Paradoks rotacije kruga

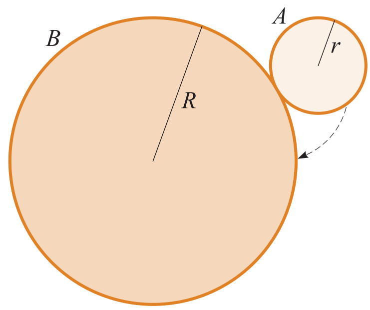
Aleksandar Hatzivelkos[1], *Iva Golubić*[2]

Uvod

Godine 1982. jedno zanimljivo pitanje iz matematike na maturi[3] u SAD-u je podiglo dosta prašine, toliko da su pitanje i ponuđeni odgovori završili u medijima. Poznate novine New York Times od 25. svibnja te godine svojim čitateljima prenose pitanje, [7]:

Polumjer kruga A jednak je jednoj trećini polumjera kruga B, kao što je prikazano na slici 1. Ukoliko se krug A kotrlja po krugu B (bez klizanja) koliko će rotacija napraviti krug A do trenutka povratka na početnu točku?

Kao mogući odgovori ponuđeni su: (a) $3/2$, (b) 3, (c) 6, (d) $9/2$, (e) 9. Kako biste vi odgovorili na to pitanje?



Slika 1. Prikaz rotacije kruga A po obodu kruga B.

Prašina na navedeno pitanje podigla se zbog prijave učenika da među ponuđenim odgovorima nema točnog odgovora. I bili su u pravu. U opisanoj situaciji, krug A napravi četiri rotacije.

Zbog rješenja koje se (naizgled) protivi intuiciji navedeni problem se često naziva *paradoksom rotacije kruga* ili *paradoksom kovanice*, iako to nije. Za rješenje postoje formalna i neformalna objašnjenja koja su upravo tema ovog priloga, u kojemu ćemo analizirati i općenitije iskazani problem u kojemu za polumjere r i R krugova A i B, vrijedi $R = k \cdot r$, $k \in \mathbb{N}$.

Prebrojavanje rotacija

Prirodan pristup rješavanju navedenog problema kreće od usporedbe opsega krugova A i B. Krug A ima opseg $2r\pi$, a krug B, $2R\pi = k \cdot 2r\pi$. Dakle, opseg kruga A stane točno k puta u opseg kruga B, što znači da krug A kotrljanjem (bez proklizavanja) obavi k rotacija.

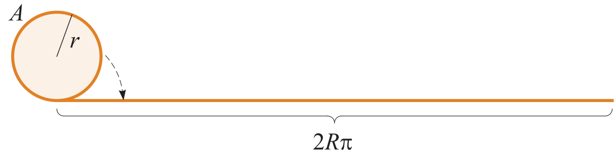
To bi bila istina kada bi se krug A kotrljao po dužini duljine $2R\pi$ kao na slici 2. No put po kojemu se krug A kotrlja i sam formira kružnicu (obod kruga B), pa stoga krug A

[1] Autor je s Veleučilišta Velika Gorica, Velika Gorica; e-pošta: `aleksandar.hatzivelkos@vvg.hr`

[2] Autorica je s Veleučilišta Velika Gorica, Velika Gorica; e-pošta: `iva.golubic@vvg.hr`

[3] Radi se o tzv. SAT testovima (Scholastic Aptitude Test) na temelju kojih se u SAD-u budući studenti upisuju na studij.

prateći taj put napravi još jednu dodatnu rotaciju (oko središta kruga B). Stoga je ukupan broj rotacija kruga A jednak $k+1$.



Slika 2. Prikaz rotacije kruga A po dužini duljine $2R\pi$.

U [2] ta dodatna rotacija objašnjena je na sljedeći način.

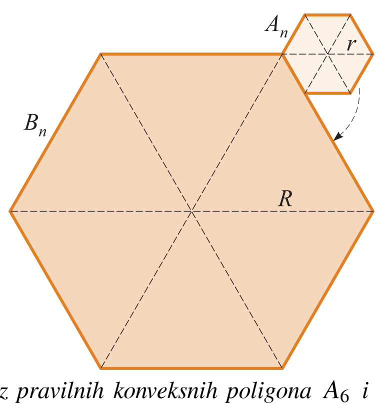
Zamislimo da se krug A ne kotrlja, već klizi po obodu kruga B. I u tom će slučaju krug A napraviti jednu rotaciju, jednostavno zbog praćenja krivulje po kojoj klizi, odnosno oboda kruga B. Potom na tu rotaciju treba dodati sve rotacije koje krug A obavi kotrljanjem po dužini duljine $2R\pi$.

Navedeni problem doživio je veći broj vizualizacija u različitim medijima. Na Youtubeu možemo naći animaciju koja prati gore izneseno objašnjenje u [8], dok u [9] pronalazimo objašnjenje koje se temelji na tzv. *planetarnim zupčanicima* [10]. Na platformi Geogebra također nalazimo vizualizacije opisanog problema, među kojima bismo istakli [4, 6].

Analitičko rješenje

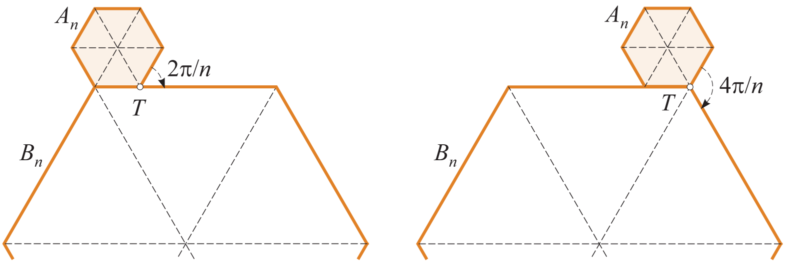
Usprkos tome što objašnjenje o kompoziciji dviju rotacija vjerno opisuje promatrani proces, vjerujemo kako bi formalniji matematički dokaz ojačao uvjerenje kako navedeno nije samo naknadno objašnjenje koje odgovara empirijskim uvidima. Stoga ovdje pružamo formalniji matematički izvod.

Za početak, promatrajmo pomak između dva pravilna konveksna poligona s n stranica, gdje je n paran cijeli broj veći od dva. Pri tome veći poligon označimo s B_n, i manji, koji se kreće po njegovom obodu, s A_n. Polovinu duljine najduže dijagonale (dakle, dijagonale koja prolazi kroz središte poligona) označimo s R kod poligona B_n, odnosno s r kod A_n. Za vrijednosti R i r vrijedi $R = k \cdot r$, gdje je $k \in \mathbb{N}$. Na slici 3 prikazani su opisani poligoni sa šest stranica.



Slika 3. Prikaz pravilnih konveksnih poligona A_6 i B_6 za $k=4$.

Kako su najduže dijagonale poligona A_n i B_n proporcionalne, zbog sličnosti isto vrijedi i za njihove stranice. Na početku je poligon A_n postavljen tako da se jedan njegov vrh poklapa s vrhom poligona B_n, te da jedna njegova stranica leži na stranici poligona B_n, kao što je prikazano na slici 4.



Slika 4. Prikaz kretanja poligona A_n po obodu poligona B_n.

Kretanje poligona A_n po obodu poligona B_n možemo opisati (bez smanjenja općenitosti) u smjeru kretanja kazaljke na satu. Pomak poligona A_n vršimo rotacijom oko vrha T (koji leži i na stranici poligona B_n) dok sljedeća susjedna stranica poligona A_n ne legne na stranicu poligona B_n.[4]

U slučaju kada točka T nije ujedno i vrh poligona B_n, takvim pomakom A_n rotiramo za vrijednost njegovog vanjskog kuta, odnosno za $\dfrac{2\pi}{n}$. Kako su poligoni A_n i B_n slični s faktorom k, nakon $k-1$ takvih pomaka vrh T poklopit će se s vrhom poligona B_n.

Pomakom koji vršimo u tom koraku (rotacijom poligona A_n oko vrha od B_n), poligon A_n će rotirati za zbroj vanjskih kutova poligona A_n i B_n, odnosno za kut $\dfrac{4\pi}{n}$. Dakle, pomakom duž jedne stranice poligona B_n, poligon A_n izvrši ukupnu rotaciju:

$$(k-1)\cdot\frac{2\pi}{n}+\frac{4\pi}{n}=(k+1)\cdot\frac{2\pi}{n}. \tag{1}$$

Kako poligon B_n ima n stranica, pomaci od A_n duž svih stranica od B_n rezultiraju ukupnom rotacijom poligona A_n za kut

$$(k+1)\cdot\frac{2\pi}{n}\cdot n=(k+1)\cdot 2\pi. \tag{2}$$

Iz jednadžbe (2) zaključujemo da ukupna rotacija poligona A_n ne ovisi o broju stranica n poligona, te kako ukupna rotacija poligona A_n nakon pomaka po obodu poligona B_n iznosi $k+1$ punih krugova.

Konačno, za opisani postupak promotrimo granični slučaj kada $n\to\infty$. Neograničenim povećanjem broja stranica pravilnih poligona A_n i B_n dobivamo:

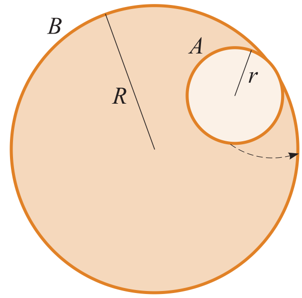
- Pravilni konveksni poligoni A_n i B_n prelaze u krugove A i B.
- Polumjeri krugova A i B jednaki su polovini najdužih dijagonala poligona A_n i B_n, dakle redom r i R.
- Opisano kretanje poligona A_n po obodu od B_n prelazi u kotrljanje bez klizanja kruga A po obodu kruga B.
- Ukupna rotacija kruga A pri tome ostaje ista, jer prema jednadžbi (2) ne ovisi o broju n stranica poligona.

Time vidimo da se krug A zarotira za $k+1$ punih krugova kada se kreće po obodu kruga B.

---

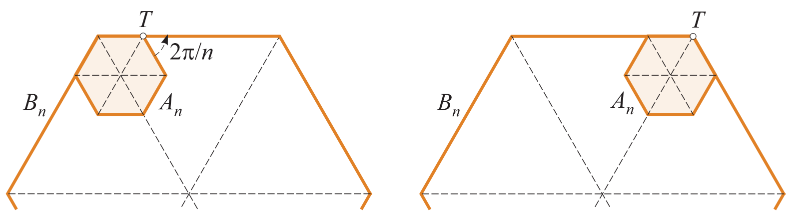
[4] Vrhom T uvijek ćemo nazivati vrh poligona A_n koji je nakon pomaka došao u kontakt sa stranicom poligona B_n.

Isti dokaz lako možemo modificirati kako bi dokazali tvrdnju ako se krug A rotira $k-1$ puta ako krećući se po obodu kruga B s *unutarnje* strane (slika 5). Dokaz dobiva na važnosti zbog toga što zaključak o $k-1$ rotacija nije intuitivno jednostavno objasniti. I ovog puta krug A rotira po krivulji duljine $2R\pi$ na kojoj napravi k punih rotacija. I ovog puta krug A zbog zakrivljenosti kružnice po kojoj se kreće napravi dodatnu rotaciju, no ukupan broj rotacija se ovaj puta smanjuje!



Slika 5. Prikaz rotacije kruga A po obodu kruga B s unutarnje strane.

Analitička konstrukcija pomoću pravilnih konveksnih poligona s n stranica jasno pokazuje na kojem se mjestu "gubi" ta rotacija. Kao što vidimo na slici 6, pomaci poligona A_n po stranici poligona B_n (dok se točka T ne poklopi s vrhom poligona B_n) i dalje znači rotaciju poligona A_n za kut $\dfrac{2\pi}{n}$.



Slika 6. Prikaz pomaka poligona A_n po stranici poligona B_n s unutarnje strane.

No prilikom navedenog kretanja s unutarnje strane, kada se točka T poklopi s vrhom poligona B_n, nikakav dodatni pomak (rotacija) nije potreban jer sljedeća stranica poligona A_n već leži na sljedećoj stranici poligona B_n. Stoga je ukupan iznos rotacije poligona A_n jednak

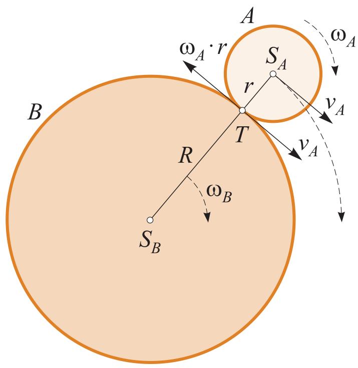
$$(k-1)\cdot\frac{2\pi}{n}\cdot n=(k-1)\cdot 2\pi. \tag{3}$$

Izraz (3), kao ni izraz (2), ne ovisi o broju stranica poligona. Stoga, prelaskom na graničnu vrijednost $n\to\infty$ izvodimo analogne zaključke kao i kod rotacije kruga A s vanjske strane oboda kruga B, s razlikom da je ukupna rotacija sada dana izrazom (3) i iznosi $k-1$ punih rotacija kružnice A.

Fizičko rješenje

Rješavanju navedenog problema možemo prići i iz perspektive fizike, odnosno opisivanja kretanja kruga A. Za ovaj pristup rješavanju problema ključan je podatak da krug A, rotirajući po obodu kruga B ne klizi.

Za početak označimo bitne elemente problema kao na slici 7: središta krugova A i B označimo s S_A i S_B, njihove polumjere s r i R, kutne brzine s ω_A i ω_B, te točku kontakta dva kruga s T.



Slika 7. Prikaz elemenata kotrljanja kruga A po obodu kruga B.

Činjenicu da se krug A kotrlja po obodu kruga B bez klizanja iskazujemo kroz brzinu točke T koja je jednaka nuli. Za početak, središte kruga A se u odnosu na središte kruga B kreće brzinom v_A za koju vrijedi

$$v_A = \omega_B \cdot (R + r). \tag{4}$$

Ukoliko pak kao referentni sustav promatramo krug A, tj. ukoliko je središte kruga A referentna točka koordinatnog sustava, tada se točka T giba brzinom v_A u smjeru suprotnom od gibanja točke S_A u prethodnom referentnom sustavu. Za iznos te brzine vrijedi

$$v_A = \omega_A \cdot r. \tag{5}$$

Brzine iskazane u jednadžbama (4) i (5) jednake su po iznosu i smjeru, no suprotnih su orijentacija, što je posljedica uvjeta da krug A ne klizi prilikom kretanja po obodu kruga B. Odavde slijedi:

$$\omega_B \cdot (R + r) = \omega_A \cdot r \implies \omega_A = \frac{R + r}{r} \cdot \omega_B.$$

Krug A obiđe cijeli obod kruga B u vremenu $t_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_B}$. U tom istom vremenu rotacija φ koju obavi krug A jednaka je:

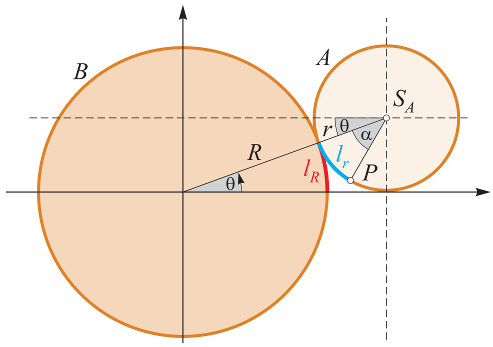
$$\varphi = \omega_A \cdot t_0 = \frac{R + r}{r}\omega_B \cdot \frac{2\pi}{\omega_B} = \left(1 + \frac{R}{r}\right) \cdot 2\pi.$$

Kako je $R = k \cdot r$, zaključujemo da je krug A obavio rotaciju od punih $1 + k$ krugova.

Kretanje točke na obodu manjeg kruga

Analiza kretanja točke smještene na obodu kruga A također nas vodi k istom rezultatu. Promotrimo sliku 8 koja prikazuje elemente bitne za analizu kretanja točke na obodu kruga A pri kotrljanju tog kruga po obodu kruga B.

Radi jednostavnosti (a bez smanjenja općenitosti) postavili smo središte kruga B u ishodište koordinatnog sustava. Tada središte kruga A ima koordinate $S_A\big((R+r)\cos\theta, (R+r)\sin\theta\big)$ pri čemu je kut θ koji spojnica središta krugova zatvara s pozitivnim smjerom osi x. Također, neka rotacija kruga A započne u trenutku kada je njegovo središte u točki $(R + r, 0)$.



Slika 8. Prikaz puta kojeg pređe točka na obodu kruga A pri kotrljanju po obodu kruga B.

Kada krug A obavi kotrljanje za kut θ, kao što je prikazano na slici 8, točka P na obodu kruga A, koja je u početku bila točka dodira između dva kruga, dolazi na poziciju prikazanu na slici 8, te njezina spojnica sa središtem S_A zatvara kut α sa spojnicom središta dvaju krugova.

Kako se radi o kotrljanju bez klizanja, lukovi l_R i l_r (koji su prikazani crvenom i plavom bojom na slici 8) su jednake duljine. Odredimo sada vezu između kutova α i θ:

$$l_R = l_r \implies R \cdot \theta = r \cdot \alpha \implies \alpha = \frac{R}{r}\theta.$$

Pomoću slike 8 zapisujemo koordinate točke P:

$$x_P = x_S - r\cos(\theta + \alpha) = (R + r)\cos\theta - r\cos\left(\theta + \frac{R}{r}\theta\right), \tag{6}$$

$$y_P = y_S - r\sin(\theta + \alpha) = (R + r)\sin\theta - r\sin\left(\theta + \frac{R}{r}\theta\right). \tag{7}$$

Broj rotacija koje krug A napravi sada možemo odrediti analizom neke od koordinata točke P. Na primjer, ako se u početnom trenutku točka P nalazi na istoj visini (ima istu y-koordinatu) kao i središte kruga A, no lijevo od središta, tada broj rotacija kruga A možemo odrediti kao broj rješenja jednadžbe

$$\cos(\theta + k\theta) = 1$$

u intervalu $[0, 2\pi\rangle$, pri čemu je $k = \frac{R}{r}$. Rješavanjem te jednadžbe dobivamo:

$$\theta \cdot (1 + k) = 2l\pi \implies \theta = \frac{2l}{k+1}\pi, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

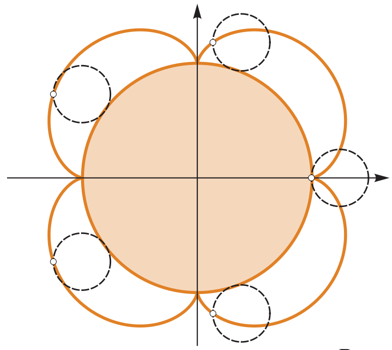
Kako tražimo rješenja koja se nalaze u intervalu $[0, 2\pi\rangle$, slijedi:

$$0 \leq \frac{2l}{k+1}\pi < 2\pi \implies 0 \leq \frac{l}{k+1} < 1, \quad l \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Cijeli brojevi l koji zadovoljavaju nejednadžbu (8) su $l = 0, 1, \ldots, k$, odnosno točka P se $k+1$ puta nađe u istom položaju u odnosu na središte kruga A. Dakle, krug A ukupno napravi $k + 1$ rotacija.

Istaknimo još da točka $P(x_p, y_p)$ određena koordinatama danim u jednadžbama (6) i (7), za $\theta \in [0, 2\pi\rangle$ opisuje krivulju koju nazivamo *epicikloidom*, [11]. Krivulju je tim imenom prvi nazvao danski astronom Ole Rømer koji je dokazao kako upravo epicikloidni zupčanik proizvodi najmanje trenje pri rotaciji, [3].

Na slici 9 prikazana je epicikloida za $k = \frac{R}{r} = 4$. Na slici je istaknut krug A u svim pozicijama u kojima se promatrana točka na obodu kruga nalazi točno lijevo od središta kruga A. Slična animacija koja prikazuje kretanje točke po epicikloidi prikazana je i u radu Dave Van Leeuwena na Geogebri, [4].



Slika 9. Prikaz epicikloide za $k = \frac{R}{r} = 4$.

Zaključak

Motivirani pojavljivanjem "paradoksa" rotacije kruga na društvenim mrežama, kao i interesom za "problemom bez točnog ponuđenog rješenja" na maturi u SAD-u, ovim smo prilogom pokazali koja se matematička i fizička objašnjenja mogu upotrijebiti za njegovo rješavanje i objašnjavanje. Vjerujemo da su pružene argumentacije jasne te da mogu potaknuti zainteresirane čitatelje na daljnje proučavanje povezanih pojmova i problema.

Literatura

[1] B. H. Bunch, *Mathematical Fallacies and Paradoxes*, Van Nostrand Reinhold (1982).

[2] Y. Nishiyama, *Circles rolling on circles*, Plus Magazine, University of Cambridge, `https://plus.maths.org/content/circles-rolling-circles` (2014).

[3] M. Romer, I. B. Cohen, *Rømer and the First Determination of the Velocity of Light*, Isis, Vol. 31, No. 2 (1940).

[4] Geogebra, D. Van Leeuwen, *A question about a rolling circle*, `https://www.geogebra.org/m/v3a437ux` (2014).

[5] Geogebra, S. Phelps, *A Circle Rolling on a Circle*, `https://www.geogebra.org/m/WPjmWnZf` (2015).

[6] Geogebra, cbishop, *Rolling a circle on a circle!*, `https://www.geogebra.org/m/wjq2aatj` (2020).

[7] The New York Times, *Error found in S.A.T. question*, United Press International, `https://www.nytimes.com/1982/05/25/us/error-found-in-sat-question.html` (1982).

[8] Youtube, mathdotpie, *Rolling Circles Problem*, `https://www.youtube.com/watch?v=b7rx4Fa3Fhc` (2021).

[9] Youtube, tec-science, *Rotation paradox*, `https://www.youtube.com/watch?v=URPyC0oh_FQ` (2024).

[10] Machine design, *Planetary Gears: The Basics* (2021).

[11] Eric W. Weisstein, *Epicycloid*. From MathWorld – A Wolfram Web, `https://mathworld.wolfram.com/Epicycloid.html`

[12] Wikipedia, *Coin rotation paradox*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Coin_rotation_paradox` (2024).