Ирена Стојковска
Природно-математички факултет, Скопје

МЕТОД НА ОТСЕЧКИ

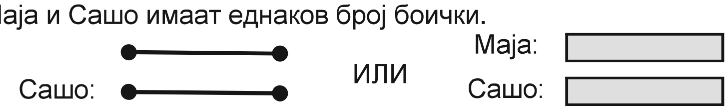
Методот на отсечки претставува визуелен приказ на количините и односите кои важат меѓу количините во една текстуална задача. За таа цел може да се користат отсечки или правоаголници со еднакви ширини, а чии должини одговараат на количината која ја претставуваат. Притоа, отсечките, односно правоаголниците кои одговараат на еднакви количини, пожелно е да се со иста боја, а правоаголниците да се со иста шара. На отсечките, односно на правоаголниците, кои претставуваат позната количина се запишува бројчаната вредност на количината. На овој начин, полесно се воочуваат врските кои важат меѓу количините, па следствено полесно се доаѓа до начинот на решавање на задачата и одредувањето на непознатата количина.

Во примерите кои следат, **аритметичкиот пристап подразбира цртеж и решавање на задачата без воведување променливи и него го препорачуваме за одделенска настава.** Методот на отсечки лесно се прилагодува на алгебарскиот пристап на решавање текстуални задачи со равенки. Алгебарскиот пристап ги подразбира цртежите, воведувањето променливи и решавањето равенки.

1. Задачи со четирите основни операции

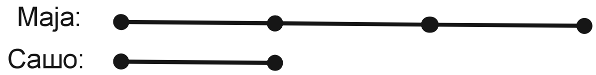
Најнапред ќе ги илустрираме на примери основните односи на количините претставени со помош на отсечки и правоаголници:

А. Маја и Сашо имаат еднаков број боички.

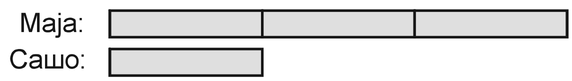


Б. Маја има 5 боички повеќе од Сашо. (Сашо има 5 боички помалку од Маја.)

В. Маја има 3 пати повеќе боички од Сашо. (Сашо има 3 пати помалку боички од Маја.)

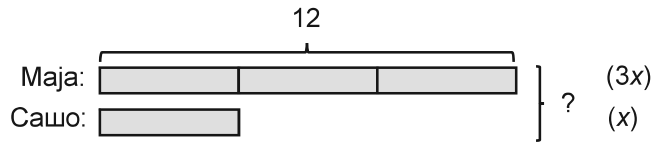


ИЛИ



Пример 1. Маја има 12 боички, а Сашо има 3 пати помалку боички од Маја. Колку вкупно боички имаат Маја и Сашо заедно?

Решение. Цртаме цртеж на кој единичната отсечка, односно правоаголник, се бројот на боички кои ги има Сашо. Тогаш, Маја има три такви единични правоаголници.



Аритметички пристап.

Маја има 12 боички, па должината на еден единичен правоаголник е 12 : 3 = 4, односно Сашо има 4 боички. Тогаш, Маја и Сашо заедно имаат 12 + 4 = 16 боички.

Алгебарски пристап.

x - боички на Сашо

$3x$ - боички на Маја

$3x = 12$

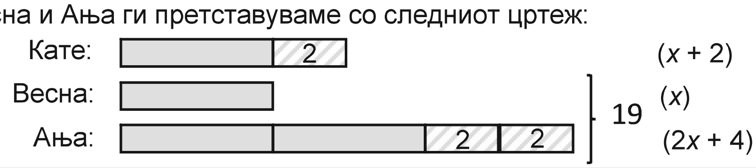
$x = 12 : 3 = 4$

Маја и Сашо заедно имаат:

$x + 3x = 4x = 4 \cdot 4 = 16$ боички.

Пример 2. Кате решила 2 задачи повеќе од Весна, а Ања решила 2 пати повеќе задачи од Кате. Ања и Весна заедно решиле 19 задачи. Колку повеќе задачи решила Ања од Кате?

Решение. Нека единичниот правоаголник се бројот на задачи кои ги решила Весна. Тогаш, бројот на задачи кои ги решиле Кате, Весна и Ања ги претставуваме со следниот цртеж:



Аритметички пристап. Прво ја наоѓаме должината на единичниот правоаголник со (19 – 2 · 2) : 3 = (19 – 4) : 3 = 15 : 3 = 5, што значи дека Весна решила 5 задачи. Кате решила 5 + 2 = 7 задачи, а Ања решила 2 · 5 + 2 · 2 = 10 + 4 = 14 задачи. Па, Ања решила 14 – 7 = 7 задачи повеќе од Кате.

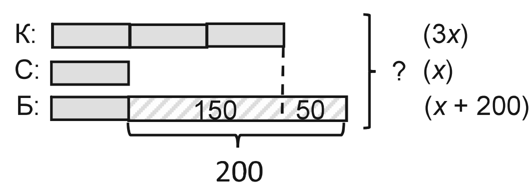
Алгебарски пристап.

x задачи решила Весна	$x+(2x+4)=19$
$(x+2)$ задачи решила Кате	$3x=15$
$(2x+4)$ задачи решила Ања	$x=15:3=5$

Ања решила $2x+4=2\cdot 5+4=10+4=14$ задачи, Кате решила $x+2=5+2=7$ задачи, значи Ања решила 14 – 7 = 7 задачи повеќе од Кате.

Пример 3. За една добротворна акција, Калина собрала 3 пати повеќе пари од Симона, Симона собрала 200 ден. помалку од Бисера, а Бисера собрала 50 ден. повеќе од Калина. Колку вкупно пари собрале трите другарки заедно?

Решение. Единичиот правоаголник се парите кои ги собрала Симона. Тогаш, според условите на задачата се добива следниот цртеж:



Аритметички пристап. Од цртежот гледаме дека вредноста на два единични правоаголници е 200 – 50 = 150, значи еден единичен правоаголник е 150 : 2 = 75, односно Симона собрала 75 ден. Калина собрала 3 · 75 = 225 ден., а Бисера собрала 75 + 200 = 275 ден. Сите три другарки заедно собрале 225 + 75 + 275 = 575 ден.

Алгебарски пристап.

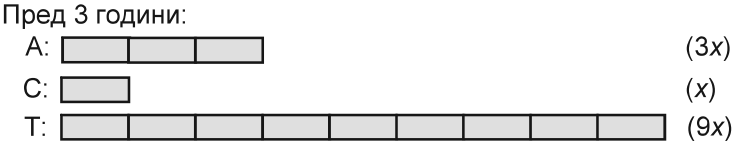
x пари на Симона	$(x+200)-50=3x$
$3x$ пари на Калина	$150=2x$
$(x+200)$ пари на Бисера	$x=150:2=75$

Значи, Симона собрала 75 ден., Калина собрала $3x = 3 \cdot 75 = 225$ ден., Бисера собрала $x + 200 = 75 + 200 = 275$ ден., а сите три другарки заедно собрале 225 + 75 + 275 = 575 ден.

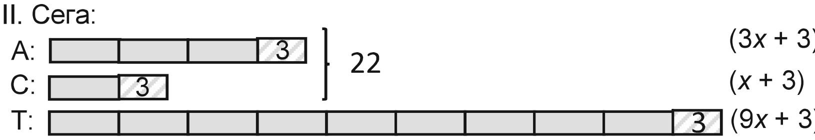
Пример 4. Пред 3 години Алек имал 3 пати повеќе години од сестра му, а 3 пати помалку години од татко му. Алек и сестра му сега имаат 22 години заедно. После колку години татко му на Алек ќе има 2 пати повеќе години од Алек?

Решение. На првиот цртеж ги претставуваме годините кои ги имале Алек (А), сестра му (С) и татко му (Т), пред 3 години, притоа единичниот правоаголник одговара на годините кои ги имала сестра му пред 3 години. На вториот цртеж ги претставуваме сегашните години на Алек, сестра му и татко му.

I. Пред 3 години:



II. Сега:



Аритметички пристап. Од вториот цртеж добиваме дека единичниот правоаголник е (22 – 2 · 3) : 4 = (22 – 6) : 4 = 16 : 4 = 4, што значи дека сега Алек има 3 · 4 + 3 = 12 + 3 = 15 години, сестра му има 4 + 3 = 7 години, а татко му има 9 · 4 + 3 = 36 + 3 = 39 години.

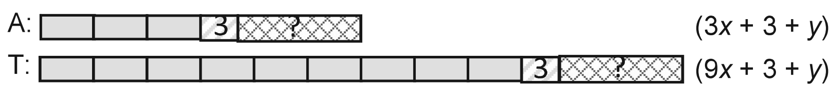
Алгебарски пристап.

x годините на сестрата пред 3 год.	$(3x+3)+(x+3)=22$
$3x$ годините на Алек пред 3 год.	$4x=16$
$9x$ годините на таткото пред 3 год.	$x=16:4=4$

Алек сега има $3x+3=3\cdot 4+3=12+3=15$ години, сестра му сега има $x+3=7$ години, а татко му сега има $9x+3=39$ години.

Понатаму, за да најдеме по колку години татко му на Алек ќе има 2 пати повеќе години од Алек, цртаме цртеж за годините на Алек и татко му после одреден број години.

III. По ? години:



Аритметички пристап. Бидејќи тогаш, татко му ќе има два пати повеќе години Алек, тоа значи дека, ако од годините на татко му ги одземеме годините на Алек (три единични правоаголници, еден кој одговара на 3 години и еден кој одговара на непознатиот број години), ќе добиеме 6 единични правоаголници кои одговаат на тогашните години на Алек. Значи, Алек ќе има 6 · 4 = 24 години. Алек сега има 15 години, што значи дека по 24 – 15 = 9 години, татко му ќе има два пати повеќе години од Алек. Проверка: Татко му сега има 39 години, па по 9 год. тој ќе има 39 + 9 = 48 год., што е два пати повеќе од 24 години, колку што ќе има Алек по 9 години.

Алгебарски пристап.

y години, за кои, таткото ќе биде 2 пати постар од Алек

$3x+3+y=12+3+y=15+y$ тогашните години на Алек

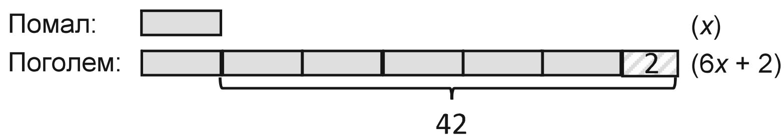
$9x+3+y=36+3+y=39+y$ тогашните години на татко му

$$39+y=2(15+y) \Rightarrow 39+y=30+2y \Rightarrow y=9$$

Значи, по 9 години татко му на Алек ќе биде 2 пати постар од Алек.

Пример 5. Разликата на два броја е 42. Кога поголемиот ќе се подели со помалиот се добива количник 6 и остаток 2. Кои се тие броеви?

Решение. Нека единичниот правоаголник одговара на помалиот број. За поголемиот број имаме дека се состои од 6 такви правоаголници и уште еден правоаголник кој одговара на големина 2. Исто така, поголемиот број е за 42 поголем од помалиот. Така, го добиваме цртежот:



Аритметички пристап.

Од цртежот наоѓаме дека вредноста на еден единичен правоаголник, односно помалиот број е (42 **–** 2) : 5 = 40 : 5 = 8. Тогаш, поголемиот број е 8 + 42 = 50.

Алгебарски пристап.

x - помалиот број

$6x+2$ - поголемиот број

$$(6x+2)-x=42$$

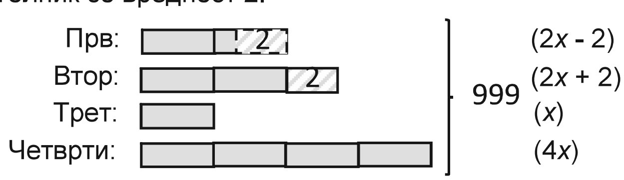
$$5x=40 \Rightarrow x=40:5=8$$

$$6x+2=6\cdot 8+2=50$$

Тие броеви се 50 и 8.

Пример 6. Збирот на четири природни броеви е 999. Ако првиот број го зголемиме за 2, вториот број го намалиме за 2, третиот го зголемиме 2 пати, а четвртиот го намалиме 2 пати, ќе добиеме еднакви броеви. За кои четири природни броеви станува збор?

Решение. Цртаме цртеж во кој единичниот правоаголник е третиот број. На цртежот, **отсуството на количина го претставуваме со испрекинати линии**, така првиот број се состои од два единични правоаголници, од кои е изваден правоаголник со вредност 2.



Аритметички пристап. Од цртежот се согледува дека збирот на сите четири броја е всушност еднаков на вредноста на 9 единични правоаголници (правоаголникот со вредност 2 кој е дел од вториот број, го надополнува првиот број до два единични правоаглници). Па затоа, вредноста на еден единичен правоаголник, односно третиот број е 999 : 9 = 111. Тогаш, првиот број е 2 · 111 – 2 = 220, вториот број е 2 · 111 + 2 = 224 и четвртиот број е 4 · 111 = 444.

Алгебарски пристап.

x - третиот број $(2x-2)+(2x+2)+x+4x=999$

$(2x-2)$ - првиот број $9x=999$

$(2x+2)$ - вториот број $x=111$

$4x$ - четвртиот број

Значи, третиот број е 111, првиот број е $2x-2=220$, вториот број е $2x+2=224$ и четвртиот број е $4x=444$.

Задачи за самостојна работа

1. Марко и Филип потрошиле заедно 1030 ден. за пазарување, при што Марко потрошил 110 ден. повеќе од Филип. Колку пари потрошил Марко?

2. Дедо Мите едно попладне собрал вкупно 245 овошки: јаболка, круши и сливи. Тој собрал 5 пати повеќе јаболка отколку круши. Собрал 70 сливи повеќе од круши. Колку повеќе јаболки од сливи собрал дедо Мите?

3. Мартин има 34 џамлии повеќе од Лука, Александар има два пати повеќе џамлии од Мартин, а Коста има 100 џамлии помалку од Александар. По колку џамлии има секој од другарите Лука, Мартин, Александар и Коста, ако сите четворица заедно имаат 214 џамлии?

4. Митко е четири пати постар од Стево, а е четири години помлад од Коста. Коста и Стево заедно имаат 49 години. Колку години ќе има Митко после 7 години?

5. Јас имам 4 пати повеќе години отколку што имала сестра ми кога била 2 пати помлада од мене. Колку години имам јас, а колку има сестра ми, ако за 15 години, ние заедно ќе имаме 100 години?

(продолжува во следниот број)

Извори:

[1] И. Стојковска, *Решавање текстуални задачи со метод на отсечки*, Есенска математичка школа 2019, СММ, октомври-ноември 2019.

[2] М. Шариќ, *Метода дужи*, Математички лист XLIV-3 (2009), 1-4.

[3] S.J.Choo, K.T.Hong, Y.S.Mei, J.Lim, *Singapore Model Method for Learning Mathematics*, Marshall Cavendish Education, 2009.

Ирена Стојковска,
Природно-математички факултет, Скопје

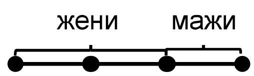
МЕТОД НА ОТСЕЧКИ

(продолжува од претходниот број)

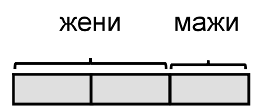
2. Задачи со дел од цело

На следниот цртеж е дадено претставување со отсечки, односно со правоаголници, на количини кои се дел од целина:

Во едно училиште 2/3 од вработените се жени, а останатите се мажи:

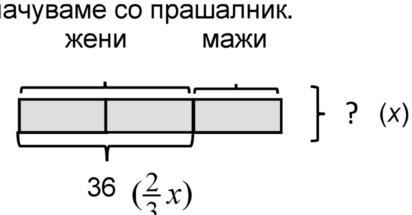


ИЛИ



Пример 1. Во едно училиште 2/3 од вработените се жени. 36 вработени се жени. Колку вкупно луѓе работат во училиштето?

Решение. Правоаголникот кој ги означува сите вработени во училиштето го делиме на 3 еднакви дела, така единичниот правоаголник е 1/3 од вкупниот број на вработени во училиштето. Два од деловите го претставуваат бројот на жените, а еден дел го претставува бројот на мажите. Исто така, на црежот означуваме дека 36 се жени, а количината која се бара, т.е. вкупниот број на вработени, ја означуваме со прашалник.



Аритметички пристап.
Бројот на вработени мажи во училиштето е 36 : 2 = 18, а вкупниот број на вработени (жени и мажи заедно) е
36 + 18 = 54.
Проверка: бројот на вработени жени е 2/3 од 54, односно
(54 : 3) · 2 = 18 · 2 = 36.

Алгебарски пристап.
x е вкупниот број вработени

$\frac{2}{3}x$ е бројот на жени

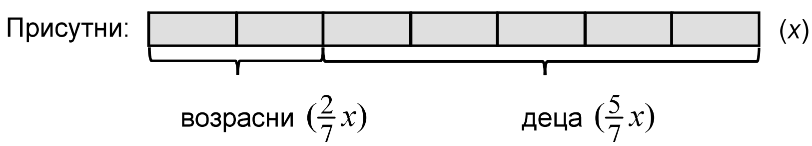
$$\frac{2}{3}x = 36$$

$$x = \frac{36 \cdot 3}{2} = \frac{108}{2} = 54$$

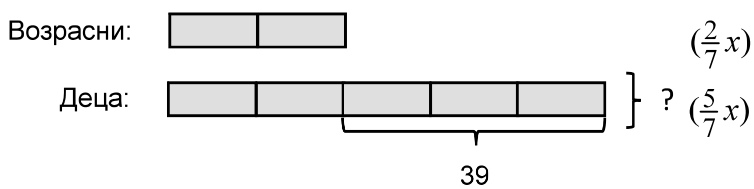
Во училиштето има 54 вработени.

Пример 2. Две седмини од луѓето присутни на една претстава за деца биле возрасни. Меѓу присутните имало за 39 повеќе деца од возрасни. Колку деца биле присутни на претставата?

Решение. На првиот цртеж, вкупниот број присутни го делиме на седум еднакви дела и означуваме два дела за возрасните, а останатите за децата. Единичниот правоаголник е 1/7 од вкупниот број луѓе присутни на претставата.



На вториот цртеж, го споредуваме бројот на деца и бројот на возрасни.



Аритметички пристап. Од цртежот гледаме дека вредноста на три единични правоаголници е 39, па вредноста на еден единичен правоаголник е 39 : 3 = 13. Тогаш, бараниот број деца присутни на претставата е 5 · 13 = 65.

Алгебарски пристап.

x луѓе присутни на претставата

$\frac{2}{7}x$ присутни возрасни

$x-\frac{2}{7}x=\frac{5}{7}x$ присутни деца

$$\frac{5}{7}x-\frac{2}{7}x=39$$

$$\frac{3}{7}x=39$$

$$x=\frac{39\cdot 7}{3}=\frac{273}{3}=91$$

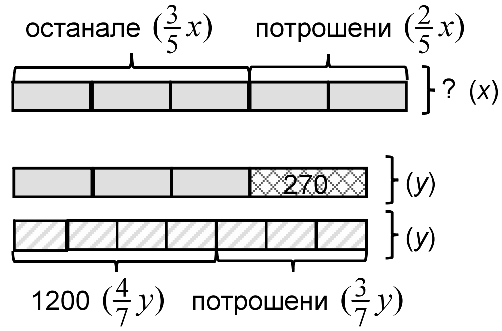
Значи, на претставата биле присутни 91 возрасни и деца, а меѓу нив имало $\frac{5}{7}x=\frac{5}{7}\cdot 91=\frac{455}{7}=65$ деца.

Пример 3. Јована имала одредена количина на пари. Потрошила 2/5 од парите. Следниот ден заработила 270 денари, а нешто подоцна потрошила 3/7 од парите. На крајот сепак ѝ останале 1200 денари. Колку пари имала Јована на почетокот?

Решение. Цртаме цртеж за состојбата на парите на Јована на почетокот на првиот ден и вториот ден по заработката од 270 денари. На почетокот на првиот ден единичниот правоаголник е 1/5 од почетните пари, а вториот ден по заработката од 270 ден., единичниот правоаголник е 1/7 од парите по заработката.

На почетокот на првиот ден:

Вториот ден по заработката од 270 ден.:



Аритметички пристап.

Од цртежот ја пресметуваме вредноста на вториот единичен правоаголник 1200 : 4 = 300 денари, од каде вториот ден, по заработката од 270 денари, Јована имала 7 · 300 = 2100 денари. Значи, на почетокот на вториот ден пред да заработи 270 денари, имала 2100 – 270 = 1830 денари, а тоа е вредноста на три единични правоаголници од првиот вид. Вредноста на првиот единичен правоаголник е 1830 : 3 = 610 денари, од каде на почетокот на првиот ден Јована имала 5 · 610 = 3050 денари.

Алгебарски пристап.

x денари имала Јована на почеток

$x-\frac{2}{5}x=\frac{3}{5}x$ денари ѝ останале откако потрошила 2/5 од нив

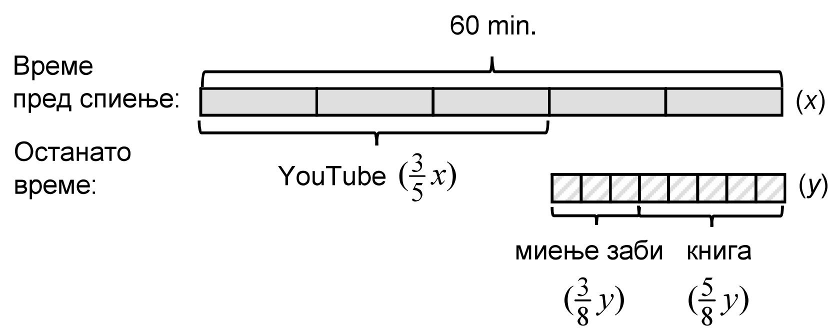
$y=\frac{3}{5}x+270$ денари после заработката од 270 денари

$y-\frac{3}{7}y=\frac{4}{7}y$ денари ѝ останале откако потрошила 3/7 од нив

Од $\frac{4}{7}y = 1200$ следи $y = \frac{1200 \cdot 7}{4} = \frac{8400}{4} = 2100$. Бидејќи $y = \frac{3}{5}x + 270$, имаме $\frac{3}{5}x + 270 = 2100$. Решаваме $\frac{3}{5}x = 1830$ и добиваме $x = \frac{1830 \cdot 5}{3} = \frac{9150}{3} = 3050$ денари.

Пример 4. Јана има секојдневна рутина еден час пред спиење: 3/5 од времето Јана го поминува во гледање видеа на омилениот YouTube канал, 3/8 од преостаното време го поминува во миење на забите и облекување на пижами. Останатото време Јана чита книга пред спиење. Колку време Јана чита книга пред спиење?

Решение. Времето пред спиење од 1 час, т.е. 60 минути го претставуваме со правоаголник кој го делиме на 5 еднакви дела, еден дел е еден единичен правоаголник. Три единични правоаголници одговараат на времето поминато на YouTube, а остатокот од времето го делиме на 8 еднакви дела, еден дел е еден единичен правоаголник од втор вид, при што три такви единични правоаголници од втор вид одговараат на времето поминато во миење заби и облекување пижами.



Аритметички пристап. Прво, ја наоѓаме вредноста на еден единичен правоаголник од прв вид, т.е. 60 : 5 = 12 минути. Останатото време по гледање видеа на YouTube е два единични правоаголника од прв вид, т.е. 2 · 12 = 24 минути. Тогаш, вредноста на еден единичен правоаголник од втор вид е 24 : 8 = 3 мин. Времето кое Јана чита книга е претставено со 5 единични правоаголници од втор вид, значи Јана чита книга 5 · 3 = 15 мин.

Алгебарски пристап.

$x = 60$ мин. времето пред спиење

$\frac{3}{5}x$ минути е времето поминато во гледање на YouTube видеа

$y = x - \frac{3}{5}x = \frac{2}{5}x$ минути е времето за миење заби и читање книга

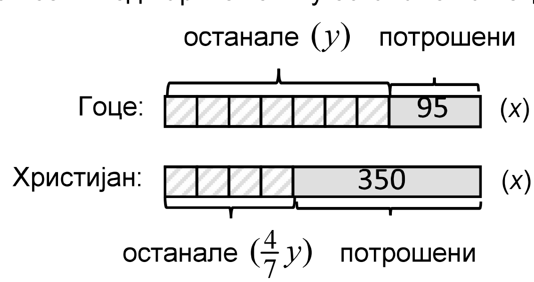
$\frac{3}{8}y$ минути е времето за миење заби

Времето кое Јана го поминува во читање книга е

$$y - \frac{3}{8}y = \frac{5}{8}y = \frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5}x = \frac{1}{4}x = \frac{1}{4}\cdot 60 = 15 \text{ мин.}$$

Пример 5. Гоце и Христијан имале иста количина на пари. Откако Гоце потрошил 95 денари, а Христијан потрошил 350 денари, на Христијан му останале пари кои се 4/7 од парите кои му останале на Гоце. Колку пари му останале на Гоце по пазарувањето?

Решение. Цртаме цртеж на кој парите на Гоце и Христијан пред пазарувањето ги претставуваме со правоаголници со иста големина, а откако ќе ги означиме деловите кои одговараат на потрошените пари, деловите кои ги претставуваат парите кои им останале треба да се составени од единични правоаголници, и тоа кај Гоце 7, а кај Христијан 4, за да парите кои му останале на Христијан се 4/7 од парите кои му останале на Гоце.



Аритметички пристап.

Од цртежот гледаме дека три единични правоаголници одговараат на разликата од потрошените пари на Христијан и Гоце т.е. 350 – 95 = 255, па вредноста на еден единичен правоаголник е 255 : 3 = 85. Значи, по пазарувањето, на Гоце му останале 7 · 85 = 595 ден.

Алгебарски пристап.

x - пари кои ги имале Гоце и Христијан на почетокот

$y = x - 95$ - пари кои му останале на Гоце по трошењето

$x - 350$ - пари кои му останале на Христијан по трошењето

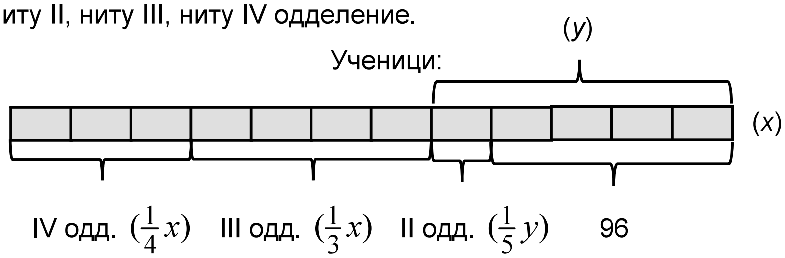
$$x - 350 = \frac{4}{7}y \;\Rightarrow\; x - 350 = \frac{4}{7}(x - 95) \;\Rightarrow\; 7x - 2450 = 4x - 380$$

$\Rightarrow\; 3x = 2070 \;\Rightarrow\; x = 2070 : 3 = 690$ ден.

По пазарувањето на Гоце му останале 690 - 95 = 595 ден.

Пример 6. На училишниот излет 1/4 од учениците биле ученици од 4 одделение, 1/3 од учениците биле ученици од 3 одделение и 1/5 од останатите ученици биле од 2 одделение. Колку вкупно ученици биле на излетот, ако на излетот имало 96 ученици кои не се ниту второ, ниту трето ниту четврто одделение?

Решение. Правоаголникот кој ги претставува сите ученици го делиме на 12 еднакви делови, значи еден дел е еден единичен правоаголник. Бидејќи 1/4 од 12 = 12 : 4 = 3, а 1/3 од 12 = 12 : 3 = 4, затоа 3 од тие делови ги претставуваат учениците од IV одделение, а 4 од тие делови ги претставуваат учениците од III одделение. Остануваат 12 **–** (3 + 4) = 12 **–** 7 = 5 делови. Бидејќи 1/5 од остатокот се ученици од II одделние, значи, еден дел одговара на учениците од II одделение. Четирите дела кои остануваат одговараат на преостанатите 96 ученици кои не се ниту II, ниту III, ниту IV одделение.



Аритметички пристап. Вредноста на единичниот правоаголник е 96 : 4 = 24, па на излетот биле вкупно 12 · 24 = 288 ученици.

Алгебарски пристап.

x - вкупен број ученици на излетот	$y - \frac{1}{5}y = 96$
$\frac{1}{4}x$ - ученици од IV одд.	$\frac{4}{5}y = 96$
$\frac{1}{3}x$ - ученици од III одд.	$y = \frac{96 \cdot 5}{4} = \frac{480}{4} = 120$

$y = x - (\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x) = x - \frac{7}{12}x = \frac{5}{12}x$ $\qquad$ $\frac{5}{12}x = 120$

$\frac{1}{5}y$ - ученици од II одд. $\qquad$ $x = \frac{120 \cdot 12}{5} = \frac{1440}{5} = 288$

Значи, на излетот биле вкупно 288 ученици.

Задачи за самостојна работа

1. 7/9 од отпечатениот тираж на списанието „Нумерус" биле продадени уште во првиот месец. Останале 800 броја непродадени. Колкав бил тиражот на списанието?

2. Александар добил одредена сума пари од баба му. Потрошил 500 ден. и на Бојан му дал 1/3 од парите кои му останале. Бојан потрошил 20 ден. и на Кирил му дал 3/4 од парите кои му останале. Кирил потрошил 60 ден. и на Дејан му дал 3/5 од парите кои му останале. Ако Дејан добил 270 ден. од Кирил, колку пари добил Александар од баба му?

3. На морскиот брег биле собрани јато пеликани. 1/3 од пеликаните биле кафеави, а останатите бели. Откако неколку кафеави пеликани одлетале, само 2/7 од пеликаните кои останале биле кафеави. Откако неколку бели пеликани одлетале, од пеликаните кои останале 2/3 биле бели. Ако разликата на бројот на кафеави пеликани кои одлетале и бројот на бели пеликани кои одлетале е 6, колкав бил бројот на кафеави пеликани кои на почетокот биле на морскиот брег?

Извори:

[1] И. Стојковска, *Решавање текстуални задачи со метод на отсечки*, Есенска математичка школа 2019, СММ, октомври-ноември 2019.

[2] М. Шариќ, *Метода дужи*, Математички лист XLIV-3 (2009), 1-4.

[3] S.J.Choo, K.T.Hong, Y.S.Mei, J.Lim, *Singapore Model Method for Learning Mathematics*, Marshall Cavendish Education, 2009.

Статијата прв пат е објавена во списанието НУМЕРУС кое го издава Сојузот на математичарите на Македонија