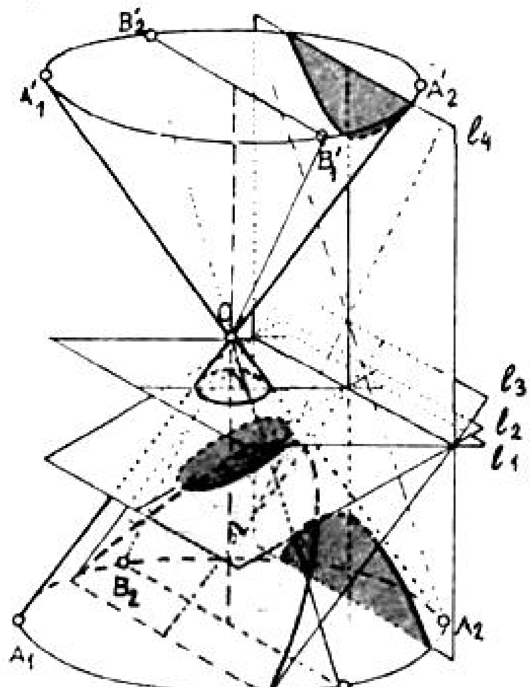
Платон Димић

ЧЕТИРИ ЗНАЧАЈНЕ КРИВЕ ЛИНИЈЕ

Познато је да су у практичном животу најчешће помињане криве линије кружница, елипса, парабола и хипербола. Нема човека који не зна шта је кружница (која се у обичном говору често назива кругом), многи имају бар углавном јасну представу о облику елипсе и параболе, а није реткост да је и мање школован човек чуо за хиперболу, иако обично не зна каква је то крива. Но, ове четири криве не само што се чешће него друге срећу на техничким цртежима, орнаментима и сл., него су и далеко дубље међусобно повезане тиме што се све оне могу добити као пресеци једне тзв. двојне конусне површи и равни.

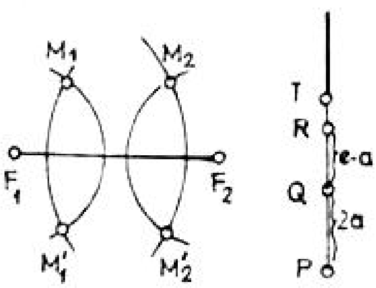
Нека је $A_1B_1A_2B_2OA_1'B_1'A_2'B_2'$ слика једног правог кружног двојног конуса (сл. 1) и нека је α угао који свака изводница овог конуса заклапа са осом конуса. Нека је, даље, p права паралелна са пречницима B_1B_2 и $B_1'B_2'$ основа овог конуса и нека су l_1, l_2, l_3 и l_4 равни које пролазе кроз праву p и заклапају, редом, са осом углове величине $\alpha_1 = 90°$, $\alpha < \alpha_2 < 90°$, $\alpha_3 = \alpha$ и $0 < \alpha_4 < \alpha$, као што је то представљено на сл. 1. Тада прва од ових равни сече омотач конуса по кругу; друга од њих га сече по елипси; трећа га сече по луку параболе; а четврта га сече по луцима хиперболе — од којих су прве две криве у потпуности представљене на сл. 1, док су друге две од њих представљене само делимично, пошто се неограничено пружају по двојној конусној површи којој припада омотач двојног конуса $A_1B_1A_2B_2OA_1'B_1'A_2'B_2'$.



Сл 1.

Тачнија представа о овим кривима може се добити ако се од пластелина начини макар само један прав кружни конус и дуж AA_1, и добијеним отвором шестара опишимо кружни лук око жиже F. Тачке у којима овај лук пресеца праву l припадаће траженој параболи, јер ће оне бити удаљене колико од жиже F, толико и од праве d.

Повучемо ли још неколико правих, паралелних са правом d, и поновимо ли горњи поступак, можемо одредити произвољно велики број тачака тражене нараболе. Спајањем тачака добијених на овај начин добија се приближно парабола.



Сл. 8

Напослетку, да видимо како можемо да одредимо тачке које припадају хиперболи, одређеној помоћу њеног жижног растојања $F_1F_2=2e$ и сталне разлике одстојаља сваке њене тачке од жижа, растојања $2a$. Ради тога је ротребно да нацртамо две тачке F_1 и F_2 на међусобном растојању $2e$ и једну дуж PQ, дужине $2a<2e$ (сл. 8). Означимо на полуправој PQ (са почетком у тачки P) тачку R, такву да је $QR=e-a$ и изаберимо на тој полуправој неку произвољну тачку T, но тако да се она налази ван одсечка PR. Напослетку, опишимо око тачака F_1 и F_2 по један кружни лук полупречника PT и по један кружни лук полупречника QT. У пресецима свака она два лука, од којих је један описан полупречником PT, а други описан полупречником QT, добићемо по 2 тачке које припадају траженој хиперболи. Разлика одстојања сваке од тих тачака од жижа F_1 и F_2 биће, наиме, $2a$.

Мењајући положај тачке T на полуправој PQ можемо конструисати произвољан број тачака тражене хиперболе. Спајањем добијених тачака на овај начин добија се приближно хипербола.

Задаци

1. Уз претпоставку да је $a=5$ и $e=4$ конструисати $4.4=16$ тачака елипсе. Које ће се тачке добити ако се за дужину једног потега узме $a-e$ а које ако се узме да је дужина потега a? Зашто не вреди ни покушавати да се добије тачка елипсе ако се претпостави да је дужина једног од потега мања од $a-e$?

2. Дуж A_1A_2 (сл. 3) назива се великом осом елипсе, а дуж која се налази на њеној симетрали и спаја две тачке елипсе назива се малом осом елипсе. Дужина мале осе обележава се са $2b$. Одредити везу између a, e и b.

3. Конструисати праболу код које је $p=4$. Тачка која је најближа директриси параболе назива се њеним теменом. Колико је удаљено теме параболе од директрисе?

4. Уз претпоставку да је $a=3$, $e=4$ конструисати $4.4=16$ тачака хиперболе. Зашто не вреди ни покушавати да се добије тачка хиперболе ако се претпостави да је један од потега мањи од $e-a$?

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија