У СУСРЕТ 2010. ГОДИНИ

Ратко Тошић, Нови Сад

ЗАДАЦИ

1. Постоји ли природан број код кога је производ цифара једнак 2010?
2. Колико делилаца има број 2010?
3. Сваку звездицу замени неком цифром тако да се добије тачан рачун:

$$* \cdot *** + * = 2010.$$

4. Заменити *a*, *b*, *c*, *d*, *e* цифрама (различита слова различитим цифрама) тако да се добије тачна једнакост:

$$a \cdot \overline{bcd} + e = 2010.$$

5. Колико најмање пута треба узастопно исписати број 2010 да би се добио број дељив са 99?
6. Који је најмањи природан број дељив са 5, а чији је збир цифара 2010?
7. Да ли постоји број који је потпун квадрат и чији је збир цифара једнак 2010?
8. Између сваке две цифре у низу од 20 петица

$$5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5$$

упиши знак неке од четири основне рачунске операције тако да вредност добијеног израза буде 2010.

9. Између неких цифара низа од 13 деветки

$$9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9$$

уметни знаке аритметичких операција (без коришћења заграда) тако да као резултат добијеш број 2010.

10. На колико начина се броју 2010 могу дописати три цифре тако да добијени број буде дељив са 2008?
11. Може ли се број $1^2 + 2^2 + \cdots + 2010^2$ представити у облику збира квадрата
(а) 2009; (б) 2008
различитих природних бројева?
12. Марко је за Нову годину добио поклон који се састоји од 2010 једнаких дрвених коцки са ивицом дужине 1. Међу тим коцкама има плавих и црвених. Колико је најмање било црвених коцки ако је Марко успео да од добијених коцки састави квадар (запремине 2010 cm^3) који је споља сав црвен?
13. Да ли је могуће број 2010 представити у облику збира неких природних бројева (не морају сви сабирци бити различити), а такође и у облики производа тих истих бројева?
14. Одреди највећи број који је једнак производу бројева чији је збир једнак 2010.
15. Правоугаоник је дужима које су паралелне његовим страницама разбијен на квадратиће површине 1. У сваки квадратић уписан је један број. Познато је да је збир бројева у свакој врсти једнак 1, а збир бројева у свакој колони једнак 2. Може ли површина тог правоугаоника да буде 2010?

16. Број 2010^{2010} растави се на неколико сабирака, ти сабирци се кубирају, затим саберу и добијени израз подели са 6. Одреди остатак при том дељењу.
17. У скупу природних бројева решити једначину
$$x^2 - xy + 2x - 3y = 2010.$$
18. Два ученика треба да напишу један 2010-цифрени број, пишући наизменично по једну цифру из скупа {6, 7, 8, 9}. Други ученик побеђује ако добијени 2010-цифрени број буде дељив са 9. У супротном губи. Како други ученик треба да уписује цифре да би победио, без обзира на то како први ученик уписује своје цифре?
19. Да ли постоји 2010 узастопних природних бројева чији је збир куб неког природног броја?
20. За округли сто треба да седне 2010 људи, међу њима је 1005 физичара и 1005 хемичара. Неки од њих увек говоре истину, а остали увек лажу. Познато је да је број лажова међу физичарима једнак броју лажова међу хемичарима. Да ли је могуће да се они расподеле тако за округлим столом да на питање: „Шта је ваш сусед са десне стране?" – сваки од присутних одговори: „Хемичар"?

РЕШЕЊА НОВОГОДИШЊИХ ЗАДАТАКА

1. Не, јер број 2010 садржи прост фактор већи од 9 ($2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, а 67 је прост број).
2. 16.
3. Треба уствари наћи сва решења једначине
$$a \cdot \overline{bcd} + e = 2010.$$
где су a, b, c, d, e цифре (које не морају бити различите) и $\overline{bcd}$ декадни запис троцифреног броја. Како је $e \leq 9$, мора бити $2010 \geq a \cdot \overline{bcd} \geq 2001$. Директном провером налазимо 14 решења:
$$3 \cdot 667 + 9 = 2010;\quad 3 \cdot 668 + 6 = 2010;\quad 6 \cdot 669 + 3 = 2010;\quad 3 \cdot 670 + 0 = 2010;$$
$$4 \cdot 501 + 6 = 2010;\quad 4 \cdot 502 + 2 = 2010;\quad 5 \cdot 401 + 5 = 2010;\quad 5 \cdot 402 + 0 = 2010;$$
$$6 \cdot 334 + 6 = 2010;\quad 6 \cdot 335 + 0 = 2010;\quad 7 \cdot 286 + 8 = 2010;\quad 7 \cdot 287 + 1 = 2010;$$
$$8 \cdot 251 + 2 = 2010;\quad 9 \cdot 223 + 3 = 2010.$$
4. Услов задовољава само једно решење из претходног задатка: $4 \cdot 501 + 6 = 2010$.
5. Нека је n тражени број и $A = 20102010 \ldots 2010$ број који се добије кад се 2010 испише n пута узастопно. Збир цифара броја A једнак је $3n$, а разлика збира цифара на парним и збира цифара на непарним местима је такође $3n$. Број A је дељив са 99 ако је дељив и са 9 и са 11. Број A је дељив са 9 ако је n дељив са 3, а према познатом критеријуму, A је дељив са 11 ако је $3n$ дељив са 11. Дакле, n мора бити дељив са 3 и са 11, а најмањи такав број је 33.

6. Последња цифра траженог броја је 0 или 5. Међу бројевима чија је последња цифра 0, најмањи са збиром цифара 2010 је 3999...990 (прва цифра је 3, следеће 223 цифре су деветке, а последња је 0). Међу бројевима који се завршавају цифром 5, најмањи са збиром цифара 2010 је 7999...995 (прва цифра је 7, последња 5, а између њих су 222 деветке). Овај последњи је мањи и он је тражени број.
7. Не, јер је збир цифара 2010 дељив са 3, па је и сам број дељив са 3, док збир цифара није дељив са 9, па ни сам број није дељив са 9.
8. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 - 5 - 5 - 5 = 2010.$
9. $999 + 999 + 9 + 9 : 9 + 9 : 9 + 9 : 9 = 2010.$
10. На један начин. Треба дописати цифре 008. Заиста,
$$2010008 = 1000 \cdot 2008 + 2008 = 1001 \cdot 2008.$$
11. (а) Да. Довољно је заменити сабирке 1209^2 и 1612^2 њиховим збиром 2015^2. (Бројеви $1209 = 3 \cdot 403$, $1612 = 4 \cdot 403$ и $2015 = 5 \cdot 403$ чине Питагорину тројку бројева.)

(б) Заменити још, на пример, 1212^2 и 1616^2 са 2020^2.
12. Ако је једна ивица квадра дужине 1 или 2, онда све коцке морају бити црвене. *Од 2010* коцки могу се саставити само три квадра чија је свака ивица дужине веће од 2: $3 \cdot 5 \cdot 134$, $3 \cdot 10 \cdot 67$, $5 \cdot 6 \cdot 67$. У првом случају потребно је бар 1614 црвених коцки, у другом 1490, а у трећем 1230. Дакле, међу Марковим коцкама било је бар 1230 црвених.
13. Како је $2010 = 30 \cdot 67$, важи:
$$2010 = 30 \cdot 67 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 30 + 67 + 1 + \ldots + 1,$$
где се на левој страни сабирак 1 појављује 1913 пута, а на десној страни се фактор 1 појављује, такође 1913 пута.

Исто тако је
$$2010 = 5 \cdot 6 \cdot 67 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 5 + 6 + 67 + 1 + \ldots + 1,$$
где се 1 појављује и на левој и на десној страни по 1938 пута, као сабирак, односно фактор.

(Да ли можеш наћи још нека таква представљања?)
14. Нека је N тражени број
$$N = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n, \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2010.$$
Доказаћемо да је $a_i \leq 4$, за свако $i = 1, 2, \ldots, n$. Ако би за неко i било $a_i \geq 5$, онда би број који уместо a_i има чиниоце 2 и $a_i - 2$ био већи од N (јер је $(a_i - 2) \cdot 2 > a_i$), а збир његових чинилаца би такође био 2010. Како је $4 = 2 \cdot 2$, следи да тражени број мора бити облика $N = 2^k \cdot 3^m$ при чему је $2 \cdot k + 3 \cdot m = 2010$. Међутим, $2010 = 2 \cdot 1005 = 3 \cdot 670$. Како је $2^3 < 3^2$, то је $(2^3)^{335} < (3^2)^{335}$, што значи да је $k = 0$, а тражени број $N = 3^{670}$.

15. Нека је m број врста, а n број колона. Ако је површина правоугаоника једнака 2010, онда је $mn = 2010$, при чему је $2n^2 = 2010$, тј. $n^2 = 1005$. Међутим, то је немогуће, јер број 1005 није потпун квадрат (збир цифара му је дељив са 3, а није дељив са 9). Дакле, површина правоугаоника не може бити једнака 2010.

16. Нека је $a = 2010^{2010}$ и $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ ($a_i \in N$, $k \in N$). Тада је

$$S = a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_k^3 = \left(a_1^3 - a_1\right) + \left(a_2^3 - a_2\right) + \ldots + \left(a_k^3 - a_k\right) + a.$$

Како је a_i природан број, то су сви сабирци $a_i^3 - a_i = a_i(a_i - 1)(a_i + 1)$ дељиви са 6. Стога је остатак дељења суме S са 6 исти као и остатак дељења броја a са 6. Будући да је a паран број дељив са 3, а самим тим и са 6, излази да је остатак при дељењу S са 6 једнак нули.

17. Дату једначину напишимо у облику $(3 + x)y = x^2 + 2x - 2010$, тј. као

$$y = \frac{x^2 + 2x - 2010}{x + 3} = \frac{x^2 + 2x - 3 - 2007}{x + 3} = \frac{(x-1)(x+3) - 2007}{x + 3}$$

или

$$y = x - 1 - \frac{2007}{x + 3}.$$

Да би број $\frac{2007}{x+3}$ био природан, $x + 3$ мора бити делилац броја 2007, тј. један од бројева 1, 3, 9, 223, 669 или 2007. Како је и y природан број, прве три вредности за $x + 3$ (а самим тим и за x) не долазе у обзир, па имамо следећа три решења (x, y) за дату једначину: (220, 210), (666, 665), (2004, 2002).

18. Други ученик увек упише своју цифру тако да она сабрана са цифром коју је последњим својим потезом уписао први даје збир 15. На тај начин постиже да збир сваких шест узастопних цифара износи 45, тј. дељив је са 9. Јасно је да ће на крају збир свих исписаних цифара бити дељив са 9 ($335 \cdot 45$).

19. Збир 2010 узастопних природних бројева, од којих је најмањи n, једнак је

$$2010n + 1005 \cdot 2009 = 1005 \cdot (2n + 2009).$$

Треба изабрати n тако да је $2n + 2009 = 1005^2$, тј. $n = \frac{1}{2} \cdot \left(1005^2 - 2009\right)$.

20. Није могуће. На основу одговора закључујемо да је број лажова једнак броју физичара, тј. 1005. С друге стране број лажова је паран (јер их има подједнако међу физичарима и хемичарима).

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија