Методи Главче
Скопје

ЗАНИМЛИВОСТИ СО БРОЕВИ

а) *Математички миракули*. Во литературата која се однесува на таканаречената забавна математика често пати се наведуваат извесни „волшебни својства на броевите“, меѓу кои се и таканаречени „математички миракули“ кои се состојат во тоа што како резултат на некои пресметувања се добиваат броеви со необиучни својства.

Својствата на бројот 9 често пати се основа за многу интересни равенства. Така, на пример, ако го искористиме равенството

$$
\begin{aligned}
(10^{n-1}+2\cdot 10^{n-2}+3\cdot 10^{n-3}+...+r\cdot 10^{n-r}+...+n)\cdot(10-1)+(n+1)= \\
=10^{n}+2\cdot 10^{n-1}+3\cdot 10^{n-2}+...+r\cdot 10^{n-r+1}+...+n\cdot 10- \\
-10^{n-1}-2\cdot 10^{n-2}-...-(r-1)\cdot 10^{n-r+1}-...-n+n+1 \\
=10^{n}+10^{n-1}+10^{n-2}+...+10^{n-r+1}+...+10+1=\underbrace{11...11}_{n+1}
\end{aligned}
$$

со замена за $n=1,2,3,4,5,6,7,8,9$ ги добиваме равенствата:

$$
\begin{gathered}
1\cdot 9+2=11 \\
12\cdot 9+3=111 \\
123\cdot 9+4=1111 \\
1234\cdot 9+5=11111 \\
12345\cdot 9+6=111111 \\
123456\cdot 9+7=1111111 \\
1234567\cdot 9+8=11111111 \\
12345678\cdot 9+9=111111111 \\
123456789\cdot 9+10=1111111111
\end{gathered}
$$

Друга интересна низа равенства е следнава:

$$
\begin{gathered}
11^{2}=121 \\
101^{2}=10201 \\
1001^{2}=1002001 \\
10001^{2}=100020001 \\
100001^{2}=10000200001 \\
1000001^{2}=1000002000001 \\
....
\end{gathered}
$$

На прв поглед правилноста која се појавува може да ни изгледа неочекувана. Меѓутоа, како и претходно, горните равенства имаат едноставен математички доказ. Навистиана, ако искористиме дека

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (1)$$

и дека основите на степените кои се на левите страни од горните равенства се броеви од видот $1\underbrace{00...00}_{k-1}1 = 10^k + 1,\ k = 1,2,3,4,...$, тогаш добиваме

$$1\underbrace{00...00}_{k-1}1^2 = (10^k+1)^2 = (10^k)^2 + 2\cdot 10^k + 1 = 10^{2k} + 2\cdot 10^k + 1$$

$$= 1\underbrace{00...00}_{k-1}2\underbrace{00...00}_{k-1}1$$

На потполно ист начин, но користејќи го равенството

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

и броевите $1\underbrace{00...00}_{k-1}1 = 10^k + 1,\ k = 1,2,3,4,...$ се добиваат равенствата:

$$11^3 = 1331$$
$$101^3 = 1030301$$
$$1001^3 = 1003003001$$
$$10001^3 = 1000300030001$$
$$100001^3 = 1000030000300001$$
$$1000001^3 = 1000003000003000001$$
$$..$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Покрај наведените, интересни се и следниве равенства:

$$123456789\cdot 9 = 1111111101$$
$$123456789\cdot 18 = 2222222202$$
$$123456789\cdot 27 = 3333333303$$
$$123456789\cdot 36 = 4444444404$$
$$123456789\cdot 45 = 5555555505$$
$$123456789\cdot 54 = 6666666606$$
$$123456789\cdot 63 = 7777777707$$
$$123456789\cdot 72 = 8888888808$$
$$123456789\cdot 81 = 9999999909$$

Обиди се на сличен начин како погоре овие равенства да ги добиеш од општ израз.

Кога сме кај миракулите поврзани со степени на природни броеви, интересни се и следниве равенства:

$$9^2 = 81$$
$$99^2 = 9801$$
$$999^2 = 998001$$
$$9999^2 = 99980001$$
$$99999^2 = 9999800001$$
$$999999^2 = 999998000001$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Како и претходно, и во овој случај наведените равенства едноставно се докажуваат. Во овој случај треба да искористиме дека $\underbrace{99...99}_{k} = 10^k - 1$, за $k = 1,2,3,4,...$ и равенството (1).

б) *Едно својство на трицифрените броеви*. Нека е даден трицифрен број запишан со различни цифри. Од цифрите на бројот ги формираме најголемиот и најмалиот можен трицифрен број и потоа ја пресметуваме нивната разлика. Со новодобиениот број ја повторуваме постапката (ако разликата е двоцифрен број на првото место ставаме 0). По најмногу шест чекори го добиваме бројот 495, без разлика на изборот на почетниот број. Нека цифрите на избраниот број се A, B, C $(A < B < C)$. Тогаш, во првиот чекор добиваме

$$\overline{ABC} - \overline{CBA} = 100A + 10B + C - (100C + 10B + A) = 99(A - C)\,.$$

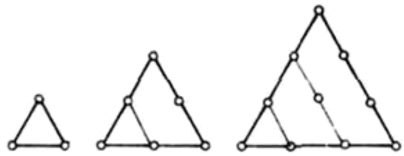
Бидејќи $A - C \in \{9,8,7,6,5,4,3,2,1\}$, добиената разлика е еден од броевите 891, 792, 693, 594, 495, 396, 297, 198 и 99. Со оглед на постапката која ја користиме, во следните разгледувања треба да испитаме само пет броја, бидејќи паровите кои може да се формираат од добиените девет броеви се: 990 и 099, 981 и 189, 972 и 279, 963 и 369, 954 и 459 и притоа имаме:

$$990 - 099 = 891,$$
$$981 - 189 = 792,$$
$$972 - 279 = 693,$$
$$963 - 369 = 594,$$
$$954 - 459 = 495.$$

Според тоа, во последниот од наведените случаи веќе во вториот чекор се јавува бројот 495. Понатаму, во останатите четири случаи ги имаме паровите: 981 и 189, 972 и 279, 963 и 369, 954 и 459, по што ги добиваме броевите 792, 693, 594 и 495. Во следниот чекор ги имаме паровите 972 и 279, 963 и 369, 954 и 459, по што ги добиваме броевите 693, 594 и 495. Во следниот чекор ги имаме паровите 963 и 369, 954 и 459, по што ги добиваме броевите 594 и 495. На крајот, т.е. најкасно во шестиот чекор, го имаме парот 954 и 459, по што го добиваме бројот 495.

в) *Полигонални броеви.* Математичарите од стариот век разгледувале интересни својства на природните броеви, па така според откриените својства некои броеви ги нарекувале *совршени*, некои парови броеви ги нарекувале *пријателски* итн. Меѓу другото тие ги разгледувале и таканаречените *полигонални броеви* (триаголни, четириаголни, петаголни итн. броеви).

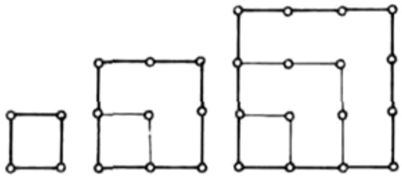
Триаголни броеви се бројот бројот 1 и бројот на точките на краевите на еднаквите отсечки од кои се составени страните на секој од рамностраните триаголници на цртежот десно. Според тоа, последователните триаголни броеви се:



$$1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, \dots.$$

Сега, ако се земе предвид дека $(k+1)-$тиот триаголник се добива од $k-$тиот со додавање на страна на која има $k+1$ точка, добиваме дека триаголните броеви се зададени со $t_1=1$ и $t_{k+1}=t_k+k+1$, за $k=1,2,\dots$. Оттука лесно се добива дека $t_k=1+2+\dots+k=\frac{k(k+1)}{2}$, за $k=1,2,\dots$.

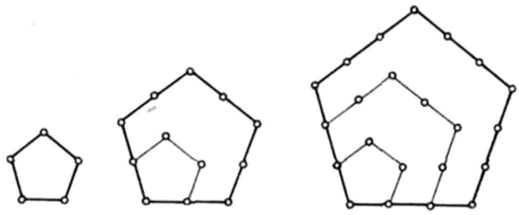
Четириаголни (*квадратни*) *броеви* се бројот бројот 1 и бројот на точките на краевите на еднаквите отсечки од кои се составени страните на секој квадрат на цртежите десно. Според тоа, последователните квадратни броеви се:



$$1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, \dots.$$

Сега, ако се земе предвид дека $(n+1)-$тиот квадрат се добива од $n-$тиот со додавање на две страни на кои вкупно има $2n+1$ точка, добиваме дека квадратните броеви се зададени со $k_1=1$ и $k_{n+1}=k_n+2n+1$, за $n=1,2,\dots$. Оттука лесно се добива дека $k_n=1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$, за $n=1,2,\dots$.

Петаголни броеви се бројот бројот 1 и бројот на точките на краевите на еднаквите отсечки од кои се составени страните на секој правилен петаголник на цртежите десно. Според тоа, последователните петаголни броеви се:



$$1, 1+4, 1+4+7, 1+4+7+10, \dots .$$

Сега, ако се земе предвид дека $(k+1)-$тиот петаголник се добива од $k-$тиот со додавање на три страни на кои вкупно има $3k+1$ точка, добиваме дека петаголните броеви се зададени со $t_1=1$ и $t_{k+1}=t_k+3k+1$, за $k=1,2,\dots$. Оттука лесно се добива дека

$$\begin{aligned}p_k &= 1+4+7+\dots+3k-2\\ &=(3\cdot1-2)+(3\cdot2-2)+(3\cdot3-2)+\dots+(3k-2)\\ &=3(1+2+\dots+k)-2k=\frac{3k(k+1)}{2}-2k\\ &=\frac{3k^2+3k-4k}{2}=\frac{k(3k-1)}{2},\end{aligned}$$

т.е. $p_k=\frac{k(3k-1)}{2}$, за $k=1,2,\dots$.

На сличен начин се дефинираат шестаголните и седумаголните броеви. Притоа се добива дека *шестаголните броеви* се 1, 6, 15, 28, 45, ... и истите се задаваат со $a_1=1$ и $a_{k+1}=a_k+4k+1$, за $k=1,2,\dots$. Понатаму, *седумаголните броеви* се 1, 7, 18, 34, 55, ... и истите се заадаваат со $b_1=1$ и $b_{k+1}=b_k+5k+1$, за $k=1,2,\dots$. На читателот за вежба му препуштаме за шестаголните и седумаголните броеви да ги нацрта соодветните цртежи и да ги определи формулите за пресметување на истите.

Со полигоналните броеви се занимавале и најголемите математичари на средниот и новиот век. Така, знаменитиот француски математичар Пјер Ферма ја формулирал следнава теорема: *Секој природен број е или триаголен број, или збир на* 2 *или* 3 *триаголни броја; или квадратен број, или збир на* 2 *или* 3 *или* 4 *квадратни броја; или петаголен број, или збир на* 2 *или* 3 *или* 4 *или* 5 *петаголни броја*; *итн*. Самиот Ферма не успеал да ја докаже оваа теорема, а не успеале ниту некои други познати математичари, меѓу кои се Ојлер, Лагранж, Гаус и Лежандр, кои се обиделе истата да ја докажат. Но, теоремата сепак е докажана и тоа на почетокот на деветнаесеттиот век од страна на францускиот математиучар Коши.