ПРИМЈЕНА СКАЛАРНОГ ПРОИЗВОДА ВЕКТОРА У АЛГЕБРИ

Ново Лабудовић, Подгорица; Никола Михаљевић, Котор

Скаларни производ вектора често примјењујемо у геометрији при рјешавању задатака који су повезани с одређивањем величине угла између правих. Међутим, скаларни производ се може врло успјешно примјенити и у алгебри за доказивање неких облика неједнакости, рјешавања једначина, система једначина и налажењу екстремних вриједности. Како скаларним производом вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ називамо реалан број $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$, гдје је α угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и како је $\cos\alpha\leq 1$, то је

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \tag{1}$$

и такође

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \tag{2}$$

Примјетимо да знак једнакости у (1) важи ако су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни, а знак једнакости у (2) важи ако су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ истог смјера (у ознаци $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$).

Нека вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имају координате: $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, у ортонормираној бази $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$. Тада неједнакости (1) и (2) имају облик:

$$|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|\leq\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2} \tag{3}$$

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\leq\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2} \tag{4}$$

Из неједнакости (1) и (2), у случају кад вриједи знак једнакости, слиједи да је $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, гдје је $\lambda\neq 0$, што је еквивалентно систему

$$x_1=\lambda x_2,\qquad y_1=\lambda y_2,\qquad z_1=\lambda z_2. \tag{5}$$

Запазимо да се у наведеној дефиницији ријеч производ не уклапа у појам операције, јер у алгебарском смислу бинарна операција значи да се сваком пару објеката, одређеним поступком, придружује јединствени објекат те врсте. Међутим, резултат скаларног производа је скалар (број), а не вектор. Због тога, иако терминолошки скаларни производ асоцира на алгебарску операцију, то је ипак функција на скупу вектора, која сваком пару вектора придружује реалан број са одговарајућим својствима.

У овом раду ми ћемо кроз примјере показати примјену скаларног производа вектора у алгебри.

Примјер 1. Ријешити једначину $\sqrt{17}\sqrt{x^2+y^2}=x+4y-1$.

Рјешење. Посматрајмо векторе $\vec{a}=(x,y)$ и $\vec{b}=(1,4)$. Тада је $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$, а $|\vec{b}|=\sqrt{17}$. Скаларни производ ових вектора је $\vec{a}\cdot\vec{b}=x+4y$. Примјењујући неједнакост (2) из овога слиједи да је $\sqrt{17}\sqrt{x^2+y^2}\geq x+4y>x+4y-1$, па једначина нема рјешења.

Примјер 2. Ријешити систем једначина

$$x+y+z=2 \qquad (a)$$

$$x^2+y^2+z^2=\frac{4}{3} \qquad (b)$$

Рјешење. На први поглед нам се намеће тврдња да дати систем има бесконачно много рјешења (три непознате, а двије једначине). Међутим, такав закључак је погрешан. Показаћемо да систем (a)–(b) има јединствено рјешење.

Посматрајмо векторе: $\vec{a}=(x,y,z)$ и $\vec{b}=(1,1,1)$. Тада је $\vec{a}\cdot\vec{b}=(x,y,z)\cdot(1,1,1)=x+y+z$, па на основу једначине (a) имамо

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2 \qquad (c)$$

Даље је $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, па је

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}=2 \qquad (d)$$

С обзиром на (c) и (d) имамо $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. Значи вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су колинеарни, па су им координате пропорционалне, тј. $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$, па с обзиром на (a) добијамо да је $x=y=z=\frac{2}{3}$. Дакле рјешење система (a)–(b) је $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Објаснићемо геометријски због чега систем (a)–(b) има јединствено рјешење. Једначина (a) је једначина равни која сијече координатне осе у тачкама $(2,0,0)$, $(0,2,0)$ и $(0,0,2)$. Једначина (b) је једначина сфере с центром у координатном почетку и радијусом $2/\sqrt{3}$.

Ако посматрамо сфере радијуса $r<2/\sqrt{3}$ тада сфера неће сијећи раван (a), па у том случају систем (a)–(b) неће имати рјешења. За $r=2/\sqrt{3}$ (што је код нас у једначини (b)) сфера ће додиривати раван (a). Дакле, сфера и раван имају једну заједничку тачку, чије су координате рјешења датог система. При $r>2/\sqrt{3}$ сфера ће сијећи раван по некој кружници. У том случају систем ће имати бесконачно много рјешења.

Примјер 3. Ријешити систем једначина

$$x^4 + y^4 + z^4 = 1 \tag{e}$$

$$2x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{10} \tag{f}$$

Рјешење. Задани систем (e)–(f), на први поглед је неодређен (три непознате, а двије једначине). За разлику од примјера 1, он нема рјешења.

Посматрајмо векторе $\vec{a} = (x^2, y^2, z^2)$ и $\vec{b} = (2, 1, 1)$. Тада је $\vec{a} \cdot \vec{b} = (x^2, y^2, z^2) \cdot (2, 1, 1) = 2x^2 + y^2 + z^2$, па с обзиром на једначину (f) је $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{10}$, а $|\vec{a}| = \sqrt{x^4 + y^4 + z^4} = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{6}$. Дакле добијамо $\vec{a} \cdot \vec{b} > |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ што није могуће. Слиједи да систем (e)–(f) нема рјешења.

Објаснимо геометријски зашто систем (e)–(f) нема рјешења. Уведимо нове промјенљиве: $x^2 = p$, $y^2 = q$ и $z^2 = s$. Тада систем (e)–(f) има облик:

$$p^2 + q^2 + s^2 = 1 \tag{e_1}$$

$$2p + q + s = \sqrt{10} \tag{f_1}$$

Сличним расуђивањем као у примјеру 1 долазимо до закључка да сфера (e_1) и раван (f_1) немају заједничких тачака, па због тога систем (e_1)–(f_1), а тиме и систем (e)–(f) нема рјешења. Стварно, координатни почетак у систему $Opqs$ је удаљен од равни (f_1) за $r = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}} > 1$. Према томе сфера (e_1) полупречника 1 нема заједничких тачака с равни (f_1), па систем (e)–(f) нема рјешења.

Примјер 4. Ријешти систем једначина

$$x + y + z = 6 \tag{g}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 12 \tag{h}$$

$$\log_x y^2 = z \tag{i}$$

Рјешење. Посматрајмо векторе $\vec{a} = (1, 1, 1)$ и $\vec{b} = (x, y, z)$. Тада је $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 1, 1) \cdot (x, y, z) = x + y + z = 6$, а $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{3}$. Због тога је $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$, а $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6$, тј. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Дакле вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су колинеарни, па је $x = y = z$, па с обзиром на једначину (g) је $x = y = z = 2$. Дакле рјешење једначине (g) и (h) је $(2, 2, 2)$. Провјером установљавамо да је то рјешење и једначине (i). Дакле, рјешење система једначина је $(2, 2, 2)$.

Примјер 5. Ријешити систем једначина

$$9y^2z^2 + 4x^2z^2 + 25x^2y^2 = 16x^2y^2z^2 \qquad (j)$$

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 9 \qquad (k)$$

$$x + y\sqrt{3} - z\sqrt{15} = \frac{15}{2} \qquad (l)$$

Рјешење. Лако се увјерити да задани систем нема рјешења у коме би бар једна непозната била једнака нули. Због ове чињеници једначину (j) подијелимо са $x^2y^2z^2$. Тада добијамо једначину

$$\frac{9}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{25}{z^2} = 16 \qquad (j')$$

еквивалентну са (j) и систем (j'), (k), (l) је еквивалентан датом систему. Посматрајмо векторе: $\vec{a} = \left(\frac{3}{x}, \frac{2}{y}, \frac{5}{z}\right)$ и $\vec{b} = (x, 2y, z)$. Тада је $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\frac{3}{x}, \frac{2}{y}, \frac{5}{z}\right) \cdot (x, 2y, z) = 3 + 4 + 5 = 12$, а $|\vec{a}| = \sqrt{\frac{9}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{25}{z^2}} = 4$ и $\vec{b} = \sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2} = 3$. Због тога је

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \qquad (m)$$

Из (m) слиједи да су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни, па је $\frac{3}{x^2} = \frac{1}{y^2} = \frac{5}{z^2}$. Одавде слиједи $y^2 = \frac{1}{3}x^2$ и $z^2 = \frac{5}{3}x^2$. Тада из једначине (k) се добија $x^2 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{5}{3}x^2 = 9$, тј. $x = \pm\frac{3}{2}$, а $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $z = \pm\frac{\sqrt{15}}{2}$. Од добијених вриједности за x, y и z формирамо осам уређених парова:

$$\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right), \quad \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right), \quad \left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right),$$
$$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right), \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right), \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right),$$
$$\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right), \quad \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right).$$

Свака од ових тројки је рјешење једначина (k) и (l) датог система. Сада установљавамо која од ових тројки је и рјешење једначине (l). Провјером налазимо да су то тројке $\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ и $\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$. Дакле рјешење датог система је $\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ и $\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$.

Често сусрећемо неједнакости које је тешко доказати традиционалним методама. Примјеном наведеног метода могуће је знатно олакшати и убрзати њихово доказивање.

Примјер 6. Ако је $x + y + z = 1$, показати да је $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} + \sqrt{2z+1} \leq \sqrt{15}$.

Доказ. Означимо координате вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на сљедећи начин: $\vec{a} = (\sqrt{2x+1}, \sqrt{2y+1}, \sqrt{2z+1})$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$. Сагласно формули (4) имамо $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} + \sqrt{2z+1} \leq \sqrt{2x+1+2y+1+2z+1} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3 + 2(x+y+z)} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{15}$, што је и требало доказати.

Примјер 7. Доказати да је неједнакост $\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+\sqrt{50-3a}\leq 12$ испуњена за свако a за које је дефинисана њена лијева страна.
Доказ. Посматрајмо векторе $\vec{x}=(1,1,1)$, $\vec{y}=(\sqrt{a+1},\sqrt{2a-3},\sqrt{50-3a})$. На основу наведене фурмуле у примјеру 6 је $\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+\sqrt{50-3a}\leq \sqrt{3}\cdot\sqrt{a+1+2a-3+50-3a}=12$, што је и требало доказати.

Примјер 8. Ако су a и a катете, а c хипотенуза правоуглог троугла ABC тада је $a+b\leq c\sqrt{2}$. Доказати.
Доказ. Размотримо векторе $\vec{a}=(1,1,0)$, $\vec{b}=(a,b,0)$. Сагласно формули (4) имамо $a+b\leq\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}=c\sqrt{2}$.

Примјер 9. Доказати да је $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\leq a+b+c$, $a,b,c\geq 0$.
Доказ. Посматрајмо векторе $\vec{x}=(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})$ и $\vec{y}=(\sqrt{b},\sqrt{c},\sqrt{a})$. Сагласно наведеној формули у примјеру 6 имамо $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\leq\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{b+c+a}=a+b+c$, што је и требало доказати.

Примјер 10. Доказати да је $\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, $a,b,c>0$.
Доказ. Посматрајмо векторе $\vec{x}=\left(\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{b}},\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$ и $\vec{y}=\left(\frac{1}{\sqrt{b}},\frac{1}{\sqrt{c}},\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$. Даље закључујемо као у примјеру 9.

На крају ћемо кроз примјере показати како се скаларни производ вектора може примијенити на проналажење екстремних вриједности (глобалних) неких функција.

Примјер 11. Наћи највећу вриједност функције $f(x)=\sqrt{x+5}+\sqrt{11-x}$.
Рјешење. Дата функција је дефинисана за $-5\leq x\leq 11$. Посматрајмо векторе $\vec{a}=(\sqrt{x+5},\sqrt{11-x})$ и $\vec{b}=(1,1)$. Тада је $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{x+5}+\sqrt{11-x}$, а $|\vec{a}|=\sqrt{x+5+11-x}=4$, $|\vec{b}|=2$ и $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=4\sqrt{2}$. Из ове релације слиједи да је $\max\limits_{x\in[-5,11]} f(x)=4\sqrt{2}$, што значи да је та вриједност достигнута, ако су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни. При томе је $\sqrt{x+5}=\sqrt{11-x}$, одакле слиједи $x=3$. Дакле, имамо $f_{\max}=f(3)=4\sqrt{2}$.

Примјер 12. Наћи највећу вриједност израза $y=3\cos x+4\sin x$ за свако $x\in\mathbf{P}$.
Рјешење. Посматрајмо векторе $\vec{a}=(\cos x,\sin x)$, $\vec{b}=(3,4)$. Тада је $y=3\cos x+4\sin x=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$, а $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=5$, па је $y=5\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$. Највећа вриједност y је ако је угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ једнак нули, тј. $\angle(\vec{a},\vec{b})=0$. Тада је $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=1$ па је највећа вриједност $y=5$.

Као што видимо, рјешавање оваквих задатака се доста упрошћава у односу на њихово рјешавање традиционалним методама.

Задаци

1. Ријешити једначину $x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}$.

2. Ријешити системе једначина

$$(a)\quad \begin{aligned} x+y+z&=3\\ x^2+y^2+z^2&=3\\ x^5+y^5+z^5&=3 \end{aligned} \qquad (b)\quad \begin{aligned} x-2y+3z&=15\\ x^2+y^2+z^2&=16 \end{aligned} \qquad (c)\quad \begin{aligned} 23x^2+9y^4+4z^6&=1\\ x+y^2+z^3&=2/3 \end{aligned}$$

3. Ријешити систем једначина:

$$\begin{aligned} x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}&=3\\ x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}&=3\\ x^{2n+2}+y^{2n+2}+z^{2n+2}&=3 \end{aligned}$$

(Упутство: посматрати векторе $\vec{a}=(x^n,y^n,z^n)$ и $\vec{b}=(x^{n+1},y^{n+1},z^{n+1})$)

4. Доказати:

(a) $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\le\sqrt{(a+c)(b+d)}$

(b) $1+ab\le\sqrt{1+a^2}\cdot\sqrt{1+b^2}$, гдје су a и b реални бројеви.

5. Доказати да важи неједнакост $|3\sin x-4\cos x|\le 5$ за сваку вриједност броја x.

6. Доказати неједнакост $\sin x\sin y\sin z+\cos x\cos y\cos z\le 1$.

7. Доказати неједнакост $a^2bc+ab^2c+abc^2\le a^4+b^4+c^4$
(Упутство: Посматрати векторе $\vec{x}=(ac,ab,bc)$ и $\vec{y}=(bc,ac,ab)$, а после тога на десној страни неједнакости поново примијенити овај метод узимајући за $\vec{x}=(a^2,b^2,c^2)$, а за $\vec{y}=(c^2,a^2,b^2)$.)

8. Доказати да је $x^2+y^2+z^2\ge 1$ ако је $xy+yz+xz=1$.

9. Наћи највећу вриједност функције $y=\sqrt{\frac{1}{2}-\cos 2x}+\sqrt{\frac{1}{2}+\cos 2x}$

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 1997/98