Републички натпревар 1998

I година

1. Најди ги сите четирицифрени броеви, кои се запишуваат со четири последователни цифри, во произволен редослед, такви што нивниот производ со $\frac{2}{3}$ е број запишан со истите цифри.

Решение. Нека бараниот број е x и нека $y=\frac{2}{3}x$. Од последното равенство имаме $3y=2x$, па затоа $3\,|\,x$ и $2\,|\,y$. Од критериумот за деливост со бројот 3 следува дека збирот на цифрите на бројот x е делив со 3. Но, бројот y е запишан со истите цифри како и бројот x, па затоа $3\,|\,y$.

Од досега изнесеното имаме $2\,|\,y, 3\,|\,y$ и $\mathrm{NZD}(2,3)=1$, па затоа $y=6k$, што значи $x=\frac{3}{2}y=\frac{3}{2}\cdot 6k=9k$. Според тоа, $9\,|\,x$ и од критериумот за деливост со 9 добиваме дека збирот на цифрите на бројот x се дели со 9. Јасно, и збирот на цифрите на бројот y се дели со 9. Но, броевите x и y се запишани со четири последователни цифри $n, n+1, n+2, n+3$, па затоа нивниот збир е $4n+6$, $n\in\mathbb{N}$ и $n\le 6$. Значи,

$$9\,|\,4n+6,\ n\in\mathbb{N} \text{ и } n\le 6. \qquad (1)$$

Условот (1) е исполнет само за $n=3$, од што следува дека цифрите со кои се запишани броевите x и y се $3,4,5$ и 6.

Од досега изнесеното имаме $3456\le x\le 6543$ и како $y=\frac{2}{3}x$ добиваме $2304\le y\le 4362$. Но, бројот y е запишан со цифрите $3,4,5$ и 6 е делив со 2 па затоа можни решенија за y се броевите

$$3456, 3546, 3564, 3654, 4356 \text{ и } 4536,$$

на кои им соодветствуваат следните решенија за бројот x

$$5184, 5319, 5346, 5481, 6534 \text{ и } 6804.$$

Но, x е запишан со цифрите $3,4,5$ и 6 па затоа единствени решенија се 5346 и 6534.

2. Докажи дека разликата $(\underbrace{55...5}_{n-1}\underbrace{444...4}_{n-1}5)^2-(\underbrace{55...5}_{n-1}\underbrace{444...4}_{n})^2$ е точен квадрат на природен број.

Решение. Имаме

$$(\underbrace{55...5}_{n-1}\underbrace{444...4}_{n-1}5)^2-(\underbrace{55...5}_{n-1}\underbrace{444...4}_{n})^2=\underbrace{55...5}_{n-1}\underbrace{444...4}_{n-1}5+\underbrace{55...5}_{n-1}\underbrace{444...4}_{n}=\underbrace{111...1}_{n-1}0\underbrace{888...8}_{n-1}9$$

$$=\underbrace{111...1}_{n-1}\cdot 10^{n+1}+80\cdot\underbrace{111...1}_{n-1}+9$$

$$=\frac{10^{n-1}-1}{9}\cdot 10^{n+1}+\frac{10^{n-1}-1}{9}\cdot 80+9$$
$$=(\frac{10^{n}-1}{9})^{2}=(\underbrace{333...3}_{n})^{2}$$

што и требаше да се докаже.

3. Над страната CD на квадратот $ABCD$ е конструирана полукружница. Нека M е произволна точка од полукружницата и нека MA и MB ја сечат CD во точките K и L соодветно. Докажи дека $\overline{KL}^2=\overline{DK}\cdot\overline{LC}$

Решение. Нека $MD\cap AB=\{P\}$ и $MC\cap AB=\{Q\}$ (направи цртеж). Сега $\triangle PAM\sim\triangle DEM$ и $\triangle MKL\sim\triangle MAB$, па затоа $\frac{\overline{MK}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{DK}}{\overline{PA}}$ и $\frac{\overline{MK}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{KL}}{\overline{AB}}$. Од последните равенства следува

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{KL}}{\overline{DK}} \qquad (1)$$

Од друга страна за правоаголните триаголници DAP и QCB важи $\measuredangle DPA=\measuredangle BCQ$, како агли со нормални краци, па затоа тие се слични. Според тоа $\frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AP}}$, и бидејќи $ABCD$ е квадрат добиваме $\frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}$. Од последното равенство и од (1) следува дека

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{KL}}{\overline{DK}} \qquad (2)$$

Од друга страна, триаголниците MLC и MBQ се слични, па затоа $\frac{\overline{LC}}{\overline{BQ}}=\frac{\overline{ML}}{\overline{MB}}$ и како $\frac{\overline{ML}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{KL}}{\overline{AB}}$, добиваме дека $\frac{\overline{LC}}{\overline{BQ}}=\frac{\overline{KL}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{KL}}{\overline{BC}}$, т.е.

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{LC}}{\overline{KL}}. \qquad (3)$$

Конечно, од равенствата (2) и (3) добиваме $\frac{\overline{KL}}{\overline{DK}}=\frac{\overline{LC}}{\overline{KL}}$, т.е. $\overline{KL}^2=\overline{DK}\cdot\overline{LC}$.

4. Најди ги сите конвексни многуаголници кои имаат повеќе од три внатрешни остри агли.

Решение. Нека α_i, $i=1,2,...,n$ се внатрешните агли на произволен конвексен n-аголник, а β_i, $i=1,2,...,n$ се соодветните надворешни агли, т.е. $\beta_i=\pi-\alpha_i$, $i=1,2,...,n$. Бидејќи $\sum_{i=1}^{n}\beta_i=2\pi$, најмногу три од надворешните агли на конвексниот n-аголник можат да бидат тапи. Според тоа, не постои конвексен многуаголник кој има повеќе од три остри агли.

II година

1. Во множеството на целите броеви решија равенката

$$y^4 - x(x+1)(x+2)(x+3) = 1$$

Решение. Дадената равенка јам ножиме со 16 и ако искористиме дека

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = (x^2+3x)(x^2+3x+2) = (x^2+3x)^2 + 2(x^2+3x),$$

добиваме дека таа е еквивалентна на равенката $(4y^2)^2 = (4x^2+12x+4)^2$, т.е. на равенката

$$(4y^2)^2 - ((2x-3)^2-5)^2 = 0.$$

Според тоа, дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(4y^2-(2x-3)^2+5)(4y^2+(2x-3)^2-5) = 0.$$

Производ на два такви броја е еднаков на нула ако барем еден од нив е еднаков на 0, па затоа се можни два случаи:

а) $4y^2-(2x-3)^2+5=0$ и оваа равенка е еквивалентна на равенката

$$(2y-2x+3)(2y+2x-3) = -5 = (-1)\cdot 5 = 1\cdot(-5),$$

од која се добиваат четири системи од по две равенки со по две непоснати. Дореши!

б) $4y^2+(2x-3)^2-5=0$ и оваа равенка е еквивалентна со равенката

$$(2y)^2+(2x-3)^2 = (\pm1)^2+(\pm2)^2$$

од која се добиваат осум системи со осум непознати, од кои за четирите одма се гледа дека немаат решение во множеството цели броеви. Дореши!

2. Дадени се корените x_0 и x_1, x_0 и x_2 ,…, x_0 и x_n на квадратните полиноми

$$P_1(x) = x^2+b_1x+c_1,\ P_2(x) = x^2+b_2x+c_2,\ \dots,\ P_n(x) = x^2+b_nx+c_n,$$

соодветно. Најди ги корените на квадратниот полином

$$P(x) = x^2 + \tfrac{b_1+b_2+\dots+b_n}{n}x + \tfrac{c_1+c_2+\dots+c_n}{n}$$

Решение. Од условот на задачата имаме

$$x_0^2+b_1x_0+c_1 = x_0^2+b_2x_0+c_2 = x_0^2+b_3x_0+c_3 = \dots = x_0^2+b_nx_0+c_n = 0.$$

Ако ги собереме последните равенства добиваме

$$nx_0^2+(b_1+b_2+b_3+\dots+b_n)x_0+(c_1+c_2+\dots+c_n) = 0,$$

т.е. x_0 е решение на разгледуваниот полином $P(x)$. Затоа, дискриминантата на $P(x)$ е ненегативна и тој има втор реален корен $x*$. Од Виетовите формули имаме:

$$x_0+x_1=-b_1,\ x_0+x_2=-b_2\ ,\ \dots.,\ x_0+x_n=-b_n,\ x_0+x^* = -\tfrac{1}{n}(b_1+b_2+\dots+b_n).$$

Ако последното равенство го помножиме со n и од него ги извадиме првите n равенства добиваме $x^* = -\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n)$.

3. Во квадратната таблица 10×10 се запишани по ред броевите од 1 до 100. Потоа, во секоја редица и секоја колона точно на половина од броевите им е сменет знакот. Докажи дека во новодобиената таблица збирот на сите броеви е нула.

Решение. Значи, $A = B + C$. Нека во A, B, C ги смениме знаците на ист начин, т.е. во секоја редица и секоја колона точно половина од броевите имаат знак минус, и нека се добиени таблиците A', B', C'. Јасно, секој број од A' е збир на соодветните броеви од B' и C'. Во B' сите броеви од една колона се еднакви, а во C' сите броеви од една редица се еднакви, па затоа збировите на броевите во овие две таблици ќе биде еднаков на нула. Според тоа, збирот на броевите во A' е еднаков на нула.

4. Продолженијата на страните AB и CD на конвексниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точка W. Ако X и Y се средините на дијагоналите AC и BD, соодветно, тогаш плоштината на триаголникот XYW е четири пати помала од плоштината на четириаголникот $ABCD$. Докажи!

Решение. Нека U е средина на AD и V е средина на BE. Значи XV е средна линија на $\triangle ABC$ и $\overline{XV} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Бидејќи C и W се на исто растојание од XV добиваме

$$P_{XWV} = P_{XVC} = \frac{1}{4}P_{ABC} \tag{1}$$

Аналогно се докажува дека

$$P_{YVW} = P_{YBV} = \frac{1}{4}P_{DBC}. \tag{2}$$

Јасно четириаголникот $XVYU$ е параллелограм и важи $P_{XVY} = \frac{1}{2}P_{XVYU}$. Нека $UX \cap AB = \{X'\}$, $YV \cap AB = \{V'\}$. Паралелограмот $X'V'YU$ има страна $\frac{1}{2}\overline{AB}$ И висина половина од висината $h_\circ$ на $\triangle ABD$ па затоа $\frac{1}{2}P_{ABD} = P_{X'V'YU}$. Слично $P_{X'V'YX} = \frac{1}{2}P_{ABC}$. Затоа

$$P_{XVY} + \frac{1}{2}P_{XVYU} = \frac{1}{2}(P_{X'V'YU} - P_{X'V'VX}) = \frac{1}{4}(P_{ABD} - P_{ABC}). \tag{3}$$

Со собирање на (1), (2) и (3) следува

$$P_{VWY} = P_{XWV} + P_{YVW} + P_{XVY} = \frac{1}{4}(P_{ABC} + P_{DBC} + P_{ABD} - P_{ABC}) = \frac{1}{4}P_{ABCD},$$

односно $P_{ABCD} = 4P_{XWY}$.

III година

1. На табла се запишани $1,2,3,...,19$. Се изведува следнава постапка: кои било два броја x и y се бришат а на нивно место се запишува бројот $x+y-1$. Постапката се продолжува се додека не се добие само еден број. Кој е тој број?

Решение. Со a_k ќе ја означиме разликата на збирот од сите броеви кои се на таблата после k-тиот чекор, и од бројот на броевите кои после k-тиот чекор се запишани на таблата. За почетната позиција (нулти чекор) важи:

$$a_0 = (1+2+3+4+...+19)-19 = 171.$$

Ќе докажеме дека важи: $a_k = a_p$ за секој k и p ($k \leq 18$ и $p \leq 18$). Нека во $k+1$-от чекор се запишани броевите x и y, а на нивно место е запишан бројот $x+y-1$. Тогаш се добива:

$$a_k = x+y+\sum z_i - (19-k)$$

и

$$a_{k+1} = (x+y-1)+\sum z_i - (19-k-1) = x+y+\sum z_i - (19-k).$$

Значи: $a_k = a_p$ за секој k и p ($k \leq 18$ и $p \leq 18$). Според тоа

$$a_{18} = d-1 = a_0 = 171.$$

Конечно, се добива бројот 172.

2. Реши ја равенката

$$(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}+\sqrt{x^2-5x+6}})^x + (\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}-\sqrt{x^2-5x+6}})^x = 2^{\frac{x+4}{4}}$$

Решение. Нека

$$A = (\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}+\sqrt{x^2-5x+6}})^{\frac{x}{2}} \text{ и } B = (\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}-\sqrt{x^2-5x+6}})^{\frac{x}{2}}.$$

Тогаш

$$\frac{A+B}{2} = 2^{\frac{x}{2}}, \quad AB = 2^{\frac{x}{2}}.$$

Освен тоа, $A>0$, $B>0$, така од $\frac{A+B}{2} = \sqrt{AB}$ следува $A=B$. Но ова е еквивалентно со $x=0$ или $\sqrt{x^2-5x+6}=0$, па затоа решенијата се $0, 2$ и 3.

3. На страните AB и BC на триаголникот ABC избираме точки D и E соодветно. Точките K и M ја делат отсечката DE на три еднакви дела. Правите BK и BM ја сечат страната AC во точките T и P соодветно. Докажи дека $\overline{TP} < \frac{\overline{AC}}{3}$.

4. Во рамнината е дадено конечно множество од прави кои по парови се сечат, при што низ секоја пресечна точка на две прави минува барем уште една од дадените прави. Докажи дека сите прави се сечат во една точка.

Решение. Да претпоставиме дека твдењето на задачата не е точно, односно постојат конечно прави во рамнината такви што низ секоја пресечна точка минуваат барем три прави и постојат барем две пресечни точки. Во тој случај постои права p и барем една пресечна точка S што лежи на правата p. Бидејќи множеството на пресечни точки е конечно ќе постои пресечна точка кој е на најмало растојание од правата p (пресечната точка не лежи на правата p). Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека таква е точката S. Низ S минуваат барем три прави и тие ја сечат правата p во барем три точки. Нека три од нив се точките X,Y,Z и нека Y се наоѓа меѓу X и Z. Во точката Y се сечат правите p и SY па низ Y минува барем уште една права q. Правата q мора да сечи една од отсечките XS и ZS. Нека на пример q ја сечи отсечката SZ во точката T. Значи, S не е најблиската пресечна точка од правата p, бидејќи T е на помало растојание од p. Од добиената противречност следува тврдењењто на задачата.

IV година

1. Докажи го неравенството

$$\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+x^3+z^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3}\le\frac{1}{3}\text{, каде } 0\le x,y,z\le 1.$$

Решение. Од тоа што $0\le x,y,z\le 1$ следува $0\le x^3,y^3,z^3\le 1$, па имаме:

$$\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+x^3+z^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3}\le\frac{x}{6+x^3+y^3+z^3}+\frac{y}{6+x^3+y^3+z^3}+\frac{z}{6+x^3+y^3+z^3}=\frac{x+y+z}{6+x^3+y^3+z^3}$$

Доволно е да докажеме дека

$$3(x+y+z)\le 6+x^3+y^3+z^3.$$

Последното неравенство следува од тоа што за $0\le t\le 1$, $t^3-3t+2\ge 0$, бидејќи $t^3-3t+2=(t-1)^2(t+2)$.

2. Дадено е множеството $S=\{1,2,3,...,100\}$. Дали може S да се разбие на дванаесет дисјунктни подмножества, такви што елементите на секое од нив да бидат членови на геометриски прогресии.

Решение. Ќе покажеме дека три различни прости броеви ($p_1<p_2<p_3$), членови на иста геометриска прогресија со количник $q\ne 1$. Тогаш

$$p_1=a_1q^{k-1},\qquad p_2=a_1q^{r-1},\qquad p_3=a_1q^{m-1}$$

од каде добиваме

$$\frac{p_2}{p_1}=q^{r-k}=q^s\text{, }(r-k=s),\qquad \frac{p_3}{p_2}=q^{m-r}=q^n\text{, }(m-r=n)$$

Значи, $p_2^{s+n} = p_1^n p_3^s$, што не е можно бидејќи p_1, p_2, p_3 се прости броеви, а $s \neq 0, n \neq 0$.

Во множеството C има 25 прости броеви, па барем во едно од дванаесетте множества ќе има барем три прости броеви. Но тогаш елементите од тоа множество не коже да бидат членови на аритметичка прогресија.

3. Одреди ги сите функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ за кои што важи ($\forall x, y \in \mathbb{R}^+$)

$$f(x^y) = f(x)^{f(y)}$$

Решение.Забележуваме дека $f(x) = 1$ ги исполнува ги исполнува условите од задачата. Да побараме други решенија. Нека $f(a) \neq 1$ за некое $a > 0$. Тогаш

$$f(a)^{f(xy)} = f(a^y) = f(a^x)^{f(y)} = f(a)^{f(x)f(y)}.$$

Значи,

$$f(xy) = f(x)f(y),\ (\forall x, y \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

и како

$$f(a)^{f(x+y)} = f(a^{x+y}) = f(a^x a^y) = f(a^x)f(a^y) = f(a)^{f(x)} f(a)^{f(y)} = f(a)^{f(x)+f(y)}$$

добиваме

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ (\forall x, y \in \mathbb{R}). \tag{2}$$

Од (1) следува $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1)$, односно $f(1) = 1$. Сега најпрво од (2) а потоа со примена на (1) добиваме

$$f(n) = f(1+1+1+...+1) = f(1) + f(1) + ... + f(1) = n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$f(\tfrac{m}{n})n = f(\tfrac{m}{n})f(n) = f(\tfrac{m}{n} \cdot n) = f(m) = m$$

Значи, за секои $m, n \in \mathbb{N}$ важи

$$f(\tfrac{m}{n}) = \tfrac{m}{n}. \tag{3}$$

Да претпоставиме дека постои $x \in \mathbb{R}$ таков што $f(x) \neq x$. Нека $f(x) < x$ (случајот $f(x) > x$ се разгледува аналогно). Постои $y = \frac{m}{n}$ таков што

$$f(x) < y < x \tag{4}$$

Од (2) и (3) следува

$$f(x) = f(y - (x - y)) = f(y) + f(x - y) > f(y) > y,$$

односно $f(x) > x$, што противречи на (4).

Значи, $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$, $f(x) = x$. Бараните функции се $f(x) \equiv 1$ и $f(x) \equiv x$.

.

4. Иста како задача 3 од трета година.