to nije. Dobijeni apsurd dokazuje da je $AB \parallel CD$, što je u ovom delu teoreme i trebalo dokazati.

Time je ova teorema u potpunosti dokazana.

Posledica

U ravni E^2 konveksni četvorougao $ABCD$ biće trapez, ako i samo ako je $MQ = PN$ pri čemu su tačke P i Q središta njegovih dijagonala AC i BD, a M i N presečne tačke prave PQ sa naspramnim stranicama AD i BC datog konveksnog četvorougla $ABCD$ (sl. 8).