Ристо Малчески
Здравко Цветковски
Скопје

МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА I

Како што знаеме, во множеството природни броеви $\mathbf{N}=\{1,2,...,n,...\}$ операциите собирање и множење се целосно изводливи, а додека одземањето и делењето се делумни операции во $\mathbf{N}$. Во оваа статија нема да го разгледуваме воведувањето на множеството природни броеви и операциите во него, но ќе забележиме, дека всушност Пеановите аксиоми се тие кои го дефинираат множеството $\mathbf{N}$. Притоа имаме: множеството $\mathbf{N}$ е непразно и важи:

1. $1\in\mathbf{N}$.
2. За секој природен број k, постои единствен природен број k^+, кој го нарекуваме *следбеник* на k.
3. Ако $k^+=n^+$, тогаш $k=n$.
4. $1\neq k^+$, за секој $k\in\mathbf{N}$.
5. Ако $S\subseteq\mathbf{N}, 1\in S$ и од $k\in S$ следува дека $k^+\in S$, тогаш $S=\mathbf{N}$.

На значењето на Пеановите аксиоми нема посебно да се задржуваме, меѓутоа да забележиме дека со првата и четвртата аксиома се обезбедува бројот 1 да припаѓа на множеството природни броеви и тој да е “првиот” природен број. Понатаму, со втората аксиома се задаваат броевите $2=1^+$, $3=2^+$ итн., а нивната единственост ја овозможуваат третата и четвртата аксиома. За нашите разгледувања, од посебно значење е петтата аксиома, која уште е позната како *аксиома за индукција* и која всушност обезбедува единственост на множеството природни броеви. Всушност, единственоста на множеството природни броеви лежи во основата на *принципот на математичка индукција* (ПМИ), кој е еден од основните методи за докажување на математички тврдења и кој гласи:

Ако треба да ја докажеме точноста на некое математичко тврдење T, кое зависи од природниот број n, и ако за T знаеме дека:

i) T е точно за природниот број 1;

ii) од претпоставката дека T е точно за некој природен број $k\geq 1$, следува дека T е точно и за $k+1$;

тогаш ова тврдење T е точно за секој природен број n.

Да разгледаме еден пример.

Пример 1. Докажи дека збирот на првите n природни броеви е еднаков на

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Решение. Да означиме $S_1 = 1$; $S_2 = 1+2; \dots, S_n = 1+2+\dots+n$ т.е. S_n е збирот на првите n природни броеви. Треба да докажеме дека

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

Прв чекор. Да провериме дека оваа формула е точна за бројот 1. Навистина $S_1 = 1$, а од (1) добиваме дека $S_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$.

Втор чекор. Да претпоставиме дека за некој природен број $k \geq 1$ формулата (1) е точна, т.е. за збирот на првите k природни броеви знаеме дека $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Ќе докажеме дека формулата (1) важи и за следниот природен број $k+1$, т.е. дека $S_{k+1} = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Имаме:

$$S_{k+1} = \underbrace{(1+2+\dots+k)}_{S_k} + (k+1) = S_k + (k+1).$$

Сега од претпоставката во вториот чекор следува

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)[\tfrac{k}{2}+1] = (k+1)\frac{k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Според тоа, во првиот чекор докажавме дека условот *i*) од ПМИ е исполнет, а во вториот чекор дека условот *ii*) од ПМИ е исто така исполнет. Следствено, согласно со ПМИ формулата (1) важи за секој природен број $n \geq 1$. ♦

Забелешка 1. Често пати проверката во првиот чекор се нарекува *база на индукцијата* (БИ), а претпоставката во вториот чекор *индуктивна претпоставка* (ИП). ♦

Забелешка 2. Со помош на аксиомата за индукција може да се докаже и *вториот принцип на математичка индукција*, кој гласи:

Ако треба да ја докажеме точноста на некое математичко тврдење T, кое зависи од природниот број n, и ако за T знаеме дека:

iii) T е точно за некој конкретен природен број m;

iv) од претпоставката дека T е точно за некој природен број $k \geq m$, следува дека T е точно и за $k+1$;

тогаш ова тврдење е точно за секој природен број $n \geq m$. ♦

Пример 2. За секој природен број m означуваме $m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m$ и по дефиниција ставаме $0! = 1$. Докажи дека

$$(2n)! < 2^{2n}(n!)^2, \text{ за } n > 1.$$

Решение. Чекор 1. БИ: За $n = 2$ имаме

$$(2\cdot 2)!=4!=24<64=2^{2\cdot 2}(2!)^2,$$

т.е. неравенството важи.

Чекор 2. ИП: Нека претпоставиме дека за некој природен број $k\geq 2$ важи $(2k)!<2^{2k}(k!)^2$.

Од ИП за $k+1$ имаме

$$[2(k+1)]!=(2k)!(2k+1)(2k+2)<2^{2k}(k!)^2(2k+1)2(k+1)$$
$$<2^{2k+1}k!(k+1)k!2(k+1)=2^{2(k+1)}[(k+1)!]^2$$

т.е. неравенството важи и за $k+1$, што значи важи за секој $n>1$. ♦

Забелешка 3. При докажувањето на некои тврдења се користи и таканаречената *индукција со двојна основа*, која симболички е искажана на следниов начин:

v) T е точно за природните броеви m и $m+1$;

vi) од претпоставката дека T е точно за некои природни броеви k и $k+1$, $k\geq m$, следува дека T е точно и за $k+2$;

тогаш ова тврдење е точно за секој природен број $n\geq m$. ♦

Пример 3. Броевите $a_n, n=0,1,...$ се зададени со формулите $a_0=2, a_1=\frac{5}{2}$ и

$$a_n=\tfrac{5}{2}a_{n-1}-a_{n-2}, \text{ за } n>1. \tag{2}$$

Докажи дека за секој $n=0,1,2,3,...$ важи

$$a_n=2^n+2^{-n}. \tag{3}$$

Решение. Чекор 1. БИ: За $n=0$ и $n=1$ имаме

$$a_0=2=1+1=2^0+2^{-0} \text{ и } a_1=\tfrac{5}{2}=2+\tfrac{1}{2}=2^1+2^{-1}$$

што значи дека формулата (3) важи за $n=0$ и $n=1$.

Чекор 2. ИП: Нека претпоставиме дека формулата (3) важи за $n=k$ и $n=k+1$, т.е. дека важи $a_k=2^k+2^{-k}$ и $a_{k+1}=2^{k+1}+2^{-(k+1)}$.

Ако ја искористиме релацијата (2) и индуктивната претпоставка, тогаш за $n=k+2$ добоваме

$$a_{k+2}=\tfrac{5}{2}a_{k+2-1}-a_{k+2-2}=\tfrac{5}{2}a_{k+1}-a_k=\tfrac{5}{2}(2^{k+1}+2^{-(k+1)})-(2^k+2^{-k})$$
$$=5\cdot 2^k+5\cdot 2^{-k-2}-2^k-2^{-k}=4\cdot 2^k+2^{-k-2}+4\cdot 2^{-k-2}-2^{-k}$$
$$=2^2 2^k+2^{-(k+2)}+2^2 2^{-k-2}-2^{-k}=2^{k+2}+2^{-(k+2)}+2^{-k}-2^{-k}$$
$$=2^{k+2}+2^{-(k+2)},$$

т.е. формулата (3) важи за $n = k + 2$, па од забелешка 4 следува дека формулата (3) важи за секој $n = 0,1,2,3,...$. ♦

На крајот од овој дел, со помош на математичка индукција ќе докажеме неколку важни неравенства за позитивните реални броеви.

Лема 1. (Неравенство на Бернули). Ако $x > -1$, тогаш

$$(1+x)^n \geq 1+nx \text{, за секој } n \in \mathbf{N}. \tag{4}$$

Доказ. За $n=1$ имаме $1+x \geq 1+x$, т.е. неравенството важи.

Нека претпоставиме дека за $n = k$, важи $(1+x)^k \geq 1+kx$.

Нека $n = k+1$. Од индуктивната претпоставка и бидејќи $1+x > 0$ имаме

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1+kx+x+kx^2 = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$$

т.е. неравенството (4) важи и за $n = k+1$, па од принципот на математичка индукција добиваме дека важи за секој $n \in \mathbf{N}$ и секој реален број $x > -1$. ♦

Лема 2. ако $x_i > 0$, $i = 1,2,...,n$ и $x_1x_2...x_n = 1$ тогаш

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n,$$

при што $x_1 + x_2 + ... + x_n = n$ ако и само ако $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$.

Доказ. Даденото неравенство ќе го докажеме со математичка индукција по n.

i) За $n=1$ неравенството е точно и притоа важи знак на равенство.

Ако $n = 2$ и $x_1x_2 = 1$, тогаш едниот број е поголем или еднаков на 1, а другиот е помал или еднаков на 1, на пример $x_1 \leq 1$ и $x_2 \geq 1$. Според тоа,

$$x_1 + x_2 = 1 + x_1x_2 + (x_2-1)(1-x_1) = 2 + (x_2-1)(1-x_1) \geq 2$$

и знак за равенство важи ако и само ако $x_2 - 1 = 0$ или $1 - x_1 = 0$, што заедно со $x_1x_2 = 1$ дава $x_1 = x_2 = 1$.

ii) Нека претпоставиме дека за $n = k$ и произволни реални броеви x_i, $i = 1,2,...,k$, чиј производ е единица, точно е неравенството

$$x_1 + x_2 + ... + x_k \geq k$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x_i = 1$, $i = 1,2,...,k$.

Нека $n = k+1$ и $x_1,...,x_{k+1}$ се позитивни реални броеви за кои $x_1x_2...x_kx_{k+1} = 1$. Ако сите x_i не се еднакви на 1, тогаш имаме броеви поголеми од 1, но и помали од 1. Без ограничување на општоста можеме да земеме $x_1 < 1$ и $x_2 > 1$. Тогаш имаме k позитивни броеви $x_1x_2, x_3,...,x_{k+1}$ чиј производ е еднаков на 1, па според индуктивната претпоставка добиваме

$$x_1x_2 + x_3 + ... + x_k + x_{k+1} \geq k$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$x_1x_2 = x_3 = ... = x_k = x_{k+1} = 1 .$$

Но, тогаш

$$x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} = 1 + x_1x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_k + x_{k+1} + (x_2 - 1)(1 - x_1)$$
$$\geq k + 1 + (x_2 - 1)(1 - x_1) \geq k + 1$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$x_1x_2 = x_3 = ... = x_k = x_{k+1} = 1$$

и при тоа $(x_2 - 1)(1 - x_1) = 0$ т.е. $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_k = x_{k+1} = 1$. ♦

Дефиниција 1. Нека се дадени n позитивни реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$. Броевите

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \ , \ (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{1/n} \ , \ \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}}$$

ги нарекуваме *аритметичка, геометриска и хармониска средина* на броевите $a_1, a_2, ..., a_n$, соодветно.

Теорема 1 (Неравенство на Коши). За аритметичката, геометриската и хармониската средина на позитивните реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ важи

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{1/n} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Доказ. Означуваме $_n = (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{1/n}$. Да ги разгледаме следниве n позитивни реални броеви $y_i = \frac{a_i}{_n}$, $i = 1, 2, ..., n$. За броевите y_i , $i = 1, 2, ..., n$ важи $\prod_{i=1}^{n} y_i = 1$, што според лема 2 значи $y_1 + y_2 + ... + y_n \geq n$, т.е.

$$\frac{a_1}{_n} + \frac{a_2}{_n} + ... + \frac{a_n}{_n} \geq n$$

односно $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{1/n}$. Притоа, знак за равенство важи ако и само ако $y_1 = y_2 = ... = y_n$ т.е. ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Од претходно изнесеното имаме:

$$\frac{1}{(\prod_{i=1}^{n} a_i)^{1/n}} = (\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n})^{1/n} \leq \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n} = \frac{1}{\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}}}$$

односно $(\prod_{i=1}^{n} a_i)^{1/n} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \ldots = \frac{1}{a_n}$ т.е. ако и само ако $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. ♦

Пример 4. Докажи дека за секој $x > 0$ и за секој $n \in \mathbf{N}$ важи неравенството

$$1 + \frac{x}{n} \geq \sqrt[n]{1+x}$$

Решение. Прв начин. За $x > 0$ и $n \in \mathbf{N}$ имаме $\frac{x}{n} > -1$. Од неравенството на Бернули добиваме:

$$(1+\frac{x}{n})^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x \text{ т.е. } 1 + \frac{x}{n} \geq \sqrt[n]{1+x}\ .$$

Втор начин. Од неравенството помеѓу аритметичка и геометриска средина, при $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 1$ и $x_n = 1 + x$ добиваме

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot (1+x)}$$

односно $1 + \frac{x}{n} \geq \sqrt[n]{1+x}$. ♦

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Докажи, дека за секој $n \in \mathbf{N}$ се точни равенствата:

   а) $1 + 3 + \ldots + (2n-3) + (2n-1) = n^2$, б) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

   в) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$, г) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1)n = \frac{n(n^2-1)}{3}$,

   д) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$, ѓ) $(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9}) \cdot \ldots \cdot (1-\frac{1}{(n+1)^2}) = \frac{n+2}{2n+2}$.

2. Докажи дека $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ koreni}} = 2\cos\frac{®}{2^{n+1}}$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

   Упатство. Искористи ги принципот на математичка индукција и тригонометрискиот идентитет $\cos\frac{\sim}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\sim}{2}}$, за $\sim = \frac{®}{2^{k+1}}$.

3. Докажи дека $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

4. Докажи дека за секој $n > 1$ се исполнети неравенствата:

а) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, б) $\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}<n$.

5. Докажи дека за секој природен број $n>3$ важи $n!>2^n$.

6. Броевите $a_n, n=1,2,3,\ldots$ се зададени со $a_1=1, a_2=1$ и $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, за $n>2$. Докажи дека $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$, за секој $n=1,2,3,\ldots$.

7. Докажи дека се точни неравенствата:

а) $n!<(\frac{n+1}{2})^n$, за $n>1$ б) $(n!)^2<(\frac{(n+1)(2n+1)}{6})^n$, за $n>1$

Упатство. а) Земи $a_i=i, i=1,2,\ldots,n$ и искористи ги неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и пример 1. *б)* Земи $a_i=i^2, i=1,2,\ldots,n$ и искористи ги неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и задача 1 б).

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија