ШЕСТИ СЕМИНАР „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНИ“, 17 МАРТ 2023
ИНСТИТУТ ЗА МАТЕМАТИКА
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“, СКОПЈЕ

СТРОГО КОНВЕКСНИ И РАМНОМЕРНО КОНВЕКСНИ НОРМИРАНИ ПРОСТОРИ

Ристо Малчески
Самоил Малчески

СТРОГО КОНВЕКСНИ И РАМНОМЕРНО КОНВЕКСНИ НОРМИРАНИ ПРОСТОРИ

Ристо Малчески [1], Самоил Малчески [2]

Абстракт. Изучувањето на строго конвексните и рамномерно конвексните нормирани простори е важно за осознавањето на геометриската структура на нормираните простори. Оттука, од посебен интерес е наоѓањето на потребни и доволни услови за да еден нормиран простор биде строго конвексен, односно рамномерно конвексен. Токму карактеризациите на строго конвексните и рамномерно конвексните нормирани простори и презентирањето на соодветни примери е основната цел на овој стручен труд.

1. ВОВЕД

1.1. Дефиниција. Нека L е реален векторски простор и $||\cdot||$ е реална функција на L за која важи:

i) $||a||\geq 0$, за секои $a\in L$ и $||a||=0$ ако и само ако $a=0$;

ii) $||\sim a||=|\sim|\cdot||a||$, за секој $a\in L$ и за секој $\sim\in\mathbb{R}$,

iii) $||a+b||\leq||a||+||b||$, за секои $a,b\in L$.

Функцијата $||\cdot||$ се нарекува *норма* на L, а $(L,||\cdot||)$ се нарекува *нормиран простор*. Неравенството *iii*) е познато како *неравенство на триаголник*.

1.2. Теорема. Нека $(L,||\cdot||)$ е нормиран простор и $x_i\in L$, $i=1,...,n$.

а) Ако $\sim_i\geq 0, i=1,2,...,n$, тогаш

$$||\sim_1 x_1+\sim_2 x_2+...+\sim_n x_n||\leq\sim_1||x_1||+\sim_2||x_2||+...+\sim_n||x_n||. \qquad (1)$$

б) Ако $\sim_1>0$ и $\sim_i\leq 0$, за $i=2,3,...,n$, тогаш

$$||\sim_1 x_1+\sim_2 x_2+...+\sim_n x_n||\geq\sim_1||x_1||+\sim_2||x_2||+...+\sim_n||x_n||. \qquad (2)$$

Доказ. а) Непосредно следува од аксиомите *ii*) и *iii*) во дефиниција 1 и принципот на математичка индукција.

б) Од неравенството (1) следува неравенството

$$\begin{aligned}||\sim_1 x_1|| &= ||\sim_1 x_1+\sim_2 x_2+...+\sim_n x_n-(\sim_2 x_2+...+\sim_n x_n)||\\ &\leq||\sim_1 x_1+\sim_2 x_2+...+\sim_n x_n||+||-(\sim_2 x_2+...+\sim_n x_n)||\\ &\leq||\sim_1 x_1+\sim_2 x_2+...+\sim_n x_n||+(-\sim_2)||x_2||+...+(-\sim_n)||x_n||\end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството (2). ■

1.3. Забелешка. Ако во неравенството (1) ставиме $\sim_i=1, i=1,...,n$ добиваме дека за секои $x_i\in L$, $i=1,...,n$ точно е неравенството

$$||x_1+x_2+...+x_n||\leq||x_1||+||x_2||+...+||x_n||. \qquad (3)$$

1.4. Теорема. Нека $(L,||\cdot||)$ е нормиран простор и $x_i\in L$, $i=1,2,...,n$. Тогаш

$$||x_1+x_2+...+x_n||=||x_1||+||x_2||+...+||x_n||, \qquad (4)$$

ако и само ако

$$||\sim_1 x_1+\sim_2 x_2+...+\sim_n x_n||=\sim_1||x_1||+\sim_2||x_2||+...+\sim_n||x_n||, \qquad (5)$$

за секои $\sim_i > 0, i = 1, 2, ..., n$.

Доказ. Ако за секои $\sim_i > 0, i = 1, 2, ..., n$ е точно равенството (5), тогаш ставаме $\sim_i = 1, i = 1, 2, ..., n$ и го добиваме равенството (4).

Обратно, нека е исполнето равенството (4) и нека $\sim_i > 0, i = 1, 2, ..., n$. Без ограничување на општоста можеме да земеме $\sim_1 = \max\limits_{1 \le i \le n} \sim_i$. Тогаш од равенството (4) и од теорема 1.2 следува

$$\sum_{i=1}^{n} \sim_i \| x_i \| = \sim_1 \sum_{i=1}^{n} \| x_i \| - \sum_{i=1}^{n} (\sim_1 - \sim_i) \| x_i \| = \sim_1 \| \sum_{i=1}^{n} x_i \| - \sum_{i=1}^{n} (\sim_1 - \sim_i) \| x_i \|$$

$$\le \| \sim_1 \sum_{i=1}^{n} x_i \| - \| \sum_{i=1}^{n} (\sim_1 - \sim_i) x_i \| \le \| \sim_1 \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} (\sim_1 - \sim_i) x_i \| = \| \sum_{i=1}^{n} \sim_i x_i \| .$$

Конечно, од последното неравенство и од неравенството (1) следува равенството (5). ■

2. СТРОГО КОНВЕКСЕН НОРМИРАН ПРОСТОР. ЕЛЕМЕНТАРНИ КАРАКТЕРИЗАЦИИ

2.1. Важен дел од осознавањето на геометриската структура на нормираните простори е изучувањето на строго конвексните нормирани простори, кои се дефинираат како што следува.

Дефиниција. Нормираниот простор $(L, \| \cdot \|)$ го нарекуваме *строго конвексен* ако од $\| x \| = \| y \| = 1$ и $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$, за $x, y \in L$, следува $x = y$.

2.2. Теорема. За нормираниот простор $(L, \| \cdot \|)$ следните тврдења се еквивалентни:

i) $(L, \| \cdot \|)$ е строго конвексен,

ii) Ако $\| x \| = \| y \| = 1$, $x \ne y$, тогаш $\| \frac{1}{2}(x + y) \| < 1$.

Доказ. *i*) $\Rightarrow$ *ii*). Нека $\| x \| = \| y \| = 1$, $x \ne y$. Тогаш од неравенството на триаголник следува

$$\| \tfrac{1}{2}(x + y) \| \le \tfrac{1}{2} \| x \| + \tfrac{1}{2} \| y \| = 1 .$$

Ако $\| \frac{1}{2}(x + y) \| = 1$, тогаш $\| x + y \| = 2 = \| x \| + \| y \|$ и како L е строго конвексен добиваме $x = y$, што е противречност. Значи, $\| \frac{1}{2}(x + y) \| < 1$.

ii) $\Rightarrow$ *i*). Нека $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$ и $\| x \| = \| y \| = 1$. Ако $x \ne y$, тогаш

$$1 > \| \tfrac{1}{2}(x + y) \| = \tfrac{1}{2} \| x + y \| = \tfrac{1}{2} \| x \| + \tfrac{1}{2} \| y \| = 1 ,$$

што е противречност. Значи, $x = y$, т.е. $(L, \| \cdot \|)$ е строго конвексен. ■

2.3. Важна класа нормирани простори се предхилбертовите простори за кои е точна следнава торема.

Теорема. Предхилбертов простор е строго конвексен.

Доказ. Нека L е предхилбертов простор и нека $x, y \in L$ се такви што $\| x \| = \| y \| = 1$, $x \ne y$. Тогаш од равенството на паралелограм следува

$$\| \tfrac{x+y}{2} \|^2 + \| \tfrac{x-y}{2} \|^2 = 1. \qquad (1)$$

Но, $x \neq y$, па затоа $\| \frac{x-y}{2} \| > 0$ и од равенството (1) следува $\| \frac{x+y}{2} \| < 1$. Конечно, од теорема 2.2 следува дека L е строго конвексен. ■

2.4. Пример. Во множеството од ограничени низи реални броеви l^∞ со

$$\| x \| = \sup_{i \in \mathbb{N}} | x_i |, \; x = (x_i)_{i=1}^\infty \in l^\infty$$

е дефинирана норма, што значи дека $(l^\infty, \| \cdot \|)$ е реален нормиран простор. За векторите

$$x = (1 - \tfrac{1}{2}, 1 - \tfrac{1}{2^2}, \ldots, 1 - \tfrac{1}{2^n}, \ldots) \text{ и } y = (0, 1 - \tfrac{1}{2}, 1 - \tfrac{1}{2^2}, \ldots, 1 - \tfrac{1}{2^{n-1}}, \ldots)$$

важи $\| x \| = \| y \| = \| \frac{x+y}{2} \| = 1$, но $x \neq y$, што значи дека l^∞ не е строго конвексен нормиран простор. ■

2.5. Пример. Нека (Y, M) е измерлив простор, « е позитивна мера на M, $X = L^p(\text{«}), 1 < p < \infty$ е просторот $X = \{ f : Y \to \mathbb{C} \vdots \int_Y | f |^p d\text{«} < +\infty \}$. Функцијата $\| \cdot \| : L^p(\text{«}) \to \mathbb{R}$ определена со: $\| f \| = \{ \int_Y | f(x) |^p d\text{«} \}^{\frac{1}{p}}$, е норма на $X = L^p(\text{«})$. Нека $\| f \| = \| g \| = 1$ и $f \neq g$. Тогаш од неравенството на Минковски следува дека

$$\| f + g \| = \Big(\int_Y | f(x) + g(x) |^p \, d\text{«} \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_Y | f(x) |^p \, d\text{«} \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_Y | g(x) |^p \, d\text{«} \Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \| f \| + \| g \| = 1 + 1 = 2,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако постои $\sim > 0$ таков што

$$f(x) = \sim g(x),$$

скоро секаде. Меѓутоа, бидејќи $\| f \| = \| g \| = 1$ добиваме

$$1 = \| f \| = \{ \int_Y | f(x) |^p d\text{«} \}^{\frac{1}{p}} = \{ \int_Y | \sim g(x) |^p d\text{«} \}^{\frac{1}{p}} = \sim \{ \int_Y | g(x) |^p d\text{«} \}^{\frac{1}{p}}$$
$$= \sim \| g \| = \sim \cdot 1 = \sim.$$

Последното противречи на $f \neq g$, па затоа $\| f + g \| < 2$, т.е. $\| \frac{f+g}{2} \| < 1$, што според теорема 2.2 значи дека нормираниот простор $X = L^p(\text{«})$ е строго конвексен.

Понатаму, просторите l^p, $1 < p < \infty$ чии елементи $x = \{ x_i \}_{i=1}^\infty$ такви што $\sum_{i=1}^\infty | x_i |^p < \infty$ се дел од просторите L^p, при што се интегрира по мерата броење цели броеви, па затоа овие простори се строго конвексни. ■

2.6. За нормата на нормираниот простор $(L, \| \cdot \|)$ велиме дека е *строго конвексна по модул* $c > 0$ ако

$$\| tx + (1-t) y \|^2 \leq t \| x \|^2 + (1-t) \| y \|^2 - ct(1-t) \| x - y \|^2 \qquad (*)$$

за секои $x, y \in L$ и за секој $t \in (0,1)$. Нормата ја нарекуваме *средно строго конвексна по модул* $c > 0$ ако неравенството (*) важи само за $t = \frac{1}{2}$, т.е. ако

$$\| \tfrac{x+y}{2} \|^2 \le \tfrac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} - \tfrac{c}{4} \| x - y \|^2 ,$$

за секои $x, y \in L$. Точна е следнава теорема.

Теорема. Ако $(L, \| \cdot \|)$ е реален нормиран простор со средно строго конвексна норма по модул $c > 0$, тогаш L е строго конвексен.

Доказ. Нека L е реален нормиран простор со средно строго конвексна норма по модул $c > 0$. Ако $\| x \| = \| y \| = 1$ и $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$, за $x, y \in L$, тогаш

$$1 = \| \tfrac{x+y}{2} \|^2 \le \tfrac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} - \tfrac{c}{4} \| x - y \|^2 = 1 - \tfrac{c}{4} \| x - y \|^2 ,$$

па затоа $\| x - y \| = 0$. Но, од својствата на нормата следува $x = y$, што значи дека L е строго конвексен. ■

2.7. Забелешка. Бидејќи секоја строго конвексна норма по модул $c > 0$ е средно строго конвексна норма по модул $c > 0$ од претходната теорема следува дека нормиран простор со строго конвексна норма по модул $c > 0$ е строго конвексен.

2.8. Теорема. За векторскиот нормиран простор $(L, \| \cdot \|)$ следните тврдења се еквивалентни:

a) $(L, \| \cdot \|)$ е строго конвексен.

b) Од $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$ следува $y = \sim x$, за некој $\sim > 0$.

c) Од $\| x - u \| = \sim \| x - y \|, \| y - u \| = (1 - \sim) \| x - y \|$, $\sim \in (0,1)$ следува

$$u = (1 - \sim) x + \sim y .$$

Доказ. $a) \Rightarrow b)$. Нека претпоставиме дека $(L, \| \cdot \|)$ е строго конвексен и нека $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$. Тогаш $\| \frac{x}{\|x\|} \| = \| \frac{y}{\|y\|} \| = 1$ и ако во теорема 1.4 земеме $x_1 = x$, $x_2 = y$, $\sim_1 = \frac{1}{\|x\|}, \sim_2 = \frac{1}{\|y\|}$ добиваме $\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \| = \frac{1}{\|x\|} \| x \| + \frac{1}{\|y\|} \| y \| = 2$. Но, $(L, \| \cdot \|)$ е строго конвексен, па од теорема 2.2 следува $\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}$, т.е. $y = \sim x$, за $\sim = \frac{\|x\|}{\|y\|} > 0$.

$b) \Rightarrow c)$. Нека претпоставиме дека е точно тврдењето $b)$. Од

$$\| x - u \| = \sim \| x - y \|, \; \| y - u \| = (1 - \sim) \| x - y \| , \; \sim \in (0,1)$$

следува $\| x - u + (u - y) \| = \| x - u \| + \| u - y \|$ па затоа $u - y = \quad (x - u)$, за некој $\quad > 0$. Според тоа,

$$(1 - \sim) \| x - y \| = \| y - u \| = \quad \| x - u \| = \quad \sim \| x - y \|,$$

па затоа $\quad = \frac{1-\sim}{\sim}$, од каде добиваме $u - y = \frac{1-\sim}{\sim} (x - u)$, т.е. $u = (1 - \sim) x + \sim y$.

$c) \Rightarrow a)$. Нека претпоставиме дека е точно тврдењето $c)$ и нека

$$\| x \| = \| y \| = 1 , \; \| x + y \| = \| x \| + \| y \| .$$

За $u = 0$, од добиваме

$$\| x - 0 \| = \tfrac{1}{2} \| x - (-y) \| \text{ и } \| 0 - y \| = (1 - \tfrac{1}{2}) \| x - (-y) \|, \tfrac{1}{2} \in (0,1) ,$$

па затоа од c) следува

$$0=(1-\tfrac{1}{2})x+\tfrac{1}{2}(-y),\ \text{т.е. } x=y.$$

Значи, $(L,\|\cdot\|)$ е строго конвексен нормиран простор. ■

2.9. Теорема. Следниве тврдења се еквивалентни:

1) $(L,\|\cdot\|)$ е строго конвексен.

2) Ако $\frac{1}{2}\|x+y\|=\|x\|=\|y\|$, тогаш $x=y$.

3) Ако $\|x+\sim y\|=2\|x\|$ за некој $\sim\,>0$, тогаш $x=\sim y$, и $\sim\,=1$ ако $\|x\|=\|y\|$.

4) Ако $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$, тогаш $x=\quad y$ за некој $\quad>0$.

5) Ако $\|x-w\|=\|x-y\|+\|y-w\|$, тогаш $y=(1-¥)x+¥w$, за некој $¥\in(0,1)$.

6) Ако $\|x+y\|=\|x-y\|=\|x\|$, тогаш $y=0$.

Доказ. Да ги разгледаме следниве тврдења:

3') Ако $\|x+\sim y\|=2\|x\|$, каде $\sim\,=\frac{\|x\|}{\|y\|}$, тогаш $x=\sim y$.

4') Ако $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$, тогаш $\|y\|x=\|x\|y$.

Доказот на теоремата ќе го реализираме докажувајќи ги импликациите и еквиваленциите:

$$1)\Rightarrow 2)\Rightarrow 3')\Rightarrow 4')\Rightarrow 1),\ 3')\Rightarrow 3)\Rightarrow 2),\ \ 4)\Leftrightarrow 5),\ 2)\Leftrightarrow 6)\ \text{ и } 4')\Rightarrow 4)\Rightarrow 2).$$

$1)\Rightarrow 2)$. Ако $\frac{1}{2}\|x+y\|=\|x\|=\|y\|=¥,¥\neq 0$, тогаш $\frac{1}{2}\|\frac{x+y}{¥}\|=\|\frac{x}{¥}\|=\|\frac{y}{¥}\|=1$. Но, L е строго конвексен, па затоа $\frac{x}{¥}=\frac{y}{¥}$, т.е. $x=y$

$2)\Rightarrow 3')$. Бидејќи $\|\sim y\|=\|x\|=\frac{1}{2}\|x+\sim y\|$, од 2) следува $x=\sim y$.

$3')\Rightarrow 4')$. Нека претпоставиме дека $\|x\|\le\|y\|$ и $\sim\,=\frac{\|x\|}{\|y\|}$. Тогаш

$$\|x+y\|=\|x+\sim y+(\|y\|-\|x\|)\frac{y}{\|y\|}\|\le\|x+\sim y\|+\|y\|-\|x\|$$
$$\le 2\|x\|+\|y\|-\|x\|=\|x\|+\|y\|.$$

Јасно, ако $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$, тогаш $\|x+\sim y\|=2\|x\|$, па од 3') следува дека $x=\sim y=\frac{\|x\|}{\|y\|}y$.

Во случај кога $\|x\|\ge\|y\|$, условот 3') го запишуваме во обликот: Ако $\|\frac{x}{\sim}+y\|=2\|y\|$, каде $\sim\,=\frac{\|x\|}{\|y\|}$, тогаш $x=\sim y$. Сега тврдењето 4') следува аналогно.

$4')\Rightarrow 1)$. Ако $\frac{1}{2}\|x+y\|=\|x\|=\|y\|=1$, тогаш $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ и затоа од 4') следува $\|y\|x=\|x\|y$, што значи $x=y$.

Импликациите $3')\Rightarrow 3)\Rightarrow 2)$, $4')\Rightarrow 4)$ се очигледни.

$4)\Rightarrow 2)$. Нека $\frac{1}{2}\|x+y\|=\|x\|=\|y\|$. Тогаш од 4) следува $x=\quad y$ за некој $\quad>0$. Со замена во $\|x\|=\|y\|$ добиваме $\quad=1$, т.е. $x=y$.

$4)\Rightarrow 5)$. Ако условот во 5) важи, тогаш од 4) следува $x-y=\quad(y-w)$, за некој $\quad>0$. Затоа, $y=(1-¥)x+¥w$, каде $¥=\frac{\quad}{\quad+1}$ и $¥\in(0,1)$.

5) $\Rightarrow$ 4). Заклучокот во 5) го запишуваме во обликот $y-w=(1-¥)(x-w)$. Сега во 5) заменуваме $x-y$ со x и $y-w$ со y, соодветно, па затоа $x-w$ го заменуваме со $x+y$ и добиваме

$$y=(1-¥)(x+y)\text{, т.е. } x=\ \ y,\quad =\frac{¥}{1-¥}>0 .$$

2) $\Leftrightarrow$ 6). Во 2) заменуваме x со $x+y$ и y со $x-y$, соодветно и го добиваме 6). Важи и обратното. ■

2.10. Во теорема 1.4 докажавме дека во нормиран простор важи

$$\| x_1+x_2+...+x_n \|=\| x_1 \|+\| x_2 \|+...+\| x_n \|, \tag{2}$$

ако и само ако

$$\| \sim_1 x_1+\sim_2 x_2+...+\sim_n x_n \|=\sim_1 \| x_1 \|+\sim_2 \| x_2 \|+...+\sim_n \| x_n \|, \tag{3}$$

за секои $\sim_i >0, i=1,2,...,n$. Во случај кога просторот $(L,\|\cdot\|)$ е строго конвексен, точна е следнава теорема.

Теорема. Нека $(L,\|\cdot\|)$ е строго конвексен нормиран простор и $x_i \in L$, $i=1,2,...,n$ се ненулти вектори. Тогаш равенствата (2) и (3) се еквивалентни на равенствата

$$\frac{x_1}{\|x_1\|}=\frac{x_2}{\|x_2\|}=...=\frac{x_n}{\|x_n\|} . \tag{4}$$

Доказ. Ако се исполнети равенствата (4), тогаш за секои $\sim_i >0, i=1,2,...,n$ важи

$$\|\sum_{i=1}^{n}\sim_i x_i \|=\|\sum_{i=1}^{n}\sim_i \| x_i \| \frac{x_i}{\|x_i\|}\|=\|\sum_{i=1}^{n}\sim_i \| x_i \| \frac{x_1}{\|x_1\|}\|=\|(\sum_{i=1}^{n}\sim_i \frac{\|x_i\|}{\|x_1\|})x_1 \|$$

$$=(\sum_{i=1}^{n}\sim_i \frac{\|x_i\|}{\|x_1\|})\| x_1 \|=\sum_{i=1}^{n}\sim_i \| x_i \|,$$

т.е. точно е равенството (3).

Обратно, нека е исполнето равенството (2). За секој $i=2,3,...,n$ важи

$$\| x_1+x_i \|\le\| x_1 \|+\| x_i \| .$$

Од друга страна

$$\| x_1+x_i \|\ge\|\sum_{k=1}^{n} x_k \|-\|\sum_{k\ne 1,i} x_k \|=\sum_{k=1}^{n}\| x_k \|-\|\sum_{k\ne 1,i} x_k \|$$

$$\ge\sum_{k=1}^{n}\| x_k \|-\sum_{k\ne 1,i}\| x_k \|=\| x_1 \|+\| x_i \|,$$

и затоа $\| x_1+x_i \|=\| x_1 \|+\| x_i \|$. Но, L е строго конвексен, па од теорема 2.8 следува дека $x_1=\sim_i x_i$, за некој $\sim_i >0$, при $i=2,3,..,n$. Значи, $\| x_1 \|=\sim_i \| x_i \|$, за некој $\sim_i >0$, при $i=2,3,..,n$, односно $\sim_i =\frac{\|x_1\|}{\|x_i\|}$, за $i=2,3,..,n$. Според тоа, $\frac{x_1}{\|x_1\|}=\frac{x_i}{\|x_i\|}$, за $i=2,3,..,n$, т.е. точни се равенствата (4). ■

2.11. Познато е дека ако x и y се ненулти вектори, тогаш точни се неравенствата

$$\| x+y \|\le\| x \|+\| y \|-(2-\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\|)\min\{\| x \|,\| y \|\}, \tag{5}$$

$$\| x+y \| \geq \| x \| + \| y \| -(2- \| \tfrac{x}{\|x\|} + \tfrac{y}{\|y\|} \|) \max\{\| x \|, \| y \|\}. \tag{6}$$

Во следната теорема ќе дадеме потребен и доволен услов за да во случај на строго конвексен простор во неравенствата (5) и (6) важи знак за равенство.

Теорема. Нека $(L, \|\cdot\|)$ е строго конвексен нормиран простор и $x, y \in L$ се ненулти вектори, при што важи $\| x \| < \| y \|$. Тогаш

$$\| x+y \| +(2- \| \tfrac{x}{\|x\|} + \tfrac{y}{\|y\|} \|) \| x \| = \| x \| + \| y \| \tag{7}$$

ако и само ако постои $\sim \in (0,1)$ таков што $x = \pm \sim y$.

Доказ. Од $\| x \| < \| y \|$ и од неравенството на триаголник следува

$$\begin{aligned} \| x+y \| &= \| \tfrac{\|x\|}{\|x\|} x + \tfrac{\|x\|}{\|y\|} y + (1- \tfrac{\|x\|}{\|y\|}) y \| \\ &\leq \| x \| \cdot \| \tfrac{x}{\|x\|} + \tfrac{y}{\|y\|} \| +(1- \tfrac{\|x\|}{\|y\|}) \| y \| \\ &= \| x \| \cdot \| \tfrac{x}{\|x\|} + \tfrac{y}{\|y\|} \| + \| y \| - \| x \| \\ &= \| x \| + \| y \| -(2- \| \tfrac{x}{\|x\|} + \tfrac{y}{\|y\|} \|) \| x \|, \end{aligned} \tag{8}$$

што значи дека равенството (7) е точно ако и само ако во неравенството (8) важи знак за равенство, т.е. ако и само ако

$$\| x + \tfrac{\|x\|}{\|y\|} y + (1- \tfrac{\|x\|}{\|y\|}) y \| = \| x + \tfrac{\|x\|}{\|y\|} y \| + \| (1- \tfrac{\|x\|}{\|y\|}) y \|. \tag{9}$$

Но, L е строго конвексен, па од теорема 2.10 следува дека равенството (9) е еквивалентно со равенството

$$\frac{x+\frac{\|x\|}{\|y\|}y}{\|x+\frac{\|x\|}{\|y\|}y\|} = \frac{(1-\frac{\|x\|}{\|y\|})y}{\|(1-\frac{\|x\|}{\|y\|})y\|}, \tag{10}$$

т.е. со равенството $x = (\| \tfrac{x}{\|x\|} + \tfrac{y}{\|y\|} \| -1) \tfrac{\|x\|}{\|y\|} y$. Нека $\sim = (\| \tfrac{x}{\|x\|} + \tfrac{y}{\|y\|} \| -1) \tfrac{\|x\|}{\|y\|}$. Тогаш $x = \sim y$. Но, $\| x \| < \| y \|$, па затоа $0 < |\sim| < 1$.

Обратно, ако $x = \sim y$, каде $0 < |\sim| < 1$, тогаш имаме $\tfrac{x}{\|x\|} + \tfrac{y}{\|y\|} = (1 + \tfrac{\sim}{|\sim|}) \tfrac{y}{\|y\|}$. Но, $1 + \tfrac{\sim}{|\sim|} > 0$, па затоа $\| \tfrac{x}{\|x\|} + \tfrac{y}{\|y\|} \| = 1 + \tfrac{\sim}{|\sim|}$, т.е. точно е равенството

$$\tfrac{x}{\|x\|} + \tfrac{y}{\|y\|} = \| \tfrac{x}{\|x\|} + \tfrac{y}{\|y\|} \| \tfrac{y}{\|y\|}.$$

Последното равенство е еквивалентно со равенството (10), односно со равенството (9), па затоа во (8) важи знак за равенство т.е. точно е равенството (7). ■

3. НАТАМОШНИ КАРАКТЕРИЗАЦИИ НА СТРОГО КОНВЕКСЕН НОРМИРАН ПРОСТОР

3.1. Дефиниција. Нека $x, y \in L$. Множеството

$$[x, y] = \{\sim x + (1-\sim) y \mid \sim \in [0,1]\}$$

го нарекуваме *отсечка* (*сегмент*) *со крајни точки* x и y. Множеството

$$(x, y) = \{\sim x + (1-\sim) y \mid \sim \in (0,1)\}$$
го нарекуваме *внатрешност на отсечката (сегментот) со крајни точки* x и y.

3.2. Теорема. Нека $(L, \|\cdot\|)$ е нормиран простор. Следниве тврдења се еквивалентни:

1) $(L, \|\cdot\|)$ е строго конвексен.
2) Ако $\| x+y \| = \| x \| + \| y \|$, за $x, y \in L$, тогаш множеството
$$[x, y] = \{\sim x + (1-\sim) y \mid \sim \in [0,1]\}$$
е линеарно зависно.

Доказ. Нека е исполнет условот 2). Од $x, y \in [x, y]$ следува дека множеството $\{x, y\}$ е линеарно зависно, т.е. постои $\sim \in \mathbb{R}$ таков што $y = \sim x$. Ако замениме во условот $\| x+y \| = \| x \| + \| y \|$, добиваме $|1+\sim| = 1+|\sim|$, од каде следува $\sim > 0$. Според тоа, $y = \sim x$ за некој $\sim > 0$, па од теорема 2.8 следува дека L е строго конвексен.

Нека L е строго конвексен. Ако $\| x+y \| = \| x \| + \| y \|$, тогаш од теорема 2.8 следува дека $y = \sim x$ за некој $\sim > 0$. Нека $x_t = tx + (1-t)y$, за $t \in [0,1]$. Имаме $x_t = (t + (1-t)\sim) x$, за $t \in [0,1]$ и како за секои $t, p \in [0,1]$ важи $t + (1-t)\sim > 0$ и $p + (1-p)\sim > 0$ добиваме
$$x_t = (t + (1-t)\sim) x = \frac{t+(1-t)\sim}{p+(1-p)\sim} (p + (1-p)\sim) x_p = \frac{t+(1-t)\sim}{p+(1-p)\sim} x_p ,$$
што значи дека за секои $t, p \in [0,1]$ множеството $\{x_t, x_p\}$ е линеарно зависно, па затоа множеството $[x, y] = \{\sim x + (1-\sim) y \mid \sim \in [0,1]\}$ е линеарно зависно. ■

3.3. Дефиниција. Нека L е нормиран простор, $x, z \in L$ и $r > 0$. Множеството $B(x, r) = \{ y \in L \mid \| y - x \| < r\}$ го нарекуваме *отворена топка со центар во* x *и радиус* r. Ако $x = 0$ и $r = 1$, тогаш $B(0,1)$ ја нарекуваме *единична отворена топка*. Множеството $B[x, r] = \{ y \in L \mid \| y - x \| \le r\}$ го нарекуваме *затворена топка со центар во* x *и радиус* r. Ако $x = 0$ и $r = 1$, тогаш $B[0,1]$ ја нарекуваме *единична затворена топка*. Множеството $S(x, r) = \{ y \in L \mid \| y - x \| = r\}$ го нарекуваме *сверa со центар во* x *и радиус* r. Ако $x = 0$ и $r = 1$, тогаш $S(0,1)$ ја нарекуваме *единична свера*. Јасно, $B(x, r) \subseteq B[x, r]$ и $B[x, r] = B(x, r) \cup S(x, r)$.

3.4. Лема. Нека L е нормиран простор. Ако $x, y \in L$ се ненулти вектори и $\| x+y \| = \| x \| + \| y \|$, тогаш $[\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}] \subseteq S(0,1)$.

Доказ. Нека $x, y \in L$ и $\| x+y \| = \| x \| + \| y \|$. Од теорема 1.4 следува дека за секои $t, s \ge 0$ важи
$$\| tx + sy \| = t \| x \| + s \| y \| . \tag{1}$$
Нека x и y се ненулти вектори. Ако $\sim \in [0,1]$, тогаш од равенството (1) следува низата равенства $\| \sim \frac{x}{\|x\|} + (1-\sim) \frac{y}{\|y\|} \| = \frac{\sim}{\|x\|} \| x \| + \frac{1-\sim}{\|y\|} \| y \| = 1$, од каде следува дека $[\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}] \subseteq S(0,1)$. ■

3.5. Теорема. Нормираниот простор L е строго конвексен ако и само ако од $\| x \|=\| y \|=1$ и $[x, y] \subseteq S(0,1)$ следува $x = y$.

Доказ. Нека L е строго конвексен нормиран простор и нека се исполнети условите $\| x \|=\| y \|=1$ и $[x, y] \subseteq S(0,1)$. Тогаш, од $[x, y] \subseteq S(0,1)$, за $\sim = \frac{1}{2}$ имаме $\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}x + (1-\frac{1}{2})y \in S(0,1)$, што значи дека $\| \frac{x+y}{2} \|=1$ и како L е строго конвексен добиваме $x = y$.

Обратно, нека од $\| x \|=\| y \|=1$ и $[x, y] \subseteq S(0,1)$ следува $x = y$. Нека претпоставиме дека $\| x + y \|=\| x \| + \| y \|$. Тогаш од лема 3.4 следува $[\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}] \subseteq S(0,1)$, што според претпоставката значи дека $\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}$, т.е. $x = \frac{\|x\|}{\|y\|} y$. Конечно, од теорема 2.8 следува дека L е строго конвексен нормиран простор. ■

3.6. Теорема. Нормираниот простор L е строго конвексен ако и само ако е исполнет условот

од $x, y \in S(0,1)$, $x \neq y$ следува $\| \sim x + \ y \| < 1$, за $\sim, \ > 0$ и $\sim + \ = 1$. (2)

Доказ. Нека е исполнет условот (2) и нека $\| x \|=\| y \|=1$, $x \neq y$. Тогаш $x, y \in S(0,1)$ и ако земеме $\sim = \ = \frac{1}{2}$ добиваме $\| \frac{x+y}{2} \| < 1$, што според теорема 2.2 значи дека L е строго конвексен.

Обратно, нека претпоставиме дека постојат $x, y \in S(0,1), x \neq y$ и $\sim, \ > 0$, $\sim + \ = 1$ такви што $\| \sim x + \ y \|=1$. Од овде следува дека постојат $x, y \in L$ такви што $\| x \|=\| y \|=1$, $x \neq y$ и $\sim, \ > 0$, $\sim + \ = 1$ такви што $\| \sim x + \ y \|=\| \sim x \| + \| \ y \|$. Според теорема 1.4 за секои $t, s \geq 0$ важи $\| t(\sim x) + s(\ y) \|= t \| \sim x \| + s \| \ y \|$. Ако во последното равенство ставиме $t = \frac{1}{2\sim}$, $s = \frac{1}{2}$, добиваме дека постојат $x, y \in L$ такви што $\| x \|=\| y \|=1$, $x \neq y$ и $\| \frac{x+y}{2} \|=1$, што според теорема 2.2 значи дека просторот L не е строго конвексен. ■

3.7. За следната карактеризација на строго конвексните нормирани простори ќе ги користиме екстремалните точки на конвексните множества.

Дефиниција. Нека C е конвексно множество во нормираниот простор L. Точката $z \in C$ ја нарекуваме *екстремална* (*крајна*) *точка за множеството* C ако од $z = tx + (1-t)y$, за некој $t \in (0,1)$ и некои $x, y \in C$ следува $x = y$.

3.8. Теорема. Нормираниот простор L е строго конвексен ако и само ако секоја точка од единичната свера е екстремална точка за затворената единична топка.

Доказ. Нека L е строго конвексен. Ќе докажеме дека секоја точка на множеството $S(0,1)$ е екстремална за множеството $B[0,1]$. Нека $u \in S(0,1)$ и нека $u = tx + (1-t)y$ за некој $t \in (0,1)$ и некои $x, y \in B[0,1]$. Од $u \in S(0,1)$ следува $\| u \|=1$ и како $x, y \in B[0,1]$ добиваме $\| x \| \leq 1$ и $\| y \| \leq 1$. Ќе докажеме дека $\| x \|=\| y \|=1$. Навистина, во спротивно имаме

$$1 = \| u \|=\| tx + (1-t)y \| \leq t \| x \| + (1-t) \| y \| < 1,$$

што е противречност. Според тоа,

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|= 2 .$$

Ќе докажеме дека $\| x+y \| = 2$. Навистина, во спротивно имаме

$$1 = \| u \| = \| tu + (1-t)u \| = \| t(tx + (1-t)y) + (1-t)(tx + (1-t)y) \|$$
$$= \| t^2 x + t(1-t)(x+y) + (1-t)^2 y \| < t^2 + 2t(1-t) + (1-t)^2 = 1,$$

што е противречност. Според тоа, $\| x \| = \| y \| = \| \frac{x+y}{2} \| = 1$ и како L е строго конвексен добиваме $x = y$, т.е. u е екстремална точка за затворената единична топка.

Обратно, нека претпоставиме $\| x \| = \| y \| = \| \frac{x+y}{2} \| = 1$, за $x, y \in L$. Според тоа, точката $u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ е од единичната свера, па затоа таа е екстремална точка за затворената единична топка, што значи $x = y$, т.е. L е строго конвексен. ■

3.9. Пример. а) Во пример 2.5 докажавме дека просторот $L^p(«)$, $1 < p < \infty$ е строго конвексен. Сега, од теорема 3.8 следува дека секоја точка од единичната свера во $L^p(«)$ е екстремална точка за затворената единична топка во $L^p(«)$.

б) На векторскиот простор $\mathbf{C}_{[0,1]}$, од непрекинати функции на интервалот $[0,1]$, функцијата $\| \cdot \| : \mathbf{C}_{[0,1]} \to \mathbb{R}$ определена со

$$\| x \| = \max_{s \in [0,1]} | x(t) | .$$

е норма, што значи дека $(\mathbf{C}_{[0,1]}, \| \cdot \|)$ е нормиран простор. За функциите

$$x(t) = 1,\ y(t) = 1 - t \in \mathbf{C}_{[0,1]}$$

важи

$$\| x \| = \max_{s \in [0,1]} | x(s) | = \max_{s \in [0,1]} | 1 | = 1 \text{ и } \| y \| = \max_{s \in [0,1]} | y(s) | = \max_{s \in [0,1]} | 1 - s | = 1,$$

што значи дека $x, y \in S(0,1)$. Понатаму, за функцијата $u(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}y(t) = 1 - \frac{t}{2}$ важи $\| u \| = \max_{t \in [0,1]} | 1 - \frac{t}{2} | = 1$, што значи дека $u \in S(0,1)$ и како таа не е екстремална за $B[0,1]$ заклучуваме дека просторот $(\mathbf{C}_{[0,1]}, \| \cdot \|)$ не е строго конвексен. ■

3.10. За следната карактеризација на строго конвексните нормирани простори ќе го воведеме поимот минимална точка во однос на множеството $M \subseteq L$.

Дефиниција. За точката $v \in L$ ќе велиме дека е *минимална во однос на множеството* M ако од $\| u - m \| \le \| v - m \|$, $u \in L$, $m \in M$ следува $u = v$.

3.11. Теорема. Нормираниот простор L е строго конвексен ако и само ако за секои $x, y \in L$ точките од сегментот $[x, y] = \{ tx + (1-t)y \mid t \in [0,1] \}$ се минимални во однос на множеството $\{x, y\}$.

Доказ. Нека L е строго конвексен. Јасно, точките x и y се минимални во однос на множеството $\{x, y\}$, па затоа нека $v_t = tx + (1-t)y$, $t \in (0,1)$ е произволна точка од внатрешноста на сегментот $[x, y]$. Нека претпоставиме дека за некој $u \in L$ важи

$$\| u - x \| \le \| v_t - x \| = (1-t) \| x - y \| \tag{3}$$
$$\| u - y \| \le \| v_t - y \| = t \| x - y \| . \tag{4}$$

Понатаму, од неравенствата (3) и (4) следува

$$\| x-y \| \leq \| x-u \| + \| u-y \| \leq (1-t)\| x-y \| + t\| x-y \| = \| x-y \|$$

па затоа точни се равенствата

$$\| u-x \| = (1-t)\| x-y \| ,\ \| u-y \| = t\| x-y \|$$

и како $t \in (0,1)$ од теорема 2.8 следува $u = tx + (1-t)y = v_t$, што значи дека точката v_t е минимална во однос на множеството $\{x, y\}$.

Обратно, нека за секои $a, b \in L$ точките од сегментот $[a, b]$ се минимални за множеството $\{a, b\}$. Ако $\| x \| = \| y \| = \| \frac{x+y}{2} \| = 1$, тогаш

$$\| 0-x \| = \| x \| = \| \tfrac{x+y}{2} \| \leq \| \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}(-y) - x \| ,$$

$$\| 0-(-y) \| = \| y \| = \| \tfrac{x+y}{2} \| \leq \| \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}(-y) - (-y) \| .$$

Но, точката $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-y)$ припаѓа на сегментот $[x, -y]$, што значи дека таа е минимална во однос на множеството $\{x, -y\}$, па затоа $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-y) = 0$, т.е. $x = y$, односно L е строго конвексен. ■

4. РАМНОМЕРНО КОНВЕКСЕН НОРМИРАН ПРОСТОР

4.1. Дефиниција. Нормираниот простор $(L, \| \cdot \|)$ го нарекуваме *рамномерно конвексен* ако за секој $£ > 0$ постои $¢(£) > 0$ таков што од $\| x \| = \| y \| = 1$ и $\| x-y \| \geq £$ следува $\| x+y \| \leq 2(1-¢(£))$.

4.2. Теорема. Секој претхилбертов простор е рамномерно конвексен.

Доказ. Претхилбертов простор е нормиран, при што нормата е воведена со $\| x \| = (x, x)^2$ и таа го задоволува равенството на паралелограм

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2) . \tag{1}$$

Ако $£ > 0$ е дадено и $\| x \| = \| y \| = 1$, $\| x-y \| \geq £$, тогаш од равенството (1) следува дека за $¢(£) = 1 - \sqrt{1-(\frac{£}{2})^2} > 0$ важи

$$\| x+y \| = (4 - \| x-y \|^2)^{1/2} \leq (4 - £^2)^{1/2} = 2(1-¢(£)) ,$$

што значи дека претхилбертовиот простор $(L, (\cdot,\cdot))$ е рамномерно конвексен. ■

4.3. Теорема. Нека $(L, \| \cdot \|)$ е нормиран простор. Ако L е рамномерно конвексен, тогаш тој е строго конвексен.

Доказ. Нека $(L, \| \cdot \|)$ е рамномерно конвексен и да претпоставиме дека за $x, y \in L$ важи $\| x \| = \| y \| = 1$ и $x \neq y$. Тогаш за $£ = \frac{\| x-y \|}{2}$, важи $£ > 0$ и бидејќи L е рамномерно конвексен добиваме дека постои $¢(£) > 0$ таков што од $\| x \| = \| y \| = 1$, $\| x-y \| \geq £$ следува

$$\| x+y \| \leq 2(1-¢(£)) < 2 \text{, т.е. } \| \tfrac{x+y}{2} \| < 1 .$$

Конечно, од теорема 2.2 следува дека L е строго конвексен. ■

4.4. Пример. Во пример 2.4 видовме дека нормираниот простор $(l^{\infty}, \|\cdot\|)$ не е строго конвексен. Сега, од теорема 4.3 следува дека l^{∞} не е рамномерно конвексен. ■

4.5. Теорема. Нормираниот простор $(L, \|\cdot\|)$ е рамномерно конвексен ако и само ако за секои низи $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такви што

1) $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ и

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$

важи $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$.

Доказ. Нека претпоставиме дека низите $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ги исполнуваат условите 1) и 2), но дека низата $\{x_n - y_n\}_{n=1}^{\infty}$ не конвергира кон 0. Тогаш постојат $\varepsilon_0 > 0$ и низа природни броеви $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ таква што $\|x_{n_k} - y_{n_k}\| \geq \varepsilon_0$. Но, L е рамномерно конвексен, па затоа за овој ε_0 постои $\delta(\varepsilon_0) > 0$ таков што

$$\|x_{n_k} + y_{n_k}\| \leq 2(1 - \delta(\varepsilon_0)) < 2,$$

што противречи на условот 2). Конечно, од добиената противречност следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$.

Нека претпоставиме дека L е таков што за секои низи $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ за кои се исполнети условите 1) и 2) важи $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$, но дека L не е рамномерно конвексен. Тогаш за некој $\varepsilon > 0$ и за $\delta = \frac{1}{n}$ постојат $x_n, y_n \in L$ такви што

i) $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$,

ii) $\|x_n + y_n\| \geq 2(1 - \frac{1}{n})$ и

iii) $\|x_n - y_n\| \geq \varepsilon$.

Сега, од *ii*) следува

$$2(1 - \tfrac{1}{n}) \leq \|x_n + y_n\| \leq \|x_n\| + \|y_n\| = 2, \text{ т.е. } \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2,$$

па затоа $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$, што противречи на *iii*), па затоа L е рамномерно конвексен. ■

4.6. Теоремата 4.5 може да се запише во следнавата еквивалентна формулација.

Теорема. Нормираниот простор $(L, \|\cdot\|)$ е рамномерно конвексен ако и само ако за секои низи $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такви што

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\| = 1$ и

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$,

важи $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$. ■

4.7. Теорема. Секој конечнодимензионален строго конвекесен нормиран простор е рамномерно конвексен.

Доказ. Нека $(L,\|\cdot\|)$ е конечнодимензионален строго конвексен нормиран простор. Нека $£ > 0$ е дадено и $x, y \in L$ се такви што $\| x \|=\| y \|=1$ и $\| x-y \|\geq £$. Тогаш, бидејќи L е строго конвексен и $x \neq y$, од теорема 2.2 следува $\| \frac{x+y}{2} \|< 1$.

Дефинираме функција $f(u,v) =\| \frac{u+v}{2} \|$, $(u,v) \in L \times L$ која е непрекината.

Множеството

$$K_£ ==\{(a,b) \in L \times L ⁝ \ \| a \|=\| b \|=1,\ \| a-b \|\geq £\}$$

е ограничено и затворено, па како L е конечнодимензионален, тоа е компактно. Понатаму, функцијата $f(u,v)$ е непрекината, па затоа на компактното множество K таа го достигнува својот максимум M , т.е. постојат $a_0, b_0 \in K$, за кои од строгата конвексност на L следува дека важи

$$f(a_0,b_0) = M =\| \frac{a_0+b_0}{2} \|< 1 .$$

Конечно, ако земеме $¢(£) = 1-M > 0$ добиваме дека од $\| x \|=\| y \|=1$ и $\| x-y \|\geq £$ следува

$$\| \frac{x+y}{2} \|\leq M = 1-(1-M) = 1-¢(£) \text{ , т.е. } \| x+y \|\leq 2(1-¢(£)) ,$$

што значи дека е рамномерно конвексен. ■

4.8. Во претходните разгледувања дадовме примери на нормирани простори кои или се и строго конвексни и рамномерно конвексни или не се строго конвексни и не се рамномерно конвексни. Понатаму, во теорема 4.3 докажавме дека од рамномерната конвексност следува строгата конвексност. Во следниот пример ќе разгледаме нормиран простор кој е строго конвексен, но не е рамномерно конвексен.

Пример. Нека $L = \{q(x) : q \text{ е полином на } [0,1]\}$. Јасно, L е векторски простор со вообичаените операции собирање на полиноми и производ на полином со реален број. Понатаму, со

$$\| p \|= \sqrt{\int_0^1 (p(x))^2 dx} + \sup_{0\leq x\leq 1} | p(x) |, \quad p \in L \tag{2}$$

е определена норма на L . Навистина:

1) Од (2) следува $\| p \|\geq 0$, за секој $p \in L$ и $\| p \|= 0$ ако и само ако $p(x) = 0$, за секој $x \in [0,1]$.
2) За секој $ª \in \mathbb{R}$ и за секој $p \in L$ важи

$$\begin{aligned}\| ª p \| &= \sqrt{\int_0^1 (ª p(x))^2 dx} + \sup_{0\leq x\leq 1} | ª p(x) | \\ &= \sqrt{\int_0^1 (| ª | p(x))^2 dx} + \sup_{0\leq x\leq 1} | ª | \cdot | p(x) | \\ &=| ª | (\sqrt{\int_0^1 (p(x))^2 dx} + \sup_{0\leq x\leq 1} | p(x) |) \\ &=| ª | \cdot \| p \| .\end{aligned}$$

3) За секои $p, q \in L$ од својствата на апсолутната вредност, супремумот и неравенството на Минковски следува

$$\begin{aligned}
\| p+q \| &= \sqrt{\int_0^1 (p(x)+q(x))^2\,dx} + \sup_{0\le x\le 1} | p(x)+q(x) | \\
&\le \sqrt{\int_0^1 (p(x)+q(x))^2\,dx} + \sup_{0\le x\le 1} (| p(x) | + | q(x) |) \\
&\le \sqrt{\int_0^1 (p(x))^2\,dx} + \sqrt{\int_0^1 (q(x))^2\,dx} + \sup_{0\le x\le 1} | p(x) | + \sup_{0\le x\le 1} | q(x) | \\
&= \| p \| + \| q \| .
\end{aligned}$$

Ќе докажеме дека L не е рамномерно конвексен простор. За таа цел ќе ги разгледаме низите $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ определени со

$$p_n(x) = \tfrac{1}{2},\ q_n(x) = \tfrac{1}{2}(1-x^n)\text{ , за } n = 1, 2, \dots .$$

Имаме

$$\lim_{n\to\infty} \| p_n \| = \lim_{n\to\infty} \Big(\sqrt{\int_0^1 (\tfrac{1}{2})^2\,dx} + \sup_{0\le x\le 1} \tfrac{1}{2}\Big) = 1\,,$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \| q_n \| &= \lim_{n\to\infty} \Big(\sqrt{\int_0^1 (\tfrac{1}{2} | 1-x^n |)^2\,dx} + \sup_{0\le x\le 1} \tfrac{1}{2} | 1-x^n |\Big) \,, \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\tfrac{2}{n+1}+\tfrac{1}{2n+1}} + \tfrac{1}{2}\Big) = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \| \tfrac{1}{2}(p_n+q_n) \| &= \lim_{n\to\infty} \Big(\sqrt{\int_0^1 (\tfrac{1}{2} | 1-\tfrac{x^n}{2} |)^2\,dx} + \sup_{0\le x\le 1} \tfrac{1}{2} | 1-\tfrac{x^n}{2} |\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\tfrac{1}{n+1}+\tfrac{1}{4(2n+1)}} + \tfrac{1}{2}\Big) = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \| p_n - q_n \| &= \lim_{n\to\infty} \Big(\sqrt{\int_0^1 | \tfrac{x^n}{2} |^2\,dx} + \sup_{0\le x\le 1} | \tfrac{x^n}{2} |\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2n+1}} + \tfrac{1}{2}\Big) = \tfrac{1}{2},
\end{aligned}$$

што според теорема 4.6 значи дека $(L, \|\cdot\|)$ не е рамномерно конвексен.

Нека $\| p+q \| = \| p \| + \| q \|$. Од својствата на супремумот и неравенството на Минковски следува дека тоа е можно ако и само ако $p = ~q$, за некој $~ > 0$, па од теорема 2.8 следува дека L е строго конвексен нормиран простор. ■

4.9. Теорема. Нека $(L, \|\cdot\|)$ нормиран простор. Следниве тврдења се еквивалентни.

(1) $(L, \|\cdot\|)$ е рамномерно конвексен.

(2) За секој $£ > 0$ постои $¢ > 0$ таков што ако $\| x \| = \| y \|$ и $\| x-y \| \ge £ \| x \|$, тогаш $\tfrac{1}{2} \| x+y \| \le (1-¢) \| x \|$.

(3) За секој $£ > 0$ постои $¢' > 0$ таков што ако $\| x - ay \| = £ \| x \|$, каде $a = \frac{\|x\|}{\|y\|}$,

тогаш $\frac{1}{2} \| x + ay \| \le (1 - ¢') \| x \|$.

(4) За секој $£ > 0$ постои $¢ > 0$ таков што ако $\| x - ay \| \ge £ \| x \|$, каде $a = \frac{\|x\|}{\|y\|}$,

тогаш $\| x + y \| \le \| x \| + \| y \| - ¢ \| x \|$ или $\| x + y \| \le 3 \| x \| - \| y \| - ¢ \| x \|$.

Доказ. $(1) \Rightarrow (2)$. Нека $\| x \| = \| y \| = c \ne 0$. Тогаш од (1) следува $\| \frac{x}{c} \| = \| \frac{y}{c} \| = 1$ и $\| \frac{x-y}{c} \| \ge £$ повлекува $\frac{1}{2} \| \frac{x+y}{c} \| \le 1 - ¢$, т.е. $\frac{1}{2} \| x + y \| \le (1 - ¢) \| x \|$.

$(2) \Rightarrow (3)$. Имаме $\| x \| = \| \frac{\|x\|}{\|y\|} y \| = \| ay \|$. Ако во (2) го замениме y со ay и искористиме дека $\| ay \| = \| x \|$ го добиваме (3).

$(3) \Rightarrow (4)$. Бидејќи $\frac{1}{2} \| x + ay \| \le (1 - ¢') \| x \|$ од (3), ако $\| y \| \ge \| x \|$, тогаш

$$\| x + y \| = \| x + ay + y(1-a) \| \le \| x + ay \| + (1-a) \| y \|$$
$$\le 2(1 - ¢') \| x \| + \| y \| - \| x \| = \| x \| + \| y \| - 2¢' \| x \|.$$

Во случај кога $\| y \| \le \| x \|$, добиваме

$$\| x + y \| = \| x + ay + y(1-a) \| \le \| x + ay \| + (a-1) \| y \|$$
$$\le 2(1 - ¢') \| x \| + \| x \| - \| y \| = 3 \| x \| - \| y \| - 2¢' \| x \|.$$

Ако во последните неравенства ставиме $¢ = 2¢'$, го добиваме бараните неравенства.

$(4) \Rightarrow (1)$. $\| x \| = \| y \| = 1$, тогаш од (4) следува $\| x + y \| \le 2 - ¢' \| x \|$. Конечно, ако во последното неравенство земеме $¢ = \frac{1}{2} ¢'$, добиваме дека L е рамномерно конвексен. ■

4.10. Коментар. Во пример 2.5 докажавме дека ако (Y, M) е измерлив простор, « е позитивна мера на M, тогаш простоеот $X = L^p(«), 1 < p < \infty$, е строго конвексен. Меѓутоа овој простор е и рамномерно конвексен. Доказот на ова тврдење нема да го презентираме и истиот може да се види во [1].

Јасно, просторите $l^p, 1 < p < \infty$ кои се дел од просторите $L^p, 1 < p < \infty$ се рамномерно конвексни простори.

4.11. На крајот од овој дел ќе презентираме една интересна карактеризација на рамномерно конвексните простори користејќи функции дефинирани на сферата $S(0,1)$ на L. Ќе сметаме дека ¨ е строго конвексна и строго растечка функција на $[0, 2]$, што значи дека таа е непрекината на $(0, 2)$.

Теорема. Нормираниот простор $(L, \| \cdot \|)$ е рамномерно конвексен ако и само за секоја функција ¨ таква што $¨(1) = 1$, за функцијата

$$h(t) = \inf \{ ¨(\| x + ty \|) + ¨(\| x - ty \|) - 2, \ \| x \| = \| y \| = 1 \}$$

важи $h(t) > 0$, за секој $t \in (0,1]$.

Доказ. Прво ќе докажеме дека условот е потребен. Нека L е рамномерно конвексен и ¨ е функција како погоре. Треба да докажеме дека $h(t) > 0$, за секој

$t \in (0,1]$. Нека претпоставиме дека тоа не е точно и дека за некој $t_0 \in (0,1]$ важи $h(t_0) = 0$. Од дефиницијата на функцијата $h(t)$ следува дека постојат низи $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такви што $\| x_n \| = \| y_n \| = 1$ и

$$\lim_{n\to\infty} (¨ (\| x_n + t_0 y_n \|) + ¨ (\| x_n - t_0 y_n \|) = 2 . \qquad (2)$$

Но, по претпоставка функцијата ¨ е конвексна и строго растечка со $¨(1) = 1$, па затоа имаме

$$2 \le 2¨ (\tfrac{\|x_n+t_0y_n\|+\|x_n-t_0y_n\|}{2}) \le ¨ (\| x_n + t_0 y_n \|) + ¨ (\| x_n - t_0 y_n \|) \to 2 ,\ n \to \infty .$$

односно

$$1 \le ¨ (\tfrac{\|x_n+t_0y_n\|+\|x_n-t_0y_n\|}{2}) \to 1 ,\ n \to \infty . \qquad (3)$$

Понатаму, од строгата конвексност на ¨ следува дека

$$\lim_{n\to\infty} | \| x_n + t_0 y_n \| - \| x_n - t_0 y_n \| | = 0 . \qquad (4)$$

Сега, од својствата на ¨ седува дека постои инверзната функција $¨^{-1}$, која е непрекината, строго растечка и $¨^{-1}(1) = 1$. Затоа од (3) следува

$$\lim_{n\to\infty} (\| x_n + t_0 y_n \| + \| x_n - t_0 y_n \|) = 2 . \qquad (5)$$

Конечно, од (4) и (5) следува

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n + t_0 y_n \| = \lim_{n\to\infty} \| x_n - t_0 y_n \| = 1 \text{ и}$$

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n + t_0 y_n + (x_n - t_0 y_n) \| = \lim_{n\to\infty} 2 \| x_n \| = 2 ,$$

и како $(L, \| \cdot |)$ е рамномерно конвексен од теорема 4.6 добиваме

$$2t_0 = \lim_{n\to\infty} 2t_0 \| y_n \| = \lim_{n\to\infty} \| x_n + t_0 y_n - (x_n - t_0 y_n) \| = 0 ,$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува $h(t) > 0$, за секој $t \in (0,1]$.

Обратно, нека претпоставиме дека L го има својството од теоремата. Ќе докажеме дека просторот L е рамномерно консвексен. За секои фиксирани $x, y \in L$, $\| x \| = \| y \| = 1$, функцијата

$$f_{x,y}(t) = ¨ (\| x + ty \|) + ¨ (\| x - ty \|) - 2$$

очигледно е конвексна и неопаѓачка, со $f_{x,y}(t) \ge 0$, $f_{x,y}(0) = 0$. Бидејќи

$$h(t) = \inf_{x,y} f_{x,y}(t)$$

добиваме дека $h(t)$ е позитивна и неопаѓачка на $[0,1]$, и за секои $x, y \in L$ такви што $\| x \| \ge \| y \|, x \ne 0$ и исполнето следново неравенсвто

$$¨ (\tfrac{\|x+y\|}{\|x\|}) + ¨ (\tfrac{\|x-y\|}{\|x\|}) - 2 \ge h(\tfrac{\|y\|}{\|x\|}) .$$

Од ова следува, дека за секои u, v такви што $\| u \| = \| v \| = 1$ и $\| u - v \| \le \| u + v \|$ важи

$$2¨ (\tfrac{2}{\|u+v\|}) - 2 \ge h(\tfrac{\|u-v\|}{\|u+v\|}) \ge h(\tfrac{\|u-v\|}{2}) .$$

Нека $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ се две низ во L такви што $\| x_n \| = \| y_n \| = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n + y_n \| = 2$.

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека за доволно големи вредности на n е точно неравенството $\| x_n - y_n \| \leq \| x_n + y_n \|$. Од непрекинатоста на ¨ во $t = 1$ добиваме $\lim\limits_{n\to\infty} h(\| x_n - y_n \|) = 0$, од што следува $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$, што според теорема 4.5 значи дека просторот L е рамномерно конвексен. ■

Литература

1. Clarkson, J. A.: Uniformly convex spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 40, 396-414 (1936)
2. Diestel, J.: Geometry of Banach space – Selected Topics, Springer-Verlag, Berlin-Neidelberg-New York, 1975
3. Istrăţescu, I. V.: Strict convexity and complex strict convexity (theory and applications), Marcel Dekker, New York – Basel, 1984
4. Kurepa, S.: Funkcionalna analiza, Školska knjga, 1981
5. O. Hanner, On the uniform convexity of L^p and l^p, Ark. Mat. 3(3): 239-244 (1956)
6. Petryshyn, W. V.: A Characterization of Strict Convexity of Banach Spaces and Other Uses of Duality Mappings, Journal of functional analysis 6, 282-291 (1970)
7. Riesz, F.; Sz.-Nagy, B.: Functional Analysis, Dover Publications, Inc., New York, 1990

[1)] Професор во пензија
e-mail: risto.malceski@gmail.com
[2)] Меѓународен славјански универзитет, Св. Николе, Македонија
e-mail: samoil.malcheski@gmail.com