РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА, ОДРЖАН ВО 1964 ГОД.

Трети клас

1. Од два рамнокраки триаголници, чија основа е $a=16$ cm, а чии краци се соодветно $b=10$cm и $c=17$cm, е составен делтоид.

Да се докаже дека во секој делтоид може да се впише кружница и да се најде конструктивно (со прав лењир и шестар) центарот на впишаната кружница во дадениот делтоид, како и точките во кои таа кружница ги допира страните на делтоидот.

Да се пресмета радиусот на впишаната кружница како и размерите во кои допирните точки ги делат страните на делтоидот.

2. Зададена е квадратната равенка

$$x^2-(m^2+1)x+m^2=0 .$$

Да се докаже, без решавање на равенката, дека корените x_1 и x_2 на оваа равенка се реални и позитивни за која да е вредност на m.

Да се определи m и да се пресметаат корените на x_1 и x_2, ако тие ја задоволуваат следната релација:

$$a)\ \frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=2;\quad b)\ \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=3.$$

3. Околу дадената топка со радиус R е опишан еден прав цилиндер и еден прав конус. Колкав мора да биде аголот 2α при врвот на оскиниот пресек на конусот, за да биде волуменот на цилиндерот аритметичка средина од волумените на топката и на конусот?

Да се покаже дека во овој случај и плоштината на цилиндерот е аритметичка средина од плоштините на топката и на конусот.

4. Да се реши равенката

$$\sqrt{\log x(\log^2 x-1)}-\sqrt{\log^2 x-1}=0,$$

земајќи за основа најпрво 10, а потоа 2.

Да се најде врска меѓу логаритмите на броевите во однос на основата 10 и оние во однос на основата 2 и да се пресмета оној број чиј логаритам во однос на основата 2 претставува реципрочна вредност на логаритмот од тој број во однос на основата 10.

Четврти клас

1. Во триаголникот ABC е зададено $a+b=12$, $c=8$ и $\beta=60^\circ$.

Да се конструира тој триаголник. Потоа да се пресметаат неговите елементи.

2. Правите $y=2x$, $2y=x$, $x+y=a$, $x+y=2a$ образуваат еден четириаголник.

Да се покаже дека околу овој четириаголник може да се опише кружница и да се најде нејзината равенка.

Да се најде геометриското место на центарот на оваа кружница кога a се менува од 1 до 4.

3. Дадена е една низа од триаголници $ABC, A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ..., $A_nB_nC_n$, кои се конструирани така што темињата на секој од нив се наоѓаат во средините на страните на претходниот триаголник. Нека со $S, S_1, S_2, \ldots, S_n$, ги означиме нивните плоштини, соодветно.

а) Да се пресметаат A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, од $AB=m$.

б) Да се пресметаат $S_1, S_2, \ldots S_n$ со помош на S.

в) Да се пресмета сумата $S_1+S_2+\ldots+S_n$ и да се најде нејзината граница кога n се стреми кон бескрајност.

г) Кога n се наголемува неограничено, триаголникот $A_nB_nC_n$ се редуцира на една точка. Која е таа точка?

4. Во полутопка со радиус $R=3$ да се впише прав цилиндер со висина x, така што центарот на неговата основа се поклопува со центарот на полутопката.

Да се изрази волуменот y на цилиндерот во зависност од неговата висина x; да се изучи таа зависност и да се нацрта соодветниот график.

Да се најде висината на цилиндерот кога тој ќе има најголем волумен и да се пресмета истиот.

РЕШЕНИЈА

Трети клас

1. Во дадениот случај подолгата дијагонала на делтоидот ($d_1=21cm$) е оска на симетрија на делтоидот. Симетралите на аглите што ги градат нееднаквите страни на делтоидот се сечат во една точка S која се на оваа дијагонала (сл.37). Таа точка е подеднакво оддалечена од сите четири страни на делтоидот, така што е: $\overline{SP}=\overline{SQ}=\overline{SR}=\overline{ST}$. Според тоа точката во која се сечат симетралите на внатрешните агли во делтоидот е центар на впишаниот круг во делтоидот.

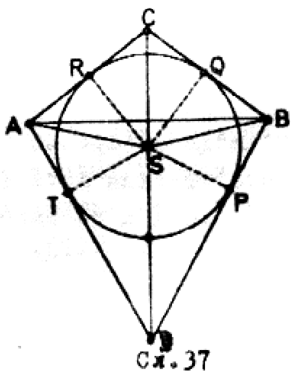
Допирните точки ќе ги определиме ако ги спуштиме нормалите од центарот кон страните на делтоидот.

За да ја најдеме должината на радиусот r на впишаната кружница во делтоидот ќе ја пресметаме неговата плоштина.

$$P=\frac{\overline{CD}\cdot\overline{AB}}{2}=\frac{21\cdot16}{2}=168.$$

Од друга страна имаме:

$$P=2(P_{\Delta ASC}+P_{\Delta ASD})=2\left(\frac{\overline{AC}\cdot r}{2}+\frac{\overline{AD}\cdot r}{2}\right)=27r.$$



Сл.37

Следува:

$$168=27r,\quad r=\frac{56}{9}.$$

Од $\Delta COB\sim\Delta CQS$ имаме:

$$\overline{OC}:\overline{OB}=\overline{CQ}:r,\ 6:8=\overline{CQ}:\frac{56}{9},\ \overline{CQ}=\frac{14}{3},\ \overline{BQ}=\overline{BC}-\overline{CQ}=\frac{16}{3}.$$

Следствено:

$$\overline{CQ}:\overline{QB}=\overline{CR}:\overline{RA}=7:8.$$

Исто така од $\Delta OBD\sim\Delta DPS$ имаме:

$$\overline{OD}:\overline{OB}=\overline{DP}:r,\ \overline{DP}=\frac{35}{3},\ \overline{PB}=\overline{BD}-\overline{DP}=\frac{16}{3}.$$

Според тоа:

$$\overline{DP}:\overline{PB}=\overline{DT}:\overline{TA}=35:16.$$

2. Дискриминантата на дадената квадратна равенка е

$$D=(m^2+1)^2-4m^2=m^4-2m^2+1=(m^2-1)^2>0.$$

Според тоа корените на равенката се реални за сите реални вредности на m.

Од Виетовите формули за дадената квадратна равенка имаме

$$x_1 x_2 = m^2 > 0 \text{ и } x_1 + x_2 = m^2 + 1 > 0.$$

Бидејќи се овие изрази позитивни, следува дека се корените на равенката позитивни.

Од дадената равенка се добива:

$$x_{1/2} = \frac{m^2+1\pm(m^2-1)}{2} \text{ или } x_1 = m^2,\ x_2 = 1.$$

а)Од равенката $\frac{m^2}{1} + \frac{1}{m^2} = 2$ следува:

$$m^4-2m^2+1=0,\ (m^2-1)^2=0,\ m^2-1=0;$$
$$m_1=1,\ m_2=-1.$$

б)Од равенката $\sqrt{m^2}+1=3$ следува:

$$m+1=3 \ (\text{за } m>0),\ \text{односно } -m+1=3 \ (\text{за } m<0).$$

Оттука имаме: $m_1=2,\ m_2=-2$.

3. Нека се радиусот на основата и висината на конусот R и H, а аголот при врвот на оскиниот пресек на конусот нека е 2α (сл.38).

Волуменот на топката е: $V_t = \frac{4\pi r^3}{3}$;

Волуменот на цилиндерот е: $V_c = 2\pi r^3$;

Волуменот на конусот е: $V_k = \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{(H\,tg\alpha)^2 \cdot H}{3} = \frac{\pi H^3 tg^2\alpha}{3}$.

Имајќи предвид дека топката е впишана во конусот, имаме:

$$(H-r)\sin\alpha = r,\ H = \frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Поради тоа волуменот на конусот може да се изрази во вид

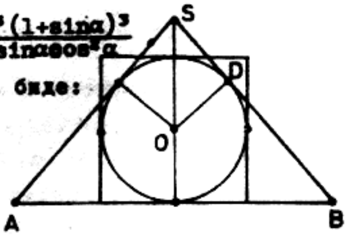
$$V_k = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{r^3(1+\sin\alpha)^3}{\sin^3\alpha} \cdot tg^2\alpha = \frac{\pi r^3(1+\sin\alpha)^3}{3\sin\alpha\cos^2\alpha}$$

Според условот на задачата треба да биде:

$$V_o = \frac{V_t+V_k}{2}$$

односно

$$2\pi r^3 = \frac{1}{2}\left[\frac{4\pi r^3}{3} + \frac{\pi r^3(1+\sin\alpha)^3}{3\sin\alpha\cos^2\alpha}\right],$$



Сл.38

По упростувањето на оваа равенка се добива равенката:

$$8\sin\alpha\cos^2\alpha = (1+\sin\alpha)^3$$

Заменувајќи: $\sin\alpha = t$, се добива

$$8t(1-t)^2 = (1+t)^3,\ (t+1)(9t^2-6t+1)=0,$$

$$t+1=0,\ 9t^2-6t+1=0$$

Од овие равенки следува:

$$t_1 = -1,\ t_2 = \frac{1}{3};\ \sin\alpha = -1, \sin\alpha = \frac{1}{3}.$$

Според природата на задачата само вториот од овие резултати доаѓа предвид.

Плоштината на цилиндерот е $P_c = 6\pi r^2$.

Плоштината на топката е $P_t = 4\pi r^2$.

Плоштината на конусот е:

$$P_k = \pi R(R+s) = Htg\frac{\alpha}{2}\pi\left(Htg\frac{\alpha}{2} + \frac{H}{\cos\alpha}\right) = \frac{\pi r^2(1+\sin\frac{\alpha}{2})^3}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 8\pi r^2.$$

$$\frac{P_t+P_k}{2} = \frac{4\pi r^2+8\pi r^2}{2} = 6\pi r^2 = P_c.$$

4. Од дадената равенка

$$\sqrt{\log x(\log^2 x-1)} - \sqrt{\log^2 x-1}=0$$

се добива:

$$\sqrt{\log^2 x-1}(\sqrt{\log x}-1) = 0.$$

Оваа равенка е задоволена ако е:

$$\log^2 x-1=0 \text{ или } \sqrt{\log x}-1 = 0.$$

односно ако е:

$$\log^2 x=1 \text{ или } \log x=1.$$

Следува:

$$\log x = \pm 1.$$

За основа 10 добиваме $x_1=10$, $x_2=\frac{1}{10}$.

За основа 2 добиваме $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$.

Нека е: $\log_{(2)}x=m$, $\log_{(10)}x=n$.

Тогаш е: $x=2^m$, $y=10^n$; $2^m=10^n$.

Ако последната од овие равенки ја логаритмираме во однос на основата 2, се добива:

$$m=n\log_{(2)}10,\ \log_{(2)}x=\log_{(10)}x\cdot\log_{(2)}10.$$

Ако истата равенка се логаритмира во однос на основата 10, се добива:

$$m\log_{(10)}2=n,\ \log_{(10)}x=\log_{(2)}x.\log_{(10)}2\ .$$

За да биде задоволена равенката

$$\log_{(2)}x=\frac{1}{\log_{(10)}x}\ ,$$

треба да биде

$$\log_{(10)}x.\log_{(2)}10=\frac{1}{\log_{(10)}x}$$

$$[\log_{(10)}x]^2=\log_{(10)}2\ .$$

Четврти клас

1. За да го конструираме триаголникот ABC најпрво како помошна фигура ќе го конструираме триаголникот ABD со страници c и a+b и агол меѓу нив β. Темето C на триаголникот ABC е пресекот на страната BD со симетралата на страната AD зашто ΔACD е рамнокрак и неговата симетрала на основата мора да минува низ врвот. (сл.38).

По косинусната теорема

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta\ ,$$

$$b^2-a^2=64-8a. \qquad (1)$$

Од равенката (1) и дадената равенка a+b=12 добиваме

$$a=5,\ b=7.$$

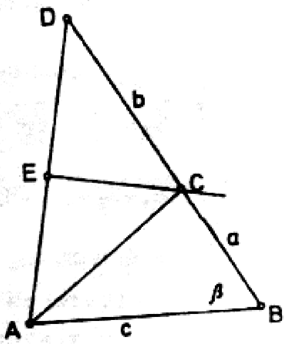
По синусната теорема

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}\ ,$$

$$\sin\alpha=\frac{a\sin\beta}{b}\ ,$$

$$\sin\alpha=\frac{5\sqrt{3}}{14}\ ,$$

$$\alpha=38^\circ31'33''.$$



Сл.39

2. Пресечните точки на дадените прави се: $y=2x$, $2y=x$, $x+y=a$ и $x+y=2a$

$$M_1\left(\frac{a}{3},\ \frac{2a}{3}\right),\ M_2\left(\frac{3a}{3},\ \frac{a}{3}\right),\ M_3\left(\frac{4a}{3},\ \frac{2a}{3}\right)\ \text{и}\ M_4\left(\frac{2a}{3},\ \frac{4a}{3}\right).$$

Во равенката на кружницата

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2\ ,$$

која минува низ точките M_1, M_2 и M_3, може да се пресметаат p, q и r од системот равенки

$$\left(\frac{a}{3}-p\right)^2+\left(\frac{2a}{3}-q\right)^2=r^2$$

$$\left(\frac{2a}{3}-p\right)^2+\left(\frac{a}{3}-q\right)^2=r^2$$

$$\left(\frac{2a}{3}-p\right)^2+\left(\frac{4a}{3}-q\right)^2=r^2,$$

од каде што се добива

$$p=\frac{5a}{6},\ q=\frac{5a}{6},\ r=\frac{a\sqrt{10}}{6}.$$

Според тоа равенката на кружницата која минува низ точките M_1 , M_2 и M_3 е

$$\left(x-\frac{5a}{6}\right)^2+\left(y-\frac{5a}{6}\right)^2=\frac{5a}{18}\ .$$

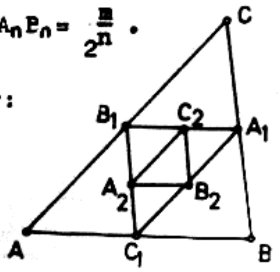
Бидејќи координатите на точката M_4 ја задоволуваат равенката на таа кружница, тоа значи дека околу четириаголникот кој го образуваат дадените прави, може да се опише кружница.

Бидејќи е $p=q$, центарот на таа кружница, кога a се менува, ќе се движи по правата $y=x$.

Кога a се менува од 1 до 4, тогаш центарот на кругот ќе се наоѓа на отсечката чии крајни точки се $C_1\left(\frac{5}{6},\frac{5}{6}\right)$ и $C_2\left(\frac{10}{3},\frac{10}{3}\right)$.

3.а) Страните на триаголниците ќе бидат

$$AB=m,\ A_1B_1=\frac{m}{2},\ A_2B_2=\frac{m}{4}=\frac{m}{2^2},\ldots,\ A_nB_n=\frac{m}{2^n}\ .$$



Сл.40

б) Површините на триаголниците ќе бидат:

$$S_1=\frac{S}{4},\ S_2=\frac{S_1}{4}=\frac{S}{16}=\frac{S}{4^2},\ \ldots\ ,\ S_n=\frac{S}{4^n}\ .$$

в) $S_1+S_2+\ldots+S_n=\dfrac{S_1(1-q)}{1-q}$, каде $q=\dfrac{1}{4}$.

$$S=\lim_{n\to\infty}(S_1+S_2+\ldots+S_n)=\frac{S_1}{1-q}=\frac{S}{3}\ .$$

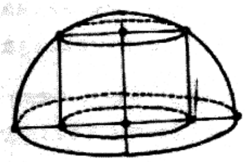
г) Тежиштето на секој од триаголниците $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ... се наоѓа во тежиштето на триаголникот ABC. Поради тоа точката во која се редуцира триаголникот $A_nB_nC_n$, кога n се зголемува неограничено, е тежиштето на триаголникот ABC.

4. Ако со r го обележиме радиусот на цилиндерот вписан во полутопката (сл.41), волуменот на цилиндерот е

$y=\pi r^2 x$ или, бидејќи е $r^2=R^2-x^2$,

$y=\pi(R^2-x^2)x=\pi(9-x^2)x=9\pi x-\pi x^3$.

Функцијата y е дефинирана за сите реални вредности на x.



Сл.41

Од равенката $\pi(9-x^2)x=0$ се добива:

$x_1=0,\ x_{2,3}=\pm 3.$

Според тоа нули на функцијата се:

$x_1=0$ и $x_{2,3}=\pm 3.$

$y'=9\pi-3\pi x^2,\ y''=-6\pi x$.

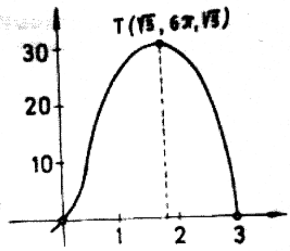
За $y'=0$ се добива:

$x_{1,2}=\pm\sqrt{3},\ y_1=6\pi\sqrt{3},\ y_2=-6\pi\sqrt{3}.$

Бидејќи е $y''_{(x=\sqrt{3})}>0$, за $x=\sqrt{3}$ функцијата има максимум $y_{max}=6\pi\sqrt{3}$.

Бидејќи е за $y''_{(x=-\sqrt{3})}<0$, за $x=-\sqrt{3}$ функцијата има минимум $y_{min}=-6\pi\sqrt{3}$.

За $x=0$ имаме: $y'\neq 0$, $y''=0$, значи во $O(0,0)$ функцијата има превој(сл.41).



Сл.42

Бидејќи функцијата y во оваа задача има значење на волумен на цилиндер, таа не може да биде нула или негативна. Затоа промената на волуменот на цилиндерот, кога неговата висина x се менува, е изразена со делот од графикот за $0\leqslant x\leqslant 3$.

Волуменот на цилиндерот е најголем за $x=\sqrt{3}$ и изнесува $y=6\pi\sqrt{3}$.

Задачите се превземени од книгата
Десет години натпревари по математика, подготвена од П. Димиќ и Е. Бубески