**Ристо Малчески**
**Алекса Малчески**

# ФУНКЦИИ И ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ

**Скопје, 2019**

Одговорен уредник
Д-р Слаѓана Брсакоска, Скопје

Рецензент
Проф. д-р Сава Гроздев, Софија

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

517.517(075.3)(076)
517.965(075.3)(076)

МАЛЧЕСКИ, Ристо
Функции и функционални равенки / Ристо Малчески, Алекса Малчески. - Скопје : Армаганка, 2019. - 384 стр. ; 25 см

Библиографија: стр. 382-384

ISBN 978-608-4904-96-0
1. Малчески, Алекса [автор]
а) Реални функции - Дескриптивна теорија на функции - Задачи за средно образование б) Функционални равенки - Задачи за средно образование
COBISS.MK-ID 111695626

# СОДРЖИНА

## РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

# ПРЕДГОВОР

> Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука, ако истото не е поткрепено со математички доказ.
>
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките, каде нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Оваа книга е наменета за учениците од средното образование кои сакаат да ги прошират своите знаења за множествата, пресликувањата, низите реални броеви, полиномите со реални коефициенти и реалните функции. Всушност, основна цел на книгата е решавањето на функционалните равенки во множествата природни, цели, рационални и реални броеви. Притоа, заради особеното значење на полиномите со реални коефициенти истите се разгледувани одделно.

Во книгава е направен обид да се собере и презентира оној материјал за кој сметавме дека може да им користи на учениците надарени за математика, но и на други читатели кои се интересираат за оваа област. Книгава содржи четири глави и тоа:

- Множества и пресликувања,
- Низи реални броеви,
- Реални функции, и
- Полиноми со реални коефициенти.

во кои покрај теориските разгледувања се дадени и неколку примери. Теориските разгледувања, во кои се дадени вкупно 57 дефиниции и 64 теореми, леми и последици се пропратени со соодветни коментари кои се во функција на појаснување на определени поими и тврдења. Притоа, за сите тврдења кои се наоѓаат во првите две и четвртата глава се дадени целосни докази, додека тврдењата за реалните функции се презентирани без доказ, исто како што тоа е направено во книгата која во литературата е наведена под реден број 57. Всушност, оваа книга е надоградба на споменатата книга и иако е под друг наслов може да се каже дека е нејзино второ, значително проширено издание.

Покрај стандардните резултати и примери, книгава содржи голем број задачи од националните олимпијади на Австрија, Белорусија, Бугарија, Иран, Ирска, Јапонија, Јужна Кореја, Казахстан, Кина, Молдавија, Полска, Романија, Русија, САД, Сингапур, Словачка, Србија, Тајван, Турција, Украина, Унгарија, Хрватска и Чешка, од Балканските, Азиско-пацифистичките, Медитеранските и Меѓународните математички олимпијади, како и задачи кои се предлагани на Меѓународните математички олимпијади.

Книгава содржи мал број решени примери, но после секоја глава се дадени задачи за самостојна работа, вкупно 523 задачи. Направен е обид, на почетокот на секој дел, задачите условно да се подредат по тежина, меѓутоа истото не важи и за задачите кои се наоѓаат на крајот од одделните делови. Причина за ваквиот пристап е потребата читателот самостојно да ја согледува тежината на одделната задача, како и методот кој ќе го избере за решавање на истата. Голем дел од задачите содржани во оваа книга всушност се задачи кои во периодот од 1993 до 2014 година авторите ги разработуваа со репрезентациите на нашата држава во рамките на подготовките за Балканските и Меѓународните математички олимпијади.

Стандардно, книгава содржи список на користената литература, при што покрај книгите кои се користени при пишувањето на оваа книга, во литературата се наведени и стручните статии на првиот автор, кои пред се се резултат од неговата долгогодишна работа со надарените ученици за математика.

За крај, и покрај вложениот напор, свесни сме дека се можни подобрувања на оваа книга, како и дека се присутни грешки, кои за жал не го одминуваат издавањето на било кој ракопис. Затоа однапред сме благодарни на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе допринесе да се подобри книгава.

Јануари, 2016 Авторите
Скопје

# ПРВА ГЛАВА
# МНОЖЕСТВА И ПРЕСЛИКУВАЊА

## 1. ЗА ПОИМОТ МНОЖЕСТВО

**1.1.** Поимот *множество* е основен поим во современата математика и истиот не го дефинираме, туку сметаме дека интуитивно е јасно што е тоа множество. Како синоним на зборот множество ќе ги користиме зборовите: *севкупност, фамилија и класа*. Објектите од кои е составено едно множество ги нарекуваме негови *елементи* или *точки*. За едно множество ќе сметаме дека е определено, ако за секој објект можеме да кажеме дали припаѓа или не припаѓа на тоа множество.

Нека $A$ е множество. Ако елементот $x$ припаѓа на множеството $A$, тогаш пишуваме $x \in A$, а ако елементот $x$ не припаѓа на множеството $A$, тогаш пишуваме $x \notin A$.

Во натамошните разгледувања ќе ги користиме следниве начини на задавање на множествата.

*i) Задавање на множествата со помош на набројување на неговите елементи.* На пример, нека множеството $A$ е составено од елементите $a, b, c, ..., k$. Тогаш, ја користиме ознаката $A = \{a, b, c, ..., k\}$.

*ii) Задавање на множествата со наведување на својство на неговите елементи.* Во секоја математичка задача најчесто ги разгледуваме елементите на точно определено множество $A$, кое понекогаш го нарекуваме основно множество. Притоа потребно е да ги одделиме елементите кои задоволуваат одредено својство $P$ (пишуваме $P(x)$), или не го задоволуваат својството $P$. Со помош на својството $P$ одделуваме множество од сите елементи на $A$, кои го имаат својството $P$. Ова множество го означуваме со $\{x \in A | P(x)\}$ или $\{x | P(x)\}$.

Од практична гледна точка допуштаме егзистенција на множество без елементи, кое го нарекуваме *празно множество*. Притоа сметаме дека постои само едно празно множество, кое го означуваме со симболот $\varnothing$.

**1.2. Дефиниција.** За множеството $A$ ќе велиме дека е *подмножество* од множеството $B$ ако од $x \in A$ следува $x \in B$. Притоа означуваме $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$.

За множествата $A$ и $B$ ќе велиме дека се *еднакви* ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Притоа пишуваме $A = B$.

Ако $A \subseteq B$ и $B$ содржи елемент кој не припаѓа на $A$, тогаш ќе велиме дека $A$ е *вистинско подмножество* од $B$ и пишуваме $A \subset B$ или $B \supset A$.

За празното множество сметаме дека е подмножество од секое множество $A$. Од претходната дефиниција непосредно следува дека $A \subseteq A$, но $A$ не е вистинско подмножество на самото себе.

**1.3. Теорема.** За секои множества $A, B$ и $C$, точни се следните тврдења:

*i)* $A = A$,

*ii)* Ако $A = B$, тогаш $B = A$.

*iii)* Ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, тогаш $A \subseteq C$.

*iv)* Ако $A = B$ и $B = C$, тогаш $A = C$.

**Доказ.** Непосредно следува од дефиницијата 1.2. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

**1.4. Дефиниција.** Нека $A$ е произволно множество. *Партитивно множество* (*булеан*), во ознака $P(A)$, го нарекуваме множеството чии елементи се сите подмножества на множеството $A$, т.е.

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}.$$

## 2. ОПЕРАЦИИ СО МНОЖЕСТВА

Во оваа точка ќе ги разгледаме основните оперции со множествата и ќе докажеме некои нивни својства.

**2.1. Дефиниција.** *Унија* на множествата $A$ и $B$ го нарекуваме множеството $C$, кое се состои од сите елементи кои припаѓаат барем на едно од множествата $A$ и $B$. Притоа означуваме $C = A \cup B$. Според тоа,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

**2.2. Дефиниција.** *Пресек* на множествата $A$ и $B$ го нарекуваме множеството $C$, кое се состои од сите елементи кои припаѓаат на секое од множествата $A$ и $B$. Притоа означуваме $C = A \cap B$. Според тоа,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

**2.3. Дефиниција.** За множествата $A$ и $B$ ќе велиме дека се *дисјунктни* ако $A \cap B = \varnothing$.

**2.4. Теорема.** За секои множества $A, B$ и $C$, точни се следните тврдења:

*i)* $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

*ii)* $A \cap B \subseteq A$; $A \cap B \subseteq B$; $A \subseteq A \cup B$; $B \subseteq A \cup B$.

*iii)* $A \cap A = A$; $A \cup A = A$, (*закони за идемпотентност*).

*iv)* $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$, (*комутативни закони*).

*v)* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, (*асоцијативни закони*).

*vi)* $A \cap (A \cup B) = A$; $A \cup (A \cap B) = A$, (*закони за апсорпција*).

*vii)* $x \notin A \cap B$ ако и само ако $x \notin A$ или $x \notin B$, и

$x \notin A \cup B$ ако и само ако $x \notin A$ и $x \notin B$.

**Доказ.** Непосредно следува од дефинициите 2.1 и 2.2. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

**2.5. Забелешка.** Нека $T$ е произволно множество индекси и нека за секој $t\in T$ е зададено множество $A_t$. Унија и пресек на множествата $A_t$, $t\in T$, определуваме аналогно како во дефинициите 2.1 и 2.2 со релациите

$$\bigcup_{t\in T} A_t = \{x \mid \text{ постои } t_0\in T \text{ таков што } x\in A_{t_0}\} \text{ и}$$

$$\bigcap_{t\in T} A_t = \{x \mid x\in A_t, \text{ за секој } t\in T\}, \text{ соодветно.}$$

**2.6. Теорема.** За секои множества $X_t, t\in T$ и $Y$ точни се равенствата

*i)* $(\bigcup_{t\in T} X_t)\cap Y = \bigcup_{t\in T}(X_t\cap Y)$, и

*ii)* $(\bigcap_{t\in T} X_t)\cup Y = \bigcap_{t\in T}(X_t\cup Y)$

**Доказ.** *i*) Нека $x\in(\bigcup_{t\in T} X_t)\cap Y$. Според тоа, $x\in\bigcup_{t\in T} X_t$ и $x\in Y$, што значи $x\in Y$ и постои $t_0\in T$ таков да $x\in X_{t_0}$. Затоа, постои $t_0\in T$ таков да $x\in X_{t_0}\cap Y$, т.е. $x\in\bigcup_{t\in T}(X_t\cap Y)$. Конечно,

$$(\bigcup_{t\in T} X_t)\cap Y\subseteq\bigcup_{t\in T}(X_t\cap Y). \tag{1}$$

Нека $x\in\bigcup_{t\in T}(X_t\cap Y)$. Според тоа, постои $t_1\in T$ таков да $x\in X_{t_1}\cap Y$, што значи $x\in Y$ и постои $t_1\in T$ таков да $x\in X_{t_1}$. Затоа, $x\in Y$ и $x\in\bigcup_{t\in T} X_t$, т.е. $x\in(\bigcup_{t\in T} X_t)\cap Y$. Конечно

$$(\bigcup_{t\in T} X_t)\cap Y\supseteq\bigcup_{t\in T}(X_t\cap Y). \tag{2}$$

Сега тврдењето следува од (1) и (2).

Равенството под *ii*) се докажува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

**2.7. Дефиниција.** *Разлика* на множествата $A$ и $B$ го нарекуваме множеството $C$, кое се состои од сите елементи на множеството $A$ кои не припаѓаат на множеството $B$. Означуваме $C=A\setminus B$. Според тоа,

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ и } x\notin B\}.$$

**2.8.** Тврдењата искажани во следната теорема непосредно следуваат од дефиницијата на разликата на множества, па затоа истите нема да ги докажуваме. Пожелно е овие тврдења читателот самостојно да ги докаже.

**Теорема.** За секои множества $A$ и $B$ важи.

*i)* $A\setminus\varnothing=A,\ A\setminus A=\varnothing,\ \varnothing\setminus A=\varnothing$.

*ii)* $x\notin A\setminus B$ ако и само ако $x\notin A$ или $x\in B$.

*iii)* Ако $A\subseteq B$, тогаш $A=B\setminus(B\setminus A)$.

*iv)* $A\setminus B=\varnothing$ ако и само ако $A\subseteq B$.

*v)* $A\setminus B=A$ ако и само ако $A\cap B=\varnothing$. ■

**2.9. Дефиниција.** Нека е дадено множеството $X$ и $A \subseteq X$ . *Комплемент* на $A$ во однос на $X$ го нарекуваме множеството ${}^{c}A = X \setminus A$ . Според тоа,

$$
{}^{c}A = \{x \mid x \in X \text{ и } x \notin A\} .
$$

Својствата *iii*) и *iv*) од следнава теорема се познати како *Де Морганови* закони.

**2.10. Теорема.** Нека $A, B \subseteq X$ . Тогаш, точни се равенствата

*i)* ${}^{c}({}^{c}A) = A$

*ii)* $A \subseteq B$ ако и само ако ${}^{c}B \subseteq {}^{c}A$.

*iii)* ${}^{c}(A \cup B) = {}^{c}A \cap {}^{c}B$.

*iv)* ${}^{c}(A \cap B) = {}^{c}A \cup {}^{c}B$.

**Доказ.** *i)* Равенството ${}^{c}({}^{c}A) = A$ следува од

$$
x \in {}^{c}({}^{c}A) \Leftrightarrow x \notin {}^{c}A \Leftrightarrow x \in A .
$$

*iii*) Имаме

$$
x \in {}^{c}(A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ и } x \notin B \Leftrightarrow
$$

$$
x \in {}^{c}A \text{ и } x \in^{c} B \Leftrightarrow x \in {}^{c}A \cap {}^{c}B . \blacksquare
$$

**2.11. Дефиниција.** *Декартов производ* на множествата $A$ и $B$ го нарекуваме множеството $C$ , во ознака $C = A \times B$ , кое се состои од сите подредени парови $(x, y)$ , каде што $x \in A, y \in B$ . Притоа, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ ако и само ако $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ .

Според тоа, $C = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ .

Аналогно дефинираме Декартов производ на множествата $A_i$, $i = 1, 2, ..., n$ . Имено,

$$
A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in A_i, \; i = 1, 2, ..., n\} .
$$

**1.15. Теорема.** *i*) $\varnothing \times A = B \times \varnothing = \varnothing$ за секои множества $A$ и $B$ .

*ii*) Ако $A_1 \subseteq A_2, B_1 \subseteq B_2$ , тогаш $A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$ .

**Доказ.** *ii*) Ако $(x, y) \in A_1 \times B_1$ , тогаш $x \in A_1$ и $y \in B_1$ и бидејќи $A_1 \subseteq A_2$ и $B_1 \subseteq B_2$ добиваме $x \in A_2$ и $y \in B_2$ . Според тоа, $(x, y) \in A_2 \times B_2$ , што значи $A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$ . $\blacksquare$

## 3. ПРЕСЛИКУВАЊА

**3.1. Дефиниција.** Нека $A$ и $B$ се две непразни множества. Ако на секој елемент $x \in A$ му е придружен, по некое правило $f$ , еднозначно определен елемент $y \in B$ , тогаш велиме дека $f$ е *пресликување* (*функција*) од $A$ во $B$ и пишуваме $f : A \to B$ . За елементот $y \in B$ велиме дека е *слика* на елементот $x \in A$ и означуваме $y = f(x)$. Множеството $A$ го нарекуваме *домен*, а множеството $B$ - *кодомен* на пресликувањето $f$.

За две пресликувања $f: A \to B$ и $g: C \to D$ ќе велиме дека *се еднакви* ако $A = C,\ B = D$ и за секој $x \in A$ важи $f(x) = g(x)$.

**3.2. Дефиниција.** Нека $f: A \to B$ и $A_0 \subset A$. Функцијата $f_0 : A_0 \to B$, дефинирана со $f_0(x) = f(x)$ ја нарекуваме *рестрикција* на функцијата $f$ на множеството $A_0$, а функцијата $f$ ја нарекуваме *проширување* (*продолжување*) на функцијата $f_0$ на множеството $A$.

**3.3. Дефиниција.** Нека $f: A \to B$. *График* на функцијата $f$ го нарекуваме множеството $G(f) = \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B,\ y = f(x)\}$.

Јасно, $G(f) \subseteq A \times B$.

**3.4. Дефиниција.** Нека $A$ е произволно непразно множество. Пресликувањето $\mathrm{id}_A : A \to A$ дефинирано со $\mathrm{id}_A(x) = x$, за секој $x \in A$, го нарекуваме *идентично* пресликување.

**3.5. Дефиниција.** Нека $f: A \to B$ и $g: B \to C$ се две пресликувања. За секој $x \in A$ ставаме $h(x) = g(f(x))$ и добиваме пресликување $h: A \to C$ кое го нарекуваме *композиција* на пресликувањата $f$ и $g$, и го означуваме со $h = g \circ f$.

**3.6. Теорема.** а) Ако $f: A \to B$, тогаш $f \circ \mathrm{id}_A = f$ и $\mathrm{id}_B \circ f = f$.

б) Ако $f: A \to B$, $g: B \to C$ и $h: C \to D$, тогаш

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

**Доказ.** а) Пресликувањата $f \circ \mathrm{id}_A$ и $f$ имаат исти домени и кодомени и притоа за секој $x \in A$ важи $(f \circ \mathrm{id}_A)(x) = f(\mathrm{id}_A(x)) = f(x)$, па затоа $f \circ \mathrm{id}_A = f$.

Аналогно се докажува дека $\mathrm{id}_B \circ f = f$.

б) Пресликувањата $h \circ (g \circ f)$ и $(h \circ g) \circ f$ имаат ист домен $A$ и кодомен $D$ и притоа за секој $x \in A$ важи

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) \\ &= (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x),\end{aligned}$$

од што следува $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. ■

**3.7. Дефиниција.** За пресликувањето $f: A \to B$ ќе велиме дека е *инјекција* ако од $f(x_1) = f(x_2)$ следува $x_1 = x_2$.

За пресликувањето $f: A \to B$ ќе велиме дека е *сурјекција* ако за секој $y \in B$ постои $x \in A$ таков да $y = f(x)$, т.е. секој елемент на $B$ е слика на барем еден елемент на $A$.

**3.8. Теорема.** Ако $f:A\to B$ и $g:B\to C$ се

а) инјекции б) сурјекции

тогаш соодветното својство го има и нивната композиција.

**Доказ.** а) Нека $f$ и $g$ се инјекции. Ако $x_1,x_2\in A$ се такви да

$$(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2),$$

тогаш

$$g(f(x_1))=g(f(x_2))$$

и бидејќи $g$ е инјекција добиваме $f(x_1)=f(x_2)$. Но, $f$ е инјекција, па од последното равенство следува $x_1=x_2$, што значи дека $g\circ f$ е инјекција.

б) Нека $f$ и $g$ се сурјекции. Бидејќи $g$ е сурјекција, добиваме дека за секој $z\in C$ постои барем еден $y\in B$ таков да $z=g(y)$, (може да постојат и повеќе елементи во $B$ со ова својство). Избираме еден од овие елементи $y$ и бидејќи $f$ е сурјекција, следува дека постои елемент $x\in A$ таков да $y=f(x)$. Според тоа, за секој $z\in C$ постои $x\in A$ таков да

$$g(f(x))=g(y)=z,$$

што значи дека $g\circ f$ е сурјекција. ■

**3.9. Дефиниција.** Пресликувањето $f:A\to B$ го нарекуваме *биекција* ако е и инјекција и сурјекција.

Според тоа, $f$ е биекција ако за секој елемент $y\in B$ постои еден и само еден елемент $x\in A$ таков да $y=f(x)$.

Очигледно, за секое непразно множество $A$ идентичното пресликување $I_A$ е биекција.

**3.10. Теорема.** Ако пресликувањата $f:A\to B$ и $g:B\to C$ се биекции, тогаш и нивната композиција $g\circ f$ е биекција.

**Доказ.** Непосредно следува од теоремата 3.8 и дефиниција 3.9. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

**3.11. Дефиниција.** Ако $f:A\to B$ е биекција, тогаш со $g(y)=x$, за секој $y\in B$, ако и само ако $y=f(x)$ дефинираме пресликување $g:B\to A$ кое го нарекуваме *инверзно* на пресликувањето $f$. Ја прифаќаме ознаката $g=f^{-1}$.

**3.12. Теорема.** Ако $f:A\to B$ е биекција, тогаш инверзното пресликување $f^{-1}:B\to A$ е биекција.

**Доказ.** Од дефиницијата 3.11 следува дека $f^{-1}$ е пресликување од $B$ во $A$. Ако $f^{-1}(y_1)=x=f^{-1}(y_2)$, тогаш $y_1=f(x)=y_2$, т.е. $f^{-1}$ е инјекција. Ако $x\in A$, тогаш $x=f^{-1}(y)$ каде што $y=f(x)$, што значи дека $f^{-1}$ е сурјекција.

Конечно, $f^{-1}$ е инјекција и сурјекција, што значи дека е биекција. ■

**3.13. Теорема.** За секое множество $A$ важи $\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A^{-1}$.

**Доказ.** Јасно, $\mathrm{id}_A^{-1}$ е пресликување од $A$ во $A$. Ако $\mathrm{id}_A^{-1}(y) = x$, тогаш $\mathrm{id}_A(x) = y$ и како $\mathrm{id}_A(x) = x$ добиваме $y = x$, т.е. $\mathrm{id}_A^{-1}$ е инјекција. Јасно, од $\mathrm{id}_A^{-1}(x) = x$ следува дека $\mathrm{id}_A^{-1}$ е сурјекција. ■

**3.14.** Лесно се докажува точноста на следните тврдења. Доказите, исто така ги оставаме на читателот за вежба.

**Теорема.** Ако $f : A \to B$ и $g : B \to C$ се биекции, тогаш

а) $(f^{-1})^{-1} = f$ б) $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$

в) $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ г) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

## 4. ЕКВИВАЛЕНТНИ МНОЖЕСТВА

**4.1. Дефиниција.** За множествата $A$ и $B$ велиме дека се *еквивалентни,* во ознака $A \sim B$, ако постои биекција $f$ од $A$ во $B$.

**4.2. Теорема.** За секои множества $A$, $B$ и $C$ важи

*i)* $A \sim A$.

*ii)* Ако $A \sim B$, тогаш $B \sim A$.

*iii)* Ако $A \sim B$ и $B \sim C$, тогаш $A \sim C$.

**Доказ.** Непосредно следува од теоремите 3.13, 3.12 и 3.10. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

**4.3. Теорема.** а) Ако $A_1 \sim B_1,\ A_2 \sim B_2,\ A_1 \cap A_2 = \varnothing,\ B_1 \cap B_2 = \varnothing$, тогаш

$$A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2 .$$

б) Ако $A_i \sim B_i$, $i \in I$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, за $i \neq j$, тогаш

$$\bigcup_{i \in I} A_i \sim \bigcup_{i \in I} B_i .$$

**Доказ.** Нека $f_1 : A_1 \to B_1,\ f_2 : A_2 \to B_2$ се биекции и да ставиме

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{ако } x \in A_1 \\ f_2(x), & \text{ако } x \in A_2 \end{cases}$$

Од $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ следува дека за секој $x \in A_1 \cup A_2$ постои еден и само еден $y \in B_1 \cup B_2$ таков да $f(x) = y$. Значи дека $f$ е пресликување од $A_1 \cup A_2$ во $B_1 \cup B_2$.

Нека $f(x_1) = f(x_2) \in B_1 \cup B_2$. Од $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ следува дека или

$$f(x_1) = f(x_2) \in B_1 \text{ или } f(x_1) = f(x_2) \in B_2 .$$

Ако $f(x_1) = f(x_2) \in B_1$, тогаш $f_1(x_1) = f_1(x_2)$ и бидејќи $f_1$ е инјекција, добиваме $x_1 = x_2$. Ако $f(x_1) = f(x_2) \in B_2$, тогаш $f_2(x_1) = f_2(x_2)$ и бидејќи $f_2$ е инјекција, добиваме $x_1 = x_2$. Според тоа, од $f(x_1) = f(x_2)$ следува $x_1 = x_2$, т.е. $f$ е инјекција.

Ако $y \in B_1 \cup B_2$, тогаш или $y \in B_1$ или $y \in B_2$. Но, $f_1$ и $f_2$ се сурјекции, па затоа или постои $x_1 \in A_1$ таков да $f_1(x_1) = y$ или постои $x_2 \in A_2$ таков да $f_2(x_2) = y$, од што следува дека $f$ е сурјекција.

Значи, $f$ е биекција од $A_1 \cup A_2$ во $B_1 \cup B_2$, т.е. $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.

б) Постапете аналогно како во доказот под а). ■

**4.4. Дефиниција.** Нека $f : X \to Y$ е пресликување од множеството $X$ во множеството $Y$ и $P(X)$ и $P(Y)$ се партитивните множества на $X$ и $Y$. Пресликувањето $f^* : P(X) \to P(Y)$ дефинирано со

$$f^*(A) = \{ f(x) \mid x \in A\}, \text{ за секое } A \subseteq X$$

го нарекуваме *проширување* на пресликувањето $f$ врз $P(X)$.

**4.5. Дефиниција.** Ако $f^* : P(X) \to P(Y)$ е проширување на $f : X \to Y$, тогаш пресликувањето $f_* : P(Y) \to P(X)$ дефинирано со

$$f_*(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}, \text{ за секое } B \subseteq Y,$$

го нарекуваме *реципрочно проширување* на пресликувањето $f$.

**4.6. Теорема.** Нека $f : X \to Y$. Тогаш

а) Ако $A \subseteq A_1$, тогаш $f^*(A) \subseteq f^*(A_1)$, за секои $A, A_1 \subseteq X$.

б) $A \neq \varnothing \Leftrightarrow f^*(A) \neq \varnothing$, за секое $A \subseteq X$. ■

## 5. ЗАДАЧИ

1. Докажи дека $A \setminus B \subseteq (A \setminus D) \cup (D \setminus B)$, за секои множества $A, B$ и $D$.

2. Докажи
   а) $M \setminus (\bigcap_{a \in A} M_a) = \bigcup_{a \in A} (M \setminus M_a)$,
   b) $M \setminus (\bigcup_{a \in A} M_a) = \bigcap_{a \in A} (M \setminus M_a)$.

3. Докажи:
   а) $(\bigcup_{a \in A} X_a) \cap (\bigcup_{b \in B} Y_b) = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} (X_a \cap Y_b)$,
   b) $(\bigcap_{a \in A} X_a) \cup (\bigcap_{b \in B} Y_b) = \bigcap_{\substack{a \in A \\ b \in B}} (X_a \cup Y_b)$

4. Докажи
   а) $(\bigcup_{a \in A} M_a) \setminus (\bigcup_{a \in A} N_a) \subseteq \bigcup_{a \in A} (M_a \setminus N_a)$,

b) $(\bigcap_{a\in A} M_a)\setminus(\bigcap_{a\in A} N_a)\supseteq \bigcap_{a\in A}(M_a\setminus N_a)$.

5. Докажи

a) $(A_1\times...\times A_n)\cap(B_1\times...\times B_n)=(A_1\cap B_1)\times...\times(A_n\cap B_n)$,

b) $(A_1\times...\times A_n)\cup(B_1\times...\times B_n)\subseteq(A_1\cup B_1)\times...\times(A_n\cup B_n)$.

6. Нека $f:X\to Y$ и $M_a\subseteq X$, за секој $a\in A$. Докажи

a) $f(\bigcup_{a\in A} M_a)=\bigcup_{a\in A} f(M_a)$ и

b) $f(\bigcap_{a\in A} M_a)\subseteq\bigcap_{a\in A} f(M_a)$.

7. Нека $f:X\to Y$ и $N_a\subseteq Y$, за секој $a\in A$. Докажи

a) $f^{-1}(\bigcup_{a\in A} N_a)=\bigcup_{a\in A} f^{-1}(N_a)$,

b) $f^{-1}(\bigcap_{a\in A} N_a)=\bigcap_{a\in A} f^{-1}(N_a)$.

8. Нека $f:X\to Y$ и $M,N\subseteq Y$. Докажи дека

$$f^{-1}(M\setminus N)=f^{-1}(M)\setminus f^{-1}(N).$$

9. Нека $f:X\to Y$. Докажи дека

a) $f(f^{-1}(B))\subseteq B$, за секое множество $B\subseteq Y$.

b) $A\subseteq f^{-1}(f(A))$, за секое множество $A\subseteq X$.

c) $f(f^{-1}(B))=B$, за секое множество $B\subseteq Y$ ако и само ако $f$ е сурјекција.

d) $A=f^{-1}(f(A))$, за секое множество $A\subseteq X$ ако и само ако $f$ е инјекција.

10. Докажи, дека од $A\setminus B\sim B\setminus A$ следува $A\sim B$.

11. Дадени се множествата $B$ и $C$ такви што $B\cap C=\emptyset$. Докажи, дека од $A\subset B$ и $A\sim A\cup C$, следува $B\sim B\cup C$.

12. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}_0\to\mathbf{N}_0$ такви да $f(x^2+y)=xf(x)+y$, за секои $x,y\in\mathbf{N}_0$.

13. За функцијата $f:\mathbf{N}\to\mathbf{Q}$ е исполнето

$$f(1)+f(2)+...+f(n)=n^2 f(n),\text{ за секој } n\in\mathbf{N}.$$

Ако $f(1)=1005$, пресметај $f(2010)$.

14. Функцијата $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ е определена со

$$f(x)=\begin{cases} x-10, & x>100\\ f(f(x+11)), & x\le 100.\end{cases}$$

Докажи дека $f(x)=91$, за $x\le 100$.

15. Нека $m\in\mathbf{N}$, $S=\{1,2,...,m\}$ и $f:S\to\mathbf{N}$ е пресликување такво што

$$f(1)+f(2)+...+f(m)=2m. \qquad (1)$$

Ако $k=|i\in\{1,2,...,m\},\ f(i)=1\}|$, тогаш $\max\{f(i)\,|\,1\le i\le m\}\le 2+k$. Докажи!

16. Дадена е функција $f:\mathbf{N}\to A$ таква да важи: ако $|i-j|=p$, $p$ е прост број, тогаш $f(i)\ne f(j)$. Колку елементи најмалку може да има множеството $A$?

17. Функцијата $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ е зададена со
$$f(m)=m+[\sqrt{m}],\ \text{за секој}\ m\in\mathbf{N}.$$
Докажи дека за секој $m\in\mathbf{N}$ постои $k\in N$ таков што
$$f^k(m)=\underbrace{f(f(...f}_{k\ \text{пати}}(m)))$$
е полн квадрат.

18. Докажи дека не постои функција $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ таква да $f(f(x))=x+1$, за секој $x\in\mathbf{Z}$.

19. Докажи дека не постои биекција $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}_0$ таква што
$$f(mn)=f(m)+f(n)+3f(m)f(n),\ \text{за секои}\ m,n\in\mathbf{N}.$$

20. Докажи дека не постои функција $f:\mathbf{N}_0\to\mathbf{N}_0$ таква што
$$f(f(n))=n+1987,\ \text{за секој}\ n\in\mathbf{N}_0.$$

21. Најди ги сите функции $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ такви да
$$3f(x)-2f(f(x))=x,\ \text{за секој}\ x\in\mathbf{Z}.$$

22. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви да $f(f(n)+f(m))=m+n$, за $m,n\in\mathbf{N}$. Определи го $f(2014)$ ако $f(1)=1$.

23. Најди ги сите функции $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$ за кои важи $f(1)=2$ и
$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1,\ \text{за секои}\ x,y\in\mathbf{Q}. \qquad (1)$$

24. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}_0\to\mathbf{R}$ такви да
$$f(n+m)+f(n-m)=f(3n),\ \text{за секои}\ m,n\in\mathbf{N}_0,\ n\ge m.$$

25. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви да
    - *i)* $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$, за секои $x,y\in\mathbf{N}$,
    - *ii)* $f(x)$ е полн квадрат за секој $x\in\mathbf{N}$.

26. Докажи дека функцијата $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ е решение на функционалната равенка
$$(n-m)f(n+m)=(n+m)(f(n)-f(m)),\ m,n\in\mathbf{N} \qquad (1)$$
ако и само ако постои аритметичка прогресија за која $f(n)$ е збир на нејзините први $n$ членови.

27. Функциите $f,g,h:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ се такви да

1) $h(n) \neq h(m)$ ако $m \neq n$,

2) $g(\mathbf{N}) = \mathbf{N}$ и

3) $f(n) = g(n) - h(n) + 1$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

Докажи дека $f(n) = 1$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

28. Најди ги сите функции $f, g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ такви што

$$f(g(x) + y) = g(f(y) + x), \tag{1}$$

за секои $x, y \in \mathbf{Z}$ и $g$ е инјекција.

29. Најди ги сите функции $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ такви што

$$f(-n) f(n) = f(n^2), \text{ за секој } n \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

$$f(n+m) = f(n) + f(m) + 2mn, \text{ за секои } m, n \in \mathbf{N}. \tag{2}$$

30. Најди ги сите функции $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \setminus \{1\}$ такви да

$$f(n+1) + f(n+3) = f(n+5) f(n+7) - 1375, \text{ за секој } n \in \mathbf{N}.$$

31. Најди ги сите функции $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ за кои важи

1) $f(m+n) = f(m) f(n)$, за секои $m, n \in \mathbf{N}$,

2) Равенката $f(f(x)) = (f(x))^2$ има најмалку едно решение во $\mathbf{N}$.

32. Најди ги сите функции $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ такви да $f(nx) = nf(x)$, за секои $x \in \mathbf{Q}$ и $n \in \mathbf{Z}$.

33. Најди ги сите функции $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ такви да за секои $m, n \in \mathbf{N}_0$ важи

$$f(mn) = f(m) f(n)$$

$$f(|m-n|) = |f(m) - f(n)|.$$

34. Да се најдат сите функции $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}_0$ за кои се исполнети условите:

1) $f(mn) = f(m) + f(n)$, за секои $m, n \in \mathbf{N}$,

2) $f(n) = 0$, ако цифрата на единиците на бројот $n$ е 3, и

3) $f(10) = 0$.

35. Нека $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ е строго растечка функција таква да

$$f(mn) = f(m) f(n)$$

и дека од $m^n = n^m$, $m \neq n$ следува дека или $f(n) = m$ или $f(m) = n$. Пресметај $f(30)$.

36. Дали постои функција $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ таква што

($i$) $f(1) = 2$

($ii$) $f(f(n)) = f(n) + n$, за секој $n \in \mathbf{N}$ и

($iii$) $f(n) < f(n+1)$, за секое $n \in \mathbf{N}$.

37. Најди ги сите функции $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}_0$ такви што за секои $m, n \in \mathbf{Z}$ важи:

1) $f(mn)=f(m)f(n)$,
2) $f(m+n)\le 1997(f(m)+f(n))$,
3) $f(1997)=0$.

38. Пресликувањето $f:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ е биекција таква што
$$f(1)<2f(2)<3f(3)<...<nf(n).$$
Докажи дека $f$ е идентичното пресликување!

39. Нека $a_1<a_2<...<a_n$ се дадени рацонални броеви и $S=\{a_1,a_2,...,a_n\}$. Ако $f:S\to S$ е биекција таква да
$$a_1+f(a_1)<a_2+f(a_2)<...<a_n+f(a_n),$$
тогаш $f$ е идентитет. Докажи!

40. Најди ги сите инјекции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ за кои важи
$$f(f(n))\le\frac{n+f(n)}{2}, \text{ за секој } n\in\mathbf{N}.$$

41. Нека $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$. Докажи дека, ако за секој $n\in\mathbf{N}$ важи
$$f(n+1)>f(f(n)),$$
тогаш $f(n)=n$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

42. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}_0\to\mathbf{N}_0$ такви да
1) $2f(m^2+n^2)=(f(m))^2+(f(n))^2$, за секои $m,n\in\mathbf{N}_0$,
2) за секои $m,n\in\mathbf{N}_0$ и $m\ge n$ важи $f(m^2)\ge f(n^2)$.

43. Множеството природни броеви е запишано како унија на две дисјунктни подмножества $\{f(1),f(2),...,f(n),...\}$ и $\{g(1),g(2),...,g(n),...\}$ такви што
$$f(1)<f(2)<...<f(n)<...,$$
$$g(1)<g(2)<...<g(n)<... \text{ и}$$
$$g(n)=f(f(n))+1, \text{ за секој } n\ge 1$$
Најди го бројот $f(240)$.

44. За секој природен број $n$ нека $f(n)$ е бројот од различните записи на бројот $n$ како збир од степени на бројот 2 со ненегативни целобројни показатели. Записите кои се разликуваат само во редоследот на собироците се сметаат за исти. На пример, $f(4)=4$ бидејќи бројот 4 може да се претстави на следните четири начини:
$$4,\ 2+2,\ 2+1+1,\ 1+1+1+1.$$
Докажи дека за секој цел број $n\ge 3$ важи $2^{\frac{n^2}{4}}<f(2^n)<2^{\frac{n^2}{2}}$.

45. Нека за функцијата $f:\mathbf{N}_0\to\mathbf{N}_0$ важи $f(f(n))+f(n)=2n+3$, за секој $n\in\mathbf{N}_0$. Пресметај $f(1997)$.

46. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ така што за $m,n\in\mathbf{N}$ и $m>n$ важи
$$f(f(m+n)+f(m-n))=8m.$$

47. За функцијата $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ важи
$$f(f(n))=4n+9\text{, за секој } n\in\mathbf{N}, \qquad (1)$$
$$f(2^k)=2^{k+1}+3\text{, за секој } k\in\mathbf{N}\cup\{0\}. \qquad (2)$$
Пресметај $f(1789)$.

48. Најди ги сите функции $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ такви што
$$f(n|m|)+f(n(|m|+2))=2f(n(|m|+1)).$$

49. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви што
$$\frac{f(x+y)+f(x)}{2x+f(y)}=\frac{2y+f(x)}{f(x+y)+f(y)}\text{, за секои } x,y\in\mathbf{N}. \qquad (1)$$

50. Даден е природен број $k$. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви да
$$f(m)+f(n)\,|\,(m+n)^k\text{, за секои } m,n\in\mathbf{N}.$$

51. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви што $(f(m))^2+f(n)\,|\,(m^2+n)^2$.

52. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}_0\to\mathbf{N}_0$ такви што
$$f(m+f(n))=f(f(m))+f(n)\text{, за секои } m,n\in\mathbf{N}_0.$$

53. Нека функцијата $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$, е таква што за секој природен број $n>1$, постои прост делител $p$ на $n$ така што
$$f(n)=f(\tfrac{n}{p})-f(p).$$
Ако $f(2^{2007})+f(3^{2008})+f(5^{2009})=2006$, пресметај
$$f(2007^2)+f(2008^3)+f(2009^5).$$

54. Докажи дека постои единствена функција $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ таква да
$$f(m+f(n))=n+f(m+95)\text{, за секои } m,n\in\mathbf{N}.$$
Пресметај $f(1)+f(2)+...+f(19)$ !

55. Дадена е функцијата $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}_0$, за која важи:
($a$) за секои $m$ и $n$ важи $f(m+n)-f(m)-f(n)=0$ или $1$;
($b$) $f(2)=0$
($c$) $f(3)>0$
($d$) $f(9999)=3333$.
Пресметај $f(1982)$.

56. Да ги разгледаме сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ каде што
$$f(n^2f(m))=m(f(n))^2 \qquad (1)$$

за секои $m, n \in \mathbf{N}$ . Определи ја најмалата можна вредност на $f(1998)$ .

57. Функцијата $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ е дефинирана со

$$f(1) = 1\,,\ f(3) = 3,\ f(2n) = f(n),$$
$$f(4n+1) = 2\,f(2n+1) - f(n),$$
$$f(4n+3) = 3\,f(2n+1) - 2\,f(n)\ .$$

Одреди го бројот на сите броеви $n \in \mathbf{N}$, помали или еднакви на 1988, за кои $f(n) = n$.

58. Најди ги сите функции $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ такви што $f(1) = 1$ и

$$f(m+n)[f(m) - f(n)] = f(m-n)[f(m) + f(n)]\text{, за секои } m,n \in \mathbf{Z}\,. \quad (1)$$

59. Нека $m \in \mathbf{N}$ и $f : \{1,2,3,...,m\} \to \mathbf{N}$ е пресликување такво што:

1) $f(1) + f(2) + ... + f(m) = 2s$ , за некој $s \in \mathbf{N}$ и

2) $m > s$ .

Докажи дека постојат $a \in \mathbf{N}_0$ и $n \in \mathbf{N}$ такви што

$$\{a+1, a+2,..., a+n\} \subset \{1,2,...,m\} \text{ и}$$
$$f(a+1) + f(a+2) + ... + f(a+n) = s\ .$$

60. Дали множеството цели броеви може да се разбие на три подмножества така да за секој цел број $n$ броевите $n, n+70$ и $n+1987$ припаѓаат на трите различни подмножества?

61. Нека $a,b,c,d \in \mathbf{N}_0$ и $d \neq 0$. Функцијата $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ е определена со $f(x) = [\frac{ax+b}{cx+d}],\ x \in \mathbf{N}_0$ . Докажи дека $f$ е инјективна ако и само ако $c = 0$ и $a \geq d$ .

62. Најди функција $f : \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Q}^+$ , таква што

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}\text{, за секои } x, y \in \mathbf{Q}^+\,. \quad (1)$$

63. Нека $X$ е множеството од сите конечни слогови чии членови се броевите 0 и 1 и $F : X \to X$ е функција дефинирана на следниов начин: за $x \in X$ , $F(x)$ го добиваме така да во слогот $x$ секоја единица ја заменуваме со 01, а секоја нула со 10.

Колку парови 00 се појавуваат во слогот $F^n(1) = \underbrace{F(F(...F}_{n \text{ пати}}(1)...))$ ?

64. Најди ги сите функции $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ такви да $f(f(n)) = n^2$ , за секој $n \in \mathbf{N}$.

65. Најди ги сите функции $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ такви да, за секои природни броеви $a$ и $b$ , постои недегениран триаголник чии страни се со должини $a, f(b)$ и $f(b + f(a) - 1)$ .

66. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви да

$$f(f(m)^2+2f(n)^2)=m^2+2n^2,\text{ за секои } m,n\in\mathbf{N}. \qquad (1)$$

67. Нека $k$ е природен број. За $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, нека низата функции $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ е дефинирана со $f_1=f$ и $f_{m+1}=f\circ f_m$, за $m\geq 1$. Функцијата $f$ е $k-$фина ако за секој $n\in\mathbf{N}$ важи $f_k(n)=f(n)^k$.

а) За кои $k$ постои инјективна $k-$фина функција?

б) За кои $k$ постои сурјективна $k-$фина функција?

68. Нека $f:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ е таква да за секои $x,y\in\mathbf{N}$ важи:

(1) $f(x,x)=x+2$,

(2) $f(x,y)=f(y,x)$ и

(3) $(x+y)f(x,y)=yf(x,x+y)$.

Пресметај $f(9,7)$.

69. Нека функцијата $f:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ е таква да

(1) $f(1,1)=2$,

(2) $f(i+1,j)=2(i+j)+f(i,j)$ и

(3) $f(i,j+1)=2(i+j-1)+f(i,j)$.

Најди ги сите парови природни броеви $(i,j)$ такви да $f(i,j)=1994$.

70. Нека $f:\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}^+$ е функција за која важи:

$$f(xy,z)=f(x,z)f(y,z)$$
$$f(z,xy)=f(z,x)f(z,y)$$
$$f(x,1-x)=1$$

за секои $x,y,z\in\mathbf{Q}$. Докажи $f(x,x)=1,\ f(x,-x)=1$ и $f(x,y)f(y,x)=1$, за секои $x,y\in\mathbf{Q}$.

71. Докажи дека пресликувањето $f:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ определено со

$$f(i,j)=\begin{cases}(i-1)^2+2j-1, & j\leq i,\\ (j-1)^2+2i, & i<j,\end{cases}$$

е биекција.

72. Функцијата $f(x,y)$ ги задоволува условите

(1) $f(0,y)=y+1$,

(2) $f(x+1,0)=f(x,1)$ и

(3) $f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y))$

за секои $x$, $y\in\mathbf{N}_0$. Најди $f(4,1981)$.

73. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви што

*i)* $f(n!)=f(n)!$, за секој $n\in\mathbf{N}$, *ii)* $m-n$ е делител на $f(m)-f(n)$ за секои $m,n\in\mathbf{N}, m\neq n$.

74. Најди ги сите функции $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ такви што за произволни цели броеви $a,b,c$, за кои $a+b+c=0$ е исполнето равенството
$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a).$$

75. Даден е природен број $k$. Определи ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви што за секои природни броеви $m$ и $n$ важи
$$f(m+f^k(n))=n+f(m+2014),$$
каде $f^k(n)=\underbrace{f(f(...(f}_{k\text{ пати}}(n))...))$.

76. Даден е природен број $k$. Определи ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви што $m^2+f(n^k)\,|\,mf(m)+n^k$, за секои $m,n\in\mathbf{N}$.

77. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви што за секои $m,n\in\mathbf{N}$ важи
$$f(f(m+n))=f(m)+f(n).$$

78. Дадени се природен број $n$ и функција $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ со следниве својства:
    1) $f(1)\le f(2)\le...\le f(n)\le f(1)+n$;
    2) $f(n+i)=f(i)$, за секој природен број $i$;
    3) $f(f(i))\le n+i-1$, за секој природен број $i$.

    Докажи дека $f(1)+f(2)+...+f(n)\le n^2$.

79. Најди ги сите функции $f,g,h:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви што $f(g(n))<f(n+1)$, $g(h(n))<g(n+1)$ и $h(f(n))<h(n+1)$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

80. Најди ги сите реални функции $f$, дефинирани на множеството цели броеви, за кои
$$f(m)+f(n)=f(mn)+f(m+n+mn),$$
за секои цели броеви $m$ и $n$.

81. Да се докаже, дека постои единствена функција $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, за која $f(1)=f(2)=1$ и
$$f(n)=f(f(n-1))+f(n-f(n-1)),\ n=3,4,...$$
За оваа функција да се најде $f(2m)$, за $m\ge 2$.

82. Најди ги сите функции $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$, такви што
$$xf(2f(y)-x)+y^2f(2x-f(y))=\frac{f(x)^2}{x}+f(yf(y)),$$
за секои цели броеви $x$ и $y$, $x\neq 0$.

83. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви да
$$2n+2001\le f(f(n))+f(n)\le 2n+2002,\text{ за секој } n\in\mathbf{N}.$$

# ВТОРА ГЛАВА
# НИЗИ РЕАЛНИ БРОЕВИ

## 1. ДЕФИНИЦИЈА НА НИЗА. КОНВЕРГЕНТНИ И ДИВЕРГЕНТНИ НИЗИ

**1.1. Дефиниција.** Секое пресликување $a:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ го нарекуваме *низа реални броеви*. Притоа реалниот број $a_n=a(n),\ n\in\mathbf{N}$ го нарекуваме $n-$*член на низата,* а за означување на низата ги користиме ознаките $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ или $a_n, n\ge 1$. Множеството $M_a=\{a_n\,|\,n=1,2,...\}$ го нарекуваме *множество вредности* на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

**1.2. Дефиниција.** За реалниот број $a$ ќе велиме дека е *граница (лимес)* на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако за секој реален број $\varepsilon>0$ постои природен број $n_0=n_0(\varepsilon)$ таков, што за секој $n>n_0$ важи $|a_n-a|<\varepsilon$ (црт. 1). Притоа велиме дека низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е *конвергентна* (*конвергира кон бројот* $a$) и пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ или $a_n\to a$, $n\to\infty$. Низите кои не се конвергентни, ќе ги нарекуваме *дивергентни.*

**1.3. Пример.** а) Да ја разгледаме низата $a_n=\frac{1}{n}, n=1,2,3,...$. Ќе докажеме дека нејзина граница е бројот $a=0$. Навистина, нека $\varepsilon>0$ е дадено. Постои природен број $N$ таков што $N>\frac{1}{\varepsilon}$. Јасно, множеството природни броеви кои го задоволуваат претходното неравенство има најмал елемент. Нека тоа е бројот $n_0$. Сега, при $n>n_0$ имаме $n>\frac{1}{\varepsilon}$ т.е. $\frac{1}{n}<\varepsilon$, па затоа $|a_n-0|=\frac{1}{n}<\varepsilon$, што значи $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

б) Нека $a\in\mathbf{R}, |a|>1$. Ќе докажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0$.

Ставаме $|a|=1+x$, каде што $x=|a|-1>0$. Од неравенството на Бернули следува дека за секој $n\ge1$ важи $(1+x)^n\ge 1+nx>nx$, што значи $\frac{1}{|a|^n}<\frac{1}{nx}$. Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Избираме $n_0=[\frac{1}{x\varepsilon}]+1$ и добиваме дека за секој $n>n_0$ важи $|\frac{1}{a^n}-0|=\frac{1}{|a|^n}<\frac{1}{nx}<\varepsilon$, што значи $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0$.

д) Ќе докажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

За $n>1$ земаме $a_1=a_2=\sqrt{n}, a_3=a_4=...=a_n=1$ и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме:

$$1<\sqrt[n]{n}<\frac{2\sqrt{n}+(n-2)}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}},$$

т.е. $0<\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}$. Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Избираме $n_0=[\frac{4}{\varepsilon^2}]+1$ и добиваме дека за секој $n>n_0$ важи $|\sqrt[n]{n}-1|<\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$, што значи $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. ■

**1.4. Теорема.** Низа реални броеви може да има само една граница.

**Доказ.** Нека претпоставиме дека за низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ важи $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$, $a\neq b$ и да земеме $\varepsilon=\frac{|a-b|}{3}>0$. Од $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ следува дека постои $n_1\geq 1$ таков што за секој $n>n_1$ важи $|a_n-a|<\varepsilon$, а од $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$ следува дека постои $n_2\geq 1$ таков што за секој $n>n_2$ важи $|a_n-b|<\varepsilon$. Нека земеме $n_0=\max\{n_1,n_2\}$. Тогаш, за секој $n>n_0$ важи:

$$|a-b|\leq|a_n-a|+|a_n-b|<2\varepsilon=\frac{2|a-b|}{3}, \text{ т.е. } \frac{|a-b|}{3}<0$$

што е противречност. Од добиената противречност следува $a=b$. ■

**1.7. Теорема.** Ако $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

**Доказ.** Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Постои $n_0\geq 1$ таков што за секој $n>n_0$ важи $|a_n-a|<\varepsilon$, што значи дека $n_0\geq 1$ при $n>n_0$ важи $||a_n|-|a||\leq|a_n-a|<\varepsilon$, па затоа $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. ■

**1.8. Дефиниција.** За низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ќе велиме дека *тежи кон* $+\infty$ ако за секој $c\in\mathbf{R}$ постои $n_0\geq 1$ таков, што за секој $n>n_0$ важи $a_n\geq c$. Притоа ќе пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

За низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ќе велиме дека *тежи кон* $-\infty$ ако за секој $c\in\mathbf{R}$ постои $n_0\geq 1$ таков, што за секој $n>n_0$ важи $a_n\leq c$. Притоа ќе пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

## 2. ОГРАНИЧЕНИ МНОЖЕСТВА. СУПРЕМУМ И ИНФИМУМ НА МНОЖЕСТВО

**2.1.** Следните поими се однесуваат на структурата на множеството реални броеви $\mathbf{R}$. Доказите на тврдењата искажани во овој параграф се доста комплицирани, па затоа истите нема да ги презентираме. Доколку читателот сака подетално да се запознае со структурата на множеството реални броеви, т.е. со неговата конструкција му препорачуваме да консултира соодветна литература. На пример, во книгата [53] од наведената литература е дадена детална конструкција на множеството реални броеви.

**Дефиниција.** Множеството $A \subseteq \mathbf{R}$ го нарекуваме *ограничено од горе*, ако постои $M \in \mathbf{R}$ таков да $a \le M$, за секој $a \in A$.

Бројот $M$ го нарекуваме *горна граница* на множеството $A$. Горната граница $M^*$ ја нарекуваме *супремум* на множеството $A$, во ознака $M^* = \sup A$, ако за секоја горна граница $M$ на множеството $A$ важи $M^* \le M$.

**2.2.** Во множеството реални броеви е исполнета следнава аксиома, позната како аксиома на супремум.

**Аксиома 1.** Секое непразно, ограничено од горе множество $A \subseteq \mathbf{R}$ има еден и само еден супремум.

**2.3. Дефиниција.** Множеството $A \subseteq \mathbf{R}$ го нарекуваме *ограничено од долу*, ако постои $m \in \mathbf{R}$ таков да $m \le a$, за секој $a \in A$.

Бројот $m$ го нарекуваме *долна граница* на множеството $A$. Долната граница $m^*$ на множеството $A$ ја нарекуваме *инфимум* на множеството $A$, ако за секоја друга долна граница $m$ на $A$ важи $m \le m^*$. Инфимумот на множеството $A$ го означуваме со $m^* = \inf A$.

**2.4. Лема.** Секое ограничено од долу множество има инфимум и притоа важи $\inf A = -\sup(-A)$, каде $-A = \{-x \mid x \in A\}$.

## 3. ЕЛЕМЕНТАРНИ СВОЈСТВА НА КОНВЕРГЕНТНИТЕ НИЗИ

**3.1. Дефиниција.** За низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ќе велиме дека е *ограничена,* ако множеството нејзини вредности $M_a$ е ограничено, т.е. ако постои реален број $K$ таков, што $|a_n| \le K$ за секој $n \ge 1$.

За низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ќе велиме дека е ограничена од *горе (десно)* ако постои реален број $K$ таков, што $a_n \le K$ за секој $n \ge 1$.

За низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ќе велиме дека е ограничена од *долу (лево)* ако постои реален број $K$ таков, што $K \le a_n$ за секој $n \ge 1$.

**3.2. Теорема.** Конвергентна низа е ограничена.

**Доказ.** Нека $a_n \to a, n \to \infty, a \in \mathbf{R}$. Тогаш, од дефиницијата на граница на низа, за бројот $\varepsilon = 1$ постои $n_0 \ge 1$ таков, што за секој $n > n_0$ важи $|a_n - a| < 1$.

Нека $K = \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0}|, 1 + |a|\}$. Тогаш, за $n = 1, 2, \dots, n_0$ важи $|a_n| \le K$, а за $n > n_0$ важи $|a_n| \le |a| + |a_n - a| < 1 + |a| \le K$, што значи дека низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена. ■

**3.3. Теорема.** Нека $a_n \to a, n \to \infty, a \in \mathbf{R}$ и нека $b > a$. Тогаш, постои $n_0 \geq 1$ таков што за секој $n > n_0$ важи $a_n < b$.

**Доказ.** Нека $\varepsilon = b - a > 0$. Тогаш, од дефиницијата на граница на низа следува дека постои $n_0 \geq 1$ таков што за секој $n > n_0$ важи

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon = b. \blacksquare$$

**3.4. Забелешка.** Аналогно како во теорема 3.3 може да се докаже следново тврдење:

*Ако* $a_n \to a, n \to \infty, a \in \mathbf{R}$ *и* $c < a$, *тогаш, постои* $n_0 \geq 1$ *таков, што за секој* $n > n_0$ *важи* $c < a_n$.

**3.5. Теорема.** Нека за низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се исполнети условите

*i)* $a_n \to a, b_n \to b, n \to \infty, a,b \in \mathbf{R}$, и

*ii)* $a_n \leq b_n$, за секој $n \geq 1$.

Тогаш, $a \leq b$.

**Доказ.** Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од условот *i*), неравенството $a - \varepsilon < a$ и забелешка 3.4 следува дека постои $n_1 \geq 1$ таков, што за секој $n > n_1$ важи $a - \varepsilon < a_n$. Од друга страна, од условот *i*), неравенството $b < b + \varepsilon$ и теорема 3.3 следува дека постои $n_2 \geq 1$ таков, што за секој $n > n_2$ важи $b_n < b + \varepsilon$.

Ако земеме $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, тогаш од претходно изнесеното и од условот *ii*) следува дека за секој $n > n_0$ важи $a - \varepsilon < a_n \leq b_n < b + \varepsilon$. Според тоа, $a - \varepsilon < b + \varepsilon$ т.е. $a - b < 2\varepsilon$. Од произволноста на $\varepsilon$ следува $a \leq b$. ■

**3.6. Теорема (за три низи).** Нека за низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ се исполнети условите:

*i)* $a_n \to a, c_n \to a, n \to \infty, a \in \mathbf{R}$, и

*ii)* $a_n \leq b_n \leq c_n$, за секој $n \in \mathbf{N}^+$.

Тогаш, $b_n \to a, n \to \infty$.

**Доказ.** Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од условот *i)*, забелешка 3.4 и теорема 3.3 следува дека постои $n_1 \geq 1$ таков, што за секој $n > n_1$ важи $a - \varepsilon < a_n$ и постои $n_2 \geq 1$ таков, што за секој $n > n_2$ важи $c_n < a + \varepsilon$.

Ако земеме $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, тогаш од претходно изнесеното и од условот *ii)* следува дека за секој $n > n_0$ важи

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon.$$

Според тоа, за секој $n > n_0$ важи $a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$ т.е. $|b_n - a| < \varepsilon$, што значи $b_n \to a, n \to \infty$. ■

**3.7. Теорема.** Нека претпоставиме дека

$$a_n \to a,\ b_n \to b,\ n \to \infty,\ a,b \in \mathbf{R}.$$

Тогаш:

*i)* за секој $c \in \mathbf{R}$ важи $ca_n \to ca, n \to \infty$,

*ii)* $a_n + b_n \to a + b, n \to \infty$,

*iii)* $a_n b_n \to ab, n \to \infty$, и

*iv)* ако дополнително $b \neq 0$, тогаш $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}, n \to \infty$.

**Доказ.** *i*) Очигледно тврдењето важи за $c = 0$.

Затоа нека претпоставиме дека $c \neq 0$. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од $a_n \to a$, $a_0 = a, a \in \mathbf{R}$ следува дека постои $n_0 \geq 1$ таков што за секој $n > n_0$ важи $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Но, тогаш $|ca_n - ca| = |c| \cdot |a_n - a| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$, што значи дека $ca_n \to ca, n \to \infty$.

*ii*) Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од $a_n \to a, n \to \infty$ следува дека постои $n_1 \geq 1$ таков, што за секој $n > n_1$ важи $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Аналогно, постои $n_2 \geq 1$ таков, што за секој $n > n_2$ важи $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ако земеме $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, тогаш од претходно изнесеното следува дека за секој $n > n_0$ важи: $|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$, што значи дека $a_n + b_n \to a + b, n \to \infty$.

*iii*) Најпрво да забележиме дека

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|. \qquad (1)$$

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Тогаш, постои $K > 0$ таков, што $|b_n| \leq K$, за секој $n \geq 1$. Од дефиницијата на граница на низа следува дека постои $n_1 \geq 1$ таков, што за секој $n > n_1$ важи $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K}$ и постои $n_2 \geq 1$ таков, што за секој $n > n_2$ важи $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)}$.

Ако земеме $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, тогаш од (1) и од претходните две неравенства следува дека при $n > n_0$ важи

$$|a_n b_n - ab| < \frac{\varepsilon}{2K} K + \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)} \cdot |a| < \varepsilon \text{, т.е. } a_n b_n \to ab, n \to \infty.$$

*iv*) Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $b > 0$. Тогаш, од забелешка 3.4 следува дека постои $n_1 \geq 1$ таков, што $b_n > \frac{b}{2}$. Од дефиницијата на граница на низа следува дека постои $n_2 \geq 1$ таков, што за секој $n > n_2$ важи $|a_n - a| < \frac{\varepsilon b}{4}$ и постои $n_3 \geq 1$ таков, што за секој $n > n_3$ важи

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon b^2}{4(1+|a|)}.$$

Ако земеме $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, тогаш од претходно изнесеното следува дека:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|a_n b - ab_n|}{|bb_n|} = \frac{|a_n b - ab + ab - ab_n|}{|bb_n|} < \frac{|a_n - a|}{|b_n|} + \frac{|a| \cdot |b - b_n|}{|b| \cdot |b_n|} < \frac{2}{b} \frac{\varepsilon b}{4} + \frac{2|a|}{bb} \frac{\varepsilon b^2}{4(1+|a|)} < \varepsilon,$$

што значи дека при $b \neq 0$, важи $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$, $n \to \infty$. ■

**3.8. Пример.** Нека $a > 0$. Ќе докажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

За $a = 1$ очигледно $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Ако $a > 1$, тогаш $\sqrt[n]{a} > 1$ и

$$a = [1 + (\sqrt[n]{a} - 1)]^n > 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) > n(\sqrt[n]{a} - 1) .$$

Според тоа $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n}$, за секој $n \in \mathbf{N}^+$. Но, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$, па затоа од теоремата за три низи добиваме $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Ако $1 > a > 0$, тогаш $\frac{1}{a} > 1$ и затоа $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/a} = 1$, од што следува:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/a}} = 1 . \ ■$$

**3.9. Теорема.** Нека $A \subseteq \mathbf{R}$ е непразно и ограничено од долу (горе) множество и нека $a = \inf A$ ($a = \sup A$). Тогаш, постои низа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ во $A$ таква, што $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. ♦

**Доказ.** Од дефиницијата на $\inf A$ следува дека за секој $n \in \mathbf{N}$ постои $a_n \in A$ таков, што $a \leq a_n < a + \frac{1}{n}$. Сега тврдењето следува од пример 1.3 а) и теорема 3.6.

Во случај на $\sup A$ доказот е наполно аналоген на претходниот. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

## 4. ПЕРИОДИЧНИ И МОНОТОНИ НИЗИ

**4.1. Дефиниција.** За низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ќе велиме дека е *периодична* ако постои $k \geq 1$ таков што $a_{n+k} = a_n$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

За низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ќе велиме дека *строго монотоно расте,* ако за секој $n \geq 1$ важи $a_{n+1} > a_n$. За низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ќе велиме дека *строго монотоно опаѓа,* ако за секој $n \geq 1$ важи $a_{n+1} < a_n$.

За низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ќе велиме дека *монотоно расте,* ако за секој $n \geq 1$ важи $a_{n+1} \geq a_n$, а *монотоно опаѓа,* ако за секој $n \geq 1$ важи $a_{n+1} \leq a_n$.

За низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ќе велиме дека е *монотона,* ако таа или строго монотоно расте или строго монотоно опаѓа, или монтоно опаѓа, или монотоно расте.

**4.2.** Во следната теорема ќе докажеме важно својство на монотоните и ограничени низи реални броеви.

**Теорема (за монотона низа).** Монотона и ограничена низа реални броеви е конвергентна.

**Доказ.** Ќе го разгледаме случајот само кога низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно не опаѓа. Од условот на теоремата следува дека постои $K \in \mathbf{R}$ таков, што за секој $n \geq 1$ важи $a_n \leq K$. Според тоа, множеството вредности на низата $\{a_n \mid n \geq 1\}$ е ограничено, па затоа постои $a = \sup\{a_n \mid n \geq 1\} = \sup\limits_{n\geq 1} a_n$. Ќе докажеме дека $a_n \to a$, $n \to \infty$.

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Тогаш, за бројот $a - \varepsilon < a$, согласно со дефиницијата на супремум постои природен број $n_0$ таков, што $a_{n_0} > a - \varepsilon$. Освен тоа, за секој $n \geq 1$ важи $a_n \leq a$. Но, низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно не опаѓа, па затоа за секој $n > n_0$ важи $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon$, односно $|a_n - a| < \varepsilon$, што значи

$$a_n \to a, n \to \infty. \ \blacksquare$$

**4.3. Пример.** Во овој пример, користејќи ја низата

$$e_n = (1+\tfrac{1}{n})^n, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

ќе ја воведеме една од најважните константи во математиката, бројот $e$. Имено, ќе докажеме дека низата (1) монотоно расте и е ограничена од горе, па од теорема 4.2 ќе следува дека таа е конвергентна, т.е. постои $\lim\limits_{n\to\infty} e_n$ и оваа граница се означува со $e$.

За да докажеме дека низата монотоно расте, доволно е во неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина да ставиме $a_i = 1+\frac{1}{n}, i = 1, 2, ..., n$ и $a_{n+1} = 1$. Добиваме:

$$\sqrt[n+1]{(1+\tfrac{1}{n})^n \cdot 1} \leq \frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1},$$

односно

$$e_n = (1+\tfrac{1}{n})^n \leq (1+\tfrac{1}{n+1})^{n+1} = e_{n+1}, \quad n \geq 1$$

што значи, разгледуваната низа монотоно расте.

За да докажеме дека низата (1) е ограничена од горе, ќе ја разгледаме помошната низа $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$, $n \geq 1$ Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме:

$$\begin{aligned}\sqrt[n+1]{(1+\tfrac{1}{n+1})^{n+2}} &= (1+\tfrac{1}{n+1})\sqrt[n+1]{1+\tfrac{1}{n+1}} = (1+\tfrac{1}{n+1})\sqrt[n+1]{(1+\tfrac{1}{n+1})\cdot 1^n} \\ &\leq \frac{1+\frac{1}{n}+n\cdot 1}{n+1}(1+\tfrac{1}{n+1}) = (1+\tfrac{1}{n+1})(1+\tfrac{1}{(n+1)^2}) \\ &= 1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}\end{aligned}$$

Значи,

$$\sqrt[n+1]{(1+\tfrac{1}{n+1})^{n+2}} < 1+\tfrac{1}{n},$$

или

$$b_{n+1} = (1+\tfrac{1}{n+1})^{n+2} < (1+\tfrac{1}{n})^{n+1} = b_n, \quad n \geq 1$$

т.е. низата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно опаѓа. Сега имаме,

$$e_n = (1+\tfrac{1}{n})^n < (1+\tfrac{1}{n})^{n+1} = b_n < b_1 = 4, \quad n \geq 1$$

т.е. низата (1) е ограничена од горе.

Од теорема 4.2 следува дека низата (1) е конвергентна, т.е.

$$e = \lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} (1+\tfrac{1}{n})^n,$$

постои. ■

**4.4.** На крајот од овој параграф, без доказ, ќе наведеме две тврдења кои се однесуваат на структурата на множеството реални броеви.

**Лема.** а) Секој реален број е граница на строго монотоно растечка (опаѓачка) низа ирационални броеви.

б) Секој реален број е граница на строго монотоно растечка (опаѓачка) низа рационални броеви. ■

## 5. ПОДНИЗИ. ОСНОВНИ СВОЈСТВА

**5.1. Дефиниција.** Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во множеството $\mathbf{R}$ и $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ е строго монотоно растечка низа во множеството $\mathbf{N}$, тогаш низата $\{a_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ја нарекуваме *подниза* на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

**5.2. Забелешка.** За секој $i \geq 1$ важи $m_i \geq i$, па затоа $m_i \to \infty, \ i \to \infty$, што значи дека дефиницијата за подниза има смисла.

**5.3. Лема.** а) Ако низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, тогаш и секоја нејзина подниза е ограничена.

б) Ако низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна и $a_n \to a, n \to \infty$, тогаш и секоја нејзина подниза $\{a_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е конвергентна и притоа $a_{m_k} \to a, k \to \infty$.

**Доказ.** Непосредно следува од дефинициите на ограничена и конвергентна низа и од дефиницијата на подниза. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

**5.4. Дефиниција.** Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има *најголем* (*најмал*) *член* ако постои $a_{n_0}$ таков, што за секој $n \geq 1$ важи $a_{n_0} \geq a_n$, ($a_{n_0} \leq a_n$).

**5.5. Забелешка.** Лесно се докажува дека секоја монотоно неопаѓачка низа има најмал член и дека секоја низа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква, што $a_n \to +\infty,\ \ n \to \infty$ има најмал член. Понатаму, може да се докаже дека секоја конвергентна низа има или најмал или најголем член. Обидете се самостојно да ги докажете овие тврдења.

Доказот на следнава теорема излегува надвор од рамките на нашите разгледувања, па затоа истиот нема да го презентираме.

**5.6. Теорема.** а) Секоја низа реални броеви содржи монотона подниза.

б) (теорема на Болцано-Вајерштрас). Секоја ограничена низа реални броеви содржи конвергентна подниза. ■

## 6. АРИТМЕТИЧКА И ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

**6.1. Дефиниција.** Низата реални броеви со својство, почнувајќи од нејзиниот втор член, разликата меѓу секој член и претходниот член да е константна ја нарекуваме *аритметичка прогресија* или *аритметичка низа*.

Значи, $\{a_n\}$ е аритметичка прогресија ако и само ако

$$a_{k+1} - a_k = d \text{, за } k \geq 1 .$$

односно

$$a_{k+1} = a_k + d \text{, за } k \geq 1 . \qquad (1)$$

Притоа, $a_1$ го нарекуваме *почетен член* на прогресијата, а $d$ *разлика* на аритметичката прогресијата.

**6.2. Лема.** Нека $\{a_n\}$ е аритметичка прогресија со разлика $d$ .

а) Ако $d > 0$, тогаш прогресијата строго монотоно расте.

б) Ако $d < 0$, тогаш прогресијата строго монотоно опаѓа.

в) За секој $k \geq 2$ точна е формулата

$$a_k = \tfrac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k+1}) . \qquad (2)$$

**Доказ.** а) Нека $d > 0$. Тогаш за секој $k \geq 1$ важи $a_k + d > a_k + 0$, од што според (1) добиваме $a_{k+1} > a_k$ , т.е. прогресијата строго монотоно расте.

б) Постапи аналогно како во доказот под а).

в) Од равенството (1) следува дека за секој $k \geq 2$ се точни равенствата $a_{k-1} = a_k - d$ и $a_{k+1} = a_k + d$ . Последните равенства ги собираме и го добиваме равенството $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$, кое е еквивалентно на равенството (2). ■

**6.3. Теорема.** Нека $\{a_n\}$ е аритметичка прогресија со разлика $d$ . Тогаш

$$a_k = a_1 + (k-1)d , \qquad (3)$$

$$S_k = \tfrac{k}{2}[2a_1 + (k-1)d] . \qquad (4)$$

**Доказ.** Прво ќе ја докажеме формулата (3). За $k = 1$ имаме

$$a_1 = a_1 + 0 = a_1 + (1-1)d ,$$

т.е. формулата (3) е точна. Нека претпоставиме дека за $k = i$ важи

$$a_i = a_1 + (i-1)d .$$

Тогаш, за $k = i+1$ добиваме

$$a_{i+1} = a_i + d = [a_1 + (i-1)d] + d = a_1 + (i+1-1)d ,$$

па до принципот на математичка индукција следува дека формулата (3) важи за секој природен број $k$ .

Да ја докажеме формулата (4). За $k = 1$ имаме

$$S_1 = a_1 = \tfrac{1}{2}[2a_1 + (1-1)d] ,$$

т.е. формулата (3) е точна. Нека претпоставиме дека за $k = i$ важи

$$S_i = \tfrac{i}{2}[2a_1 + (i-1)d] .$$

Тогаш, за $k = i+1$ добиваме

$$\begin{aligned} S_{i+1} = S_i + a_{i+1} &= \tfrac{i}{2}[2a_1 + (i-1)d] + [a_1 + id] \\ &= (i+1)a_1 + id[\tfrac{i-1}{2} + 1] = (i+1)a_1 + \tfrac{i(i+1)}{2} d \\ &= \tfrac{i+1}{2}[2a_1 + id] = \tfrac{i+1}{2}[2a_1 + (i+1-1)d], \end{aligned}$$

па до принципот на математичка индукција следува дека формулата (4) важи за секој природен број $k$ . ■

**6.4. Забелешка.** а) Ако ја искористиме формулата (3), тогаш од формулата (4) ја добиваме следнава формула за пресметување на збирот на првите $k$ членови на аритметичката прогресија

$$S_k = \tfrac{k}{2}[2a_1 + (k-1)d] = \tfrac{k}{2}[a_1 + a_1 + (k-1)d] = \tfrac{k}{2}(a_1 + a_k) . \qquad (5)$$

б) Ако $d \neq 0$ , тогаш од формулата (3) следува дека аритметичката прогресија дивергира, а додека за $d = 0$ таа конвергира.

**6.5. Дефиниција.** Низата реални броеви со својство, почнувајќи од нејзиниот втор член, количникот меѓу секој член и претходниот член да е константен ја нарекуваме *геометриска прогресија* или *геометриска низа*.

Значи, $\{a_n\}$ е геометриска прогресија ако и само ако

$$a_{k+1} : a_k = q \text{, за } k \geq 1 .$$

односно

$$a_{k+1} = a_k q \text{, за } k \geq 1 . \qquad (6)$$

Притоа, $a_1$ го нарекуваме *почетен член* на прогресијата, а $q$ *количник* на геометриската прогресијата.

**6.6. Лема.** Ако $\{a_n\}$ е геометриска прогресија, тогаш за секој $k \geq 2$ точна е формулата

$$a_{k+1} a_{k-1} = a_k^2 . \qquad (7)$$

**Доказ.** Од (6) следува $a_{k+1} = a_k q$ и $a_k = a_{k-1} q$, т.е. $a_{k+1} = a_k q$ и $a_{k-1} = \frac{a_k}{q}$ . Ако ги помножиме последните две равенства го добиваме равенството $a_{k+1} a_{k-1} = a_k^2$ . ■

**6.7. Забелешка.** Ако $a_1 > 0$ и $q > 0$, тогаш равенството (7) е еквивалентно на равенството $\sqrt{a_{k+1}a_{k-1}} = a_k$, што значи дека во овој случај средниот член од три последователни членови на геометриската прогресија е геометриска средина на останатите два. Да забележиме дека ова не важи за секоја геометриска прогресија.

Понатаму, ако $a_1 > 0$ и $q > 1$, геометриската прогресија строго монотоно расте, а за $a_1 > 0$ и $0 < q < 1$ таа строго монотоно опаѓа. Ако $a_1 < 0$ и $q > 1$, тогаш прогресијата строго монотоно опаѓа, а за $a_1 < 0$ и $0 < q < 1$ таа строго монотоно расте. Понатаму, ако $q < 0$, тогаш без разлика на знакот на $a_1$ членовите на прогресијата наизменично ги менуваат знаците.

**6.8. Теорема.** Нека $\{a_n\}$ е геометриска прогресија со количник $q$. Тогаш

$$a_k = a_1 q^{k-1}, \tag{8}$$

$$S_k = a_1 \frac{1-q^k}{1-q}. \tag{9}$$

**Доказ.** Прво ќе ја докажеме формулата (8). За $k = 1$ имаме

$$a_1 = a_1 \cdot 1 = a_1 q^0 = a_1 q^{1-1},$$

т.е. формулата (8) е точна. Нека претпоставиме дека за $k = i$ важи

$$a_i = a_1 q^{i-1}.$$

Тогаш, за $k = i + 1$ добиваме

$$a_{i+1} = a_i q = a_1 q^{i-1} q = a_1 q^{i+1-1},$$

па од принципот на математичка индукција следува дека формулата (8) важи за секој природен број $k$.

Да ја докажеме формулата (9). За $k = 1$ имаме

$$S_1 = a_1 = a_1 \frac{1-q^1}{1-q}$$

т.е. формулата (9) е точна. Нека претпоставиме дека за $k = i$ важи

$$S_i = a_1 \frac{1-q^i}{1-q}.$$

Тогаш, за $k = i + 1$ добиваме

$$S_{i+1} = S_i + a_{i+1} = a_1 \frac{1-q^i}{1-q} + a_1 q^i = a_1 (\frac{1-q^i}{1-q} + q^i) = a_1 \frac{1-q^i + q^i - q^{i+1}}{1-q} = a_1 \frac{1-q^{i+1}}{1-q}$$

па до принципот на математичка индукција следува дека формулата (9) важи за секој природен број $k$. ■

**6.9. Забелешка.** Ако $|q| < 1$ или $q = 1$, тогаш геометриската прогресија конвергира за секој почетен член $a_1$, а ако $|q| > 1$ или $q = -1$, тогаш геометриската прогресија дивергира за секој почетен член $a_1$.

# 7. ЗАДАЧИ

1. Најди го општиот член на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ зададена со $x_1=1, x_2=2$ и $x_n=(n-1)(x_{n-1}+x_{n-2})$, за $n\geq 3$.

2. Нека $x_1=1, x_2=2+3, x_3=4+5+6, x_4=7+8+9+10,\dots$. Пресметај го општиот член $x_n$.

3. Низата од реални броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена со $a_1=5; a_2=19$ и за $n\geq 3$, $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$. Најди го $a_{2007}$.

4. Низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се дефинирани со
$$a_1=1, a_2=2, a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}, n>1,$$
$$b_1=1, b_2=2, b_{n+1}=7b_n-b_{n-1}-2, n>1.$$
Докажи дека $b_n=a_n^2$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

5. Нека $c$ е призволен реален број и нека низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е определена со $a_0=c$ и $a_{n+1}=a_n^2+(a_n-1)^2$, за $n\geq 0$. Најди формула за општиот член на низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

6. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $a_1=1$ и $a_{n+1}=3a_n+\sqrt{8a_n^2+1}$, за $n\geq 1$. Докажи дека сите членови на низата се природни броеви.

7. Нека $a_1=2, a_2=3, a_{2n}=a_{2n-1}+2a_{2n-2}, a_{2n+1}=a_{2n}+a_{2n-1}$, $n\geq 1$. Најди рекурентна формула за $a_n$.

8. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со
$$a_1=6,\ a_2=34 \text{ и } a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n.$$
Докажи дека ниеден член на оваа низа не се дели со 5.

9. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $a_0=1,\ a_n=a_0+a_1+\dots+a_{n-1}$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Пресметај го збирот $\sum\limits_{i=0}^{n}a_i^2$.

10. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена со $a_0=a_1=1$ и
$$n(n+1)a_{n+1}=n(n-1)a_n-(n-2)a_{n-1}\text{, за } n\in\mathbf{N}. \qquad (1)$$
Пресметај $\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\dots+\frac{a_{2012}}{a_{2013}}$.

11. Нека $a_0=1997$ и $a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n+1}$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Докажи дека $1997-n$ е најголемиот цел број помал или еднаков на $a_n$, $1\leq n\leq 999$.

12. Нека $k \in \mathbf{Z}$. Дефинираме низа $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ така да

$$a_0 = 0, a_1 = k \text{ и } a_{n+2} = k^2 a_{n+1} - a_n \text{, за } n = 0,1,2,\dots .$$

Докажи дека $a_{n+1}a_n + 1$ е делител на $a_{n+1}^2 + a_n^2$, за $n = 0,1,2,\dots$ .

13. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена со $a_1 = \frac{1}{2}$ и $a_m = \frac{a_{m-1}}{2ma_{m-1}+1}$, за секој $m > 1$. Пресметај го збирот $a_1 + a_2 + \dots + a_k,\ k \in \mathbf{N}$.

14. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со равенствата $a_1 = 2,\ a_2 = 5$ и

$$a_{n+2} = (2 - n^2)a_{n+1} + (2 + n^2)a_n,\ n \geq 1.$$

Дали постојат $p, q, r$ такви да $a_p a_q = a_r$.

15. За низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ќе велиме дека се *пропорционални* ако постои $t$ таков што $a_i = tb_i$, за $i = 1,2,\dots$. Ако низите не се пропорционални, тогаш ќе велиме дека се *непропорционални*. Докажи дека за секој $n \geq 3$ постојат бесконечно многу непропорционални низи цели броеви $a_1, a_2, \dots, a_n$ за кои важи

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 = a_n^2. \tag{1}$$

16. За низата броеви $a_1, a_2, \dots, a_{1988}$ важи

$$a_1 = 1, |a_{k+1}| = |a_k + 1|\text{, за } k = 1,2,\dots,1987.$$

Најди ја најмалата вредност на изразот $|a_1 + a_2 + \dots + a_{1988}|$.

17. Дадена е низа од природни броеви $1 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots . < x_n < \dots$ таква што $x_{n+1} \leq 2n$, за секој $n \in \mathbf{N}$. Дали постојат два члена на низата $x_i$ и $x_j$ такви што $x_i - x_j = 2008$?

18. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со

$$x_1 = 2008,\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = (n^2 - 1)x_n,\ n \geq 2.$$

Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со

$$a_n = x_n + \frac{1}{n}S_n,\ S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Определи за кои природни броеви $n$, броевите $a_n$ се полни квадрати.

19. Нека $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ се природни броеви такви да $a_{2n} = a_n + n$. Освен тоа, ако $a_n$ е прост број, тогаш $n$ е исто така прост број. Најди $a_{2013}$.

20. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низата дадена со

$$a_n = [\tfrac{n}{1}] + [\tfrac{n}{2}] + \dots + [\tfrac{n}{n}],\ n \in \mathbf{N}.$$

Докажи дека $a_n = 2 + a_{n-1}$, ако и само ако $n$ е прост број.

21. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е дефинирана со $a_1 = 1$ и

$$a_n = \tfrac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}),\text{ за } n > 1.$$

Пресметај ја вредноста на $a_{2013}$.

22. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена со $a_1 = 1, a_2 = 12, a_3 = 20$ и

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n,\text{ за } n = 1,2,3,... .$$

Докажи дека за секој $n \in \mathbf{N}$ бројот $1 + 4a_n a_{n+1}$ е квадрат на сел број.

23. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена со рекурзијата $x_1, x_2$ произволни и

$$x_n = \tfrac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}},\text{ за } n = 3,4,5,... .$$

Докажи дека $x_n$ е цел број за бесконечно многу $n$ ако и само ако $x_1 = x_2$ е цел број.

24. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена со

$$x_1 = c,\ x_{n+1} = cx_n + \sqrt{(c^2-1)(x_n^2-1)},\ n \geq 1.$$

Докажи дека ако $c \in \mathbf{N}$, тогаш $x_n \in \mathbf{N}$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

25. Нека $a \in \mathbf{N}$, $a_0 = 0$ и

$$a_{n+1} = (a_n + 1)a + (a+1)a_n + 2\sqrt{a(a+1)a_n(a_n+1)}, \qquad (1)$$

за $n \geq 1$. Докажи дека $a_n \in \mathbf{N}$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

26. Нека $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{16}(1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n}), n \geq 1$. Изрази го $a_n$ со помош на $n$.

27. Нека $\alpha \neq \beta$ се корени на равенката $x^2 + px + q = 0$ и нека $a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, $n \in \mathbf{N}$.

a) Најди ги сите $p$ и $q$ такви што $a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+3} = (-1)^n$, за секој $n \geq 1$.

b) Докажи дека за овие $p$ и $q$ важи $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, за секој $n \geq 1$ и ако $3 | n$, тогаш $a_n$ е парен број.

28. Да ја разгледаме низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ определена со $a_0 = 4$, $a_1 = 22$ и $a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$, за $n \geq 2$. Докажи дека постојат низи $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ од природни броеви такви да $a_n = \frac{y_n^2 + 7}{x_n - y_n}$, за секој $n \geq 0$.

29. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со

$$a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_{n+1} = \tfrac{a_n^2 + c}{a_{n-1}},\text{ за } n = 2,3,...,$$

каде $a,b,c \in \mathbf{R}$, $ab \neq 0$ и $c > 0$. Докажи дека $a_n \in \mathbf{Z}$ за $n = 1,2,3,...$ ако и само ако $a, b, \frac{a^2+b^2+c}{ab} \in \mathbf{Z}$.

30. Дали постои низа ненегативни цели броеви $F(1), F(2), F(3), \ldots$ за кои важат следниве услови:
    1) секој од броевите 0,1,2,3,.... се содржи во низата,
    2) секој природен број се содржи бесконечно многу пати во низата,
    3) $F(F(n^{163})) = F(F(n)) + F(F(361))$, за секој $n \geq 2$.

31. За произволен природен број $x > 1$ нека $p(x)$ е најмалиот прост број кој не е делител на $x$ и $p(1) = 2$. Ако $p(x) \geq 3$, со $q(x)$ го означуваме производот на сите прости броеви помали од $q(x)$, а ако $p(x) = 2$ ставаме $q(x) = 1$. Низата $x_0, x_1, x_2, \ldots$ е определена со $x_0 = 1$ и $x_{n+1} = \frac{x_n p(x_n)}{q(x_n)}$, за $n \geq 0$. Најди ги сите природни броеви $n$ за кои $x_n = 1995$.

32. Нека $a_1 > 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$, за $n \geq 1$. Најди формула за општиот член на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

33. Нека $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа од природни броеви такви што $a_n > a_{n-1} + 1$, $n \geq 2$. Низата природни броеви $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ е зададена со
    $$b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ n = 1, 2, \ldots.$$
    Да се докаже дека барем еден од броевите $b_n, b_n + 1, b_n + 2, \ldots, b_{n+1} - 1$ е полн квадрат.

34. Низата $u_0, u_1, u_2, \ldots$ е определена со $u_0 = 2, u_1 = \frac{5}{2}$, $u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1$, $n = 1, 2, \ldots$. Докажи, дека за секој $n = 1, 2, \ldots.$ важи $[u_n] = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$.

35. Најди ја најголемата можна вредност на бројот $x_0$, за која постои низа позитивни реални броеви $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ кои ги задоволуваат условите:
    1) $x_0 = x_{1995}$ и
    2) $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$, за секој $i \in \{1, 2, \ldots, 1995\}$.

36. Нека $a_k$ е општиот член, а $S_k$ е збирот на првите $k$ членови на некоја аритметичка прогресија. Ако за некои $m$ и $n$, каде $m \neq n$, важи $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$, докажи дека $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$.

37. Нека $S_n$ е збирот на првите $n$ членови на аритметичка прогресија. Ако за некои $m$ и $n$, каде $m \neq n$, важи $S_m = S_n$, докажи дека $S_{m+n} = 0$.

38. Дадени се реалните броеви $a, b, c$. При кои услови постои аритметичка прогресија, таква да за секој $n$ збирот $S_n$ на првите $n$ членови на таа прогресија е еднаков на $an^2 + bn + c$?

39. Дали може $\sqrt{5}$ и 5 да бидат членови на аритметичка прогресија чиј прв член е еднаков на 2?

40. Дадени се две аритметички прогресии чии разлики се 13 и $\sqrt{13}$. Докажи дека постои најмногу еден член кој е заеднички за двете прогресии.

41. Дадена е аритметичката прогресија $a_1, a_2, ..., a_n$. Докажи дека
$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

42. Дадена е аритметичката прогресија $a_1, a_2, ..., a_n$. Докажи дека
$$\frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + ... + \frac{1}{a_{n-1} a_2} + \frac{1}{a_n a_1} = \frac{2}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n}\right).$$

43. Најди ги сите вредности на реалниот параметар $a$, така што ненегативните решенија на равенката $(2a-1)\sin x + (2-a)\sin 2x = \sin 3x$ формираат бесконечна аритметичка прогресија.

44. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е дефинирана со $a_n = 3^n - 2^n$, $n \in \mathbf{N}$. Докажи дека не постојат три члена на оваа низа кои припаѓаат на некоја геометриска прогресија.

45. За секој природен број $n$ дефинираме $f(n)$ на следниов начин: $f(1) = 1$ и за секој $n \in \mathbf{N}$, $f(n+1)$ е најголемиот природен број $m$ таков што постои аритметичка прогресија од природни броеви
$$a_1 < a_2 < ... < a_m \text{ и } f(a_1) = f(a_2) = ... = f(a_m).$$
Докажи дека постојат $a, b \in \mathbf{N}$ такви да $f(an+b) = n+2$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

46. Нека се $a, b, x$ реални броеви различни од нула. Низата $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ е определна со $t_0 = a, t_1 = b, t_n = x t_{n-1} t_{n+1}, n = 1, 2, ...$. Докажи дека оваа низа е периодична!

47. Нека $x_1 \in \mathbf{R}$ и нека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со рекурентната формула
$$x_{n+1} = \sqrt{3} - \frac{1}{x_n},\ n \in \mathbf{N}.$$
Најди го членот $x_{2014}$.

48. Низата $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ е определена со $a_0 = a, a \in \mathbf{R}$ и
$$a_n = \frac{a_{n-1}\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-a_{n-1}}, n = 1, 2, 3, ....$$
Пресметај $a_{2013}$.

49. Дадена е низата $a_1 = a, a_2 = b, a_{n+2} = \frac{1+a_{n+1}}{a_n}$, за $n \geq 1$, каде $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq -1$, $b \neq -1$ и $a+b \neq -1$. Пресметај $a_{2014}$!

50. Нека $a_0$ и $a_1$ се произволни ненегативни реални броеви и нека
$$a_{n+1} = |a_n| - a_{n-1}, \text{ за } n = 1, 2, 3, ....$$
Докажи дека низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е периодична.

51. Низата $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена со $c_1 = 2$, $c_{n+1} = [\frac{3c_n}{2}], n \geq 1$. Докажи дека

    a) Низата $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ содржи бесконечно многу парни броеви.

    b) Низата $b_n = (-1)^{c_n}, n = 1, 2, 3, \ldots$ не е периодична.

52. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена со $a_{2n} = a_n$, за $n \geq 1$, $a_{4n+1} = 1$ и $a_{4n+3} = 0$, за $n \geq 0$. Докажи дека оваа низа нема период.

53. Дадени се природни броеви $a_0, a_1, \ldots, a_{100}$. Познато е дека $a_1 > a_0$ и $a_{i+1} = 3a_i - 2a_{i-1}$, за $i = 1, 2, \ldots, 99$. Докажи дека $a_{100} > 2^{99}$.

54. Докажи дека во низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ определена со
$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 5, \text{ за } n \geq 1$$
содржи бесконечно многу различни природни броеви.

55. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со
$$a_1 = 2, \ a_n = 2(n + a_{n-1}), \quad n \geq 2.$$
Докажи дека $a_n \leq 2^{n+2}$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

56. За членовите на конечната низа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ важи $a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} \geq 0$, секој $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $a_0 = a_n = 0$. Докажи дека $a_k \leq 0$, за $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

57. Низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се определени со равенствата
$$a_1 = 1, b_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n}, b_{n+1} = \frac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n}, \ n \geq 1.$$
Докажи дека $a_{2013} < 5$.

58. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со
$$a_1 = 1, \ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}, \text{ за } n \geq 2.$$
Докажи дека $a_{100} > 14$.

59. Нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ се низи реални броеви такви што
$$x_n = y_{n-1} + \frac{1}{z_{n-1}}, \ y_n = z_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}, \ z_n = x_{n-1} + \frac{1}{y_{n-1}}, \ n \in \mathbf{N},$$
при што $x_0, y_0, z_0$ се позитивни реални броеви. Дали некоја од трите низи е ограничена?

60. Дали постои низа $a_1, a_2, \ldots$ од позитивни реални броеви таква што
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n^2 \text{ и } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq 2008,$$
за секој природен број $n$?

61. Нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа од позитивни броеви, такви што

$$x_1+x_2+...+x_n \geq \sqrt{n}\text{ , за секој } n\geq 1.$$

Докажи дека

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2>\tfrac{1}{4}(1+\tfrac{1}{2}+...+\tfrac{1}{n})\text{ , } n\geq 1.$$

62. Нека се дадени позитивни реални броеви $a_1,a_2,...,a_n$ и нека $q\in(0,1)$. Најди $n$ реални броеви $b_1,b_2,...,b_n$ такви што

1) $a_k<b_k$ , за $k=1,2,3,...,n$,

2) $q<\frac{b_{k+1}}{b_k}<\frac{1}{q}$ , за $k=1,2,3,...,n-1$ , и

3) $b_1+b_2+...+b_n<\frac{1+q}{1-q}(a_1+a_2+...+a_n)$ .

63. Нека $a\in\mathbf{R}$, $a>1$. Најди ограничена бесконечна низа реални броеви $x_0,x_1,x_2...$ таква што

$$|x_i-x_j|\cdot|i-j|^a\geq 1\text{, за секои } i,j\in\mathbf{N},\ i\neq j.$$

64. Низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се дефинирани со

$$a_1=9, b_1=3, a_{k+1}=9^{a_k}, b_{k+1}=3^{b_k}\text{ , за секој } k\in\mathbf{N}.$$

Најди го најмалиот природен број $n$ за кој важи $b_n>a_{2013}$.

65. Докажи дека за секои три бесконечни низи природни броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ постојат природни броеви $p$ и $q$ такви да $a_p\geq a_q$, $b_p\geq b_q$ и $c_p\geq c_q$.

66. Ако $x$ е позитивен ирационален број и $y=\frac{1}{x}$, тогаш меѓу секои два последователни природни броеви се содржи точно еден член на една од низите

$$1+x, 2(1+x), 3(1+x), ...$$
$$1+y, 2(1+y), 3(1+y), ....$$

Докажи!

67. Низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ природни броеви се зададени со

1) $a_1=1$,

2) $b_n=nu-1-a_n$, каде $u>4$ е даден цел број,

3) $a_{n+1}$ е најмалиот природен број различен од броевите $a_1,a_2,...,$ $a_n;b_1,b_2,...,b_n$.

Докажи дека $a_n=[\alpha n]$ и $b_n=[\beta n]$, каде $\alpha$ и $\beta$ се корени на равенката $x^2-ux+u=0$.

68. Нека $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа реални броеви таква што

$$k_1>1, k_n>k_1+k_2+...+k_{n-1}\text{ , } n\geq 2.$$

Докажи дека постои $q>1$ таков што $k_n > q^n$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

69. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа различни природни броеви не помали од 2. Докажи дека низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има подниза $\{a_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ таква што $a_{i_n} > i_n$, за секој $n \in \mathbf{N}$

70. Дадена е строго растечка низа природни броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, така да
$$a_1 = 1, a_2 = 2 \text{ и } a_m a_n = a_{mn}, \qquad (1)$$
ако $m$ и $n$ се заемно прости броеви. Докажи дека
a) $a_3 = 3$
b) $a_n = n$, за секој природен број $n$.

71. За низата позитивни броеви $a_0, a_1, ..., a_{2014}$ важи
$$a_0 = 1, a_{2014} = 2 \text{ и } a_k^2 \le a_{k-1} a_{k+1}, \text{ за } k = 1, 2, ..., 2013.$$
Докажи дека ниту еден член на оваа низа не е поголем од 2 и дека $a_{1007} \le \sqrt{2}$.

72. Докажи дека за секој ирационален број $\alpha$ во секој интервал $[c,d] \subset (0,1)$ има барем еден член од низата $a_n = \{\alpha n\}$, $n = 1, 2, ...$.

73. Докажи дека во секој интервал $[c,d] \subset (0,1)$ има барем еден член од низата $a_n = \{\lg n\}$, $n = 1, 2, ...$.

74. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа реални броеви таква да $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + a_n - 1}$, за $n \ge 1$. Докажи дека $a_1 \notin (-2,1)$.

75. Докажи дека за секој позитивен $a$ низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ определена со $x_1 = 1$, $x_2 = a$ и $x_{n+2} = \sqrt[3]{x_{n+1}^2 x_n}$, $n \ge 1$ е конвергентна и најди ја нејзината граница.

76. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со рекурентната релација:
$$a_1 = k, a_2 = 5k - 2 \text{ и } a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n, n \ge 1,$$
каде $k$ е реален број.
a) Најди ги сите вредности на $k$ за кои низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна.
b) Докажи дека за $k = 1$ важи $a_{n+2} = [\frac{7a_{n+1}^2 - 8a_n a_{n+1}}{1 + a_n + a_{n+1}}], n \ge 1$.

77. Дадена е низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква да $a_1 = \frac{1}{2}$ и $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 2a_n}$, за $n \ge 1$. Докажи дека:
a) за секој $n \in \mathbf{N}$ важи $a_n < \frac{2n^2}{2n+1}$ и
b) низата $\{\frac{a_n}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира.

78. Најди ја граничната вредност на низата со општ член

$$x_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^n}.$$

79. Нека $|q|<1$. Пресметај $T_n = 1 + 3q + 5q^2 + \dots + (2n+1)q^n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$.

80. Нека $|q|<1$. Пресметај $T_n = 1 + 2^2 q + \dots + (n+1)^2 q^n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$.

81. Нека $a>0, x_1>0$ и $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, за $n \geq 1$. Докажи дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна и најди $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

82. Нека $a>0, x_1>0$ и $x_{n+1} = \frac{1}{3}(2x_n + \frac{a}{x_n^2})$, за $n \geq 1$. Докажи дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна и најди $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

83. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = (\sqrt{2})^{x_n}$, за $n \geq 1$. Најди $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

84. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа реални броеви таква да за секој природен број $n$ важи $0 < x_n < 1$ и $x_{n+1}(1-x_n) \geq \frac{1}{4}$. Докажи дека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

85. Нека $p$ е прост број и $f(n)$ е најголемиот делител на природниот број $n$ кој не се дели со $p$. Нека

$$a_k = f(1) + f(2) + \dots + f(p^k), \text{ за } k = 1, 2, \dots .$$

a) Изрази го $a_k$ како функција од $k$.

b) Најди ги сите реални броеви $t$ за кои низата $b_k = \frac{a_k}{t^k}$, за $k = 1, 2, \dots$ конвергира.

86. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $x_1 = a, x_2 = b$ и $x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$, за $n \geq 1$. Докажи дека оваа низа е коневергентна и најди $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

87. Низата реални броеви $a_o, a_1, \dots, a_n, \dots$ го задоволува условот

$$1 = a_o \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \qquad (1)$$

а низата $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ дефинирана е со

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}) \frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

Докажи дека:

а) $0 \leq b_n < 2$, за секој $n \in \mathbf{N}$,

б) за дадено $c$, таков што $0 \leq c < 2$, постои низа $a_o, a_1, \dots, a_n, \dots$ која го задоволува условот (1) и при тоа $b_n > c$ за бесконечно многу индекси $n$.

88. Нека $a_n = \frac{n+1}{2^{n+1}}(\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+...+\frac{2^n}{n}), n=1,2,....$ Докажи дека

a) $a_{n+1} \leq a_n$, за секој $n \geq 3$,

b) Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира и најди ја нејзината граница.

89. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2-3}{2}$, $n=1,2,3,...$.

a) Докажи дека низата $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира.

b) Докажи дека низата $\{x_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира.

c) Докажи дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира и најди ја границата.

90. Низата $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ е определена со $a_0 = a, a \in \mathbf{R}$ и

$$a_{n+1} = 2^n - 3a_n,\ n = 0,1,2,3,... .$$

a) Изрази го $a_n$ со помош на $a$ и $n$.

b) Најди $a$ таков да $a_{n+1} > a_n$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

91. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена со:

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n},\ n = 1,2,... .$$

a) Докажи дека важи: $x_{2014}^2 + x_{2014} < 1$.

b) Испитај ја конвергенцијата на низата.

92. Нека $x_1$ е произволен реален број и $x_{n+1} = \frac{n+1}{n}x_n - 1$, за $n \geq 1$. Докажи дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е неограничена и опаѓачка почнувајќи од некој член.

93. Да ја разгледаме низата $a_n = n + a\sqrt{n^2+1}, n = 1,2,3,...$ и $a$ е реален број.

a) За кои вредности на $a$ низата конвергира?

b) За кои вредности на $a$ низата монотоно расте?

94. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е дефинирана со

$$a_1 = 1994,\ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2[a_n]+21},\ n = 1,2,... .$$

a) Докажи дека $a_{12} < 1$.

b) Докажи дека низата конвергира и најди ја нејзината граница.

c) Најди го најмалиот број $k$ таков да $a_k < 1$.

95. За секој природен број $n$ со $P(n)$ да го означиме производот од цифрите на бројот $n$ запишан во декаден броен систем. Дефинираме низа $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ на следниов начин:

$x_1$ е даден природен број, $x_{k+1} = x_k + P(x_k)$, за $k \geq 1$.

Дали може $x_1$ да се избере така што низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ биде ограничена?

96. Најди $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$.

97. Нека $a,x_1\in\mathbf{R}$ и

$$x_{n+1}=x_n\sqrt{\frac{n}{n+1}}+\frac{a}{2n+1},\ n\in\mathbf{N}.$$

Докажи дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира и најди ја нејзината граница.

98. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со равенствата $x_1=3$ и

$$x_{n+1}=x_n^2-3x_n+4,\ n\ge1.$$

а) Докажи дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно расте и е неограничена.

b) Докажи дека низата $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, определена со

$$y_n=\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}+...+\frac{1}{x_n-1},\ n\ge1,$$

конвергира. Најди ја нејзината граница.

99. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е дефинирана со $a_1=2,a_2=11$ и $a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}$, за $n\ge3$. Докажи дека секој член на оваа низа е од облик $a^2+2b^2$, за некои природни броеви $a$ и $b$.

100. Дали постојат природни броеви $a,b$ и $c$, поголеми од 2011, такви да во декаден запис важи $(a+\sqrt{b})^c=...2010,2011...$?

101. а) Најди го бројот на реалните корени на равенката $x=\cos x$.
б) Нека $a_1,a_2,...$ е низа реални броеви таква што $a_{n+1}=\cos a_n$, за $n\ge1$. Докажи дека низата конвергира.

102. Дадена е бесконечна геометриска прогресија $a_1,a_2,a_3,...$ таква што

$$a_1-3a_2+2a_3=0 \text{ и } a_1+a_2+a_3+...+a_n+...\le2012.$$

Колку најмногу природни броеви може да се содржат меѓу членовите на прогресијата?

103. Нека $a_1,a_2,a_3,...$ и $b_1,b_2,b_3,...$ се низи од позитивни броеви такви што

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{b_n}) \text{ и } b_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n+\frac{1}{a_n}), \text{ за секој } n\in\mathbf{N}.$$

Докажи дека низите се коневергентни.

104. Најди ги сите вредности на $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, за кои броевите $\sin x\cos x,1$ и $\frac{1}{ainx+\cos x}$ во некој редослед формираат геометрсика прогресија.

105. Четири позитивни броеви формираат растечка геометриска прогресија. Најди го количникот на прогресијата ако три од броевите се нули на полином од трет степен, а четвртиот е нула на неговиот извод.

106. Определи ги сите природни броеви $d$, за кои постои бесконечна аритметичка прогресија $a_1,a_2,a_3,...$ од природни броеви со разлика $d$ со следново

својство: постои природен број $k$ за кој за секој $n$ броевите $a_{S_{n+1}}$, $(n+k)a_k$, $-a_{S_n}$ образуваат (во овој редослед) аритметичка прогресија. ( $S_n$ е збирот на првите $n$ членови на прогресијата $a_1, a_2, a_3, \dots$ ).

107. Дадена е бесконечна низа $a_1, a_2, a_3, \dots$ за која $a_2 = 2015,\ xa_{n+1} = a_n + y,\ n \geq 1$ за некои реални броеви $x$ и $y$. Определи го $y$, ако е познато дека низата $b_1, b_2, b_3, \dots$ зададена со $b_n = a_n - 2014$, $n = 1, 2, 3, \dots$ е бесконечна геометриска прогресија чиј збир на членови е еднаков на 4.

108. Синусите на три различни агли од интервалот $[0, 2\pi]$ формираат аритметичка прогресија. Докажи дека нивните косинуси не може да формираат аритметичка прогресија во истиот редослед.

109. Нека $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ е бесконечна низа природни броеви. Докажи дека постои единствен природен број $n$ таков што $a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}$.

110. Нека $a_n = \frac{4(2n)^4 + 1}{4(2n-1)^4 + 1}$, $n \in \mathbf{N}$. Пресметај ја границата $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{n^2}$.

111. За низата реални броеви $\{a_n\}$ точно е равенството

$$a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$$

за произволни $m \geq n \geq 0$. Ако $a_1 = 3$, пресметај $a_{2004}$.

# ТРЕТА ГЛАВА
# РЕАЛНИ ФУНКЦИИ

Во првата глава го воведовме поимот функција (пресликување) и докажавме повеќе својства на функциите. Во оваа глава ќе се задржиме на реалните функции и на нивните својства, т.е. ќе разгледуваме функции $f: A \to \mathbf{R}$, каде што $A \subseteq \mathbf{R}$, $A \neq \varnothing$. Притоа, само ќе дадеме преглед на потребните дефиниции и теореми, но нема да ги презентираме доказите на одделните тврдења, кои можат да се најдат во повеќето книги од математичка анализа (на пример во книгите кои во литературата се наведени под редните броеви [53] и [54]).

## 1. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА РЕАЛНИТЕ ФУНКЦИИ

**1.1. Дефиниција.** Нека се дадени функциите $f: A \to \mathbf{R}$ и $g: A \to \mathbf{R}$.

Функцијата $h_1: A \to \mathbf{R}$, определена со

$$h_1(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x)\text{, за секој } x \in A$$

ја нарекуваме *збир* на функциите $f$ и $g$.

Функцијата $h_2: A \to \mathbf{R}$, определена со

$$h_2(x) = (f-g)(x) = f(x) - g(x)\text{, за секој } x \in A$$

ја нарекуваме *разлика* на функциите $f$ и $g$.

Функцијата $h_3: A \to \mathbf{R}$, определена со $h_3(x) = (fg)(x) = f(x)g(x)$, за секој $x \in A$ ја нарекуваме *производ* на функциите $f$ и $g$.

Ако $g(x) \neq 0$, за секој $x \in A$, тогаш функцијата $h_4: A \to \mathbf{R}$, определена со $h_4(x) = (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, за секој $x \in A$ ја нарекуваме *количник* на функциите $f$ и $g$.

**1.2. Дефиниција.** Нека $A \subseteq \mathbf{R}$ е *симетрично множество* во однос на координатниот почеток, т.е. од $x \in A$ следува $-x \in A$. За функцијата $f: A \to \mathbf{R}$ ќе велиме дека е *парна* ако $f(-x) = f(x)$, за секој $x \in A$. За функцијата $f: A \to \mathbf{R}$ ќе велиме дека е *непарна* ако $f(-x) = f(x)$, за секој $x \in A$.

**1.3. Забелешка.** Ако функцијата $f$ е парна, тогаш од $f(-x) = f(x)$ следува дека точките $M(x, f(x))$ и $N(-x, f(x))$ припаѓаат на нејзиниот график. Но, тоа значи дека графикот на секоја парна функција е симетричен во однос на $y$-оската.

Слично, ако функцијата $f$ е непарна, тогаш од $f(-x) = -f(x)$ следува дека точките $M(x, f(x))$ и $N(-x, -f(x))$ припаѓаат на нејзиниот график. Но, тоа значи дека графикот на секоја непарна функција е симетричен во однос на координатниот почеток.

**1.4. Теорема.** а) Збир на две парни (непарни) функции е парна (непарна) функција.

б) Производ (количник) на две функции со иста парност е парна функција, а производ (количник) на две функции со различна парност е непарна функција. ■

**1.5. Дефиниција.** За функцијата $f:A\to\mathbf{R}$ ќе велиме дека е *периодична* ако постои реален број $\omega\neq 0$ таков што $f(x+\omega)=f(x)$, за секој $x\in A$. Најмалиот позитивен број $\omega$ со својство $f(x+\omega)=f(x)$, за секој $x\in A$ го нарекуваме *основна периода* за функцијата $f$.

**1.6. Забелешка.** Од дефиниција 1.5 непосредно следува дека

$$f(x+2\omega)=f((x+\omega)+\omega)=f(x+\omega)=f(x) \text{ и } f(x-\omega)=f((x-\omega)+\omega)=f(x).$$

Понатаму, користејќи математичка индукција може да се докаже дека

$$f(x+n\omega)=f(x) \text{ и } f(x-n\omega)=f(x), \text{ за секој } n\in\mathbf{N}.$$

Исто така, непосредно од дефиниција 1.5 следува дека ако $f$ е периодична функција со основна периода $\omega$, тогаш точките $(x,f(x))$ и $(x+\omega,f(x))$ припаѓаат на графикот на функцијата од каде се добива следново правило за цртање на периодична функција: се црта графикот на функцијата $f$ на интервалот $[0,\omega]$ и потоа истиот се поместува за $\omega$ по должина на $x-$оската.

**1.7. Дефинција.** За функцијата $f$ ќе велиме дека *монотоно расте* на множеството $A$ ако од $x_1,x_2\in A$ и $x_1<x_2$ следува $f(x_1)\leq f(x_2)$.

За функцијата $f$ ќе велиме дека *строго монотоно расте* на множеството $A$ ако од $x_1,x_2\in A$ и $x_1<x_2$ следува $f(x_1)<f(x_2)$.

За функцијата $f$ ќе велиме дека *монотоно опаѓа* на множеството $A$ ако од $x_1,x_2\in A$ и $x_1<x_2$ следува $f(x_1)\geq f(x_2)$.

За функцијата $f$ ќе велиме дека *строго монотоно опаѓа* на множеството $A$ ако од $x_1,x_2\in A$ и $x_1<x_2$ следува $f(x_1)>f(x_2)$

**1.8. Теорема.** Нека функцијата $f$ строго монотоно расте (опаѓа) на множеството $A$ и нека $B=f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}$. Тогаш $f$ има инверзна функција $f^{-1}$ која е определена на $B$ и која исто така е строго монотоно растечка (опаѓачка). ■

**1.9. Дефиниција.** За функцијата $f$ ќе велиме дека е *ограничена од горе* (*долу*) *на множеството* $E$ ако постои реален број $M$ таков што $f(x)\leq M$ ( $f(x)\geq M$ ), за секој $x\in E$.

За функцијата $f$ ќе велиме дека е *ограничена на множеството* $E$ ако постои реален број $M$ таков што $|f(x)|\leq M$, за секој $x\in E$.

**1.10. Дефиниција.** За функцијата $f$ ќе велиме дека е *неограничена од горе* (*долу*) *на множеството* $E$ ако за секој реален број $M$ постои $x\in E$ таков што $f(x)\geq M$ ( $f(x)\leq M$ ).

За функцијата $f$ ќе велиме дека е *неограничена на множеството* $E$ ако таа е неограничена од горе или од долу.

## 2. ОСНОВНИ ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

**2.1. Линеарна функција.** Како што знаеме, наједноставниот вид на реална функција е *линеарна функција* чиј општ вид е $f(x)=ax+b$, каде што $a,b\in\mathbf{R}$, кои ги нарекуваме коефициенти на линеарната функцијата $f$. Дефиниционата област на линеарната функција е $D(f)=\mathbf{R}$, а множеството вредности е

$$E(f)=\begin{cases}\mathbf{R}, & a\neq 0,\\ \{b\}, & a=0.\end{cases}$$

Линеарната функција монотоно расте за $a>0$ и монотоно опаѓа за $a<0$. Графикот на функцијата е права со коефициент на агол $k=a=\operatorname{tg}\alpha$, која на $y-$оската отсекува отсечка еднаква на $b$.

**2.2. Квадратна функција.** Функција $f(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\mathbf{R},\ a\neq 0$ ја нарекуваме *квадратна функција*. Ќе разгледаме два случаја.

а) Нека $a>0$. Тогаш $D(f)=\mathbf{R}$ и $E(f)=[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty)$. Функцијата опаѓа на интервалот $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ и расте на интервалот $[-\frac{b}{2a},+\infty)$. Графикот на функцијата е парабола свртена на горе, со оска $x=-\frac{b}{2a}$ и теме $M(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$.

б) Нека $a<0$. Тогаш $D(f)=\mathbf{R}$ и $E(f)=(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}]$. Функцијата расте на интервалот $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ и опаѓа на интервалот $[-\frac{b}{2a},+\infty)$. Графикот на функцијата е парабола свртена на долу, со оска $x=-\frac{b}{2a}$ и теме $N(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$.

Нека

$$ax^2+bx+c=0, \tag{1}$$

и да ставиме $D=b^2-4ac\geq 0$. Тогаш решенијата на (1) се $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, па затоа

- ако $D<0$, тогаш корените на равенката (1) се коњугирано комплексни броеви,
- ако $D=0$, тогаш равенката (1) има реални и еднакви корени, т.е. $x_1=x_2$, и
- ако $D>0$, тогаш равенката (1) има реални и различни корени $x_1$ и $x_2$.

**2.3. Степенска функција.** Функцијата $f(x)=x^{\alpha}, \alpha\in\mathbf{R}$ ја нарекуваме *степенска функција*. Ќе ги разгледаме најчесто користените случаи на степенската функција.

а) Ако $\alpha=2n, n\in\mathbf{N}$, т.е. $f(x)=x^{2n}$, тогаш $D(f)=\mathbf{R}$, $E(f)=[0,+\infty)$. Функцијата е парна, опаѓа на интервалот $(-\infty,0]$ и расте на интервалот $[0,+\infty)$.

б) Ако $\alpha=2n+1, n\in\mathbf{N}$, т.е. $f(x)=x^{2n+1}$, тогаш $D(f)=\mathbf{R}$, $E(f)=\mathbf{R}$. Функцијата е непарна и таа монотоно расте на целата дефинициона област.

в) Ако $\alpha=-2n, n\in\mathbf{N}$, т.е. $f(x)=\frac{1}{x^{2n}}$, тогаш $D(f)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $E(f)=(0,+\infty)$. Функцијата е парна, расте на интервалот $(-\infty,0)$ и опаѓа на интервалот $(0,+\infty)$. На црт. 14 се дадени графиците на овој вид степенски функции за $n=1,2$.

г) Ако $\alpha=-2n+1, n\in\mathbf{N}$, т.е. $f(x)=\frac{1}{x^{2n-1}}$, тогаш $D(f)=E(f)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Функцијата е непарна и монотоно опаѓа на интервалите $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$.

д) Ако $\alpha=\frac{p}{q}, \alpha\notin\mathbf{Z}$, тогаш $(0,+\infty)\subseteq D(f)$ и $(0,+\infty)\subseteq E(f)$.

**2.4. Експоненцијална функција.** Нека $a>0$, $a\neq 1$. Функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^{+}$, определена со $f(x)=a^{x}$, за секој $x\in\mathbf{R}$ ја нарекуваме *експоненцијална функција* со основа $a$.

**Теорема.** а) Ако $a\neq 1$, тогаш експоненцијалната функција (1) е биекција од $\mathbf{R}$ во $\mathbf{R}^{+}$.

б) Ако $0<a<1$, тогаш функцијата (1) строго монотоно опаѓа на целата дефинициона област.

в) Ако $a>1$, тогаш функцијата (1) строго монотоно расте на целата дефинициона област. ■

**2.5. Логаритамска функција.** Нека $a>1$. Во досегашните разгледувања видовме дека експоненцијалната функција $f(x)=a^{x}$ монотоно расте на интервалот $(-\infty,+\infty)$ и дека нејзиното множество вредности е интервалот $(0,+\infty)$. Според теорема 1.8 постои единствена функција $g:(0,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$ таква што: $g$ монотоно расте на $(0,+\infty)$ и за секој $x\in(-\infty,+\infty)$ важи $g(f(x))=x$ и за секој $y\in(0,+\infty)$ важи $f(g(y))=y$.

Аналогно тврдење важи и кога $0<a<1$, со тоа што бидејќи функцијата $f(x)=a^{x}$ монотоно опаѓа на $(-\infty,+\infty)$, добиваме дека и инверзната функција $g$ монотоно опаѓа на $(0,+\infty)$.

Функцијата $g$ која е инверзна на функцијата $f(x)=a^{x}$ ја нарекуваме *логаритамска функција* и ја означуваме со $g(x)=\log_a x$. За секој $x\in(0,+\infty)$ бројот $\log_a x$ го нарекуваме *логаритам од* $x$ *со основа* $a$. Значи, $y=\log_a x$ ако и само ако $x=a^y$. Да забележиме дека од последните две равенства добиваме дека $x=a^{\log_a x}$.

Логаритмот од $x$ со основа $a=e$ го нарекуваме *природен логаритам* и го означуваме со $\ln x$. Според тоа, за секој $x>0$ важи $x=e^{\ln x}$.

**2.6. Тригонометриските функции** $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$**.** За функцијата $y=\sin x$ имаме $D(f)=\mathbf{R}$ и $E(f)=[-1,1]$. Понатаму, таа е непарна, е периодична со основна периода $T=2\pi$, монотоно расте на интервалите $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi], k\in\mathbf{Z}$ и монотоно опаѓа на интервалите $[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi]$, $k\in\mathbf{Z}$.

За функцијата $y=\cos x$ имаме $D(f)=\mathbf{R}$ и $E(f)=[-1,1]$. Понатаму, таа е парна, е периодична со основна периода $T=2\pi$, монотоно расте на интервалите $[(2k-1)\pi,2k\pi], k\in\mathbf{Z}$ и монотоно опаѓа на интервалите $[2k\pi,(2k+1)\pi], k\in\mathbf{Z}$.

За функцијата $y=\operatorname{tg} x$ имаме $D(f)=\mathbf{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbf{Z}\}$ и $E(f)=\mathbf{R}$. Понатаму, таа е непарна, е периодична со основна периода $T=\pi$ и монотоно расте на интервалите $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi), k\in\mathbf{Z}$.

За функцијата $y=\operatorname{ctg} x$ имаме $D(f)=\mathbf{R}\setminus\{k\pi\,|\,k\in\mathbf{Z}\}$ и $E(f)=\mathbf{R}$. Понатаму, таа е непарна, е периодична со основна периода $T=\pi$ и монотоно опаѓа на интервалите $(k\pi,(k+1)\pi), k\in\mathbf{Z}$.

**2.7. Инверзни тригонометриски фунции** $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$ и $y=\operatorname{arcctg} x$. Функцијата $y=\sin x$ монотоно расте на интервалот $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ и нејзиното множество вредности е $[-1,1]$. Според теорема 1.8 постои единствена функција $g:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ таква што: $g$ монотоно расте на $[-1,1]$, таа е непарна и за секој $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ важи $g(f(x))=x$ и за секој $y\in[-1,1]$ важи $f(g(y))=y$. Функцијата $g$ која е инверзна на функцијата $y=\sin x$ ја нарекуваме аркуссинус и ја означуваме со $y=\arcsin x$.

Функцијата $y=\cos x$ монотоно опаѓа на интервалот $[0,\pi]$ и нејзиното множество вредности е $[-1,1]$. Според теорема 1.8 постои единствена функција $g:[-1,1]\to[0,\pi]$ таква што: $g$ монотоно опаѓа на $[-1,1]$ и за секој $x\in[0,\pi]$ важи $g(f(x))=x$ и за секој $y\in[-1,1]$ важи $f(g(y))=y$. Функцијата $g$ која е инверзна на функцијата $y=\cos x$ ја нарекуваме аркускосинус и ја означуваме со $y=\arccos x$.

Функцијата $y=\operatorname{tg} x$ монотоно расте на интервалот $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ и нејзиното множество вредности е $(-\infty,+\infty)$. Според теорема 1.8 постои единствена функција $g:(-\infty,+\infty)\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ таква што: $g$ монотоно расте на $(-\infty,+\infty)$ и за секој

$x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ важи $g(f(x))=x$ и за секој $y\in(-\infty,+\infty)$ важи $f(g(y))=y$. Функцијата $g$ која е инверзна на функцијата $y=\operatorname{tg}x$ ја нарекуваме аркустангенс и ја означуваме со $y=\operatorname{arctg}x$.

Функцијата $y=\operatorname{ctg}x$ монотоно расте на интервалот $(0,\pi)$ и нејзиното множество вредности е $(-\infty,+\infty)$. Според теорема 2.9 постои единствена функција $g:(-\infty,+\infty)\to(0,\pi)$ таква што: $g$ монотоно расте на $(-\infty,+\infty)$ и за секој $x\in(0,\pi)$ важи $g(f(x))=x$ и за секој $y\in$ $(-\infty,+\infty)$ важи $f(g(y))=y$. Функцијата $g$ која е инверзна на функцијата $y=\operatorname{ctg}x$ ја нарекуваме аркускотангенс и ја означуваме со $y=\operatorname{arcctg}x$.

## 3. ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЈА ВО ТОЧКА

**3.1. Дефиниција (Хајне).** Нека функцијата $f(x)$ е определена во секоја точка на множеството $(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$, при што во точката $x_0$ функцијата може да не биде определена. Бројот $y_0$ го нарекуваме *граница на функцијата* $y=f(x)$ во точката $x_0$, ако за секоја низа $\{x_n\}$ точки од $(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$, која конвергира кон $x_0$, низата соодветни вредности $\{f(x_n)\}$ конвергира кон $y_0$.

Притоа ја користиме ознаката $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$.

**3.2.** Во врска со границата на функција во точка ќе ја дадеме и дефиницијата на Коши, која во литературата е позната и како дефиниција на јазикот "$\varepsilon-\delta$".

**Дефиниција (Коши).** Бројот $y_0$ го нарекуваме *граница на функцијата* $y=f(x)$ во точката $x_0$, ако за секој $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$ таков што за секој $x\neq x_0$ кој го задоволува условот $|x-x_0|<\delta$ важи $|f(x)-y_0|<\varepsilon$.

**3.3. Теорема.** а) Ако за функцијата $f(x)$ постои граничната вредност $y_0$ во точката $x_0$, тогаш таа е единствена.

б) Дефинициите 3.1 и 3.2 се еквивалентни. ■

**3.4. Теорема.** Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ во точката $x_0$ имаат граници $a$ и $b$, соодветно, т.е. ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, тогаш

а) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=a\pm b$, б) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=ab$ и

в) ако $b\neq 0$, тогаш $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}$. ■

**3.5. Забелешка.** Ако во теорема 3.4 б) ставиме $g(x)=c$, тогаш бидејќи во секоја точка важи $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ (провери!), добиваме

$$\lim_{x\to x_0} cf(x)=ca=c\lim_{x\to x_0} f(x).$$

**3.6. Теорема (за запазување на знакот).** Нека $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=q$, $q\neq 0$. Тогаш постојат $\delta>0$ и $c>0$ такви што за секој $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ важи

$$g(x)>c, \text{ ако } q>0, \tag{1}$$

$$g(x)<-c, \text{ ако } q<0. \blacksquare \tag{2}$$

**3.7. Конечни граници при $x\to\infty, x\to-\infty, x\to+\infty$.** Со помош на низи ќе дадеме дефиниција на конечна граница на функција.

**Дефиниција А.** Бројот $y_0$ го нарекуваме *конечна граница на функцијата* $y=f(x)$, кога $x\to\infty$, ако за секоја неограничена низа $\{x_n\}$ вредности на аргументот важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=y_0$. Притоа ќе пишуваме

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=y_0.$$

**Дефиниција Б.** Бројот $y_0$ го нарекуваме *конечна граница на функцијата* $y=f(x)$, кога $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$), ако за секоја неограничена низа $\{x_n\}$ вредности на аргументот, чии елементи се позитивни (негативни) важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=y_0$. Притоа ќе пишуваме

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=y_0 \ (\lim_{x\to-\infty} f(x)=y_0).$$

**Дефиниција В.** Бројот $y_0$ го нарекуваме *конечна граница на функцијата* $y=f(x)$, кога $x\to+\infty$, ако за секој $\varepsilon>0$ постои $M>0$ таков што неравенството $|f(x)-y_0|<\varepsilon$ е исполнето за секој $x>M$, т.е.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=y_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\, \exists M>0: \forall x>M \text{ важи } |f(x)-y_0|<\varepsilon.$$

**3.8. Бесконечни граници кога $x\to x_0$.** Ќе го разгледаме случајот кога функцијата $y=f(x)$ кога $x\to x_0$ неограничено расте. Тогаш функцијата нема конечна граница, па затоа е потребно да го обопштиме поимот за граница.

**Дефиниција А (Коши).** Границата на функцијата $y=f(x)$, кога $x\to x_0$ ја нарекуваме *бесконечна*, ако за секој $M>0$ постои $\delta>0$, таков, што за секој $x$ за кој важи $0<|x-x_0|<\delta$ важи $|f(x)|>M$. Притоа пишуваме

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

Ако $f(x)$ има бесконечна граница и прима само позитивни или само негативни вредности, тогаш пишуваме $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, соодветно.

Претходната дефиниција за бесконечна граница е дадена на "$\varepsilon-\delta$" на Коши. Истата дефиниција ќе ја презентираме во формулација на Хајне.

**Дефиниција Б (Хајне).** Функцијата $y=f(x)$ има *бесконечна граница* кога $x\to x_0$, ако за секоја низа $\{x_n\}$ која конвергира кон $x_0$ низата $\{f(x_n)\}$ вредности на функцијата конвергира кон бесконечност.

**3.9. Бесконечни граници кога $x\to\pm\infty$.** Постојат функции кои го имаат следново својство: при неограничено зголемување на $|x|$ вредностите $|f(x)|$ неограничено растат. Во таа смисла ја имаме следнава дефиниција.

**Дефиниција.** Границата на функцијата $y=f(x)$ кога $x\to+\infty$ (или $x\to-\infty$) ја нарекуваме *бесконечна*, ако за секој $M>0$ постои $N>0$ таков што $|f(x)|>M$ кога $|x|>N$.

**3.10. Еднострани граници на функции.** При разгледувањето на конечната граница на функција кога $x\to x_0$ претпоставуваме дека точката $x$ се приближува кон точката $x_0$ како од лево, така и од десно. Меѓутоа, понекогаш имаме потреба да разгледуваме граница на функцијата $y=f(x)$ при услов дека точката $x$ се приближува кон точката $x_0$ само од левио, односно само од десно. Пред да преминеме кон разгледување на ваквите граници, ќе ги воведеме поимите: околина на точка, лева и десна околина на точка.

**Дефиниција А.** *Лева $\delta-$околина* на точката $x_0$ го нарекуваме множеството $(x_0-\delta,x_0]$. *Десна $\delta-$околина* на точката $x_0$ го нарекуваме множеството $[x_0,x_0+\delta)$. *$\delta-$околина* на точката $x_0$ е множеството $(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

Користејќи ги поимите лева и десна $\delta-$околина на точка ќе ги воведеме поимите за лева и десна граница на функција во точка. Така ја имаме следнава дефиниција.

**Дефиниција Б.** Бројот $y_0$ го нарекуваме *лева граница* на функцијата $f(x)$ во точката $x_0$, ако за секој $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$ таков што за секој $x\in(x_0-\delta,x_0]$ важи $|f(x)-y_0|<\varepsilon$. Притоа пишуваме $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=y_0$.

Бројот $y_0$ го нарекуваме *десна граница* на функцијата $f(x)$ во точката $x_0$, ако за секој $\varepsilon>$ постои $\delta>0$ таков што за секој $x\in[x_0,x_0+\delta)$ важи $|f(x)-y_0|<\varepsilon$. Притоа пишуваме $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=y_0$.

# 4. НЕПРЕКИНАТИ ФУНКЦИИ ВО ТОЧКА И НА МНОЖЕСТВО

**4.1.** При разгледувањето на граница на функција $f:A\to\mathbf{R}$, кога $x\to x_0$ можни се два случаја: или $x_0\in A$ или $x_0\notin A$. Случајот $x_0\in A$ е од посебен интерес, бидејќи доведува до важен поим, а тоа е непрекинатост на функција. Пред да поминеме на изучувањето на овој поим, ќе ја презентираме следната теорема.

**Теорема.** Нека $f:A\to\mathbf{R}$ и $x_0\in A$. Тогаш функцијата $f$ има граница во точката $x_0$ ако и само ако

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\,.\ \blacksquare \tag{1}$$

**4.2. Дефиниција.** Нека $f:A\to\mathbf{R}$ и $f:A\to\mathbf{R}$ и $x_0\in A$. За функцијата $f$ ќе велиме дека е *непрекината во точката* $x_0$ ако постои $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, т.е. ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$.

Ако функцијата $f:A\to\mathbf{R}$ е непрекината во секоја точка од множеството $A$, тогаш ќе велиме дека таа е *непрекината на множеството* $A$.

Ако функцијата $f$ не е непрекината во точката $x_0\in A$, тогаш ќе велиме дека таа е *прекината во точката* $x_0$.

**4.3. Забелешка.** Ако ги искористиме дефинициите на Коши и Хајне за граница на функција во точка, тогаш ги добиваме следниее две дефиниции за непрекинатост на функција во точка, кои се еквивалентни на дефиниција 4.2.

**Дефиниција А (Коши).** Функцијата $f$ е *непрекината во точката* $x_0$, ако за секој $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$ таков да за секој $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ важи $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

**Дефиниција Б (Хајне).** Функцијата $f:A\to\mathbf{R}$ е *непрекината во точката* $x_0$, ако за секоја низа $\{x_n\}$ таква што $x_n\in A$, за секој $n\geq 1$ и $x_n\to x_0$, $n\to\infty$, важи $f(x_n)\to f(x_0), n\to\infty$ т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(\lim\limits_{n\to\infty} x_0)$.

# 5. ЕЛЕМЕНТАРНИ СВОЈСТВА НА НЕПРЕКИНАТИТЕ ФУНКЦИИ

**5.1. Теорема.** Нека функциите $f:A\to\mathbf{R}$ и $g:A\to\mathbf{R}$ се непрекинати во точката $x_0\in A$. Тогаш:

1) за секој $C\in\mathbf{R}$ функцијата $Cf$ е непрекината во точката $x_0$;

2) функцијата $f+g$ е непрекината во точката $x_0$;

3) функцијата $fg$ е непрекината во точката $x_0$ и

4) ако $g(x_0)\neq 0$, тогаш функцијата $\frac{f}{g}$ е непрекината во точката $x_0$. ■

**5.2. Пример.** а) Секој полином од $n-$*ти степен*

$$y=P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n,\ a_i\in\mathbf{R} \text{ и } a_n\neq 0,$$

е непрекинат за секој $x_0\in\mathbf{R}$.

б) Секоја рационална $\frac{P(x)}{Q(x)}$, каде $P$ и $Q$ се полиноми е непрекината во секоја точка $x_0\in\mathbf{R}$ во која $Q(x_0)\neq 0$. ■

**5.3. Теорема.** Нека функцијата $f:A\to\mathbf{R}$ е непрекината во точката $x_0\in A$ и $p\in\mathbf{R}$ е таков што $f(x_0)<p$. Тогаш, постои $\delta>0$ таков што за секој $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ важи $f(x)<p$. ■

**5.4. Теорема.** Нека $f:A\to\mathbf{R}$ и $g:B\to\mathbf{R}$ се функции такви што $f(A)\subseteq B$. Ако функцијата $f$ е непрекината во точката $a$ и функцијата $g$ е непрекината во точката $b=f(a)$, тогаш композицијата на функциите $f$ и $g$ е непрекината во точката $a$. ■

**5.5. Теорема.** Нека функцијата $y=f(x)$ е определена, непрекината и монотона на интервалот $(a,b)$ и нека интервалот $(A,B)$ е множеството нејзини вредности. Тогаш на множеството $(A,B)$ инверзната функција $x=f^{-1}(y)=\varphi(y)$ е монотона и непрекината (црт. 62). ■

**5.6. Забелешка.** Може да се докаже дека експоненцијалната функција $y=a^x$, $a>0, a\neq 1$ е непрекината во секоја точка $x_0\in\mathbf{R}$. Сега, од монотоноста на функцијата $y=a^x$ следува дека нејзината инверзна функција $y=\log_a x$, $x>0$ е монотона и непрекината.

## 6. ФУНКЦИИ НЕПРЕКИНАТИ ЗАТВОРЕН ИНТЕРВАЛ

**6.1.** Во овој дел ќе неведеме неколку својства на функциите непрекинати на затворен интервал $[a,b]$, каде што $-\infty<a<b<+\infty$.

**Теорема (Ваерштрас).** Ако функцијата $f$ е непрекината на интервалот $[a,b]$, тогаш таа е ограничена на интервалот $[a,b]$ и ги достигнува својот максимум и минумум на интервалот $[a,b]$, т.е. постои $x_*\in[a,b]$ таква што за секој

$x\in[a,b]$ важи $m=f(x_*)\le f(x)$ и постои $x^*\in[a,b]$ таква што за секој $x\in[a,b]$ важи $M=f(x^*)\ge f(x)$. ■

**6.2. Теорема (Болцано-Коши).** Ако функцијата $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ е непрекината на интервалот $[a,b]$ и или $f(a)<0<f(b)$ или $f(a)>0>f(b)$, тогаш постои $x_0\in[a,b]$ таква што $f(x_0)=0$. ■

**6.3. Коментар.** Геометриската смисла на оваа теорема е следнава: ако точките $A(a,f(a))$ и $B(b,f(b))$ на графикот на функцијата $f(x)$, кои соодветствуваат на интервалот $[a,b]$, лежат на различни страни од $x-$ оската, тогаш графикот на непрекинатата функција $f(x)$ ја сече $x-$оската барем во една точка. Јасно, во случајов графикот на функцијата може да ја сече $x-$оската во повеќе од една точка.

**6.4. Последица (Коши).** Ако функцијата $f$ е непрекината на интервалот $[a,b]$, тогаш за секој број $C$ од интервалот со краеви $f(a)$ и $f(b)$ постои $c\in[a,b]$ таков што $f(c)=C$. ■

## 7. ЗАДАЧИ

1. Дадена е функцијата $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$, $x\in\mathbf{R}$. Пресметај го збирот

$$f(\tfrac{1}{1})+f(\tfrac{2}{1})+...+f(\tfrac{n-1}{1})+f(\tfrac{n}{1})+$$
$$f(\tfrac{1}{2})+f(\tfrac{2}{2})+...+f(\tfrac{n-1}{2})+f(\tfrac{n}{2})+$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f(\tfrac{1}{n})+f(\tfrac{2}{n})+...+f(\tfrac{n-1}{n})+f(\tfrac{n}{n}),$$

$n\in\mathbf{N}$.

2. Дадена е функцијата $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$. Пресметај го збирот

$$f(0)+f(\tfrac{1}{n})+f(\tfrac{2}{n})+...+f(\tfrac{n-1}{n})+f(\tfrac{n}{n}),\ n\in\mathbf{N}.$$

3. Докажи дека функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, за која важи

$$f(x^2)-[f(x)]^2\ge\tfrac{1}{4}$$

4. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е функција таква да

   1) $f(x+y)=f(x)f(y)$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$ и

   2) Постои еден и само еден $c$ таков да $f(c)=2013$.

   Докажи дека функцијата $f$ е инјекција.

5. Нека $f:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ е непрекината опаѓачка функција за која важи
$$f(x+y)+f(f(x)+f(y))=f(f(x+f(y))+f(y+f(x))), \qquad (1)$$
за секои $x,y\in\mathbf{R}^+$. Докажи дека $f(x)=f^{-1}(x)$.

6. Нека $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ се непрекинати биекции такви да
$$f(g^{-1}(x))+g(f^{-1}(x))=2x, \text{ за секој } x\in\mathbf{R}.$$
Докажи дека ако постои $x_0\in\mathbf{R}$ таков да $f(x_0)=g(x_0)$, тогаш $f\equiv g$.

7. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ се функции за кои што
$$f(g(x))=g(f(x))=-x, \text{ за секој } x\in\mathbf{R}.$$
а) Докажи дека функциите $f$ и $g$ се непарни.
b) Најди пример на две такви функции.

8. Ако функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е непрекината во точката $x_0$ и ако за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи
$$f(x+y-xy)+f(xy)=f(x)+f(y),$$
тогаш функцијата $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=f(x)-f(0)$ е непарна на интервалот $(-1,1)$. Докажи!

9. За функциите $f$ и $g$ важи
$$f(x)=f(\tfrac{x+y}{2})g(\tfrac{x-y}{2})+g(\tfrac{x+y}{2})f(\tfrac{x-y}{2}), \qquad (1)$$
и $f$ е непарна и $g$ е парна функција. Докажи дека важи
$$[f(x)]^2-[f(y)]^2=f(x+y)f(x-y). \qquad (2)$$

10. Ако периодична функција $f$ за некој $k\neq\pm1,0$ го задоволува условот $f(kx)=kf(x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$, тогаш таа нема најмала периода. Докажи!

11. Функцијата $f(x)$ има својство да за секој $x\in\mathbf{R}$ и за некој $a\in\mathbf{R}$ важи
$$f(x+a)=\tfrac{1+f(x)}{1-f(x)}.$$
Докажи дека оваа функција е периодична.

12. Нека $a>0$ е реален број и функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е таква што
$$f(x+a)=\tfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}, \text{ за секој } x\in\mathbf{R}.$$
а) Докажи дека функцијата $f$ е периодична, т.е. дека постои реален број $b>0$ таков што $f(x+b)=f(x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$.
b) За $a=1$ најди пример на таква функција $f$, $f\not\equiv\text{const}$.

13. Дадена е функција $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ за која важи
а) $f(x)\le 1$, за секој $x\in\mathbf{R}$,
б) $f(x+\tfrac{13}{42})+f(x)=f(x+\tfrac{1}{6})+f(x+\tfrac{1}{7})$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

Докажи дека функцијата $f$ е периодична.

14. Докажи дека функцијата $f(x)=\cos x+\cos\alpha x,\ x\in\mathbf{R}$ е периодична ако и само ако $\alpha$ е рационален број.

15. Дали може функцијата $y=x^2$ да се претстави како збир на две функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, каде $f$ е непарна, а $g$ е периодична функција.

16. Дали може функцијата $f(x)=x$ да се претстави како збир на две функции $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ каде $g$ е парна функција и $h$ е периодична функција.

17. Дали може функцијата $f(x)=x^2\sin x$ да се претстави како збир на две функции $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ каде $g$ е парна функција и $h$ е периодична функција.

18. Неконстантните функции $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ го задоволуваат условот
$$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y),\ x,y\in\mathbf{R}. \qquad (1)$$
Ако $f$ е периодична, тогаш и $g$ е периодична. Докажи!

19. Ако постојат функции $f,g,h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што
$$f(g(x))+f(h(x))=g(x)\text{, за секој } x\in\mathbf{R},$$
докажи дека постои функција $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ таква што
$$F(g(x))+F(h(x))=h(x).$$

20. Дали постојат функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што за секој реален број $x$ важи $g(x)=g(-x)$ и $x=f([x])+g(x)$?

21. Докажи дека не постои функција $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ таква да
$$(f(x))^2\geq f(x+y)(f(x)+y).$$

22. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е непрекината функција. Дали постојат непрекинати функции $g,h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да
$$f(x)=g(x)\sin x+h(x)\cos x\text{, за секој } x\in\mathbf{R}.$$

23. Дали постојат функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $f(g(x))=x^2$ и $g(f(x))=x^3$?

24. Дали постојат функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $f(g(x))=x^2$ и $g(f(x))=x^4$?

25. Докажи дека не постојат функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што за секој реален број $x$ важи
$$x^2=f([x])+h(\{x\}). \qquad (1)$$

26. Дали постои функција $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ таква што

а) постои $M > 0$ таков што $|f(x)| \leq M$, за секој $x \in \mathbf{R}$,

б) $f(1) = 1$ и

в) ако $x \neq 0$, тогаш $f(x + \frac{1}{x^2}) = f(x) + [f(\frac{1}{x})]^2$ ?

27. Дали постои функција $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ која ги задоволува условите

*i)* $f(x) < x$, за секој $x \in \mathbf{R}$,

*ii)* секој реален број $t$ припаѓа на најмногу конечно многу интервали од облик $(f(x), x)$, за $x \in \mathbf{R}$.

28. Дали постојат функции $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такви да за секој $x \in \mathbf{R}$ важи

$$g(x) = g(-x),\ \ x = f([x]) + g(x).$$

29. Дали постои непрекината функција $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ таква да $f(f(x)) = e^{-x}$, за секој $x \in \mathbf{R}$ ?

30. Дали постои функција $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ која ги задоволува условите

*i)* $f(x) < x$, за секој $x \in \mathbf{R}$,

*ii)* секој реален број $t$ припаѓа на најмногу конечно многу интервали од облик $(f(x), x)$, за $x \in \mathbf{R}$.

31. За функцијата $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ важи

1) $f(x) \leq x$, за секој $x \in \mathbf{R}$ и

2) $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$, за секои $x, y \in \mathbf{R}$.

32. Нека $f : [0,1] \to [0,1]$ е непрекината функција која ги задоволува условите

1) $f(0) = 0,\ f(1) = 1$,

2) $f^n(x) = (f \circ f \circ ... \circ f)(x) = x$, за секој $x \in [0,1]$.

33. Нека за функцијата $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ важи

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x)),\ \text{за секои}\ x, y \in \mathbf{R}. \qquad (1)$$

Докажи дека $f(x) = 0$, за секој $x \leq 0$.

34. Низата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е определена со рекурентната формула

$$\tfrac{1}{2} < x_0 < 1,\ \ x_{n+1} = x_n(2 - x_n),\ \ n \in \mathbf{N}_0.$$

Докажи дека за секој $n \in \mathbf{N}_0$ важи

$$1 - 2^{-2^n} < x_n < x_{n+1}^2 < 1.$$

35. Дадена е функцијата $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ за која важи

а) $f(x) \geq 0$, за секој $x \in [0, 1]$,

б) $f(1) = 1$

в) ако $x_1, x_2 \in [0, 1]$ и $x_1 + x_2 \leq 1$, тогаш

$$f(x_1) + f(x_2) \leq f(x_1 + x_2).$$

Докажи дека $f(x)\le 2x$, за секој $x\in[0,1]$ .

36. Нека $G$ е непразно множество реални функции од облик $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbf{R}$, $a\ne 0$, кои ги задоволуваат условите:

    $1^\circ$ ако $f,g\in G$, тогаш $g\circ f\in G$, каде $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

    $2^\circ$ ако $f=ax+b$, тогаш инверзната функција $f^{-1}\in G$, каде

    $$f^{-1}(x)=\tfrac{x-b}{a};$$

    $3^\circ$ за секој $f\in G$ постои $x_f$, таков што $f(x_f)=x_f$.

    Докажи дека постои $k\in\mathbf{R}$ таков што $f(k)=k$ за секоја $f\in G$.

37. За секој реален број $x_1$ дефинирана е низа $x_1,x_2,...,x_n,...$ со

    $$x_{n+1}=x_n(x_n+\tfrac{1}{n}),\text{ за секој } n\ge 1.$$

    Докажи дека постои еден и само еден број $x_1$ за кој

    $$0<x_n<x_{n+1}<1,\text{ за секој } n\ge 1.$$

38. Функцијата $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ го задоволува равенството

    $$f(f(x))+x=f(2x),\text{ за секој } x\in\mathbf{R}^+.$$

    Докажи дека $f(x)\ge x$, за секој $x\in\mathbf{R}^+$.

39. Докажи дека множеството од сите реални броеви $x$ за кои важи

    $$\sum_{k=1}^{70}\tfrac{k}{x-k}\ge\tfrac{5}{4}$$

    е унија од дисјунктни полуотворени интервали, со збир на должини 1988.

40. Нека $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ и $M\in\mathbf{R}$ се такви да

    $$f(x)f(y)\le y^2 f(\tfrac{x}{2})+x^2 f(\tfrac{y}{2}),$$

    за секои $x\ge y\ge 0$ и $|f(x)|\le M$, за секој $x\in[0,1]$. Докажи дека $f(x)\le x^2$, за секој $x\in[0,\infty)$.

41. Нека за функцијата $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ важи

    $$f(xy)\le f(x)f(y),\text{ за секои } x,y\in(0,\infty). \qquad (1)$$

    Докажи дека за секој позитивен реален број $x$ и за секој природен број $n$ важи

    $$f(x^n)\le f(x)f(x^2)^{\frac{1}{2}}...f(x^n)^{\frac{1}{n}}.$$

42. Нека $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и нека за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

    $$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y).$$

    Докажи дека, ако функцијата $f$ не е идентична на нула и ако $|f(x)|\le 1$, за секој $x\in\mathbf{R}$, тогаш $|g(y)|\le 1$, за секој $y\in\mathbf{R}$.

43. Дадени се функциите

$$f_n(x) = \frac{1-\cos x\cos 2x\ldots\cos nx}{x^2}\,,\ n=1,2,3,\ldots .$$

a) Докажи дека за секој $n\in\mathbf{N}$ постои $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = f_n$ .

b) Најди релација меѓу $f_n$ и $f_{n-1}$ .

c) Пресметај го $f_n$ .

44. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ се реални константи, $x$ е реална променлива и

$$f(x) = \cos(a_1+x) + \frac{\cos(a_2+x)}{2} + \frac{\cos(a_3+x)}{2^2} + \ldots + \frac{\cos(a_n+x)}{2^{n-1}}\ .$$

Ако $f(x_1) = f(x_2) = 0$ , тогаш $x_1 - x_2 = m\pi$ , $m\in\mathbf{Z}$ . Докажи!

45. Нека $a, b, A, B\in\mathbf{R}$ . Да ја разгледаме функцијата

$$f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x$$

Докажи дека, ако $f(x)\geq 0$ , за секој $x\in\mathbf{R}$ , тогаш

$$a^2 + b^2 \leq 2 \text{ и } A^2 + B^2 \leq 1.$$

46. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и нека важи

$$f(xy) = f(x)f(y),\ \ f(x+y) = f(x) + f(y)\text{, за секои } x, y\in\mathbf{R}\ .$$

Ако постои $\theta\in\mathbf{R}$ таков што $f(\cos n\theta)$ е константа за секој $n\in\mathbf{N}$ , докажи дека $f\equiv 0$ или $\theta = 2k\pi$ , за некој $k\in\mathbf{Z}$ .

47. Нека $m=2k$ и $n$ се дадени природни броеви поголеми од 1 и нека функцијата $f:\mathbf{R}^+\cup\{0\}\to\mathbf{R}$ ги задоволува условите

1) За секои $x_i\in\mathbf{R}^+\cup\{0\}$ важи

$$f\left(\frac{x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m}{n}\right) = \frac{f(x_1)^m + f(x_2)^m + \ldots + f(x_n)^m}{n}\ .$$

2) $f(1986)\neq 1986$ ,

3) $f(1988)\neq 0$ .

Докажи дека $f(1987)=1$ .

48. Нека $x\geq 1$ и $y\geq 1$ се такви реални броеви, што

$$a = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} \text{ и } b = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}$$

се цели броеви со разлика поголема од $1$ . Да се докаже дека $b = a+2$ и $x = y = \frac{5}{4}$ .

49. Нека $0<a<1$ и нека $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ е непрекината функција таква да $f(0)=0,\ f(1)=1$ и важи

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1-a)f(x) + af(y)\text{, за } 0\leq x\leq y\leq 1. \qquad (1)$$

Пресметај $f(\frac{1}{7})$ .

50. Нека $f:[0,1]\to[0,1]$ е непрекината функција. Докажи дека постои $x_0\in[0,1]$ таков што $f(x_0)=x_0$.

51. Нека $f\in\mathbf{C}([0,1])$. Докажи дека постои $c\in[0,1]$ таков, што $(1-c)[f(c)]^2=c$.

52. Нека $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ е непрекината функција и нека $f(-1)=f(1)$. Докажи дека постојат $x,y\in[-1,1]$ такви, што $|y-x|=1$ и $f(x)=f(y)$.

53. Нека $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ е реална функција таква што равенката
$$f^n(x)=(f\circ f\circ...\circ f)(x)=x$$
има само едно решение $x_0\in[0,1]$, при што $n$ е фиксиран природен број. Тогаш $x_0$ е единствено решение и на равенката $f(x)=x$. Докажи!

54. Нека $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ е непрекината функција и $x_1,x_2,...,x_n\in[a,b]$. Докажи дека постои $x_0\in[a,b]$ таква што

55. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е непрекината функција таква што $f(f(x))=x$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Тогаш постои $c\in\mathbf{R}$ таква што $f(c)=c$.

56. Нека $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ и $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ се непрекинати функции такви што $f(a)<g(a)$ и $f(b)>g(b)$. Докажи дека постои $c\in[a,b]$ таков што $f(c)=g(c)$.

57. Нека $a>1$. Докажи дека равенката $xa^x=1$ има барем еден позитивен корен помал од 1.

58. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е непрекината функција за која важи $0\le f(x)\le 2013$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Докажи дека во интервалот $[0,2]$ постои точка $c$ таква да $f(c)=c^{11}$.

59. Докажи дека равенката $e^{\frac{1}{x}}-x=0$ има барем едно позитивно решение.

60. Дадена е функцијата $f:[0,1]\to[0,1]$ таква што $0,1\in f([0,1])$ и за секои $x,y\in[0,1]$ важи
$$|f(x)-f(y)|\le\frac{|x-f(x)|+|y-f(y)|}{2}. \qquad (1)$$
Докажи, дека постои единствена точка $x\in[0,1]$ таква што $f(x)=x$.

61. За функцијата $f:[0,1]\to[0,1]$ определена е низа од функции $f_1(x)=f(x)$ и $f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$, за $x\in[0,1]$ и $n=1,2,3,...$. За некој $n\in\mathbf{N}$ и за $x,y\in[0,1]$ е исполнето
$$|f_n(x)-f_n(y)|<|x-y|. \qquad (1)$$
Докажи дека постои единствен $x_0\in[0,1]$ таков што $f(x_0)=x_0$.

62. Нека $f_i:[0,1]\to\mathbf{R}$, за $i=1,2,...,n$, $n>1$ се непрекинати функции такви што

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(0) < 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{n} f_i(1) > 0 . \qquad (1)$$

Докажи дека постојат бесконечно многу $(n+1)$ – ки $(h, x_1, x_2, ..., x_n)$ такви што

$$h > 0 ,\ x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = ... = x_n - x_{n-1} = h \text{ и } \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = 0 .$$

63. Нека функцијата $f:[-1,1] \to \mathbf{R}$ е непрекината и нека $f(0) \neq 0$. Докажи дека постојат бесконечно многу тројки различни броеви $a, b, c \in [-1,1]$ такви, што
$$c - b = b - a \text{ и } (a+b+c)[f(a) + f(b) + f(c)] = af(a) + bf(b) + cf(c) .$$

64. Дали постои непрекината функција $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, која секоја своја вредност ја прима точно двапати.

65. Нека $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ е функција за која важи
$$f(0) = f(1) = 0 \qquad (1)$$
$$f(\tfrac{x+y}{2}) \leq f(x) + f(y) \text{, за секој } x \in [0,1]. \qquad (2)$$
Докажи дека $f(x) \geq 0$, за секој $x \in [0,1]$ и дека функцијата $f(x)$ има бесконечно многу нули.

66. Нека $f, g:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ се функции, различни од константа, за кои важи
$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)g(y) + f(y)g(x), \\ g(x+y) &= g(x)g(y) - f(y)f(x), \end{aligned} \qquad (1)$$
за секои $x, y \in \mathbf{R}$. Најди ги сите вредности на $f0)$ и $g(0)$.

67. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ за кои важи
    1) $f(x)f(y) = f(x-y),$ за секои $x, y \in \mathbf{R}$ и
    2) $f(1993) = 1$.

68. Најди ја функцијата $f(x)$ ако $f(\frac{x+1}{x-2}) + 3f(\frac{x-2}{x+1}) = x$, за $x \neq 2$ и $x \neq -1$.

69. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R} \setminus \{\pm\frac{1}{3}\} \to \mathbf{R}$ такви да важи
$$f(\tfrac{x+1}{1-3x}) = x - f(x) . \qquad (1)$$

70. Најди ги функциите $f(x)$ и $g(x)$, ако
$$f(\tfrac{x}{x-1}) + g(2x+1) = 2x \text{ и } f(\tfrac{x}{x-1}) - g(2x+1) = x \text{, за } x \neq 1 .$$

71. Нека $\alpha \in \mathbf{R}$. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}_0^+$ такви што
$$\alpha x^2 f(\tfrac{1}{x}) + f(x) = \tfrac{x}{x+1} \text{, за секој } x \in \mathbf{R}_0^+ . \qquad (1)$$

72. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такви, што
$$f(x) + xf(1-x) = x^2 - 1 \text{, за секој } x \in \mathbf{R} .$$

73. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$f(x+y)-2f(x-y)+f(x)-2f(y)=y-2. \qquad (1)$$

74. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ такви да за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$f(x)f(x+y)=(f(y))^2(f(x-y))^2e^{y+4}. \qquad (1)$$

75. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$2f(x+y)+f(x-y)=f(x)(2e^y+e^{-y}). \qquad (1)$$

76. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y. \qquad (1)$$

77. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$f(x+y)-f(x-y)-4\sqrt{f(x-y)}+4\sqrt{f(x)}-4y=0. \qquad (1)$$

78. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да

$xf(y)-yf(x)=(x-y)f(xy)$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$.

79. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ за кои важи

$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y)$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$.

Докажи дека само две од овие функции се непрекинати.

80. Најди ги сите функциии $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да

$f(x-f(y))=1-x-y$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$.

81. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$f((x-y)^2)=(f(x))^2-2xf(y)+y^2$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$.

82. Најди ги сите функции $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ за кои важи

$$x^{f(y)}=y^{f(x)},\ x,y>0. \qquad (1)$$

83. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$f([x]y)=f(x)[f(y)]. \qquad (1)$$

84. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$x=f(x)+f(\{x\})$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

85. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да

$xf(x)=[x]f(\{x\})+\{x\}f([x])$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

86. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да

$$f(xy)=f(x)f(y)$$
$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$$

за секои $x,y\in\mathbf{R}$.

87. Најди ги сите функции $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ такви да

$$f(x+y)=f(x^2+y^2)\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}. \qquad (1)$$

88. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да за произволни реални броеви $x$ и $y$ важи

$$x^2 f(y)+yf(x^2)=f(xy)+a, \qquad (1)$$

каде $a$ е реален параметар.

89. Најди ги сите реални функции $f$ такви што

$$f(x-y)=f(x)+f(y)-2xy, \qquad (1)$$

за секои $x,y\in\mathbf{R}$.

90. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ кои ги задоволуваат условите

1) $f(x+f(y))=f(x+y)+1$,

2) $f$ строго монотоно расте.

91. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)\le 3f(x+2y+3z)\text{, за секои } x,y,z\in\mathbf{R}.$$

92. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(x+y)+xy=f(x)f(y)\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}. \qquad (1)$$

93. Најди ги сите функции $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$\sin x+\cos y=f(x)+f(y)+g(x)-g(y). \qquad (1)$$

94. Најди ги сите функции $f:[1,+\infty)\to[1,+\infty)$ такви да

1) $f(x)\le 2(x+1)$,

2) $f(x+1)=\frac{1}{x}((f(x))^2-1)$.

95. Нека $a\in\mathbf{R}$ и функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е таква да за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$f(x+y)=f(x)f(a-y)+f(y)f(a-x)\text{ и } f(0)=\tfrac{1}{2}. \qquad (1)$$

Докажи дека $f$ е константна функција.

96. Ако

а) $f(0)=\frac{1}{n}$,

б) $f(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)=\sum\limits_{k=1}^{n} f(\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{n} x_i)f(a-x_k)$, за секои $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbf{R}$

тогаш $f$ е константна функција. Докажи!

97. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да

$$f(x)+f(y)+g(x)-g(y)=x^3+\sqrt[3]{y}\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

98. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$f(f(x)+y)=f(f(x)-y)+4f(x)y. \qquad (1)$$

99. Нека $a \in \mathbf{R}$. Најди ги сите функциии $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такви да

$$f(x^2+y)=f(x)+f(y^2)+a \text{, за секои } x,y \in \mathbf{R}.$$

100. Нека $S$ е множество од сите реални броеви поголеми од $-1$. Најди ги сите функции $f:S \to S$ кои ги задоволуваат условите:

*i)* $f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$, за секои $x,y \in S$;

*ii)* Функцијата $\frac{f(x)}{x}$ е строго растечка во секој од интервалите $-1<x<0$ и $x>0$.

101. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ такви што

$$(x+y)f(f(x)y)=x^2 f(f(x)+f(y)) \text{, за секои } x,y \in \mathbf{R}^+.$$

102. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такви што

$$f(xf(x)+f(y))=x^2+y \text{, за секои } x,y \in \mathbf{R}. \qquad (1)$$

103. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такви што за секои $x,y \in \mathbf{R}$ важи

$$f(x+y)=f(x)f(y)f(xy). \qquad (1)$$

104. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такви, што

$$f(xf(x)+f(y))=(f(x))^2+y \text{, за секои } x,y \in \mathbf{R}. \qquad (1)$$

105. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ и за кои се исполнети условите

(1) $f(xf(y))=yf(x)$, за секои $x, y \in \mathbf{R}^+$; и

(2) $f(x) \to 0$, кога $x \to +\infty$.

106. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такви што

$$f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1 \text{, за секои } x,\, y \in \mathbf{R}.$$

107. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такви што

$$f(x^2+f(y))=y+(f(x))^2 \text{, за секои } x,y \in \mathbf{R}. \qquad (1)$$

108. Најди ги сите функции $f$ дефинирани на множеството ненегативни реални броеви, со ненегативни реални вредности, така што да важи

$(i)$ $f[xf(y)]f(y)=f(x+y)$, за секои $x,\, y \geq 0$;

$(ii)$ $f(2)=0$;

$(iii)$ $f(x) \neq 0$, за секој $0 \leq x < 2$.

109. Најди ги сите функции $f:(0,\infty) \to (0,\infty)$ такви што

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

за сите позитивни реални броеви $w,x,y,z$ за кои важи $wx=yz$.

110. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такви што

$$xf(x)-yf(y)=(x-y)f(x+y)\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

111. Нека $S=(1,\infty)$. Најди ги сите функции $f:S\to S$ такви што

$$f(x^m y^n)\le f(x)^{\frac{1}{4m}}f(y)^{\frac{1}{4n}}\text{, за секои } x,y\in S \text{ и за секои } m,n>0.$$

112. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(x+y)f(f(x)-y)=xf(x)-yf(y), \qquad (1)$$

за секои $x,y\in\mathbf{R}$.

113. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ такви што графикот на функцијата $y=cf(x)$ е симетричен во однос на правата $y=x$, за секој $c\in\mathbf{R}^+$.

114. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(x+xy+f(y))=(f(x)+\tfrac{1}{2})(f(y)+\tfrac{1}{2})\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

115. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$xf(x+xy)=xf(x)+f(x^2)f(y)\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}. \qquad (1)$$

116. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ такви што

$$xf(y)-yf(x)=f(\tfrac{y}{x}). \qquad (1)$$

117. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(x-f(y))=xf(y)-yf(x)+g(x)\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}. \qquad (1)$$

118. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ такви што

$$f(f(x)+y)=xf(1+xy)\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}^+. \qquad (1)$$

119. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ такви што

$$xf(x+\tfrac{1}{y})+yf(y)+\tfrac{y}{x}=yf(y+\tfrac{1}{x})+xf(x)+\tfrac{x}{y}\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

120. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(f(x+y))=f(x+y)+f(x)f(y)-xy\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

121. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(f(x-y))=f(x)-f(y)+f(x)f(y)-xy\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

122. Најди ги сите функции $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$g(x+y)+g(x)g(y)=g(xy)+g(x)+g(y)\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}. \qquad (1)$$

123. За функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ќе велиме дека е *адитивна* ако

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

Нека $a\in\mathbf{R}$ и $f_1,f_2,...,f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ се адитивни функции такви што

$$f_1(x)f_2(x)...f_n(x)=ax^n\text{, за секој } x\in\mathbf{R}.$$

Докажи дека постојат $b_i, i=1,2,...,n$ такви $f_i(x)=b_ix$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

124. Докажи дека за функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ важи
$$f(xy+x+y)=f(xy)+f(x)+f(y), \text{ за секои } x,y\in\mathbf{R} \qquad (1)$$
ако и само ако е *адитивна*, т.е. ако и само ако
$$f(x+y)=f(x)+f(y), \text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}. \qquad (2)$$

125. Нека функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е адитивна, т.е. $f(x+y)=f(x)+f(y)$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$. Докажи дека, ако $f$ расте на некој интервал $[a,b]$, тогаш $f$ расте на $\mathbf{R}$.

126. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е адитивна функција, монотона на некој интервал $[c,d]$. Докажи дека $f(x)=ax$, каде $a$ е некој реален број.

127. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е адитивна функција таква да за $x\in\mathbf{R}^+$ важи $f(x)\in\mathbf{R}^+$. Докажи дека $f(x)=ax$, каде $a$ е некој реален број.

128. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е адитивна функција, ограничена во околина на точката $x_0$. Докажи дека $f(x)=ax$, каде $a$ е некој реален број.

129. Најди ги сите решенија на системот функционални равенки
$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$
$$f(xy)=f(x)f(y).$$

130. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ такви да
   1) $f(1)=1$,
   2) $(x+y)f(x+y)=xyf(x)f(y)$, за $xy(x+y)\neq 0$,
   3) $f(\frac{1}{x+y})=f(\frac{1}{x})+f(\frac{1}{y})$, за $xy(x+y)\neq 0$.

131. Најди ги сите функции $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ такви да
$$f(x^y)=f(x)^{f(y)}, \text{ за секои } x,y\in(0,+\infty). \qquad (1)$$

132. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ за кои важи
   1) $f(1)=1$,
   2) $f(x+y)=f(x)+f(y)$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$,
   3) $f(x)f(\frac{1}{x})=1$, за $x\neq 0$.

133. Нека $n\in\mathbf{N}$. Најди ги сите монотони функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да
$$f(x+f(y))=f(x)+y^n, \text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

134. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да
$$f(x)=x(x+1)+f(\tfrac{x}{2}), \text{ за секој } x\in\mathbf{R}. \qquad (1)$$

135. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ непрекинати во нулата и такви да

$$f(2x)-f(x)\le 3x^2+x \text{ и } f(3x)-f(x)\ge 8x^2+2x\,.$$

136. Најди ги сите непрекинати решенија на функционалната равенка
$$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)\,,\ x,y\in\mathbf{R}\,.$$

137. Нека функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е непрекината во точката $x_0=0$ и нека за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $f(x)+f(\frac{2}{3}x)=x$. Докажи дека $f(x)=\frac{3}{5}x$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

138. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да
$$f(x)=\tfrac{1}{2}f(\tfrac{x}{2})+x\,. \qquad (1)$$

139. Нека функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е непрекината во точката $x=0$, $f(0)=1$ и $f(x)-f(\frac{2}{3}x)=x$. Најди ја функцијата $f$.

140. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што
$$f(x)=f(x^2+\tfrac{1}{4}),\text{ за секој } x\in\mathbf{R}\,.$$

141. Најди ги сите непрекинати функции $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ такви да $f(1)=1$ и
$$f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1,\text{ за секои } x,y>0\,. \qquad (1)$$

142. Најди ги сите непрекинати функции $f$ на $A$, $A\subseteq\mathbf{R}$ кои го задоволуваат условот
$$yf(x+y)f(x)-(x^2+xy)[f(x+y)-f(x)]=0\,. \qquad (1)$$
за секои $x,y\in A$, такви што $x+y\in A$.

143. (Коши). Нека функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е непрекината и за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи
$$f(x+y)=f(x)+f(y)\,.$$
Докажи дека за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $f(x)=f(1)x$.

144. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ за кои е исполнето равенството
$$2f(\tfrac{x+y}{2})=f(x)+f(y) \qquad (1)$$
за секои $x,y\in\mathbf{R}$.

145. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ чиј график е централно симетричен во однос на секоја своја точка.

146. Најди ги сите непрекинати функции $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ за кои е исполнето равенството
$$f(x)+f(y)+f(\tfrac{1}{xy})=0\,, \qquad (1)$$
за секои $x,y\in(0,+\infty)$.

147. Најди ги сите функции непрекинати функции $f,g,h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви, што за секои $x,y\in\mathbf{R}$ е исполнето равенството

$$f(x+y)=g(x)+h(y)\,. \tag{1}$$

148. Најди ги сите непрекинати функции $f:(-1,1)\to\mathbf{R}$ за кои е исполнет условот

$$f(x+y)=\tfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}\text{, за секои } x,y\in(-1,1)\,. \tag{1}$$

149. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е непрекината функција и нека за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$f(x+y)=f(x)f(y)\,. \tag{1}$$

Докажи дека за секој $x\in\mathbf{R}$ важи или $f(x)=a^x$, $a>0$ или $f(x)=0$.

150. Најди ги сите непрекинати функции $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви, што за секои $x,y\in\mathbf{R}$ се исполнети равенствата

$$\begin{aligned}f(x+y)&=f(x)g(y)+f(y)g(x),\\ g(x+y)&=g(x)g(y)+f(y)f(x),\end{aligned} \tag{1}$$

и за кои важи $f(0)=0$ и $g(0)=1$.

151. Најди ги сите непрекинати функции $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ за кои е исполнето равенството

$$f(xy)=f(x)+f(y) \tag{1}$$

за секои $x,y\in(0,+\infty)$.

152. Најди ги сите непрекинати функции $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ за кои е исполнето равенството

$$f(xy)=f(x)f(y) \tag{1}$$

за секои $x,y\in(0,+\infty)$.

153. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ такви да

$$f(1)=2008,\ |f(x)|\le x^2+1004^2 \text{ и}$$
$$f(x+y+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y})=f(x+\tfrac{1}{y})+f(y+\tfrac{1}{x})\,.$$

154. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да

$$f(x+f(y))=f(x)+y\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}\,. \tag{1}$$

155. Најди ги сите непрекинати реални функции $f:\mathbf{R}\to[0,\infty)$ такви да

$$f(x^2+y^2)=f(x^2-y^2)+f(2xy)\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}\,.$$

156. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да

$$f(xf(y))+y+f(x)=f(x+f(y))+yf(x)\,, \tag{1}$$

за секои $x,y\in\mathbf{R}$.

157. Да се определат сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(x^3+y^3)=x^2f(x)+yf(y^2)\,.$$

158. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(x^3+y^3)=xf(x^2)+yf(y^2)\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}\,.$$

159. За кои реални броеви $\alpha$ постои функција $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ различна од константа таква што $f(\alpha(x+y))=f(x)+f(y)$?

160. Најди ги сите функции непрекинати $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и такви да
$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}$$

161. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да
$$f(ax+by+c)=af(x)+bf(y)+c,\ \ x,y\in\mathbf{R},\ \ a+b\neq 0,1\,.$$

162. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да
$$f(x)+f(y)+f(z)=0\text{, ако } x+y+z=0\,.$$

163. Најди ги сите непрекинати функции $f:(1,+\infty)\to\mathbf{R}$ такви да
$$f(xy)=xf(y)+yf(x)\text{, за секои } x,y\in(1,+\infty)\,.$$

164. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$ такви да
$$f(x+y)=f(x)^{\ln f(y)}\text{, за секои } x,y\in(0,+\infty)\,.$$

165. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да
$$f(\sqrt{x^2+y^2})=\sqrt{f^2(x)+f^2(y)}\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}\,.$$

166. Најди ги сите функции $u:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ со својство: постои строго монотона и непрекината функција $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ таква што $f(x+y)=f(x)u(y)+f(y)$.

167. Нека функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ строго монотоно расте. За секој $x\in\mathbf{R}$ и за секој $t\in\mathbf{R}^+$ дефинираме
$$g(x,t)=\tfrac{f(x+t)-f(x)}{f(x)-f(x-t)}\,.$$
Нека претпоставиме дека неравенствата $\frac{1}{2}<g(x,t)<2$ важат за $x=0$ и за секој $t\in\mathbf{R}^+$, а за $x\neq 0$ неравенствата важат за секој $t\leq|x|$. Докажи дека
$$\tfrac{1}{14}<g(x,t)<14\text{, за секој } x\in\mathbf{R} \text{ и за секој } t\in\mathbf{R}^+.$$

168. Нека на множеството парови рационални броеви различни од нула е дефинирана функција $f$ чии вредности се позитивни реални броеви. Ако за функцијата $f$ важи
$$f(ab,c)=f(a,c)f(b,c),\quad f(c,ab)=f(c,a)f(c,b) \tag{1}$$
$$f(a,a-1)=1 \tag{2}$$
тогаш $f(a,a)=f(a,-a)=1$ и $f(a,b)f(b,a)=1$. Докажи!

169. Најди ги сите функции $f:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ такви да за секои $x,y,z\in[0,1]$ важи

$$f(x,1)=x,$$
$$f(1,y)=y,$$
$$f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z)),$$
$$f(zx,zy)=z^k f(x,y), \text{ за некој } k>0 \text{ кој не зависи од } x,y,z.$$

170. Нека $a,b\in\mathbf{R}$ и функцијата $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ е зададена со
$$f(x,y)=(ax-by,bx+ay),$$
за секои $x,y\in\mathbf{R}$. Најди ги константите $a$ и $b$ така да $f\circ f\circ f=f$.

171. Најди ги најмалата и најголемата вредност на функцијата
$$f(x,y,z,t)=\frac{ax^2+by^2}{ax+by}+\frac{az^2+bt^2}{az+bt}, a>0, b>0,$$
при услов $x+z=y+t=1,\ x,y,z,t\geq 0$.

172. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, за кои
$$xf(xy)+f(-y)=xf(x)$$
за произволни реални броеви $x$ и $y$.

173. Функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е таква што за произволни $x$ и $y$, за кои $x>y$ е исполнето неравенството $(f(x))^2\leq f(y)$. Докажи, дека множеството вредности на функцијата се содржи во интервалот $[0,1]$.

174. Дали постои реален позитивен број $a$, таков што
$$|\cos x|+|\cos ax|>\sin x+\sin ax, \text{ за секој } x\in\mathbf{R}\ ?$$

175. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, такви што
$$f(xy-1)+f(x)f(y)=2xy-1, \text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

176. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, такви што $f(0)=0,\ f(1)=2013$ и
$$(x-y)(f(f^2(x))-f(f^2(y)))\ =\ (f(x)-f(y))(f^2(x)-f^2(y))$$
за секои $x,y\in\mathbf{R}$.

177. Најди ги сите реални функции, такви што
$$f(x^2+2yf(x))+f(y^2)=f^2(x+y), \text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}\ .$$

178. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што
$$(x^2+y^2)f(xy)=f(x)f(y)f(x^2+y^2), \text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

179. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to[0,+\infty)$, такви, што равенството
$$f(a-b)+f(c-d)=f(a)+f(b+c)+f(d)$$
важи за секои реални броеви $a$, $b$, $c$ и $d$, за кои важи равенството $ab+bc+cd=0$.

180. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да $6f(x)\geq f^4(x+1)+f^2(x-1)+4$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

181. Определи ги сите функции $f:(0,+\infty)\times(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ такви што за секои $x,y,z,k\in(0,+\infty)$ се исполнети условите:

а) $xf(x,y,z)=zf(z,y,x)$,

б) $f(x,ky,k^2z)=kf(x,y,z)$ и

в) $f(1,k,k+1)=k+1$.

182. Определи ги сите функции $f:\mathbf{Q}^+\to\mathbf{R}$ такви што:

$i$) $f(x)f(y)\geq f(x,y)$, за секои $x,y\in\mathbf{Q}^+$,

$ii$) $f(x+y)\geq f(x)+f(y)$, за секои $x,y\in\mathbf{Q}^+$ и

в) постои рационален број $a>1$ таков што $f(a)=a$.

183. Определи ги сите функции $f:\mathbf{Q}^+\to\mathbf{R}^+$ такви што

$$f(xy)=f(x+y)(f(x)+f(y))\text{, за секои } x,y\in\mathbf{Q}^+.$$

184. Определи ги сите функции $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ за кои неравенствата

1) $f(x+y)\geq f(x)+y$

2) $f(f(x))\leq x$

се исполнети за секои $x,y\in\mathbf{R}^+$.

185. Дали постои функција $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ таква што

$$(x+y)f(2yf(x)+f(y))=x^3f(yf(x)) \qquad (1)$$

за секои $x,y\in\mathbf{R}^+$.

186. Најди ги сите функции $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{R}$ такви што

1) $f(x+y)-yf(x)-xf(y)=g(x)f(y)-x-y+xy$, за секои $x,y\in\mathbf{Q}$,

2) $f(x)=2f(x+1)+2+x$, за секој $x\in\mathbf{Q}$ и

3) $f(-1)>1$.

# ЧЕТВРТА ГЛАВА
# ПОЛИНОМИ СО РЕАЛНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Во овој дел ќе презентираме елементи од теоријата на полиноми со реални коефициенти, кои ни се потребни за натамошните разгледувања. Притоа доказот на основната теорема на алгебрата нема да го презентираме, бидејќи за истиот се потребни знаења кои излегуваат надвор од рамките на нашите разгледувања.

## 1. ДЕФИНИЦИЈА НА ПОЛИНОМ. ЕДНАКВОСТ НА ПОЛИНОМИ

**1.1. Дефиниција.** Нека $a_i \in \mathbf{R},\ i=0,1,...,n$. Функцијата $P:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ дефинирана со $P(x)=\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ ја нарекуваме *полином со реални коефициенти* $a_i \in \mathbf{R},\ i=0,1,...,n$.

Полиномот $P(x)=a$ го нарекуваме *константен полином.*

**1.2. Забелешка.** Некои од коефициентите $a_i \in \mathbf{R},\ i=0,1,...,n$ на полиномот $P(x)=\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ или сите коефициенти можат да бидат еднакви на нула. Затоа, ако го додадеме собирокот

$$0\cdot x^{n+1}+0\cdot x^{n+2}+...+0\cdot x^{m},\ m>n,$$

ја добиваме истата функција која само е запишана со поголем број собирци.

**1.3. Лема.** Нека $A$ е најголемиот по апсолутна вредност коефициент на полиномот $P(x)=\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, $n\geq 1$, т.е. $A=\max\{|a_i|, i=0,1,...,n\}$. Тогаш, за секој $x\in\mathbf{R}$ точно е неравенството

$$|P(x)|\geq|a_n|\cdot|x|-nA. \tag{1}$$

**Доказ.** Јасно, за секој $x\in\mathbf{R}$ таков, што $|a_n|\cdot|x|\leq nA$ неравенството (1) е исполнето.

Нека $|a_n|\cdot|x|>nA$. Тогаш, од $|a_n|\leq A$ следува $|x|\geq 1$, па затоа

$$|x|^{n-1}\geq|x|^k,\ k=0,1,...,n-1.$$

Ако ги искористиме својствата на апсолутната вредност добиваме

$$\begin{aligned}|P(x)|&=|\sum_{i=0}^{n} a_i x^i|\geq|a_n|\cdot|x|^n-|a_{n-1}|\cdot|x|^{n-1}-|a_{n-2}|\cdot|x|^{n-2}-...-|a_0|\\&\geq|a_n|\cdot|x|^n-A|x|^{n-1}-A|x|^{n-1}-...-A|x|^{n-1}\\&=|x|^{n-1}(|a_n|\cdot|x|-nA)\geq|a_n|\cdot|x|-nA\end{aligned}$$

што значи дека неравенството (1) е исполнето и за секој $x \in \mathbf{R}$ таков што $|a_n| \cdot |x| > nA$. ■

**1.4. Последица.** Ако полиномот $P(x)$ не е константен, тогаш за секој $M \in \mathbf{R}$ постои $L_M \in \mathbf{R}$ таков, што за секој $x \in \mathbf{R}$ за кој $|x| > L_M$ важи $|P(x)| > M$.

**Доказ.** Бидејќи полиномот $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ не е константен имаме дека $a_n \neq 0$ и $n \geq 1$. Според лема 1.3 за полиномот $P(x)$ е исполнето неравенството (1).

Нека $M \in \mathbf{R}$ е дадено. Земаме $L_M = \frac{M+nC}{|a_n|}$ и добиваме дека за секој $x \in \mathbf{R}$ таков што $|x| > L_M$ важи

$$|P(x)| \geq |a_n| \cdot |x| - nA > |a_n| \frac{M+nA}{|a_n|} - nA = M \text{ . ■}$$

**1.5. Лема.** Полиномите

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{ и } Q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$$

се еднакви ако и само ако $m = n$ и $a_i = b_i, i = 0,1,2,...,n$.

**Доказ.** Нека $m = n$ и $a_i = b_i, i = 0,1,2,...,n$. Тогаш, $P(x) = Q(x)$, за секој $x \in \mathbf{R}$, што значи дека полиномите се еднакви.

Понатаму, согласно со забелешка 1.2 можеме да сметаме дека и двата полинома имаат ист број собирци. Нека претпоставиме дека постои $k \in \{0,1,...,n\}$ таков, што $a_k \neq b_k$. Да ја разгледаме разликата на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$, при што сите нулти коефициенти на десната страна ги изоставуваме. Имаме:

$$P(x) - Q(x) = \sum_{i=0}^{k} (a_i - b_i) x^i, \quad a_k - b_k \neq 0 \text{ .}$$

Ако $k = 0$, тогаш за секој $x \in \mathbf{R}$ важи $P(x) - Q(x) = a_0 - b_0 \neq 0$, односно $P(x) \neq Q(x)$, за секој $x \in \mathbf{R}$.

Ако $k \geq 1$, тогаш од последица 1.4 следува дека за полиномот $P(x) - Q(x)$ постои $L_0 \in \mathbf{R}$ таков, што за секој $x \in \mathbf{R}$ за кој $|x| > L_0$ важи $|P(x) - Q(x)| > 0$, што значи дека $P(x) \neq Q(x)$, за секој $x \in \mathbf{R}$ за кој $|x| > L_0$. ■

**1.6. Дефиниција.** Записот на полиномот $P(x)$ во видот

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} \text{ , } a_0 \neq 0 \tag{2}$$

го нарекуваме *нормален запис*, бројот $n = \deg P$ во вој случај го нарекуваме *степен на полиномот,* собирокот $a_0 x^n$ го нарекуваме *водечки член,* а коефициентите

$a_0$ и $a_n$ ги нарекуваме *водечки (најстар) коефициент* и *слободен член,* соодветно.

## 2. НУЛИ НА ПОЛИНОМ. ФАКТОРИЗАЦИЈА

**2.1. Дефиниција.** Комплексниот број $x_0$ го нарекуваме *нула* (*корен*) *на полиномот* $P_n(x)$ ако $P_n(x_0)=0$.

**2.2.** Следнава теорема е позната како *основна теорема на алгебрата* и како што рековме, овде нема да ја докажуваме, бидејќи доказот на истата излегува од рамките на нашите разгледувања. Постојат повеќе докази на оваа теорема, од кои само Гаус дал четири (1799, 1815, 1816 и 1849 год).

**Теорема.** Секој полином со степен $n \geq 1$, има барем една нула. ■

**2.3. Дефиниција.** Ако $x_0$ е нула на полиномот

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}\ ,\ n\geq 1,$$

тогаш полиномот $x-x_0$ го нарекуваме *линеарен фактор* на полиномот $P_n(x)$.

**2.4. Лема.** За секој полином $P_n(x)$, $n\geq 1$ постои барем еден линеарен фактор.

**Доказ.** Непосредно следува од основната теорема на алгебрата. ■

**2.5. Дефиниција.** За полиномот $P(x)$ ќе велиме дека е *делив со полиномот* $Q(x)$, ако постои ненулти полином $R(x)$ таков, што

$$P(x)=Q(x)R(x).$$

Притоа ќе пишуваме $Q(x)\,|\,P(x)$.

**2.6. Теорема (Безу).** Нека $P_n(x)$, $n\geq 1$ е произволен полином. Ако $x-x_0$ е линеарен фактор на $P_n(x)$, тогаш $(x-x_0)\,|\,P_n(x)$.

**Доказ.** Да го разгледаме полиномот $P_n(x)-P_n(x_0)$. Ако го искористиме идентитетот

$$x^k-x_0^k=(x-x_0)(x^{k-1}+x^{k-2}x_0+x^{k-3}x_0^2+...+x^2x_0^{k-3}+xx_0^{k-2}+x_0^{k-1}),\ k=1,2,...,$$

добиваме:

$$\begin{aligned}P_n(x)-P_n(x_0)&=a_0(x^n-x_0^n)+a_1(x^{n-1}-x_0^{n-1})+...+a_{n-1}(x-x_0)\\&=(x-x_0)P_{n-1}(x),\end{aligned}\qquad(3)$$

каде што $P_{n-1}(x)$ е полином од $(n-1)-$ви степен од облик

$$P_{n-1}(x)=a_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+...+b_{n-2}x+b_{n-1},$$

каде што коефициентите $b_1,b_2,...,b_{n-1}$ се изразени со $x_0,a_0,...,a_{n-1}$.

Ако $x-x_0$ е линеарен фактор на $P_n(x)$, тогаш $x_0$ е нула на $P_n(x)$, т.е. $P_n(x_0)=0$, па од (3) следува

$$P_n(x)=(x-x_0)P_{n-1}(x), \text{ т.е. } (x-x_0)\,|\,P_n(x). \blacksquare$$

**2.7. Последица.** Ако $P(x)$ е полином со степен $n\ge 1$, а $k$ е бројот на неговите различни нули, тогаш $k\le n$.

**Доказ.** Нека $n=1$ и $P(x)=a_0x+a_1$. Тогаш, $x_0=-\frac{a_0}{a_1}$ е единствена нула на полиномот, т.е. тврдењето важи.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за полином со степен $n\ge 1$ и полиномот $P(x)$ има степен $n+1$. Ако $x_0$ е корен на полиномот $P(x)$, тогаш од теоремата на Безу следува дека постои полином $Q(x)$ таков, што $P(x)=(x-x_0)Q(x)$. Но, $x_1$ е корен на полиномот $P(x)$ ако и само ако $(x_1-x_0)Q(x_1)=0$, т.е. ако и само ако $x_1=x_0$ или $Q(x_1)=0$. Полиномот $Q(x)$ има степен $n$, па од претпоставката следува дека бројот на неговите различни нули е помал или еднаков на $n$. Според тоа, бројот на различните нули на полиномот $P(x)$ е помал или еднаков на $n+1$. Сега тврдењето следува од принципот на математичка индукција. ■

**2.8. Теорема.** Комплексниот број $a$ е нула на полиномот $P(x)$ ако и само ако $(x-a)\,|\,P(x)$.

**Доказ.** Ако $(x-a)\,|\,P(x)$, тогаш постои ненулти полином $Q(x)$ таков, што $P(x)=(x-a)Q(x)$. Според тоа,

$$P(a)=(a-a)Q(a)=0,$$

т.е. $a$ е нула на полиномот $P(x)$.

Ако $a$ е нула на полиномот $P(x)$, тогаш $x-a$ е линеарен фактор на $P(x)$, па од теоремата на Безу следува дека $(x-a)\,|\,P(x)$. ■

**2.9. Теорема.** За секој полином $P_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^{n-i}$ постојат комплексни броеви $x_1,x_2,...,x_n$ такви што

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n). \tag{4}$$

**Доказ.** Според основната теорема на алгебрата полиномот $P_n(x)$ има барем една нула, да ја означиме со $x_1$. Од теоремата на Безу следува дека

$$P_n(x)=(x-x_1)P_{n-1}(x),$$

каде што $P_{n-1}(x)$ е полином од $(n-1)-$ви степен од облик најден во доказот на теоремата на Безу. Според основната теорема на алгебрата полиномот $P_{n-1}(x)$ има барем една нула, да ја означиме со $x_2$. Повторно од теоремата на Безу следува дека

$$P_{n-1}(x)=(x-x_2)P_{n-2}(x),$$

каде што $P_{n-2}(x)$ е полином од $(n-2)-$ри степен од обликот

$$P_{n-2}(x)=a_0x^{n-2}+c_1x^{n-3}+...+c_{n-3}x+c_{n-2},$$

каде што коефициентите $c_1,...,c_{n-2}$ се изразени со $x_2,a_0,b_1,...,b_{n-1}$.

Продолжувајќи ја постапката, која мора да заврши бидејќи $n$ е конечен природен број, наоѓаме низа полиноми

$$P_n(x),P_{n-1}(x),...,P_2(x),P_1(x)$$

во кои коефициентот пред највисокиот степен е еднаков на $a_0$ и за кои важат равенствата:

$$\begin{aligned}&P_n(x)=(x-x_1)P_{n-1}(x),\\&P_{n-1}(x)=(x-x_2)P_{n-2}(x),\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&P_2(x)=(x-x_{n-1})P_1(x)\\&P_1(x)=a_0(x-x_n).\end{aligned}$$

Ако во конструираната низа равенства извршиме последователна замена за $P_1(x), P_2(x), ..., P_{n-1}(x)$, го добиваме равенството (4). ■

**2.10.** Од досега изнесеното непосредно следува: ако $x_1$ е нула на полиномот $P_n(x)$, тогаш $P_n(x)=(x-x_1)P_{n-1}(x)$. Притоа, ако $x_1$ не е нула на полиномот $P_{n-1}(x)$, тогаш ќе велиме дека $x_1$ е *нула од прв ред* на полиномот $P_n(x)$. Ако $x_1$ е нула на полиномот $P_{n-1}(x)$, тогаш $P_{n-1}(x)=(x-x_1)P_{n-2}(x)$. Притоа, ако $x_1$ не е нула на полиномот $P_{n-2}(x)$, тогаш ќе велиме дека $x_1$ е *нула од втор ред* на полиномот $P_n(x)$.

Претходните размислувања можеме да ги искажеме поопшто. Имено, ако $x_1$ е нула на полиномите

$$P_n(x),\ P_{n-1}(x), ...,\ P_{n-k+1}(x),\ k\le n,$$

а не е нула на полиномот $P_{n-k}(x)$, тогаш ќе велиме дека $x_1$ е *нула од* $k-$*ти ред* на полиномот $P_n(x)$ и овој полином може да се запише во обликот

$$P_n(x)=(x-x_1)^k P_{n-k}(x),\quad P_{n-k}(x_1)\ne 0.$$

За нулата чиј ред е $k>1$ ќе велиме дека е *повеќекратна,* а нулата чиј ред е $k=1$ ќе ја нарекуваме *еднократна* или *проста нула.*

Од досега изнесеното непосредно следува точноста на следнава теорема.

**Теорема.** Комплексниот број $a$ е нула од $k-$ти ред, $k\le n$, на полиномот $P_n(x)$ ако и само ако постои полином $P_{n-k}(x)$ таков што

$$P_n(x)=(x-a)^k P_{n-k}(x),\qquad P_{n-k}(a)\ne 0.\ ■$$

**2.11. Теорема.** Полином од $n-$ти степен, ($n\ge 1$), не може да се анулира за повеќе од $n$ различни комплексни броеви.

**Доказ.** Доволно е да докажеме дека полином од $n-$ти степен не може да се анулира за $n+1$ различни комплексни броеви.

Нека претпоставиме дека полиномот $P_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ се анулира за секој елемент од множеството $S=\{q_1,q_2,...,q_{n+1}\}$. Според теорема 2.9 постојат комплексни броеви $x_1,...,x_n$ такви што важи (4). Бидејќи $P_n(q_1)=0$ заклучуваме дека $q_1=x_i$, за некој $i=1,2,...,n$. Значи, $q_1\in S_1=\{x_1,...,x_n\}$. Аналогно, $q_i\in S_1$, за секој $i=1,2,...,n+1$, па затоа $S\subset S_1$, што е противречност, бидејќи множеството $S_1$ има најмногу $n$ елементи, а множеството $S$ има $n+1$ елементи. ■

**2.12. Последица.** Дадени се полиномите $P_n(x)$ и $Q_n(x), n\geq 1$. Ако постојат броеви $x_i, i=1,...,n+1$ такви да $x_i\neq x_j$, за $i\neq j$ и $P_n(x_i)=Q_n(x_i)$, за секој $i=1,...,n+1$, тогаш $P_n(x)\equiv Q_n(x)$, т.е. полиномите $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ се идентични.

**Доказ.** Да го разгледаме полиномот $R(x)=P_n(x)-Q_n(x)$. Ако полиномите $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ не се идентични, тогаш овој полином е ненулти и полином со степен помал или еднаков на $n$ и се анулира за повеќе од $n$ различни комплексни броеви, што противречи на теорема 2.11. ■

**2.13. Теорема.** Секој полином $P_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ на единствен начин може да се претстави во обликот

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_r)^{k_r}. \tag{5}$$

каде што $x_1,...,x_r$ се различни комплексни броеви, а $k_1,...,k_r$ се природни броеви такви, што $k_1+...+k_r=n$.

**Доказ.** Егзистенцијата на претставувањето (5) следува од теорема 2.9. Да претпоставиме дека полиномот може да се претстави и на друг начин, на пример

$$P_n(x)=A(x-t_1)^{m_1}(x-t_2)^{m_2}...(x-t_s)^{m_s}. \tag{6}$$

каде што $t_1,...,t_s$ се различни комплексни броеви, а $m_1,...,m_s$ се природни броеви такви, што

$$m_1+...+m_s=n.$$

Ако ги измножиме десните страни на (5) и (6) и ги споредиме коефициентите пред највисоките степени добиваме $a_0=A$. Сега од (5) и (6) следува:

$$(x-t_1)^{m_1}(x-t_2)^{m_2}...(x-t_s)^{m_s}=(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_r)^{k_r} \tag{7}$$

Од (5) добиваме $P_n(x_1)=0$, па затоа од (7) следува дека постои $t_i$, $1\leq i\leq s$, таков, што $x_1=t_i$. Аналогно важи и за $x_2,x_3,...,x_r$. Според тоа, ако ставиме $S=\{x_1,...,x_r\}$ и $S_1=\{t_1,...,t_s\}$, добиваме $S\subset S_1$. Аналогно, од (6) и (7) следува $S_1\subset S$, па затоа $S=S_1$. Според тоа, $r=s$ и можеме даземеме дека $x_i=t_i, i=1,2,...,r$.

Сега, да претпоставиме дека $k_1\geq m_1$. Тогаш, од (7) добиваме

$$(x-t_2)^{m_2}...(x-t_s)^{m_s}=(x-x_1)^{k_1-m_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_r)^{k_r} \tag{8}$$

Бидејќи $x_1$ не е нула на полиномот од левата страна во (8), добиваме дека $x_1$ не може да биде нула и на полиномот на десната страна во (6), па затоа $k_1 = m_1$. Аналогно се докажува дека $k_i = m_i$, $i = 2,...,r$ . ■

**2.14. Теорема.** Нека $P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ е полином со реални коефициенти. Ако комплексниот број $a$ е нула на $P_n(x)$, тогаш и неговиот конјугиран број $\overline{a}$ е нула на $P_n(x)$.

**Доказ.** Бидејќи $a$ е нула на $P_n(x)$ имаме $P_n(a) = 0$ . За бројот $\overline{a}$ имаме:

$$P_n(\overline{a}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{a}^{\,n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{a^{n-i}} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i a^{n-i}} = \overline{P_n(a)} = 0$$

што значи дека и $\overline{a}$ е нула на $P_n(x)$. ■

**2.15.** Од досега изнесеното следува дека полином со реални коефициенти има реален фактор од облик

$(x-a)^k$, каде што $k$ е редот на реалната нула, или

$(x^2+px+q)^k$, каде што $k$ е редот на комплексните нули $z$ и $\overline{z}$,

бидејќи ако $z = \alpha + i\beta$ , тогаш

$$(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta) = (x-\alpha)^2 + \beta^2,\ p,q \in \mathbf{R}.$$

Според тоа, точна е следната теорема.

**Теорема.** Секој полином со реални коефициенти $P_n(x)$ на единствен начин може да се претстави во обликот

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)^{k_1}...(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}...(x^2+p_sx+q_s)^{t_s}$$

каде што $k_1,...,k_r,t_1,...,t_s$ се природни броеви такви што

$$(k_1+...+k_r)+2(t_1+...+t_s) = n\ .\ \blacklozenge$$

## 3. ВИЕТОВИ ФОРМУЛИ

**3.1.** Да го разгледаме полиномот

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n\ ,\ a_0 \neq 0,$$

запишан во обликот

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n-1})(x-x_n),$$

каде $x_i, i = 1,2,...,n$ се нулите на полиномот $P_n(x)$. Од индентитетот

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = a_0(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n-1})(x-x_n)$$

следуваат формулите

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + ... + x_n = -\frac{a_1}{a_0},\\
&x_1x_2 + ... + x_1x_n + x_2x_3 + ... + x_2x_n + ... + x_{n-1}x_n = -\frac{a_2}{a_0},\\
&.........................................................................................\\
&x_1x_2...x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

**3.2.** Формулите (1) во литературата се познати како *Виетови формули* и истите може да се запишат во обликот:

$$
\begin{aligned}
&\sum x_i = -\frac{a_1}{a_0},\\
&\sum x_{i_1}x_{i_2} = \frac{a_2}{a_0},\\
&.......................\\
&\sum x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}\\
&.......................................\\
&\sum x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n} = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}
\end{aligned}
$$

каде со $\sum x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k}$ го означуваме збирот на сите производи формирани од $x_1, x_2, ..., x_n$ како множители, така што секој производ има точно $k$, $k \le n$ различни множители земени меѓу броевите $x_i, i = 1, 2, ..., n$. $\sum x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k}$ го нарекуваме *основен симетричен полином од ред* $k$.

## 4. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ

**4.1. Дефиниција.** Ако $P(x)$ и $Q(x)$ се два полинома и ако за ненултиот полином $R(x)$ важи $R(x) | P(x)$ и $R(x) | Q(x)$, тогаш ќе велиме дека полиномот $R(x)$ е *заеднички делител* на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$.

**4.2. Теорема.** Ако $R(x) | P(x)$ и $R(x) | Q(x)$, тогаш

$$R(x) | [p(x)P(x) + q(x)Q(x)]$$

за секои полиноми $p(x)$ и $q(x)$.

**Доказ.** Од $R(x) | P(x)$ и $R(x) | Q(x)$ следува дека постојат полиноми $A(x)$ и $B(x)$ такви, што $P(x) = A(x)R(x)$ и $Q(x) = B(x)R(x)$. Според тоа,

$$p(x)P(x) + q(x)Q(x) = R(x)[p(x)A(x) + q(x)B(x)]$$

т.е. $R(x) | [p(x)P(x) + q(x)Q(x)]$. ■

**4.3. Дефиниција.** Полиномот $d(x)$ е *најголем заеднички делител* на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ ако $d(x) | P(x)$, $d(x) | Q(x)$ и ако секој заеднички делител на

$P(x)$ и $Q(x)$ е делител и на $d(x)$. За полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ ќе велиме дека се *заемно прости* ако нивниот најголем заеднички делител е ненулта константа.

**4.4. Забелешка.** Јасно, ако полиномот $d(x)$ е најголем заеднички делител на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$, тогаш и секој полином $\alpha d(x), \alpha \neq 0$ е најголем заеднички делител на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$.

**4.5. Теорема.** За секои два ненулти полинома $P(x)$ и $Q(x)$ постои најголем заеднички делител, кој е единствен со точност до мултипликативна константа.

**Доказ.** Нека степенот на полиномот $P(x)$ е $n$, а степенот на полиномот $Q(x)$ е $m$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $m \leq n$. При делењето на $P(x)$ со $Q(x)$ добиваме количник $Q_1(x)$ и остаток $R_1(x)$. Ако $R_1(x) \equiv 0$, тогаш $Q(x)$ е најголемиот заеднички делител на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$. Ако $R_1(x) \not\equiv 0$, тогаш го делиме $Q(x)$ со $R_1(x)$ и добиваме количник $Q_2(x)$ и остаток $R_2(x)$. Продолжувајќи ја постапката, која мора да заврши бидејќи степенот $n$ на полиномот $P(x)$ е конечен број, добиваме некој остаток $R_k(x)$ кој се содржи во претходниот остаток $R_{k-1}(x)$. Всушност ги добиваме следните идентитети:

$$\begin{aligned}
&P(x) = Q(x)Q_1(x) + R_1(x)\\
&Q(x) = R_1(x)Q_2(x) + R_2(x)\\
&R_1(x) = R_2(x)Q_3(x) + R_3(x)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&R_{k-2}(x) = R_{k-1}(x)Q_k(x) + R_k(x)\\
&R_{k-1}(x) = R_k(x)Q_{k+1}(x)
\end{aligned} \tag{9}$$

Ќе докажеме дека $R_k(x)$ е најголемиот заеднички делител на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$. Од последните две равенства во (9) добиваме

$$R_{k-2}(x) = R_k(x)[Q_{k+1}(x)Q_k(x) + 1],$$

т.е. $R_k(x) \mid R_{k-2}(x)$. Аналогно од равенството

$$R_{k-3}(x) = R_{k-2}(x)Q_{k-1}(x) + R_{k-1}(x)$$

и фактот дека $R_k(x) \mid R_{k-2}(x)$ и $R_k(x) \mid R_{k-1}(x)$, добиваме $R_k(x) \mid R_{k-3}(x)$. Продолжувајќи ја постапката, добиваме дека $R_k(x) \mid Q(x)$ и $R_k(x) \mid P(x)$, т.е. $R_k(x)$ е заеднички делител на $P(x)$ и $Q(x)$.

Нека $r(x)$ е произволен делител на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$. Од равенствата (9) последователно добиваме

$$r(x) \mid R_1(x),\ r(x) \mid R_2(x), ...,\ r(x) \mid R_{k-1}(x),\ r(x) \mid R_k(x),$$

од што следува дека $R_k(x)$ е најголемиот заеднички делител на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$.

Останува да докажеме дека најголемиот заеднички делител на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ е единствен со точност до мултипликативна константа. Ако

$d_1(x)$ и $d_2(x)$ се два најголеми заеднички делитела на $P(x)$ и $Q(x)$, тогаш $d_1(x) \mid d_2(x)$ и $d_2(x) \mid d_1(x)$, од што следува дека $d_1(x) = c \cdot d_2(x)$. ■

**4.6. Забелешка.** Постапката од теорема 4.5, за наоѓање на најголем заеднички делител на два полинома е позната како Евклидов алгоритам

**4.7. Теорема.** Ако $d(x)$ е најголем заеднички делител на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$, тогаш постојат полиноми $A(x)$ и $B(x)$ такви, што

$$d(x) = A(x)P(x) + B(x)Q(x). \tag{10}$$

**Доказ.** Непосредно следува од равенствата (9). Имено, од првото равенство наоѓаме

$$R_1(x) = P(x) - Q(x)Q_1(x),$$

потоа $R_1(x)$ го елиминираме од равенството $Q(x) = R_1(x)Q_2(x) + R_2(x)$ итн. од што после конечен број чекори добиваме равенство од обликот (10). ■

**4.8. Дефиниција.** Полиномот $d(x)$ е *најголем заеднички делител* на полиномите $P_i(x)$, $i = 1, 2, ..., k$ ако $d(x) \mid P_i(x)$, за секој $i = 1, 2, ..., k$ и ако секој заеднички делител $R(x)$ на полиномите $P_i(x)$, $i = 1, 2, ..., k$ е делител на полиномот $d(x)$.

**4.9. Коментар.** Најголемиот заеднички делител на полиномите $P_i(x)$, $i = 1, 2, ..., k$ можеме да го определиме на следниов начин: прво наоѓаме најголем заеднички делител на полиномите $P_1(x)$ и $P_2(x)$. Нека тоа е полиномот $d_2(x)$. Потоа, наоѓаме најголем заеднички делител на полиномите $P_3(x)$ и $d_2(x)$, и нека тоа е полиномот $d_3(x)$ итн. Така, во последниот чекор наоѓаме полином $d_k(x)$, кој е најголемиот заеднички делител на полиномите $P_i(x)$, $i = 1, 2, ..., k$.

## 5. НЕПРЕКИНАТОСТ НА ПОЛИНОМИ

**5.1.** Во овој параграф ќе се задржиме на непрекинатоста на полиномите, иако прашањето за непрекинатост на реална функција беше разгледано во претходнатаглава. Оттука, пред да се разработи следната теорема потребно е да се усвои теоријата од претходната глава.

**Теорема.** Секој полином е непрекината функција во секоја точка од реалната права.

**Доказ.** Јасно, функциите $f(x) = x$ и $g(x) = c, c \in \mathbf{R}$ се непрекинати во секоја точка од реалната права. Имено, за секој $\varepsilon > 0$ доволно е да земеме $\delta = \varepsilon$ и тогаш при $|x - x_0| < \delta$ имаме $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, односно $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$, за секој $x_0 \in \mathbf{R}$. Понатаму, од лема 6.1 следува дека за секој $i \geq 1$ функцијата $h(x) = x^i$ е непрекината.

Секој полином се добива со конечен број множења и собирање на функции од видот $g(x)=c, c\in\mathbf{R}$ и $h(x)=x^i$, $i\geq 1$, што значи дека секој полином е непрекината функција во секоја точка од реалната права. ■

**5.2. Пример.** Нека $m\geq 1$, $a_i\in\mathbf{R}$, за $i=1,2,...,2m-1$ и

$$P(x)=x^{2m-1}+a_1x^{2m-2}+....+a_{2m-2}x+a_{2m-1},\ x\in\mathbf{R}.$$

Докажете дека постои $x_0\in\mathbf{R}$ таков, што $P(x_0)=0$.

**Решение.** Од

$$P(x)=x^{2m-1}+a_1x^{2m-2}+....+a_{2m-2}x+a_{2m-1}=x^{2m-1}(1+\tfrac{a_1}{x}+\tfrac{a_2}{x^2}+...+\tfrac{a_{2m-1}}{x^{2m-1}})$$

и равенствата

$$\lim_{x\to\pm\infty}\tfrac{a_i}{x^i}=0\text{, за } i=1,2,...,2m-1$$

добиваме дека $\lim\limits_{x\to\pm\infty}P(x)=\pm\infty$. Тоа значи дека за секој $C>0$ постои $b>0$ таков што $P(x)\geq C$, кога $x\geq b$ и за секој $D<0$ постои $a<0$ таков што $P(x)\leq D$ кога $x\leq a$. Да го разгледаме полиномот $P(x)$ на интервалот $[a,b]$. Според теорема 4.1 имаме $P\in\mathbf{C}([a,b])$ и, бидејќи $P(a)<0<P(b)$, добиваме дека постои $x_0\in\mathbf{R}$ таков што $P(x_0)=0$. ■

## 6. ЗАДАЧИ

1. Најди го збирот на коефициентите пред коефициентите со непарни степени на полиномот
   a) $P(x)=(x^5+x-1)^{2013}$.
   b) $P(x)=(x^2+2x+2)^{1994}+(x^2-3x-3)^{1994}$.

2. Нека $f(x)=x^2-2ax-a^2-\frac{3}{4}$, $a\in\mathbf{R}$. Најди ги сите вредности на $a$ за кои неравенството $|f(x)|\leq 1$ е исполнето за секој $x\in[0,1]$.

3. Нека $P(x)=x^2+ax+b$, каде $a$ и $b$ се цели броеви. Ако $P(x)$ е полн квадрат за бесконечно многу цели броеви $x$, тогаш $a^2=4b$. Докажи!

4. Полиномот $p(x)=ax^2+bx+c$ е таков што од $|x|\leq 1$ следува $|p(x)|\leq 1$. Докажи дека во тој случај за полиномот $p_1(x)=cx^2+bx+a$ од $|x|\leq 1$ следува $|p_1(x)|\leq 2$.

5. За полиномот $f(x)$ со целобројни корфициенти важи $f(n^2)=0$ за некој цел број $n\neq 0$. Докажи дека не постои рационален број $a\neq 0$ таков да $f(a^2)=1$.

6. Нека $n\geq 2$ е природен број и

$$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+1$$

е полином со позитивни целобројни коефициенти, такви да $a_k=a_{n-k}$ за секој $k$, $k=1,2,...,n-1$. Докажи дека постојат бесконечно многу парови природни броеви $(x,y)$ такви да $x\,|\,P(y)$ и $y\,|\,P(x)$.

7. Низата на Фибоначи $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена со $a_1=a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ за $n\in\mathbf{N}$. Нека за полиномот $P(x)$, $\deg P=990$ важи $P(k)=a_k$, за $k=992, 993,...,1982$. Докажи дека $P(1983)=a_{1983}-1$.

8. Нека $M$ е множество полиноми од облик $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a,b, c,d\in\mathbf{R}$ такви што важи $|P(x)|\le 1$, за $x\in[-1,1]$. Докажи дека постои $k\in\mathbf{R}$ таков да важи $|a|\le k$, за секој полином $P(x)$ од множеството $M$. Најди ја најмалата можна вредност на $k$.

9. За полиномот $P(x)$ постои $a\in\mathbf{R}$ таков да $P(x)=P(a-x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Докажи дека постои полином $Q(x)$ таков да $P(x)=Q((x-\frac{a}{2})^2)$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

10. Да ги разгледаме полиномите

$$P_n(x)=\binom{n}{2}+\binom{n}{5}x+\binom{n}{8}x^2+...+\binom{n}{3k+2}x^k,$$

каде $n\ge 2$ е природен број и $k=[\frac{n-2}{3}]$. Докажи дека

$$P_{n+3}(x)=3P_{n+2}(x)-3P_{n+1}(x)+(x+1)P_n(x).$$

11. За кои природни броеви $n$ постојат полиноми $f$ и $g$ од $n$ променливи со целобројни коефициенти такви што

$$(x_1+x_2+...+x_n)f(x_1,x_2,...,x_n)=g(x_1^2,x_2^2,...,x_n^2). \qquad (1)$$

12. Нека $n\ge 2$. Најди го бројот на сите полиноми

$$P(x)=a_0+a_1x+...+a_kx^k,\quad a_i\in\{0,1,2,3\}, i=0,1,2,...,k$$

за кои $P(2)=n$.

13. Нека $Q(x)$ е ненулти полином, а $k$ е природен број. Докажи дека полиномот $P(x)=(x-1)^kQ(x)$ има барем $k+1$ ненулти коефициенти.

14. Дадени се полиноми со комплексни коефициенти

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n,\text{ со нули } x_i, i=1,2,...,n,$$

$$Q(x)=x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+...+b_n,\text{ со нули } x_i^2, i=1,2,...,n.$$

Ако $a_1+a_3+a_5+...$ и $a_2+a_4+a_6+...$ се реални броеви, докажи дека и $b_1+b_2+b_3+...+b_n$ е реален број.

15. За полиномот

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n,\ a_i\in\mathbf{Z}, i=0,1,2,...,n$$

со $w(P)$ го означуваме бројот на непарните коефициенти $a_j$. Нека за секој ненегативен цел број $i$ нека е $Q_i=(1+x)^i$. Докажи дека ако $i_1,i_2,...,i_n\in\mathbf{N}_0$ се такви што $0\le i_1<i_2<...<i_n$, тогаш

$$w(Q_{i_1}+Q_{i_2}+...+Q_{i_n})\ge w(Q_{i_1}).$$

16. Дали постои полином $p(x)$ со целобројни коефициенти кој ги задоволува условите
    а) $p(2)=4$ и $p(6)=6$.
    b) $p(7)=11$ и $p(11)=13$.

17. Докажи дека не постои полином со целобројни коефициенти
$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$
таков да $P(0), P(1), P(2),...$ се прости броеви.

18. Нека $n\in\mathbf{N}$ и $P$ е полином со целобројни коефициенти таков што $0<|P(i)|<n$, за $i=1,2,\dots,n$. Докажи дека полиномот $P$ нема целобројна нула.

19. Нека $k\ge 4$ е цел број. Ако $F(x)$ е полином со целобројни коефициенти таков да $0\le F(c)\le k$, за $c=0,1,2,...,k+1$ докажи дека
$$F(0)=F(1)=F(2)=...=F(k+1).$$

20. Нека $P(x)$ е полином со целобројни коефициенти таков да
$$P(19)=P(89)=1989.$$
Дали може $P(1989)$ да е петцифрен природен број?

21. Докажи дека не постои полином $P(x)$ со целобројни коефициенти таков што $P(a)=b, P(b)=c, P(c)=a$, каде $a,b,c$ се различни цели броеви.

22. Нека $p(x)$ е полином со целобројни коефициенти кој за четири различни целобројни вредности на $x$ прима вредност 7. Докажи дека $p(x)\ne 14$, за секој $x\in\mathbf{Z}$.

23. Докажи дека не постои полином $P(x)$ со целобројни коефициенти таков што
    1) $P(-x)=P(x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$,
    2) $P(1)=64$ и
    3) $P(63)=2048$.

24. Нека $P(x)$ е полином од $n-$ти степен со реални коефициенти кој за $n+1$ рационална вредност на $x$ прима рационални вредности. Докажи дека $P(x)$ прима рационални вредности за секој рационален број.

25. Нека $P, Q$ и $R$ се полиноми се реални коефициенти, при што еден од нив е од втор и еден од трет степен и важи
$$[P(x)]^2+[Q(x)]^2=[R(x)]^2. \qquad (1)$$
Докажи дека сите корени на еден полиномите од трет степен се реални.

26. Нека $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ е полином со целобројни коефициенти. Докажи, ако $P(0)$ и $P(1)$ се непарни цели броеви, тогаш не постои цел број $x$ таков да $P(x)=0$.

27. Квадратниот трином $p(x)=ax^2+bx+c$ е таков што равенката $p(x)=x$ нема реални решенија. Докажи дека и равенката $p(p(x))=x$ исто така нема реални решенија.

28. За $x=0,1,2,...,n-1$ полиномот $P(x)$ со целобројни коефициенти прима вредности различни од нула и по модул помали од $n$. Докажи дека полиномот нема целобројни корени.

29. Нека $f(x)=x^4-4x^3+(3+m)x^2-12x+12$, каде $m$ е реален параметар.
   1) Најди ги сите цели броеви $m$, такви што равенката
   $$f(x)-f(1-x)+4x^3=0$$
   има најмалку едно целобројно решение.
   2) Најди ги сите вредности на $m$, такви да $f(x)\geq 0$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

30. Најди ги сите реални броеви $a$ за кои полиномот
$$P(x)=x^3-3x^2-(a^2+2)x-a^2,$$
има различни реални корени $x_1,x_2,x_3$ такви што $\sin\frac{2\pi x_1}{3}$, $\sin\frac{2\pi x_2}{3}$ и $\sin\frac{2\pi x_3}{3}$, во некој редослед се три последователни членови на аритметичка прогресија.

31. Нека $P(x)$ е полином со реални коефициенти, таков што $P(x)\geq 0$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Докажи дека постојат полиноми $Q(x)$ и $R(x)$ со реални коефициенти такви да
$$P(x)=[Q(x)]^2+[R(x)]^2, \text{ за секој } x\in\mathbf{R}.$$

32. Нека $n\in\mathbf{N}$ и за полиномот $P(x)$ важи $\deg P=2n$, $P(0)=1$ и $P(k)=2^{k-1}$, за $k=1,2,...,2n$. Докажи дека $2P(2n+1)-P(2n+2)=1$.

33. Нека $a\neq 0$. Ако за полиномот $P(x)$ важи $P(x)=P(x+a)$, за секој $x\in\mathbf{R}$, тогаш $P(x)$ е константен полином. Докажи!

34. Нека $P(x)$ и $Q(x)$ се полиноми со реални коефициенти такви што секој од нив има најмалку еден реален корен и за секој $x\in\mathbf{R}$ важи
$$P(1+x+Q(x)^2)=Q(1+x+P(x)^2). \qquad (1)$$

Докажи дека $P(x) \equiv Q(x)$ .

35. За полиномот $P(x)$ важи:

$$(P(x))^2 = P(x^2) - 2P(x) \qquad (1)$$

$$P(x) + P(-x) = -2 . \qquad (2)$$

a) Одреди го степенот на полиномот $P(x)$ .

b) Дали овој полином има реални нули?

36. Нека $P(x)$ е полином од $n-$ти степен со својство $P(m) = \frac{m}{m+1}$, за $m = 0,1,2,...,n$ . Пресметај $P(n+1)$ .

37. Нека $n \in \mathbf{N}$ . Докажи дека полиномот $P(z) = z^{n+1} - z^n - 1$ има корен $w$ таков да $|w| = 1$ ако и само ако $6 | (n+2)$ .

38. Нека $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ се реални броеви такви да $0 < a_0 < a_1 < ... < a_{n-1} \leq 1$ и $\lambda$ е комплексен корен на полиномот

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 ,$$

таков да $|\lambda| \geq 1$ . Докажи дека $\lambda^{n+1} = 1$ .

39. Најди ги сите природни броеви $n$ за кои полиномот

$$P(x) = x^n + (2+x)^n + (2-x)^n$$

има барем една целобројна нула.

40. Нека $P(x)$ е полином со реални коефициенти кој има барем два различни корени при што полиномот $P(P(x))$ нема ниту еден реален корен. Докажи дека сите реални корени на $P(x)$ имаат ист знак.

41. Нека $P(x)$ е полином таков што $n = \deg P \geq 5$ , $P$ е со целобројни коефициенти и $n$ различни целобројни корени $\alpha_i, i = 1,2,...,n$, каде $\alpha_1 = 0$ . Најди ги целобројните корени на полиномот $P(P(x))$ .

42. Нека $P(x)$ е полином со целобројни коефициенти. Докажи дека множествата целобројни решенија на равенките $P(P(P(x))) = x$ и $P(x) = x$ се еднакви.

43. Нека

$$P_1(x) = x^2 - 2 ,\ P_k(x) = P_1(P_{k-1}(x)) \text{, за } k = 2,3,...$$

Докажи дека за секој $n \in \mathbf{N}$ сите корени на равенката $P_n(x) = x$ се реални и меѓусебно различни.

44. Докажи дека полиномот $P(z)$ со комплексни коефициенти е парна функција на множеството комплексни броеви $\mathbf{C}$ , т.е. $P(-z) = P(z)$, за секој $z \in \mathbf{C}$ ако и само ако постои полином $Q(z)$ таков да

$$P(z) = Q(z)Q(-z) \text{, за секој } z \in \mathbf{C} . \qquad (1)$$

45. За полиномите $P,Q,R,S$ е исполнето равенството
$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)\ . \qquad (1)$$
Докажи дека полиномот $P(x)$ се дели со полиномот $x-1$.

46. Докажи дека за секој природен број $n$ постои полином $P(x)$ со коефициенти 0, 1 или $-1$ и степен помал или еднаков на $2^n$, кој без остаток се дели со $(x-1)^n$.

47. Нека $p\in\mathbf{R}$. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со
$$a_1=1,\ a_2=p,\ a_{n+1}=pa_n-a_{n-1},\ n>1.$$
Докажи дека за секој $n>1$ полиномот $x^n-a_nx+a_{n-1}$ се дели со полиномот $x^2-px+1$. Користејќи го овој резултат реши ја равенката
$$x^4-56x+15=0\ . \qquad (1)$$

48. Нека
$$f(x)=1+x+x^2+...+x^{m-1}\ ,\ g(x)=x^{a_1}+x^{a_2}+...+x^{a_n}\ ,$$
каде $0<a_1<a_2<...<a_n$ се цели броеви. Со $n_k=0,1,2,...,m-1$ да го означиме бројот на елементите $i$ такви што при делење на $a_i$ со $m$ се добива остаток $k$. Докажи дека $g(x)$ се дели со $f(x)$ ако и само ако
$$n_0=n_1=...=n_{m-1}\,.$$

49. Нека $f_1(x),\ f_2(x),...,\ f_{n-1}(x)$ и $g(x)$ се полиноми за кои важи релацијата
$$f_1(x^n)+xf_2(x^n)+...+x^{n-2}\ f_{n-1}(x^n)=(1+x+x^2+...+x^{n-1})g(x)\,. \qquad (1)$$
Докажи дека секој од полиномите $f_1(x),\ f_2(x),...,\ f_{n-1}(x)$ се дели со полиномот $x-1$.

50. Докажи дека за секои $n\in\mathbf{N}\setminus\{1\}$ и $\alpha\in\mathbf{R}$, $\sin\alpha\neq 0$, полиномот
$$P(x)=x^n\sin\alpha-x\sin\alpha n+\sin(n-1)\alpha$$
се дели со полиномот $Q(x)=x^2-2x\cos\alpha+1$.

51. Низата полиноми $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ е дефинирана со $p_0(x)=1,\ p_1(x)=x$ и
$$p_{n+1}(x)=xp_n(x)-p_{n-1}(x)\text{, за } n\geq 2\,.$$
Докажи дека за секој $n\in\mathbf{N}_0$ и за секој $\alpha\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$ важи
$$p_n(2\cos\alpha)=\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}\,.$$

52. Дали постои полином $p(x)$ со еални коефициенти, таков да за секој $x$ важи $P(\cos x)=\sin x$ ?

53. Дали постои полином $P(x)$ со реални коефициенти таков да за секој $x$ од некој интервал $(\alpha,\beta),\ \alpha<\beta$ важи $P(\sin x)=\sin 2x$ ?

54. Нека $P$ е полином со реални коефициенти, таков да за секој $x \in \mathbf{R}$ важи $P(\cos x) = P(\sin x)$. Докажи дека постои полином $Q$ таков да $P(t) = Q(t^4 - t^2)$, за секој $t \in \mathbf{R}$.

55. Нека $x_1$ и $x_2$ се решенија на равенката $x^2 + ax + b = 0$, каде $a$ и $b$ се цели броеви и $f(x)$ е произволен полином со целобројни коефициенти. Докажи дека $f(x_1) + f(x_2)$ е цел број.

56. Ако за реалните броеви $a, b, c$ важи
$$a+b+c > 0,\ ab+bc+ca > 0,\ abc > 0,$$
докажи дека тие броеви се различни.

57. Докажи дека равенката $ax^3 + bx^2 - 1 = 0$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a > 0$ има точно едно позитивно решение.

58. Нека $a_i, i = 0,1,2,3$ се реални броеви, при што $a_0 \neq 0$. Ако сите корени на полиномот $P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ се реални броеви, тогаш за $k \in \{1,2\}$ важи $a_k^2 \geq a_{k-1}a_{k+1}$. Докажи!

59. Дадени се броевите $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}$. Нека $S_i$ е збир на сите производи по $i$ од дадените броеви. Докажи дека $S_1 + S_2 + ... + S_{n-1} = \frac{n-1}{2}$.

60. Нека $a$ и $b$ се реални броеви такви да полиномот
$$P(x) = x^3 + \sqrt{3}(a-1)x^2 - 6ax + b$$
има три реални нули. Докажи дека $|b| \leq |a+1|^3$.

61. Полиномот $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + 1$ со ненегативни коефициенти $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ има $n$ реални нули. Докажи дека $P(2) \geq 3^n$.

62. Нека $a, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, b$ се реални броеви такви што $ab \neq 0$ и сите корени на полиномот
$$ax^n + ax^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-2}x^2 - n^2bx + b$$
се реални и позитивни. Докажи дека сите корени на полиномот се еднакви меѓу себе.

63. Нека се $a_i, i = 1, 2, ..., n$ реални броеви такви да полиномот
$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$
има $n$ различни реални корени. Ако $a_k = (-1)^k \binom{n}{k} b_k^k$, за $k \in \{n, n-1\}$, докажи дека $b_n < b_{n-1}$.

64. Најди ги сите полиноми од облик
$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0,$$

каде $a_i \in \{-1,1\}$, $i = 0,1,2,...,n$ и кои имаат само реални нули.

65. Полиномот $P(x) = x^3 + x^2 - 1$ има корени $a, b$ и $c$. Докажи дека полиномот $Q(x) = x^3 + x^2 - 4x - 5$ има корен $ab + c$.

66. За реалните броеви $a, b, c, d$ важи

$$a = \sqrt{4 - \sqrt{5 - a}}, \ b = \sqrt{4 + \sqrt{5 - b}}, \ c = \sqrt{4 - \sqrt{5 + c}} \text{ и } d = \sqrt{4 + \sqrt{5 + d}}.$$

Пресметај го производот $abcd$.

67. Дали постои конечно множество $H$ од ненулти реални броеви, такво што за секој природен број $n$ постои полином со степен поголем или еднаков на $n$ и коефициенти од множеството $H$, таков што сите негови корени се реални и исто така припаѓаат на $H$.

68. Најди ги сите ненегативни цели броеви $n$ за кои постои полином од $n-$ти степен $P_n(x)$ со целобројни коефициенти таков што во $n$ различни целобројни точки е еднаков на $n$, а во нулата е еднаков на нула.

69. Ако сите нули на полиномот

$$P(x) = x^n + nx^{n-1} + \tfrac{n(n-1)}{2} x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + ... + a_n, \ n > 2$$

се цели броеви, тогаш $a_k = \binom{n}{k}$, за $k = 3,4,...,n$.

70. Со $M_m(N)$ да го означиме бројот на полиномите со целобројни коефициенти од облик

$$P(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

за кои сите корени се реални и по модул не поголеми од $N$. Докажи дека $M_m(N)$ е конечен број.

71. Нека $p$ е непарен цел број. Ако $u$ и $v$ се корени на полиномот $P(x) = x^2 + px - 1$, тогаш $u^n + v^n$ и $u^{n+1} + v^{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$ се цели заемно прости броеви. Докажи!

72. Ако полиномот $P(x) = x^3 + qx + r, r \neq 0$ има реални корени, тогаш корените на полиномот $Q(x) = r^2 x^3 + q^3 x + q^3$ не припаѓаат на интервалот $(-1,3)$. Докажи!

73. Нека $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, $n \geq 3$ е полином со реални коефициенти за кои $\frac{a_{n-1}}{a_n} > n+1$ и $n$ реални корени. Докажи дека, ако $a_{n-2} = 0$, тогаш барем еден од корените на $f(x)$ припаѓа на интервалот $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1})$.

74. Најди ги сите вредности на параметрите $a$ и $b$ за кои полиномот

$$x^4 + (2a+1)x^3 + (a-1)^2 x^2 + bx + 4$$

може да се запише како производ на два полинома од втор степен $\psi(x)$ и $\varphi(x)$, со коефициенти пред највисокиот степен 1, такви да равенката $\psi(x)=0$ има две решенија $\alpha$ и $\beta$ такви да $\varphi(\alpha)=\beta$ и $\varphi(\beta)=\alpha$.

75. Да се докаже дека ако $p$ е прост број, $m\in\mathbf{Z}$, $p>|m|+2$ и $n\in\mathbf{N}$, тогаш полиномот $P(x)=x^n+mx+p$ не може да се разложи над $\mathbf{Z}$.

76. Најди $a,b,m,n\in\mathbf{Z}$ такви да $m>n\geq 2$ и полиномот $P(x)=x^n+ax+b$ е делител на полиномот $Q(x)=x^m+ax+b$.

77. Да се најдат сите природни броеви $n$, за кои што полиномот $P(x)=x^n+64$ може да се разложи над $\mathbf{Z}$, т.е. да се претстави како производ на два неконстантни полиноми со целобројни коефициенти.

78. Ако $p$ е прост број и $a\in\mathbf{Z}$, тогаш $P(x)=x^p-a$ е разложлив над $\mathbf{Z}$ ако и само ако $a$ е $p$-ти степен на некој цел број. Докажи!

79. Ако $n\in\mathbf{N}$ и $p$ е прост број, тогаш $P(x)=x^{p^n}-x+p^n$ не е разложлив над $\mathbf{Z}$. Докажи!

80. Нека $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$, каде $n>1$ е природен број. Докажи дека $f(x)$ не може да се претстави како производ на два полиноми со целобројни коефициенти со степен поголем или еднаков на 1.

81. Докажи дека полиномот $p(x)=x^5-x+a$, $a\in\mathbf{Z}$ и $a$ не се дели со 5, не може да се запише како производ на два полинома со целобројни коефициенти од понизок степен.

82. Ако полиномот $P(x)$, $\deg P=7$ е со целобројни коефициенти и за седум различни цели броја прима вредности 1 или $-1$, тогаш $P(x)$ не може да се запише како производ на два полинома со целобројни коефициенти од понизок степен. Докажи!

83. За кои по парови различни цели броеви $a_i, i=1,2,...,n$ полиномот
$$(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)-1, \tag{1}$$
може да се запише како производ на два полинома со цели коефициенти и степени поголеми или еднакви на 1.

84. За кои по парови различни цели броеви $[a,+\infty)$ полиномот
$$(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)+1, \tag{1}$$
може да се запише како производ на два полинома со цели коефициенти и степени поголеми или еднакви на 1.

85. Докажи дека не постојат по парови различни цели броеви $a_i, i=1,2, \ ...,n$ така да полиномот

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2...(x-a_n)^2+1, \qquad (1)$$

може да се запише како производ на два полинома со цели коефициенти и степени поголеми или еднакви на 1.

86. Најди ги сите квадратни полиноми $P(x)=ax^2+bx+c$ за кои се исполнети условите:

$$|P(x)|\leq 1,\ x\in[-1,1], \qquad (1)$$

$$a^2+b^2+c^2=5. \qquad (2)$$

87. Најди ги сите полиноми $f(x)$ со целобројни коефициенти такви да $a+b$ е делител на $f(a)+f(b)$ за бесконечно многу заемно прости броеви.

88. Најди ги сите полиноми $P(x)$ такви да

$$xP(x-1)=(x-3)P(x),\text{ за секој } x\in\mathbf{R}.$$

89. Најди ги сите полиноми со целобројни коефициенти од облик

$$P_n(x)=n!x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+(-1)^n n(n+1),$$

за чии корени $x_1,x_2,...,x_n$ важи $x_k\in[k,k+1]$, за $k=1,2,...,n$.

90. Најди ги сите полиноми $P(x)$ со реални коефициенти такви да

$$2+2P(x)=P(x-1)+P(x+1). \qquad (1)$$

91. Најди ги сите полиноми $f(x)=x^2-ax+b$ со целобројни коефициенти такви да

$$|f(m)|=|f(n)|=|f(p)|=7,$$

за некои различни цели броеви $m,n,p\in[0,9]$.

92. Најди ги сите полиноми

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0,\ a_0\neq 0,$$

со целобројни коефициенти и корени $a_i,\ i=0,1,2,...,n-1$.

93. Најди ги сите реални полиноми $P$ и $Q$ такви да за секој реален број $a$, $P(a)$ е решение на равенката

$$x^2+Q(a)x^2+(a^4+1)x+a^3+a=0.$$

94. Најди ги сите полиноми $p(x)$, со целобројни коефициенти, такви што

$$16p(x^2)=[p(x)]^2,\text{ за секој } x\in\mathbf{R}.$$

95. Најди ги сите полиноми $p(x)$ такви да $p(x^2-2x)=[p(x-2)]^2$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

96. Најди полином од трет степен $P(x)$, кој ја задоволува релацијата $P(x)-P(x-1)=x^2$, а потоа користејќи го истиот најди го збирот на квадратите на првите $n$ природни броеви.

97. Најди ги сите неконстантни полиноми $p(x)$ кои ја задоволуваат равенката $p(x^3+1)=[p(x+1)]^3$.

98. Нека $f(n)=1!+2!+3!+...+n!$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Најди полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ такви што

$$f(n+2)=P(n)f(n+1)+Q(n)f(n)\text{, за секој } n\in\mathbf{N}.$$

99. Нека $x_n, n=1,2,3,4,...$ се позитивни реални броеви такви да

$$x_n^n=\sum_{j=0}^{n-1}x_n^j\text{, за } n=1,2,3,\dots.$$

Докажи дека $2-\frac{1}{2^{n-1}}\le x_n\le 2-\frac{1}{2^n}$, за $n=1,2,3,\dots$.

100. Нека $a,b,c$ се реални броеви такви да $9a+11b+29c=0$. Докажи дека еден корен на полиномот $P(x)=ax^3+bx+c$ лежи во интервалот $[0,2]$.

101. Дали постои полином $f(x,y)$ со реални коефициенти таков да се точни равенствата

$$f(y^2-4y+6,y)=y^2+y+2$$
$$f(3x,x^2)=x^4+3x?$$

102. Докажи дека полиномот $x^{200}y^{200}+1$ не може да се претстави како производ $f(x)g(y)$ на два полиноми: од една променлива $x$ и од една променлива $y$.

103. Најди ги сите хомогени полиноми од две променливи, со $n$-ти степен такви што:

$1^\circ$ За секои три реални броеви $a,b$ и $c$ е исполнето

$$P(a+b,c)+P(b+c,a)+P(c+a,b)=0$$

$2^\circ$ $P(1,0)=1$.

*Забелешка.* Полином $P$ е *хомоген* полином од $n$-ти степен ако за секои реални броеви $t,x,y$ е исполнето $P(tx,ty)=t^nP(x,y)$, каде $n\in\mathbf{N}$.

104. Полиномите $P_n(x,y), n\ge1$ се дефинирани со

$$P_1(x,y)=1,\ P_{n+1}(x,y)=(x+y-1)(y+1)P_n(x,y+2)+(y-y^2)P_n(x,y).$$

Докажи дека $P_n(x,y)=P_n(y,x)$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$ и за секој $n\in\mathbf{N}$, т.е. дека полиномите $P_n(x,y), n\ge1$ се *симетрични.*

105. За бројот $m=p_1^{t_1}p_2^{t_2}...p_s^{t_s}$ ќе велиме дека има $t_1+t_2+...+t_s$ прости делители. Нека $p(x)$ е неконстантен полином со целобројни коефициенти и нека $n$ и $k$ се фиксирани природни броеви. Докажи дека постојат $n$ последователни природни броеви $a,a+1,a+2,...,a+n-k+1$ за кои броевите $p(a), p(a+1),$ $p(a+2),..., p(a+n-1)$ имаат најмалку $k$ прости делители.

106. Нека $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ и за полиномот $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ важи $f(2)+f(5)<7<f(3)+f(4)$. Докажи дека постојат $u,v \in \mathbf{R}$ такви да $u+v=7$ и $f(u)+f(v)=7$.

107. Дали постои полином $P(x)$ таков што $P(1)=1, P(2)=2$ и $P(n)$ е ирационален број за секој цел број $n$ различен од 1 и 2?

108. Нека $P(x)$ е квадратен трином со ненегативни коефициенти. Докажи дека за секои $x,y \in \mathbf{R}$ важи неравенството
$$[P(xy)]^2 \le P(x^2)P(y^2).$$

109. Дали постојат реални броеви $b$ и $c$ такви што секој од полиномите $P(x)=x^2+bx+c$ и $Q(x)=2x^2+(b+1)x+c+1$ има по два целобројни корени.

110. Дали постојат полиноми $P(x)=ax^2+bx+c$ и $Q(x)=(a+1)x^2+(b+1)x+c+1$ со целобројни коефициенти, секој од кои има по два целобројни корени?

111. Да ги разгледаме сите квадратни полиноми од видот $x^2+px+q$, каде $p,q \in \mathbf{Z}$, $1 \le p \le 1997$ и $1 \le q \le 1997$. Меѓу овие поилиноми кои се повеќе: оние кои имаат целобројни корени или оние кои немаат реални корени?

112. Најди ги сите полиноми $p(x)$ такви да
$$(x-16)p(2x)=16(x-1)p(x), \qquad (1)$$
за секој $x \in \mathbf{R}$.

113. Најди ги сите полиноми $f$ со релани коефициенти такви што за секој $x \in \mathbf{R}$ важи
$$xf(x)f(1-x)+x^3+100 \ge 0.$$

114. Најди ги сите полиноми $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, $n \ge 2$ со реални коефициенти, такви што $P(x)-P_1(x)P_2(x)...P_{n-1}(x)$, каде $P_1(x)=a_1x+a_0$, $P_2(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$, $P_{n-1}(x)=a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, е константен полином.

115. Дадени се интервалите $[a,b] \subset (0,1)$ и $[c,d]$. Докажи дека постои полином со целобројни коефициенти таков што $f([a,b]) \subset [c,d]$.

116. За секој природен број $n \ge 2$ да го разгледаме полиномот
$$P_n(x)=\tbinom{n}{2}+\tbinom{n}{5}x+\tbinom{n}{8}x^2+...+\tbinom{n}{3k+2}x^k,$$
каде $k=[\frac{n-2}{3}]$.

а) Докажи дека $P_{n+3}(x)=3P_{n+2}(x)-3P_{n+1}(x)+(x+1)P_n(x)$.

б) Најди ги сите цели броеви $a$ такви што $3^{[\frac{n-1}{2}]}$ е делител на $P_n(a^3)$, за секој $n\geq 3$.

117. Нека $p(x)$ е полином и

$$P_n(x)=\underbrace{p(p(...p}_{n}(x)...)) .$$

Докажи дека полиномот $P_{2003}(x)-2P_{2002}(x)+P_{2001}(x)$ е делив со полиномот $p(x)-x$.

118. Нека $P(x)$ е полином од $n-$ти степен чии корени се $i-1,i-2,...,i-n$ и нека се $R(x)$ и $S(x)$ полиноми со реални коефициенти такви да

$$P(x)=R(x)+iS(x) .$$

Докажи дека полиномот $R(x)$ има $n$ реални нули.

119. Најди ги сите полиноми $p$ со реални коефициенти за кои важи $p(0)=0$ и

$$f(f(n))+n=4f(n)\text{, за секој } n\in\mathbf{N},$$

каде $f(n)=[p(n)]$.

120. Најди ги сите полиноми со реални коефициенти, такви да за секој реален број $x$ важи $P(x^2+1)=P(x)^2+1$.

121. Татјана замислила ненулти полином $P(x)$, чии коефициенти се од множеството $\mathbf{N}_0$. Даница сака да го определи тој полином. Таа во еден чекот изговара цел број $k$, а Татјана ја соопштува вредноста $P(k)$. Со колку најмалку чекори Даница може да го открие полиномот кој го замислила Татјана?

122. Да се определат сите полиноми $P(x)$ за кои важи

$$2P(2x^2-1)=P^2(x)-2,\text{ за секој } x\in\mathbf{R}. \qquad (1)$$

123. Да се определат сите неконстантни полиноми со реални (комплексни) коефициенти за кои

$$f(x)[f(x^2)-x^2]=f(x^3). \qquad (1)$$

124. Да се најдат сите полиноми со две променливи $P(x,y)$ за кои важи

$$P(a,b)P(c,d)=P(ac+bd,ad+bc),\text{ за секои } a,b,c,d\in\mathbf{R}.$$

125. Нека полиномот $P(x)$ е дефиниран со

$$P(x)\equiv a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+.......+a_{2n}x^{2n}=(1\cdot x+2x^2+.......+nx^n)^2$$

Докажи дека

$$a_{n+1}+a_{n+2}+.......+a_{2n}=\frac{n(n+1)(5n^2+5n+2)}{24}.$$

126. Нека

$$\overline{a_na_{n-1}........a_1a_0}=10^na_n+10^{n-1}a_{n-1}+.......+10a_1+a_0$$

е десетичен запис за прост број каде $n>1$ и $a_n>1$ . Да се докаже дека полиномот

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.........+a_1x+a_0$$

е неразложлив, т.е. не може да се претстави како производ на два полиноми со позитивни степени и цели коефициенти.

127. За полиномот

$$P(x)=x^n-a_{n-1}x^{n-1}-...-a_1x-a_0,$$

важи $a_i\geq 0, i=0,1,2,...,n-1$ и $\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i>0$. Докажи дека $P(x)$ има единствена позитивна нула.

128. За полиномот од три променливи $P$ ќе велиме дека е цикличен, ако $P(x,y,z)=P(y,z,x)$. Да се докаже, дека постојат циклични полиноми од три променливи $P_1$, $P_2$, $P_3$ и $P_4$, такви што за секој цикличен полином од три променливи $P$ постои полином од четири променливи $Q$ таков што

$$P(x,y,z)=Q(P_1(x,y,z),P_2(x,y,z),P_3(x,y,z),P_4(x,y,z)).$$

129. Полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ се од десетти степен и имат водечки коефициенти еднакви на 1. Равенката $P(x)=Q(x)$ нема реални корени. Да се докаже, дека равенката $P(x+1)=Q(x-1)$ има барем еден реален корен.

130. Најди ги сите полиноми $p(x)$ со водечки коефициент 1, такви што

1) $p(x)$ не е константа и сите корени му се реални и различни;

2) ако $a$ и $b$ се корени на $p(x)$, тогаш $a+b+ab$ е исто така корен на $p(x)$.

131. Даден е полином со реални коефициенти

$$p(x)=x^{2013}+a_{2012}x^{2012}+...+a_1x+a_0.$$

Нека корените на $p(x)$ се $-b_{1006},-b_{1005},...,-b_1,0,b_1,...,b_{1005},b_{1006}$, каде $b_1,...,b_{1005},b_{1006}$ се позитивни реални броеви со производ 1. Докажи дека $a_3a_{2011}\geq 1012036$.

132. Нека $a$ е реален број и $P(x)$ е неконстантен полином со реални коефициенти таков, што $P(x^2+a)=(P(x))^2$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Докажи дека $a=0$.

133. Нека $Q(x)$ е квадратен полином таков што функцијата $P(x)=x^2Q(x)$ е монотоно растечка на интервалот $(0,+\infty)$. Докажи дека

$$P(x)+P(y)+P(z)>0 \text{ за } x+y+z>0 \text{ и } xyz>0.$$

134. Определи ги сите полиноми $f(x)$ со целобројни коефициенти, кои го имаат следново својство: постои константа $c>0$ таква што за секој цел број $n>c$, бројот $f(n)$ е различен од нула и е делител на $n!$.

135. Докажи дека секој полином од трет степен со реални коефициенти може да се претстави како збир на кубови на три неконстантни полиноми со реални коефициенти.

136. Дадена е низата полиноми $f_1, f_2, f_3, ...$ за која важи

$$f_1(x) = x^3 - 3x \text{ и } f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)), \text{ за } n \geq 1.$$

Најди го бројот на реалните корени на равенката:

а) $f_{2013}(x) = 2$, б) $f_{2013}(x) = 3$.

137. Определи ги реалните броеви $p, q$ и $r$, ако $p, -\frac{q}{2}$ и $r$ формираат аритметичка прогресија и равенката $x^3 + px^2 + qx + r - 1 = 0$ има три корени, кои се природни броеви и формираат аритметичка прогресија со разлика 2013.

138. Определи ги реалните параметри $a$ и $b$, за кои полиномот

$$f(x) = x^3 - bx^2 + (3-a)x + 3b$$

е таков што $f(a-1) = f(a+1)$ и при делење со полиномот $x - b$ се добива остатаок $-2a$.

139. Нека $P$ е полином од 2013 степен со реални коефициенти таков што за произволни реални броеви $x, y$ и $z$ за кои важи $P(x) + P(y) + P(z) = 0$, следува дека $P(x^3) + P(y^3) + P(z^3) = 3P(x)P(y)P(z)$. Докажи дека

а) $P(x) \neq 0$ за $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$,

б) $P$ е непарна функција.

140. Полиномот $f(x)$ ги има следниве својства:

1) коефициентите на $f(x)$ се природни броеви,
2) равенката $f(x) = 0$ има барем еден рационален корен, и
3) ако $k = \deg f$, тогаш вредностите на $f(x)$ во $k+1$ различни природни броеви се прости броеви.

Докажи дека $f(x) = ax + b$ за некои два заемно прости природни броја $a$ и $b$ .

141. Полиномот $P(x) = x^8 + x + 1$ претстави го како производ на неразложиви полиноми во $\mathbf{Z}$ .

142. Определи ги сите полиноми $f$ од видот

$$f(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + ... + a_{n-1} x^{n+1} + a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + 1 ,$$

за кои $|a_n| \leq 2$ и кои имаат $2n$ реални нули.

143. Докажи дека полиномот $x^4 - 1994x^3 + (1993 + m)x^2 - 11x + m$, каде $m \in \mathbf{Z}$ има најмногу еден целоброен корен.

# РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

## А) РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД ПРВА ГЛАВА

1. Докажи дека $A\setminus B\subseteq(A\setminus D)\cup(D\setminus B)$, за секои множества $A,B$ и $D$.

**Решение.** Нека $x\in A\setminus B$. Тогаш $x\in A$ и $x\notin B$. Ако $x\notin D$, тогаш $x\in A\setminus D$ и затоа $x\in(A\setminus D)\cup(B\setminus D)$. Ако $x\in D$, тогаш од $x\notin B$ следува $x\in D\setminus B$, па затоа $x\in(A\setminus D)\cup(B\setminus D)$. Конечно, од произволноста на $x$ следува $A\setminus B\subseteq(A\setminus D)\cup(D\setminus B)$.

2. Докажи

a) $M\setminus(\bigcap_{a\in A} M_a)=\bigcup_{a\in A}(M\setminus M_a)$,

b) $M\setminus(\bigcup_{a\in A} M_a)=\bigcap_{a\in A}(M\setminus M_a)$.

**Решение.** Ќе го докажеме равенството под а).

Нека $x\in M\setminus(\bigcap_{a\in A} M_a)$. Тогаш $x\in M$ и $x\notin \bigcap_{a\in A} M_a$. Според тоа, $x\in M$ и постои $a_0\in A$ таков што $x\notin M_{a_0}$, што значи дека постои $a_0\in A$ таков што $x\in M\setminus M_{a_0}$. Но, тоа значи дека $x\in \bigcup_{a\in A}(M\setminus M_a)$ и од произволноста на $x$ следува дека $M\setminus(\bigcap_{a\in A} M_a)\subseteq \bigcup_{a\in A}(M\setminus M_a)$.

Обратно, нека $x\in \bigcup_{a\in A}(M\setminus M_a)$. Тогаш постои $a_0\in A$ таков што $x\in M\setminus M_{a_0}$, што значи дека $x\in M$ и постои $a_0\in A$ таков што $x\notin M_{a_0}$. Според тоа, $x\in M$ и $x\notin \bigcap_{a\in A} M_a$, па затоа $x\in M\setminus(\bigcap_{a\in A} M_a)$. Конечно, од произволноста на $x$ следува $\bigcup_{a\in A}(M\setminus M_a)\subseteq M\setminus(\bigcap_{a\in A} M_a)$.

3. Докажи:

a) $(\bigcup_{a\in A} X_a)\cap(\bigcup_{b\in B} Y_b)=\bigcup_{\substack{a\in A\\ b\in B}}(X_a\cap Y_b)$,

b) $(\bigcap_{a\in A} X_a)\cup(\bigcap_{b\in B} Y_b)=\bigcap_{\substack{a\in A\\ b\in B}}(X_a\cup Y_b)$

**Решение.** а) Ако $x\in(\bigcup_{a\in A} X_a)\cap(\bigcup_{b\in B} Y_b)$, тогаш $x\in\bigcup_{a\in A} X_a$ и $x\in\bigcup_{b\in B} Y_b$ па затоа постојат $a_0\in A$ и $b_0\in B$ такви да $x\in X_{a_0}$ и $x\in Y_{b_0}$. Но, тоа значи дека $x\in X_{a_0}\cap Y_{b_0}$, па затоа $x\in\bigcup_{\substack{a\in A\\ b\in B}}(X_a\cap Y_b)$. Сега од произволноста на $x$ следува

$$(\bigcup_{a\in A} X_a)\cap(\bigcup_{b\in B} Y_b)\subseteq \bigcup_{\substack{a\in A\\ b\in B}}(X_a\cap Y_b).$$

Обратно, ако $x\in \bigcup_{\substack{a\in A\\ b\in B}}(X_a\cap Y_b)$, тогаш постојат $a_0\in A$ и $b_0\in B$ такви да $x\in X_{a_0}\cap Y_{b_0}$. Но, тоа значи дека постојат $a_0\in A$ и $b_0\in B$ такви што $x\in X_{a_0}$ и $x\in Y_{b_0}$, па затоа $x\in \bigcup_{a\in A} X_a$ и $x\in \bigcup_{b\in B} Y_b$. Според тоа, $x\in(\bigcup_{a\in A} X_a)\cap(\bigcup_{b\in B} Y_b)$ и од произволноста на $x$ следува

$$\bigcup_{\substack{a\in A\\ b\in B}}(X_a\cap Y_b)\subseteq(\bigcup_{a\in A} X_a)\cap(\bigcup_{b\in B} Y_b).$$

Равенството под b) се докажува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

4. Докажи

a) $(\bigcup_{a\in A} M_a)\setminus(\bigcup_{a\in A} N_a)\subseteq \bigcup_{a\in A}(M_a\setminus N_a)$,

b) $(\bigcap_{a\in A} M_a)\setminus(\bigcap_{a\in A} N_a)\supseteq \bigcap_{a\in A}(M_a\setminus N_a)$.

**Решение.** a) Ако $x\in(\bigcup_{a\in A} M_a)\setminus(\bigcup_{a\in A} N_a)$, тогаш $x\in \bigcup_{a\in A} M_a$ и $x\notin \bigcup_{a\in A} N_a$, т.е. постои $a_0\in A$ таков што $x\in M_{a_0}$ и за секој $a\in A$ важи $x\notin N_a$. Според тоа, постои $a_0\in A$ таков што $x\in M_{a_0}\setminus N_{a_0}$, од што следува дека $x\in \bigcup_{a\in A}(M_a\setminus N_a)$. Конечно, од произволноста на $x$ добиваме $(\bigcup_{a\in A} M_a)\setminus(\bigcup_{a\in A} N_a)\subseteq \bigcup_{a\in A}(M_a\setminus N_a)$.

b) Нека $x\in \bigcap_{a\in A}(M_a\setminus N_a)$. Значи, за секој $a\in A$ важи $x\in M_a\setminus N_a$, т.е. за секој $a\in A$ важи $x\in M_a$ и $x\notin N_a$. Според тоа, $x\in \bigcap_{a\in A} M_a$ и $x\notin \bigcap_{a\in A} N_a$, од што следува $x\in(\bigcap_{a\in A} M_a)\setminus(\bigcap_{a\in A} N_a)$. Конечно, од произволноста на $x$ следува $\bigcap_{a\in A}(M_a\setminus N_a)\subseteq(\bigcap_{a\in A} M_a)\setminus(\bigcap_{a\in A} N_a)$.

5. Докажи

a) $(A_1\times\ldots\times A_n)\cap(B_1\times\ldots\times B_n)=(A_1\cap B_1)\times\ldots\times(A_n\cap B_n)$,

b) $(A_1\times\ldots\times A_n)\cup(B_1\times\ldots\times B_n)\subseteq(A_1\cup B_1)\times\ldots\times(A_n\cup B_n)$.

**Решение.** a) Нека $x=(x_1,\ldots,x_n)\in(A_1\times\ldots\times A_n)\cap(B_1\times\ldots\times B_n)$. Според тоа, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in A_1\times\ldots\times A_n$ и $x=(x_1,\ldots,x_n)\in B_1\times\ldots\times B_n$, па затоа $x_i\in A_i, x_i\in B_i$ за $i=1,2,\ldots,n$. Но, тоа значи дека $x_i\in A_i\cap B_i$, за $i=1,2,\ldots,n$, односно дека $x=(x_1,\ldots,x_n)\in(A_1\cap B_1)\times\ldots\times(A_n\cap B_n)$.

Обратно, ако $x=(x_1,\ldots,x_n)\in(A_1\cap B_1)\times\ldots\times(A_n\cap B_n)$, тогаш важи $x_i\in A_i\cap B_i$, за $i=1,2,\ldots,n$. Според тоа, $x_i\in A_i, x_i\in B_i$ за $i=1,2,\ldots,n$, па затоа $x=(x_1,...,x_n)\in A_1\times...\times A_n$ и $x=(x_1,...,x_n)\in B_1\times...\times B_n$, односно $x=(x_1,...,x_n)\in(A_1\times...\times A_n)\cap(B_1\times...\times B_n)$.

b) Нека $x=(x_1,...,x_n)\notin(A_1\cup B_1)\times...\times(A_n\cup B_n)$. Значи, постои $i_0$, $1\le i_0\le n$ таков што $x_{i_0}\notin A_{i_0}\cup B_{i_0}$, т.е. $x_{i_0}\notin A_{i_0}$ и $x_{i_0}\notin B_{i_0}$. Според тоа, од $x_{i_0}\notin A_{i_0}$ следува $x\notin A_1\times...\times A_n$, а од $x_{i_0}\notin B_{i_0}$ следува $x\notin B_1\times...\times B_n$, па затоа $x\notin(A_1\times...\times A_n)\cap(B_1\times...\times B_n)$.

6. Нека $f:X\to Y$ и $M_a\subseteq X$, за секој $a\in A$. Докажи

a) $f(\bigcup_{a\in A}M_a)=\bigcup_{a\in A}f(M_a)$ и

b) $f(\bigcap_{a\in A}M_a)\subseteq\bigcap_{a\in A}f(M_a)$.

**Решение.** a) Нека $f(x)\in f(\bigcup_{a\in A}M_a)=\{f(t)\,|\,t\in\bigcup_{a\in A}M_a\}$. Според тоа, $x\in\bigcup_{a\in A}M_a$, т.е. постои $a_0\in A$ таков да $x\in M_{a_0}$. Но, тоа значи дека постои $a_0\in A$ таков да $f(x)\in f(M_{a_0})$. Значи $f(x)\in\bigcup_{a\in A}f(M_a)$ и од произволноста на $x$ следува $f(\bigcup_{a\in A}M_a)\subseteq\bigcup_{a\in A}f(M_a)$.

Обратно, ако $f(x)\in\bigcup_{a\in A}f(M_a)$, тогаш $f(x)\in f(M_{a_0})$ за барем еден $a_0\in A$. Според тоа, постои $a_0\in A$ таков да $x\in M_{a_0}$, што значи $x\in\bigcup_{a\in A}M_a$, па затоа $f(x)\in f(\bigcup_{a\in A}M_a)$. Конечно, од произволноста на $x$ следува

$$\bigcup_{a\in A}f(M_a)\subseteq f(\bigcup_{a\in A}M_a).$$

b) Од $f(x)\in f(\bigcap_{a\in A}M_a)=\{f(t)\,|\,t\in\bigcap_{a\in A}M_a\}$ следува дека $x\in\bigcap_{a\in A}M_a$, т.е. $x\in M_a$, за секој $a\in A$. Значи, за секој $a\in A$ имаме $f(x)\in f(M_a)$, па затоа $f(x)\in\bigcap_{a\in A}f(M_a)$. Конечно, од произволноста на $f(x)$ следува

$$f(\bigcap_{a\in A}M_a)\subseteq\bigcap_{a\in A}f(M_a).$$

7. Нека $f:X\to Y$ и $N_a\subseteq Y$, за секој $a\in A$. Докажи

a) $f^{-1}(\bigcup_{a\in A}N_a)=\bigcup_{a\in A}f^{-1}(N_a)$,

b) $f^{-1}(\bigcap_{a\in A}N_a)=\bigcap_{a\in A}f^{-1}(N_a)$.

**Решение.** a) Ако $x\in f^{-1}(\bigcup_{a\in A}N_a)$, тогаш $f(x)\in\bigcup_{a\in A}N_a$. Значи, постои $a_0\in A$ таков да $f(x)\in N_{a_0}$, односно постои $a_0\in A$ таков да $x\in f^{-1}(N_{a_0})$. Според тоа, $x\in\bigcup_{a\in A}f^{-1}(N_a)$ и од произволноста на $x$ следува

$$f^{-1}(\bigcup_{a\in A} N_a)\subseteq \bigcup_{a\in A} f^{-1}(N_a).$$

Обратно, нека претпоставиме дека $x\in \bigcup_{a\in A} f^{-1}(N_a)$. Тогаш постои $a_1\in A$ таков да $x\in f^{-1}(N_{a_1})$, што значи дека постои $a_1\in A$ таков да $f(x)\in N_{a_1}$. Според тоа, $f(x)\in \bigcup_{a\in A} N_a$, па затоа $x\in f^{-1}(\bigcup_{a\in A} N_a)$ и од произволноста на $x$ следува $\bigcup_{a\in A} f^{-1}(N_a)\subseteq f^{-1}(\bigcup_{a\in A} N_a)$.

b) Нека $x\in f^{-1}(\bigcap_{a\in A} N_a)$. Тогаш $f(x)\in \bigcap_{a\in A} N_a$, па затоа $f(x)\in N_a$, за секој $a\in A$. Но, тоа значи дека $x\in f^{-1}(N_a)$, за секој $a\in A$, па затоа $x\in \bigcap_{a\in A} f^{-1}(N_a)$. Конечно, произволноста на $x$ следува

$$f^{-1}(\bigcap_{a\in A} N_a)\subseteq \bigcap_{a\in A} f^{-1}(N_a).$$

Обратно, ако $x\in \bigcap_{a\in A} f^{-1}(N_a)$, тогаш $x\in f^{-1}(N_a)$, за секој $a\in A$, па затоа $f(x)\in N_a$, за секој $a\in A$. Според тоа, $f(x)\in \bigcap_{a\in A} N_a$, од што следува дека $x\in f^{-1}(\bigcap_{a\in A} N_a)$. Конечно, од произволноста на $x$ следува $\bigcap_{a\in A} f^{-1}(N_a)\subseteq f^{-1}(\bigcap_{a\in A} N_a)$.

8. Нека $f:X\to Y$ и $M,N\subseteq Y$. Докажи дека

$$f^{-1}(M\setminus N)=f^{-1}(M)\setminus f^{-1}(N).$$

**Решение.** Ако $x\in f^{-1}(M\setminus N)$, тогаш $f(x)\in M\setminus N$, т.е. $f(x)\in M$ и $f(x)\notin N$. Но, тогаш $x\in f^{-1}(M)$ и $x\notin f^{-1}(N)$, од што следува $x\in f^{-1}(M)\setminus f^{-1}(N)$. Конечно од произволноста на $x$ добиваме $f^{-1}(M\setminus N)\subseteq f^{-1}(M)\setminus f^{-1}(N)$.

Обратно, ако $x\in f^{-1}(M)\setminus f^{-1}(N)$, тогаш $x\in f^{-1}(M)$ и $x\notin f^{-1}(N)$, па затоа $f(x)\in M$ и $f(x)\notin N$. Последното значи дека $f(x)\in M\setminus N$, т.е. $x\in f^{-1}(M\setminus N)$ и до произволноста на $x$ добиваме дека $f^{-1}(M)\setminus f^{-1}(N)\subseteq f^{-1}(M\setminus N)$.

9. Нека $f:X\to Y$. Докажи дека

a) $f(f^{-1}(B))\subseteq B$, за секое множество $B\subseteq Y$.

b) $A\subseteq f^{-1}(f(A))$, за секое множество $A\subseteq X$.

c) $f(f^{-1}(B))=B$, за секое множество $B\subseteq Y$ ако и само ако $f$ е сурјекција.

d) $A=f^{-1}(f(A))$, за секое множество $A\subseteq X$ ако и само ако $f$ е инјекција.

**Решение.** a) Ако $y\in f(f^{-1}(B))$, тогаш постои $x\in f^{-1}(B)$ таков што $f(x)\in B$ и $f(x)=y$. Според тоа, $y\in B$ и од произвлноста на $y$ следува $f(f^{-1}(B))\subseteq B$. Обратната инклузија не важи. Најди пример.

b) Ако $x\in A$, тогаш $f(x)=y\in f(A)$, па затоа $x\in f^{-1}(f(A))$. Од произволноста на $x$ следува $A\subseteq f^{-1}(f(A))$. Обратната инклузија не важи.

c) Ако $f(f^{-1}(B))=B$, за секое множество $B\subseteq Y$ и $y\in Y$, тогаш $f^{-1}(\{y\})\neq\varnothing$. Навистина, ако $f^{-1}(\{y\})=\varnothing$, тогаш $\{y\}=f^{-1}(\{y\})\ =\varnothing$, што е противречност. Според тоа, постои $x\in X$ таков да $y=f(x)$, т.е. $f$ е сурјекција.

Во тврдењето под a) докажавме дека $f(f^{-1}(B))\subseteq B$, за секое множество $B\subseteq Y$. Ќе докажеме дека ако $f$ е сурјекција, тогаш $B\subseteq f(f^{-1}(B))$, за секое множество $B\subseteq Y$. Ако $y\in B$, тогаш бидејќи $f$ е сурјекција постои $x\in X$ таков да $y=f(x)$, т.е. постои $x\in X$ таков да $x\in f^{-1}(B)$. Според тоа, $y\in f(f^{-1}(B))$ и од произволноста на $y$ следува $B\subseteq f(f^{-1}(B))$.

d) Нека $A=f^{-1}(f(A))$, за секое множество $A\subseteq X$ и $f(u)=f(v)$. Тогаш $f(\{u\})=f(\{v\})$, па значи $\{u\}=\{v\}$, т.е. $u=v$. Според тоа, $f$ е инејкција.

Во тврдењето под b) докажавме дека $A\subseteq f^{-1}(f(A))$, за секое множество $A\subseteq X$. Ќе докажеме дека, ако $f$ е инјекција, тогаш $f^{-1}(f(A))\subseteq A$, за секое множество $A\subseteq X$. Ако $x\in A$, тогаш $f(x)\notin f(A)$. Навистина, ако $f(x)\in f(A)$, тогаш постои $u\in A$ таков што $f(u)=f(x)$ и како $f$ е инјекција добиваме $x=u\in A$, што е противречност. Сега, од $f(x)\notin f(A)$ следува $x\notin f^{-1}(f(A))$, па од произволноста на $x$ добиваме $f^{-1}(f(A))\subseteq A$.

10. Докажи, дека од $A\setminus B\sim B\setminus A$ следува $A\sim B$.
**Решение.** За множествата $A$ и $B$ важи

$$A=(A\setminus B)\cup(A\cap B) \text{ и } B=(B\setminus A)\cup(A\cap B),$$

при што

$$(A\setminus B)\cap(A\cap B)=\varnothing \text{ и } (B\setminus A)\cap(A\cap B)=\varnothing.$$

Но, $A\setminus B\sim B\setminus A$ и $A\cap B\sim A\cap B$, па од теорема 13 следува $A\sim B$.

11. Дадени се множествата $B$ и $C$ такви што $B\cap C=\varnothing$. Докажи, дека од $A\subset B$ и $A\sim A\cup C$, следува $B\sim B\cup C$.
**Решение.** За множествата $B$ и $B\cup C$ се исполнети равенствата

$$B=(B\setminus A)\cup A \text{ и } B\cup C=(B\setminus A)\cup(A\cup C),$$

при што $(B\setminus A)\cap A=\varnothing$ и $(B\setminus A)\cap(A\cup C)=\varnothing$. Конечно, бидејќи $A\sim A\cup C$ и $B\setminus A\sim B\setminus A$ од теорема 13 следува $B\sim B\cup C$.

12. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ такви да $f(x^2+y)=xf(x)+y$, за секои $x,y \in \mathbf{N}_0$.

**Решение.** За $x=0$ добиваме $f(f(y))=y$. Тогаш, ако $z \in \mathbf{N}_0$, при $x=1$ и $y=f(z)$ наоѓаме $f(1+z)=c+f(z)$, каде $c=f(1)$. Понатаму, за $z=0$ од последната равенка добиваме $f(0)=0$. Сега со индукција заклучуваме дека $f(z)=cz$, за секој $z \in \mathbf{N}_0$. Конечно, ако замениме во дадената равенка добиваме дека $c=1$, т.е. $f(z)=z$.

13. За функцијата $f:\mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ е исполнето

$$f(1)+f(2)+...+f(n)=n^2 f(n)\text{, за секој } n \in \mathbf{N}.$$

Ако $f(1)=1005$, пресметај $f(2010)$.

**Решение.** Од $f(1)+f(2)+...+f(n-1)=(n-1)^2 f(n-1)$ следува

$$(n-1)^2 f(n-1)+f(n)=n^2 f(n)$$
$$(n^2-1)f(n)=(n-1)^2 f(n-1)$$
$$f(n)=\tfrac{n-1}{n+1}f(n-1).$$

Од последното равенство последователно следува

$$f(n)=\tfrac{n-1}{n+1}f(n-1)=\tfrac{(n-1)(n-2)}{(n+1)n}f(n-2)=...=\tfrac{(n-1)(n-2)...\cdot 2\cdot 1}{(n+1)n(n-1)...\cdot 4\cdot 3}$$
$$=2\tfrac{(n-1)!}{(n+1)!}f(1)=\tfrac{2f(1)}{n(n+1)}.$$

Според тоа, за $n=2010$ добиваме

$$f(2010)=\tfrac{2f(1)}{2010(2010+1)}=\tfrac{2\cdot 1005}{2010\cdot 2011}=\tfrac{1}{2011}.$$

14. Функцијата $f:\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ е определена со

$$f(x)=\begin{cases} x-10, & x>100 \\ f(f(x+11)), & x \le 100. \end{cases}$$

Докажи дека $f(x)=91$, за $x \le 100$.

**Решение.** Да забележиме дека важи

$$f(100)=f(f(100+11))=f(f(111))=f(101)=101-10=91.$$

Да претпоставиме дека $f(x)=91$, за секој $x \in \{k+1,k+2,...,100\}$, каде $k$ е цел број помал од 100. Ако $90<k<100$, тогаш

$$f(k)=f(f(k+11))=f(91)=91,$$

а ако $k \le 90$, тогаш

$$f(k)=f(f(k+11))=f(91)=91.$$

Од принципот на математичка индукција добиваме дека за секој цел број $k \le 100$ важи $f(k)=91$.

15. Нека $m \in \mathbf{N}$, $S=\{1,2,...,m\}$ и $f:S \to \mathbf{N}$ е пресликување такво што

$$f(1)+f(2)+...+f(m)=2m. \qquad (1)$$

Ако $k = |i \in \{1,2,...,m\},\ f(i)=1\}|$, тогаш $\max\{f(i)\,|\,1 \le i \le m\} \le 2+k$.

Докажи!

**Решение.** а) Ако $k=0$, т.е. ако $f(i) \ne 1$, за секој $i \in S$, тогаш $f(i) \ge 2$, за секој $i \in S$. Од (1) следува дека $f(i)=2$, за секој $i \in S$, па затоа $\max\{f(i)\,|\,1 \le i \le m\} = 2 \le 2+k$.

б) Нека $k>0$ и нека за точно еден елемент $i \in S$ важи $f(i)=2$. Очигледно $k+1<m$. Да претпоставиме дека постои елемент $i \in S$ таков што $f(i) \ge k+3$. Добиваме: за $k$ елементи од $S$ важи $f(i)=1$ и по еден елемент е $f(i)=2$ и $f(i)=3$, па затоа

$$2m = f(1)+f(2)+...+f(m) \ge k \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3(m-k+2)+k+3 = 3m-k-1,$$

односно $k+1>m$, што е противречност. Значи, $f(i) \ge k+2$, за секој $i \in S$.

16. Дадена е функција $f: \mathbf{N} \to A$ таква да важи: ако $|i-j|=p$, $p$ е прост број, тогаш $f(i) \ne f(j)$. Колку елементи најмалку може да има множеството $A$?

**Решение.** Лесно се гледа дека бараниот број не е 1, бидејќи тогаш $f(k)=\text{const}$, за секој $k \in \mathbf{N}$.

Бараниот број не е ниту 2, поради контрапримерот: за $i=6, j=4$ и $k=1$ важи $|i-j|=2, |j-k|=3, |i-k|=5$, па од условот на задачата добиваме $f(i) \ne f(j)$, $f(k) \ne f(j)$ и $f(i) \ne f(k)$, па затоа

$$f(i) \ne f(j) \ne f(k) \ne f(i), \tag{1}$$

па мора $A$ да има најмалку три елементи.

Да ги разгледаме првите осум природни броеви. Од (1) следува $f(1)=a_1$, $f(4)=a_2$ и $f(6)=a_3$. Јасно, не може да биде $f(3)=a_3$ и $f(3)=a_1$. Нека претпоставиме дека $f(3)=a_2$. Но, тогаш не може да биде $f(2)=a_2$ и да претпоставиме дека $f(2)=a_1$. Сега еднозначно следува дека $f(5)=a_3$ и $f(7)=a_1$, па затоа $f(8)$ не може да биде еднаков на ниту еден од броевите $a_1, a_2$ и $a_3$. Аналогно, ако претпоставиме дека $f(2)=a_3$ доаѓаме до истиот заклучок. Значи, $|A|>3$.

Даја разгледаме функцијата

$$f(n) = \begin{cases} a_i, & n=4k+i \\ a_4, & n=4k. \end{cases}$$

Очигледно важи $f(i)=f(j)$ ако и само ако $|i-j|=4k$. Значи, множеството $A$ може да има најмалку четири елементи.

**Забелешка.** Ако земеме $a_4=0, a_1=1, a_2=2, a_3=3$, тогаш една функција која ги задоволува бараните услови е $f(n)=n-4[\frac{n}{4}]$.

17. Функцијата $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ е зададена со

$$f(m)=m+[\sqrt{m}], \text{ за секој } m \in \mathbf{N}.$$

Докажи дека за секој $m \in \mathbf{N}$ постои $k \in N$ таков што

$$f^k(m)=\underbrace{f(f(...f}_{k \text{ пати}}(m)))$$

е полн квадрат.

**Решение.** За секој $m\in\mathbf{N}$ постои $n\in\mathbf{N}$ таков што

$$n^2\le m\le n^2+2n=(n+1)^2-1 .$$

Ако $m=n^2$, тогаш

$$f(m)=f(n^2)=n^2+n$$
$$f^2(n^2)=n^2+2n$$
$$f^3(n^2)=n^2+3n=(n+1)^2+n-2$$
$$f^5(n^2)=(n+1)^2+n-1+2(n+1)=(n+2)^2+n-2$$
$$f^7(n^2)=(n+2)^2+n-2+2(n+2)=(n+3)^2+n-3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{2n-1}(n^2)=(n+n+1)^2+1=(2n-1)^2+1$$
$$f^{2n+1}(n^2)=(2n-1)^2+1+2(2n-1)=(2n)^2.$$

Слично, за $m=pn+k$, каде $p\in\{0,1\}$ и $k\in\{1,2,...,n\}$ имаме

$$f^{2k-1}(m)=f^{2k-1}(n^2+pn+k)=(n+k)^2 .$$

18. Докажи дека не постои функција $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ таква да $f(f(x))=x+1$, за секој $x\in\mathbf{Z}$.

**Решение.** Нека претпоставиме дека таква функција постои. Од условот на задачата имаме

$$f(x+1)=f(f(f(x)))=f(x)+1, \text{ за секој } x\in\mathbf{Z} .$$

Нека $f(0)=a$. Со индукција лесно се докажува дека $f(x)=x+a$, за секој $x\in\mathbf{Z}$. Според тоа,

$$1=f(f(0))=f(a)=a+a=2a ,$$

па затоа $a=\frac{1}{2}$, што е противречност.

19. Докажи дека не постои биекција $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}_0$ таква што

$$f(mn)=f(m)+f(n)+3f(m)f(n), \text{ за секои } m,n\in\mathbf{N} .$$

**Решение.** Да претпоставиме дека таква биекција постои. За $m=n=1$ добиваме $f(1)+3[f(1)]^2=0$, од каде следува $f(1)=0$. Значи $f(n)\ge 1$, за $n\ge 2$. Ако $m,n\ge 2$, тогаш $f(mn)\ge 1+1+3=5$, па затоа $f(k)\ge 5$ за секој сложен број $k$. Значи, постојат прости броеви $n_1$ и $n_3$ такви што $f(n_1)=1$ и $f(n_3)=3$.

Нека $n_8$ е природниот број за кој важи $f(n_8)=n_8$. Тогаш

$$f(n_3^2)=3+3+3\cdot 3\cdot 3=33 \text{ и } f(n_1n_8)=1+8+3\cdot 1\cdot 8=33 .$$

Но, $f$ е биекција, па од последните равенства следува $n_1 n_8 = n_3^2$. Според тоа, $n_1 \mid n_3^2$, што противречи на фактот дека $n_1$ и $n_3$ се различни прости броеви.

20. Докажи дека не постои функција $f:\mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ таква што

$$f(f(n)) = n+1987, \text{ за секој } n \in \mathbf{N}_0 .$$

**Решение.** Ако постои таква функција $f$, тогаш

$$f(n+1987) = f(f(f(n))) = f(n)+1987,$$

од што со индукција добиваме

$$f(n+1987t) = f(n)+1987t, \text{ за } t = 0, 1, 2, ... \qquad (1)$$

Нека разгледаме произволен број $r, 0 \le r < 1987$ и да го поделиме $f(r)$ со 1987. Имаме

$$f(r) = p+1987k, k \in \mathbf{N}_0 \text{ и } 0 \le p < 1987 .$$

Но, од (1) имаме

$$f(p)+1987k = f(p+1987k) = f(f(r)) = r+1987 .$$

Притоа, во последните равенства бројот $k$ може да биде еднаков само на 0 или 1, бидејќи во спротивно ќе добиеме противречност со $r < 1987$. Значи, или $f(r) = p$, при $k=0$ или $f(p) = r$, при $k=1$. Притоа и во двата случаја $p \ne r$, бидејќи во спротивно ќе добиеме противречност со условот $f(f(n)) = n+1987$.

Со претходната постапка множеството $\{0,1,2,...,1986\}$ го разбивме на подредени парови $(p,r)$ каде или $f(r) = p$ или $f(p) = r$ и $p \ne r$, што не е можно, бидејќи ова множество содржи непарен број елементи. Конечно, од добиената противречност следува дека функција $f$ со зададеното својство не постои.

21. Најди ги сите функции $f:\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ такви да

$$3f(x) - 2f(f(x)) = x, \text{ за секој } x \in \mathbf{Z} .$$

**Решение.** Јасно, функцијата $f(x) = x$ го задоволува условот на задачата. Нека $f(x)$ е функција која го задоволува условот на задачата и да ставиме $g(x) = f(x) - x$. Сега, условот на задачата ќе го запишеме во обликот $2f(f(x)) - 2f(x) = f(x) - x$, односно $g(x) = 2g(f(x)$. Оттука последователно добиваме

$$\begin{aligned} g(x) &= 2g(f(x)) = 2^2 g(f(f(x))) = 2^3 g(f(f(f(x)))) \\ &= 2^4 g(f(f(f(f(x))))) = ... \\ &= 2^n g(\underbrace{f(f(...f(f}_{n \text{ пати}}(x))))). \end{aligned}$$

Но, броевите $g(f(f(...f(x))))$ се цели, па затоа $g(x)$ се дели со $2^n$ за секој природен број $n$, што е можно ако и само ако $g(x) = 0$. Конечно, $f(x) = x$ е единствената функција која го задоволува условот на задачата.

22. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви да $f(f(n)+f(m))=m+n$, за $m,n\in\mathbf{N}$. Определи го $f(2014)$ ако $f(1)=1$.

**Решение.** Од условот на задачата следува

$$f(f(1)+n+m)=f(f(1)+f(f(m)+f(n))=1+f(m)+f(n).$$

Значи $f(m)+f(n)=f(p)+f(q)$, ако $m+n=p+q$. Според тоа

$$f(n+1)+f(1)=f(n)+f(2)$$
$$f(n+1)-f(n)=f(2)-f(1),$$

па затоа $f(n)=An+B$. Од $f(1)=A+B=1$, $f(2)=2A+B=2$ имаме $A=1,$ $B=0$, па затоа $f(2014)=2014$.

23. Најди ги сите функции $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$ за кои важи $f(1)=2$ и

$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1\text{, за секои } x,y\in\mathbf{Q}. \qquad (1)$$

**Решение.** Во (1) ставаме $y=1$ и добиваме

$$f(x)=f(x)f(1)-f(x+1)+1\text{, т.е. } f(x+1)=f(x)+1.$$

За $x\in\mathbf{Q}$ и $n\in\mathbf{Z}$ имаме $f(x+n)=f(x)+n$, односно $f(n)=n+1$, за секој $n\in\mathbf{Z}$. Да ставиме $x=\frac{1}{n}$, $y=n$. Добиваме

$$f(\tfrac{1}{n}\cdot n)=f(\tfrac{1}{n})f(n)-f(\tfrac{1}{n}+n)+1\text{, т.е. } f(\tfrac{1}{n})=1+\tfrac{1}{n}.$$

Конечно, ако во (1) замениме $x=p, y=\frac{1}{q}$ добиваме $f(\frac{p}{q})=\frac{p}{q}+1$, односно $f(x)=x+1$, за секој $x\in\mathbf{Q}$.

24. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}_0\to\mathbf{R}$ такви да

$$f(n+m)+f(n-m)=f(3n)\text{, за секои } m,n\in\mathbf{N}_0,\ n\geq m.$$

**Решение.** За $m=0$ добиваме $2f(n)=f(3n)$, $n\in\mathbf{N}_0$. Ако $n=0$, тогаш $f(0)=0$. За $m=n$ добиваме $f(2n)=f(3n)$. Според тоа, $f(4m)=f(6m)=$ $f(9m)$, но за $n=3m$ имаме $f(4m)+f(2m)=f(9m)$. Значи, $f(2m)=0$, па е $2f(m)=f(3m)=f(2m)=0$. Конечно, единствена функција која го задоволува условот на задачата е $f\equiv 0$.

25. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви да

*i)* $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$, за секои $x,y\in\mathbf{N}$,

*ii)* $f(x)$ е полн квадрат за секој $x\in\mathbf{N}$.

**Решение.** Да забележиме дека функцијата $f_0(x)=x^2$ ги задоволува условите на задачата. Нека $f$ е произволна функција со бараните својства и да ставиме $g(x)=f(x)-x^2$. Тогаш

$$g(x+y)=f(x+y)-(x+y)^2=f(x)+f(y)-x^2-y^2=g(x)+g(y).$$

Со индукција лесно се докажува дека $g(nx)=ng(x)$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Специјално

$$g(n)=g(n\cdot 1)=ng(1)=an,$$

за секој $n \in \mathbf{N}$, каде $a = g(1)$. Според тоа, $f(x) = x^2 + ax$. Ќе докажеме дека $a = 0$.

Нека $a \neq 0$ и нека $a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_s^{k_s}$ е каноничното разложување на $a$ на прости множители. Ако $p$ е прост број различен од $p_i, i = 1,2,...,s$, тогаш од $f(p) = p(a+p)$ заклучуваме дека $p \mid f(p)$ и $p^2 \nmid f(p)$. Според тоа, $f(p)$ не е полн квадрат, што епротивречност. Од добиената противречност следува $a = 0$, т.е. $f(x) = x^2$ е единствена функција која ги задоволува условите на задачата.

26. Докажи дека функцијата $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ е решение на функционалната равенка

$$(n-m) f(n+m) = (n+m)(f(n) - f(m)),\ m,n \in \mathbf{N} \qquad (1)$$

ако и само ако постои аритметичка прогресија за која $f(n)$ е збир на нејзините први $n$ членови.

**Решение.** Нека претпоставиме дека $f(n)$ е збир на првите $n$ членови на аритметичка прогресија со почетен член $a$ и разлика $d$. Тогаш

$$f(n) = na + \tfrac{n(n-1)}{2} d .$$

Лесно се проверува дека оваа функција ја задоволува равенката (1).

Обратно, нека $f$ е решение на равенката (1). Со замена $n = k, m = 1$; $n = k+1, m = 1; n = k, m = 2$ во (1) го добиваме системот

$$(k-1) f(k+1) = (k+1)(f(k) - f(1))$$
$$kf(k+2) = (k+2)(f(k+1) - f(1))$$
$$(k-2) f(k+2) = (k+2)(f(k) - f(2))$$

Од последниот систем добиваме дека $f$ може да се запише во обликот $f(n) = \alpha n^2 + \beta n$. Да забележиме дека секој израз кој е квадратен по $n$ и кој не содржи слободен член дава збир на првите $n$ членови на некоја аритметичка прогресија.

27. Функциите $f, g, h : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ се такви да

1) $h(n) \neq h(m)$ ако $m \neq n$,

2) $g(\mathbf{N}) = \mathbf{N}$ и

3) $f(n) = g(n) - h(n) + 1$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

Докажи дека $f(n) = 1$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

**Решение.** Доволно е да докажеме дека $g(n) = h(n)$, за секој $n \in \mathbf{N}$. Бидејќи $h(n) \geq 1$, добиваме дека $h(n) = g(n) + 1 - f(n) \leq g(n)$, за секој $n \in \mathbf{N}$. Нека претпоставиме дека $h(n) < g(n) = k$. Според 2) постојат $n_1, n_2, ..., n_{k-1} \in \mathbf{N}$ такви што $g(n_i) = i, i = 1,2,...,k-1$. Според тоа, природните броеви $h(n_1)$, $h(n_2),...,h(n_{k-1}), h(n)$ припаѓаат на множеството $\{1,2,...,k-1\}$. Според 1) броевите $h(n_i)$ се меѓусебно различни, па затоа постои $n_j$, така да

$h(n_j)=h(n)$. Бидејќи функцијата $h$ е инјекција имаме дека $n=n_j$, што значи дека $j=g(n_j)=g(n)=k$, а тоа е противречност.

28. Најди ги сите функции $f,g:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ такви што
$$f(g(x)+y)=g(f(y)+x), \qquad (1)$$
за секои $x,y\in\mathbf{Z}$ и $g$ е инјекција.

**Решение.** Ставаме $c=f(0)$ и $d=f(0)$. Ако во (1) ставиме $x=0$ добиваме
$$g(f(y))=f(y+d), \text{ за секој } y\in\mathbf{Z}, \qquad (2)$$
и ако во (1) ставиме $y=0$ добиваме
$$f(g(x))=g(c+x), \text{ за секој } x\in\mathbf{Z}. \qquad (3)$$
Од (3) имаме $g(f(g(x))=g(g(c+x))$, од (2) при $y=g(x)$ следува дека $g(f(g(x))=f(d+g(x))$ и од (1) за $y=d$ имаме $f(d+g(x))=g(f(d)+x)$, па затоа $g(f(g(x)))=g(f(d)+x)$. Но, $g$ е инјекција, па од последното равенство следува $f(g(x))=f(d)+x$, за секој $x\in\mathbf{Z}$, што според (3) значи дека
$$g(c+x)=f(d)+x, \text{ за секој } x\in\mathbf{Z}. \qquad (4)$$
Ако во последното равенство ставиме $x=-c$ добиваме $f(d)=d+c$ и со замена во (4) добиваме $g(c+x)=d+(c+x)$, за секој $x\in\mathbf{Z}$, што значи дека $g(t)=d+t$, за секој $t\in\mathbf{Z}$. Сега од (3) следува $f(d+t)=c+(d+t)$, за секој $t\in\mathbf{Z}$, што значи дека $f(x)=c+x$, за секој $x\in\mathbf{Z}$.

Конечно, единствени функции кои го задоволуваат условот на задачата се $f(x)=c+x$ и $g(x)=d+x$, каде $c$ и $d$ се произволни цели броеви.

29. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви што
$$f(-n)f(n)=f(n^2), \text{ за секој } n\in\mathbf{N}, \qquad (1)$$
$$f(n+m)=f(n)+f(m)+2mn, \text{ за секои } m,n\in\mathbf{N}. \qquad (2)$$

**Решение.** Воведуваме смена $f(n)=g(n)+n^2$. Тогаш (2) може да се запише во обликот
$$g(n+m)+(n+m)^2=g(n)+n^2+g(m)+m^2+2mn$$
$$g(m+n)=g(n)+g(m).$$
Последната равенка е таканаречената Кошиева равенка и нејзино решение се сите функции од облик $g(n)=kn$, $k\in\mathbf{Z}$, (докажи). Сега од (1) добиваме
$$[g(-n)+n^2][g(n)+n^2]=g(n^2)+n^4$$
$$(n^2-kn)(n^2+kn)=kn^2+n^4$$
$$(k+k^2)n^2=0.$$
Но, последното равенство важи за секој $n\in\mathbf{N}$, па затоа $k+k^2=0$, т.е. $k=0$ или $k=-1$. За $k=0$ имаме $g(n)=0$, па затоа $f(n)=n^2$, $n\in\mathbf{N}$, а за $k=-1$ имаме $g(n)=-n$, па затоа $f(n)=n^2-n$, $n\in\mathbf{N}$.

Лесно се проверува дека функциите $f(n)=n^2$, $n\in\mathbf{N}$ и $f(n)=n^2-n$, $n\in\mathbf{N}$ се решенија на задачата.

30. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}\setminus\{1\}$ такви да

$$f(n+1)+f(n+3)=f(n+5)f(n+7)-1375, \text{ за секој } n\in\mathbf{N}.$$

**Решение.** Дефинираме $a_k=f(2k-1)$ и $b_k=f(2k)$, $k\in\mathbf{N}$. Имаме

$$a_k+a_{k+1}=a_{k+2}a_{k+3}-1375,\ k\in\mathbf{N}, \tag{1}$$

$$b_k+b_{k+1}=b_{k+2}b_{k+3}-1375,\ k\in\mathbf{N}. \tag{2}$$

Ако во (1) $k$ го замениме со $k+1$ и од добиената равенка ја одземеме (1) добиваме

$$a_{k+2}-a_k=a_{k+3}(a_{k+4}-a_{k+2}). \tag{3}$$

Но, $a_k\ge 2$, па од (3) следува дека или $|a_{k+2}-a_k|>|a_{k+4}-a_{k+2}|>...$, што не е можно или $a_{k+2}=a_k$, за секој $k\in\mathbf{N}$. Според тоа, низата $\{a_k\}$ ги задоволува условите ако и само ако $a_1+a_2=a_1a_2-1375$, т.е. $(a_1-1)(a_2-1)=1376$. Значи, ако $t$ е делител на 1376, тогаш

$$a_1=a_3=...=t+1,\ a_2=a_4=...=\tfrac{1376}{t}+1.$$

Претходните размилсувања важат и за низата $\{b_k\}$, па ако ги комбинираме овие низи можеме да ги определиме бараните функции. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

31. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ за кои важи

1) $f(m+n)=f(m)f(n)$, за секои $m,n\in\mathbf{N}$,

2) Равенката $f(f(x))=(f(x))^2$ има најмалку едно решение во $\mathbf{N}$.

**Решение.** Од 1) следува $f(n+1)=f(n)f(1)$ и ако означиме $f(1)=a$, тогаш со индукција по $n$ може да се докаже дека $f(n)=a^n$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Понатаму, равенката $f(f(x))=(f(x))^2$ ќе ја запишеме во обликот $a^{a^x}=(a^x)^2$, т.е. во обликот

$$a^{a^x}=a^{2x}. \tag{1}$$

Ако $a=1$, тогаш секој природен број $x$ е решение на равенката (1). Значи, $f(n)=1$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Ако $a\ne 1$, тогаш равенката (1) е еквивалентна со равенката

$$a^x=2x. \tag{2}$$

Јасно, $a$ е парен број. Ако $a>2$, тогаш $a^n>2^n\ge 2n$, за секој $n\in\mathbf{N}$, па затоа равенката (2) во овој случај нема решение. Ако $a=2$, тогаш равенката има облик $2^x=2x$ и како за $n>2$ важи $2^n>2n$ заклучуваме дека $x\le 2$. Со непосредна проверка се уверуваме дека $x=1$ и $x=2$ се решенија на (2).

Конечно, бараните функции се $f(n)=1$ и $f(n)=2^n$, $n\in\mathbf{N}$.

32. Најди ги сите функции $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{R}$ такви да $f(nx)=nf(x)$, за секои $x\in\mathbf{Q}$ и $n\in\mathbf{Z}$.

**Решение.** Нека $f$ е функција која ги задоволува условите на задачата. Тогаш за произволен природен број $n$ и за секој $x\in\mathbf{Q}$ важи

$$f(\tfrac{x}{n})=\tfrac{n}{n}f(\tfrac{x}{n})=\tfrac{1}{n}f(x).$$

Нека $f(1)=a, a\in\mathbf{R}$ и нека $x=\frac{p}{q}, p\in\mathbf{Z}, q\in\mathbf{N}$. Тогаш

$$f(x)=f(\tfrac{p}{q})=pf(\tfrac{1}{q})=\tfrac{p}{q}f(1)=ax.$$

Значи, ако $f$ е функција која ги исполнува условите на задачата, тогаш $f(x)=ax$, за секој $x\in\mathbf{Q}$, каде $a\in\mathbf{R}$.

Нека $a\in\mathbf{R}$ и $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{R}$ е определена со $f(x)=ax$, за секој $x\in\mathbf{Q}$. Тогаш, за секои $x\in\mathbf{Q}$ и $n\in\mathbf{Z}$ имаме $f(nx)=anx=nf(x)$, што значи дека $f$ ги задоволува условите на задачата.

33. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}_0\to\mathbf{N}_0$ такви да за секои $m,n\in\mathbf{N}_0$ важи

$$f(mn)=f(m)f(n)$$
$$f(|m-n|)=|f(m)-f(n)|.$$

**Решение.** Функцијата $f(n)\equiv 0$ очигледно ги задоволува условите на задачата. Нека $f(n)\not\equiv 0$. Од $f(n)=f(1)f(n)$, за секој $n\in\mathbf{N}_0$ следува $f(1)=1$. Понатаму, $f(2-1)=|f(2)-f(1)|$, па затоа можни се следниве два случаја:

1) $f(2)=0$, од што следува дека за секој $n\in\mathbf{N}_0$ важи

$$f(2n)=f(2)f(n)=0,$$
$$|f(2n+1)-f(1)|=f(2n)=0,\text{ т.е. } f(2n+1)=1.$$

2) $f(2)=2$. Со индукција ќе докажеме дека $f(n)=n$, за секој $n\in\mathbf{N}_0$. За $n=0$ имаме $f(0)=|f(2)-f(2)|=0$ и претходно видовме дека $f(1)=1$. Нека претпоставиме дека за некој $n=k$ важи $f(k)=k$. Тогаш за $n=k+1$ имаме $|f(k+1)-f(1)|=f(k)=k$, па затоа $|f(k+1)-1|=k$, односно $f(k+1)=k+1$. Според тоа, тврдењето важи за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека $f(n)=n$, за секој $n\in\mathbf{N}_0$.

Според тоа, решение на задачата се функциите:

$$f(n)=0,\text{ за секој } n\in\mathbf{N}_0,$$
$$f(n)=n,\text{ за секој } n\in\mathbf{N}_0 \text{ и}$$
$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{ако } n \text{ е парен број}\\ 1, & \text{ако } n \text{ е непарен број.}\end{cases}$$

34. Да се најдат сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}_0$ за кои се исполнети условите:

1) $f(mn)=f(m)+f(n)$, за секои $m,n\in\mathbf{N}$,

2) $f(n)=0$, ако цифрата на едениците на бројот $n$ е 3, и

3) $f(10)=0$.

**Решение.** Бидејќи

$$0=f(10)=f(5)+f(2) \text{ и } f(2)\geq 0,\ f(5)\geq 0$$

добиваме $f(5)=f(2)=0$. Секој природен број $n$ може да се запише во облик $n=2^k5^sb$, каде $\mathrm{NZS}(10,b)=1$. Со други зборови $b=10m\pm 1$ или $b=10m\pm 3$. Од последните равенства следува $b^2=10l\pm 1$, а од тука добиваме $b^4=10q+1$. Затоа цифрата на единиците на бројот $3b^4$ е 3, па од 2) следува дека $f(3b^4)=0$. Од друга страна, од 1) имаме

$$0=f(3b^4)=f(3)+4f(b),$$

па затоа $f(b)=0$. Конечно,

$$f(n)=f(2^k5^sb)=kf(2)+sf(5)+f(b)=0,$$

т.е. $f(n)=0$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

35. Нека $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ е строго растечка функција таква да

$$f(mn)=f(m)f(n)$$

и дека од $m^n=n^m$, $m\neq n$ следува дека или $f(n)=m$ или $f(m)=n$. Пресметај $f(30)$.

**Решение.** Доволно е да пресметаме $f(2), f(3)$ и $f(5)$. Од $2^4=4^2$ следува $f(2)=4$ или $f(4)=2$. Но, функцијата $f$ строго расте, па затоа $f(2)=4$. Понатаму,

$$4=f(2)<f(3)<f(4)=f(2^2)=(f(2))^2=16,$$

па затоа $5\leq f(3)\leq 15$. Потоа, $64=f(8)<f(9)=(f(3))^2$, па затоа $9\leq f(3)\leq 15$. Исто така, $(f(3))^3=f(27)<f(32)=1024$, па затоа $f(3)\leq 10$. Значи, $f(3)=9$ или $f(3)=10$. Ако е $f(3)=10$, тогаш $f(243)=10^5$ и $f(256)=65536$, што не е можно. Значи, $f(3)=9$. Со слични размислувања се покажува дека $f(5)=25$. Конечно,

$$f(30)=f(2\cdot 3\cdot 5)=f(2)f(3)f(5)=900.$$

36. Дали постои функција $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ таква што

$(i)$ $f(1)=2$

$(ii)$ $f(f(n))=f(n)+n$, за секој $n\in\mathbf{N}$ и

$(iii)$ $f(n)<f(n+1)$, за секое $n\in\mathbf{N}$.

**Решение.** Нека $\alpha=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ е едно од решенијата на квадратната равенка $\alpha^2-\alpha-1=0$ и со $[x]$ да ја означиме функцијата цел дел од $x$. Ќе докажеме дека функцијата $f(n)=[\alpha n+\frac{1}{2}]$ ги задоволува условите на задачата.

($i$) Бидејќи $2<\alpha+\frac{1}{2}<3$, добиваме $f(1)=2$.

($iii$) Од $\alpha>1$ следува $\alpha(n+1)>\alpha n+1$, па затоа за секој $n\in\mathbf{N}$ важи

$$f(n+1)=[\alpha(n+1)+\tfrac{1}{2}]\geq[\alpha n+1+\tfrac{1}{2}]=1+[\alpha n+\tfrac{1}{2}]=1+f(n)>f(n).$$

($ii$) Од дефинициите на функциите $f$ следува дека $|f(n)-\alpha n|<\frac{1}{2}$, за секој $n\in\mathbf{N}$ и затоа

$$\begin{aligned}|f(f(n))-f(n)-n|&=|\alpha(\alpha n)-\alpha n-n-\alpha(\alpha n)+f(f(n))-f(n)+\alpha n|\\&=|-\alpha(\alpha n)+f(f(n))-f(n)+\alpha n|\\&=|\alpha(\alpha n)-\alpha f(n)+\alpha f(n)-f(f(n))+f(n)-\alpha n|\\&=|(\alpha-1)(\alpha n-f(n))+\alpha f(n)-f(f(n))|\\&\leq|\alpha-1|\cdot|\alpha n-f(n)|+|\alpha f(n)-f(f(n))|\\&=\tfrac{\alpha-1}{2}+\tfrac{1}{2}=\tfrac{\alpha}{2}<1,\end{aligned}$$

што значи дека $f(f(n))-f(n)-n=0$, бидејќи $f(n)$ прима само целобројни вредности.

37. Најди ги сите функции $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{N}_0$ такви што за секои $m,n\in\mathbf{Z}$ важи:
    1) $f(mn)=f(m)f(n)$,
    2) $f(m+n)\leq 1997(f(m)+f(n))$,
    3) $f(1997)=0$.

**Решение.** Од условите 1) - 3) скедува дека за произволни $n$ и $k$ важи

$$f(1997n+k)\leq 1997f(k),$$

што значи дека функцијата $f(x)$ е ограничена, т.е. $f(x)\leq M$, за секој $x$, каде $M=1997\max\{f(0),...,f(1996)\}$ и ако $f(k)=0$, тогаш $f(1997n+k)=0$, за секој $n$. За $1\leq k\leq 1996$ броевите $0,k,2k,...,1996k$ даваат различни остатоци при делење со 1997. Тогаш од условот 1) или $f(m)=0$ за секој $m$ или $f(m)\neq 0$ за $m$ кој не е делив со 1997. Функцијата $f\equiv 0$ ги задоволува условите на задачата. Да го разгледаме случајот кога $f(m)\neq 0$. Нека $f(m)\geq 2$. Тогаш $f(m^s)\geq 2^s$, за секој $s\in\mathbf{N}$, што противречи на ограниченоста на функцијата $f$. Значи, единствено решение е $f(m)=0$ ако $m$ се дели со 1997 и $f(m)=1$ ако $m$ не е делив со 1997. Овие решенија ги задоволуваат условите на задачата.

Според тоа,

- $f(m)=0$, за секој $m$
- $f(m)=\begin{cases}0, & \text{ако } m \text{ е делив со 1997}\\ 1, & \text{ако } m \text{ не е делив со 1997.}\end{cases}$

38. Пресликувањето $f:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ е биекција таква што

$$f(1)<2f(2)<3f(3)<...<nf(n).$$

Докажи дека $f$ е идентичното пресликување!

**Решение.** Нека претпоставиме дека $f$ не е идентичното пресликување. Нека $i$ е најмалиот природен број таков да $f(i) \neq i$, т.е. таков што $f(i) > i$. Тогаш постои $j > i$ таков што $f(j) = i$. Но, тогаш $f(j-1) > i$, па затоа $f(j-1) \geq i+1$, па бидејќи $j-i > 0$, т.е. $j-i \geq 1$ имаме

$$(j-1)f(j-1) \geq (j-1)(i-1) = ji + j - i - 1 \geq ji = jf(j),$$

што е противречност, што значи дека $f$ е идентитет.

39. Нека $a_1 < a_2 < ... < a_n$ се дадени рацонални броеви и $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Ако $f : S \to S$ е биекција таква да

$$a_1 + f(a_1) < a_2 + f(a_2) < ... < a_n + f(a_n),$$

тогаш $f$ е идентитет. Докажи!

**Решение.** а) Нека $f(a_i) = a_1$, за некој $i > 1$. Тогаш

$$a_1 + f(a_1) < a_2 + f(a_2) < ... < a_{i-1} + f(a_{i-1}) < a_i + f(a_i) = a_1 + a_i$$

и мора да биде

$$\{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_{i-1})\} \subseteq \{a_1, a_2, ..., a_{i-1}\}.$$

Но, $f(a_i) = a_1$, па затоа $f(a_k) \neq a_1$, за $k = 1, 2, ..., i-1$, од што следува

$$\{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_{i-1})\} \subseteq \{a_2, ..., a_{i-1}\},$$

што не е можно бидејќи $f$ е биекција.

б) Ако $f(a_1) = a_1$, тогаш можеме да се ограничиме на множеството $\{a_2, ..., a_n\}$ и да ги повториме размислувањата под а).

40. Најди ги сите инјекции $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ за кои важи

$$f(f(n)) \leq \tfrac{n+f(n)}{2}, \text{ за секој } n \in \mathbf{N}.$$

**Решение.** Нека $f$ е инјекција која ги задоволува условите на задачата. Да забележиме дека важи

$$f(f(n)) \leq \max\{n, f(n)\}, \text{ за секој } n \in \mathbf{N} \qquad (1).$$

Нека

$$f^k(a) = \underbrace{f(f(...f(a))...)}_{k}.$$

Да претпоставиме дека постои $a$ таков да $a > f(a)$. Тогаш од (1) следува $f^2(a) < a$ и со индукција по $k$ лесно се покажува дека

$$f^k(a) < a, \text{ за секој } k > 0. \qquad (2)$$

Бидејќи множеството $\{1, 2, ..., a-1\}$ е конечно, следува дека постојат $i, j$ такви што $0 < i < j$ и $f^i(a) = f^j(a) = f^i(f^{j-i}(a))$. Пресликувањето $f$ е инјекција, па затоа $f^{j-i}(a) = a$, што е во контрадикција со (2). Значи

$$a \leq f(a), \text{ за секој } a > 0 \qquad (3)$$

Тогаш

$$f(a) \leq f(f(a)), \text{ за секој } a \in \mathbf{N}.$$

Од друга страна заради (1) и (3) имаме

$$f(f(a)) \le \max\{a, f(a)\} = f(a)$$

т.е

$$f(f(a)) = f(a).$$

Но, $f$ е инјекција, па од последното равенство следува $f(a) = a,$ за секој $a \in \mathbf{N}$. Значи, единствена инјекција која ги задоволува условите на задачата е $f(n) = n,$ за секој $n \in \mathbf{N}$.

41. Нека $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$. Докажи дека, ако за секој $n \in \mathbf{N}$ важи

$$f(n+1) > f(f(n)),$$

тогаш $f(n) = n$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

**Решение.** Со математичка индукција по $n$ ќе докажеме дека $f(k) \ge n$, за секој $k \ge n$. За $n = 1$ тврдењето очигледно е точно. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за некој $n \in \mathbf{N}$. Нека $k \ge n+1$. Од $k-1 \ge n$ и од индуктивната претпоставка следува $f(k-1) \ge n$, па затоа $f(f(k-1)) \ge n$. Но, $f(k) > f(f(k-1))$, па затоа $f(k) \ge n+1$. Според тоа, $f(n) \ge n$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

Нека претпоставиме дека за некој $n \in \mathbf{N}$ важи $f(n) > n$. Ставаме

$$f(m) = \min_{k>n} f(k).$$

Од $m-1 \ge n$ следува $f(m-1) > n$ (за $m-1 > n$, неравенството следува од $f(m-1) \ge m-1$, а за $m-1 = n$ од $f(n) > n$). Нека $l = f(m-1)$. Од $f(m) > f(f(m-1))$ следува $f(m) > f(l)$, што е противречност.

42. Најди ги сите функции $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ такви да

1) $2f(m^2+n^2) = (f(m))^2 + (f(n))^2$, за секои $m, n \in \mathbf{N}_0$,

2) за секои $m, n \in \mathbf{N}_0$ и $m \ge n$ важи $f(m^2) \ge f(n^2)$.

**Решение.** Ако во условот 1) ставиме $m = 0$, па $n = 0$ и ги одземеме добиените равенства наоѓаме

$$(f(m))^2 - (f(n))^2 = 2(f(m^2) - f(n^2)).$$

Од претходното равенство и од условот 2) следува дека $f$ не опаѓа, т.е. дека од $m \ge n$ следува $f(m) \ge f(n)$. Ако во 1) ставиме $m = n = 0$ добиваме $f(0) = 0$ или $f(0) = 1$.

Нека $f(0) = 1$. Тогаш $2f(m^2) = (f(m))^2 + 1$, па е $f(1) = 1$. Ставаме $m = n$ и добиаме $f(2m^2) = (f(m))^2$. Со индукција лесно се докажува дека $f(2^k) = 1$, за секој $k \in \mathbf{N}_0$. Но, функцијата $f$ не опаѓа, па затоа $f(n) = 1$, за секој $n \in \mathbf{N}_0$.

Нека $f(0) = 0$. Тогаш $2f(m^2) = (f(m))^2$, т.е.

$$\frac{f(m^2)}{2} = \left(\frac{f(m)}{2}\right)^2.$$

Бидејќи $f(2)=(f(1))^2$, добиваме

$$\frac{f(2^{2^n})}{2}=(\frac{f(2^{2^{n-1}})}{2})^2=\dots=\frac{(f(1))^{2^{n+1}}}{2^{2^n}}.$$

Во $f(2m^2)=(f(m))^2$ ставаме $m=1$ и добиваме $2f(1)=(f(1))^2$, па затоа $f(1)=0$ или $f(1)=2$. За $f(1)=0$ добиваме $f(2^{2^n})=0$, за секој $n\in\mathbf{N}_0$ и како функцијата $f$ не опаѓа заклучуваме дека $f(n)=0$, за секој $n\in\mathbf{N}_0$. Ако $f(1)=2$, тогаш $f(2^{2^n})=2\cdot 2^{2^n}$. Имаме

$$(f(m+1))^2=2f((m+1)^2)\geq 2f(m^2+1)=(f(m))^2+f(1)>(f(m))^2,$$

т.е. $f(m+1)>f(m)$. Но, $f(m)$ е парен број, па затоа $f(m+1)\geq f(m)+2$. Имаме

$$\sum_{m=0}^{2^{2^n}-1}(f(m+1)-f(m)-2)=f(2^{2^n})-f(0)-2\cdot 2^{2^n}=0.$$

Следува $f(m+1)=f(m)+2$, за секој $m\in\mathbf{N}_0$, па е $f(m)=2m$.

Конечно, решенија на задачата се функциите

$$f(n)=0,\ f(n)=1,\ f(n)=2n.$$

43. Множеството природни броеви е запишано како унија на две дисјунктни подмножества $\{f(1),f(2),...,f(n),...\}$ и $\{g(1),g(2),...,g(n),...\}$ такви што

$$f(1)<f(2)<\dots<f(n)<\dots,$$
$$g(1)<g(2)<\dots<g(n)<\dots \text{ и}$$
$$g(n)=f(f(n))+1, \text{ за секој } n\geq 1$$

Најди го бројот $f(240)$.

**Решение.** Бидејќи $g(n)=f(f(n))+1$ и $f(f(n))$ е член на низата $\{f(i)\}$, постојат точно $n-1$ членови на низата $g$ кои што се помали од $f(f(n))$. Според тоа

$$f(f(n))=f(n)+n-1. \qquad (1)$$

Бидејќи $g(1)=f(f(1))+1>1$ добиваме $f(1)=1$ и $g(1)=f(1)+1=2$. Да забележиме уште дека бројот кој што претходи на членот на низата $g(i)$ мора да припаѓа на низата $\{f(i)\}$, т.е. не може два последователни броја да бидат членови на низата $\{g(i)\}$. Навистина, ако за некој $n$ важи

$$g(n+1)=g(n)+1,$$

тогаш според условот на задачата ќе важи

$$f(f(n+1))=f(f(n))+1,$$

па од (1) ќе следува

$$f(f(n))+1=f(n)+n-1 \text{ и } f(f(n+1))=f(n+1)+n,$$

т.е. $f(n)=f(n+1)$, што е во спротивност со претпоставката.

Од досега изнесеното и од (1) добиваме:

$f(2)=3,\qquad\qquad f(3)=f(f(2))=f(2)+1=4,$

$f(4)=f(f(3))=f(3)+2=6$, $\quad f(6)=f(f(4))=f(4)+3=9$,

$f(9)=9+5=14$, $\quad f(14)=22$,

$f(22)=35$, $\quad f(35)=56$,

$f(56)=90$, $\quad f(90)=145$,

$f(145)=234$, $\quad f(234)=378$.

Понатаму, од $f(35)=56$ следува $91=f(f(35))+1=g(35)$, па според тоа $f(57)=92$. Сега повторно со примена на (1) добиваме:

$$f(92)=148,\quad f(148)=239,\quad f(239)=386.$$

Конечно, $387=f(f(148))+1=g(148)$, па според тоа $f(240)=388$.

44. За секој природен број $n$ нека $f(n)$ е бројот од различните записи на бројот $n$ како збир од степени на бројот 2 со ненегативни целобројни показатели. Записите кои се разликуваат само во редоследот на собироците се сметаат за исти. На пример, $f(4)=4$ бидејќи бројот 4 може да се претстави на следните четири начини:

$$4,\ 2+2,\ 2+1+1,\ 1+1+1+1.$$

Докажи дека за секој цел број $n\geq 3$ важи $2^{\frac{n^2}{4}}<f(2^n)<2^{\frac{n^2}{2}}$.

**Решение.** Ако $n=2k+1$ е било кој непарен цел број поголем од 1, тогаш секое запишување на $n$ во бараниот облик го има 1 како еден од собироците. Ако го отстраниме, добиваме запис на бројот $2k$. И обратно, ако додадеме 1 во зписот на бројот $2k$ ќе го добиеме записот на бројот $2k+1$. Јасно, ова придружување е биективно, па затоа важи рекурентната формула

$$f(2k+1)=f(2k) \qquad (1)$$

Понатаму, ако $n=2k$ е произволен парен природен број, тогаш секој запис на $n$ има еден од следните два облика: или содржи еден собирок 1 или пак не содржи таков. Во првиот случај мажеме да одземеме 1 и да добиеме запис на бројот $2k-1$. На тој начин добиваме биекција меѓу записите од првиот вид на бројот $2k$ и сите записи на $2k-1$. Во записите од вториот вид (овде ниту еден член не е 1), можеме секој член да го поделиме со 2 и ќе го добиеме записот на бројот $k$. На тој начин ќе добиеме друга рекурзивна формула

$$f(2k)=f(2k-1)+f(k) \qquad (2)$$

Формулите (1) и (2) важат за $k\geq 1$. Очигледно $f(1)=1$ и ако дефинираме $f(0)=1$, тогаш формулата (1) важи за $k\geq 0$. Од (1) и (2) следува дека функцијата $f$ е неопаѓачка. Понатаму, од (1) следува дека бројот $f(2k-1)$ во формулата (2) може да се замени со $f(2k-2)$, па затоа точни се равенствата

$$f(2k)-f(2k-2)=f(k),\quad k=1,2,3,\dots\ .$$

Ако ги собериме овие равенства за $k=1,2,\dots,n$, ја добиваме формулата

$$f(2n)=f(0)+f(1)+\dots+f(n)\text{, за } n=1,2,\dots \qquad (3)$$

Во формулата (3) ниту еден собирок не е поголем од последниот. Бидејќи $2=f(2)\leq f(n)$ за $n\geq 2$, добиваме дека за $n\geq 2$ важи

$$f(2n)=2+f(2)+\ldots+f(n)\le 2+(n-1)f(n)\le f(n)+(n-1)f(n)=nf(n)..$$

Од овде, за $n\ge 3$ добиваме

$$f(2^n)\le 2^{n-1}f(2^{n-1})\le 2^{n-1}2^{n-2}f(2^{n-2})\le\ldots$$
$$\le 2^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1}f(2)=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot 2<2^{\frac{n^2}{2}},$$

т.е. важи горната оценка.

За да ја докажеме долната оценка, ќе докажеме дека: ако $a$ и $b$ се броеви со иста парност такви $b\ge a\ge 0$, тогаш

$$f(b+1)-f(b)\ge f(a+1)-f(a) \qquad (4)$$

Имено, ако $a$ и $b$ се парни броеви, тогаш од (1) следува дека двете страни се нула, а ако $a$ и $b$ се двата непарни, тогаш од (2) следува $f(b+1)-f(b)=f(\frac{b+1}{2})$, $f(a+1)-f(a)=f(\frac{a+1}{2})$, па неравенството (4) важи бидејќи функцијата $f$ е неопаѓачка.

Нека $r\ge k\ge 1$ и $r$ парен број. Ако во (4) последователно ги заменуваме броевите $a=r-j,\ b=r+j,\ j=0,1,2,\ldots,k-1$ и ги собереме добиените неравенства, добиваме

$$f(r+k)-f(r)\ge f(r+1)-f(r-k+1)$$

Бидејќи $r$ е парен број, важи $f(r+1)=f(r)$ па затоа

$$f(r+k)+f(r-k+1)\ge 2f(r),\ k=1,2,\ldots,r.$$

Ако ги собереме овие неравенства добиваме

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(2r)\ge 2rf(r).$$

Од (3) следува дека збирот на левата страна е $f(4r)-1$, па затоа

$$f(4r)\ge 2rf(r)+1>2rf(r), \text{ за секој } r\ge 2.$$

Во последното неравенство ставаме $r=2^{m-2}$ и добиваме

$$f(2^m)>2^{m-1}f(2^{m-2}) \qquad (5)$$

Притоа $r=2^{m-2}$ е парен број за $m>2$, а неравенството (5) важи и за $m=2$.

Нека $n$ е природен број поголем од 1. Ако $l$ е природен број таков што $2l\le n$, тогаш применувајќи го (5) за $m=n,n-1,\ldots,n-2l+2$ добиваме

$$f(2^n)>2^{n-1}f(2^{n-2})>2^{n-1}2^{n-3}f(2^{n-4})$$
$$>\ldots>2^{(n-1)+(n-3)+\ldots(n-2l+1)}f(2^{n-2l})=2^{l(n-l)}\cdot f(2^{n-2l}).$$

Ако $n$ е парен број, ставаме $l=\frac{n}{2}$, а ако $n$ е непарен ставаме $l=\frac{n-1}{2}$. Од овде добиваме:

$f(2^n)>2^{\frac{n^2}{4}}f(2^0)=2^{\frac{n^2}{4}}$, ако $n$ е парен број,

$f(2^n)>2^{\frac{n^2-1}{4}}f(2^1)=2^{\frac{n^2-1}{4}}2>2^{\frac{n^2}{4}}$, ако $n$ е непарен број.

Ја добивме бараната оценка за $n\ge 2$. За $n=1$, неравенството е тривијално.

45. Нека за функцијата $f:\mathbf{N}_0\to\mathbf{N}_0$ важи $f(f(n))+f(n)=2n+3$, за секој $n\in\mathbf{N}_0$. Пресметај $f(1997)$.

**Решение.** Ќе докажеме дека $f$ е инјекција. Ако $f(m)=f(n)$ за некои $m,n\in\mathbf{N}_0$, тогаш

$$f(f(n))+f(n)=f(f(m))+f(m),$$

па затоа $2n+3=2m+3$, т.е. $m=n$, т.е. $f$ е инјекција.

Нека $f(0)=x$. Тогаш при $n=0$, од условот добиваме $f(x)+x=3$, т.е. $f(x)=3-x$ и како $f(x)\geq 0$, добиваме дека $3-x\geq 0$. За $n=3-x$ од условот на задачата следува

$$\begin{aligned}&f(f(3-x))+f(3-x)=2(3-x)+3\\&f(f(f(x)))+f(f(x))=9-2x\\&f(2x+3-f(x))+2x-3-f(x)=9-2x\\&f(3x)+3x=9-2x\\&f(3x)=9-5x.\end{aligned}$$

Но, $f(3x)\geq 0$, па затоа $9-5x\geq 0$, т.е. $x\leq\frac{9}{5}<2$. Значи, $x\leq 1$ и како $x\geq 0$ добиваме дека $x$ е 0 или 1. Ако $x=0$, тогаш $f(0)=0$ и $f(f(0))+f(0)=2\cdot 0+3$, т.е. $0+0=3$, што е противречност. За $x=1$ имаме $f(2)+2=5$, т.е. $f(2)=3$. Ако за некој $n=k$ имаме $f(k)=k+1$, тогаш $f(f(k))+f(k)=2k+3$, т.е. $f(k+1)+k+1=2k+3$, што значи дека $f(k+1)=k+2$. Сега од принципот на математичка индукција следува дека $f(n)=n+1$, за секој $n\in\mathbf{N}_0$.

Конечно, од досега изнесеното следува дека $f(1997)=1998$.

46. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ така што за $m,n\in\mathbf{N}$ и $m>n$ важи

$$f(f(m+n)+f(m-n))=8m.$$

**Решение.** Ако ставиме $k=m+n,\ l=m-n$ добиваме

$$f(f(k)+f(l))=4(k+l).$$

Ќе докажеме дека $f$ е инјекција. Нека $f(k)=f(l)$. Тогаш

$$4(k+l)=f(f(k)+f(l))=f(f(k)+f(k))=8k,$$

па $k=l$. Од друга страна,

$$f(f(k)+f(k))=4\cdot 2k=4((k-1)+(k+1))=f(f(k-1)+f(k+1)).$$

Бидејќи $f$ е инјекција, следува дека

$$f(k)+f(k)=f(k+1)+f(k-1),$$

односно

$$f(k+1)=2f(k)-f(k-1).$$

За $k=2$,

$$f(3)=2f(2)-f(1)=2(f(2)-f(1))+f(1),$$

за $k=3$,

$$f(4)=2f(3)-f(2)=3(f(2)-f(1))+f(1)\ .$$

Со индукција се докажува дека

$$f(n)=(n-1)(f(2)-f(1))+f(1)$$

односно

$$f\left(n\right)=n(f(2)-f(1))+2f(1)-f(2).$$

Значи, $f(n)=an+b$, $a,b\in\mathbf{Z}$, ( $a=f(2)-f(1), b=2f(1)-f(2)$ .

Последниов израз го заменуваме во почетниот и добиваме:

$f(a(m+n)+b+a(m-n)+b)=8m \quad \Leftrightarrow \quad f(2am+2b)=8m \quad \Leftrightarrow$

$a(2am+2b)+b=8m \quad \Leftrightarrow \quad 2a^2m+2ab+b=8m$ .

Бидејќи последното равенство важи за секој $m\in\mathbf{N}$, добиваме дека $a^2=4, b(2a+1)=0$, односно $a=\pm2, b=0$.

За $a=-2$, се добива $f(n)=-2n$, но тоа не е пресликување од $\mathbf{N}$ во $\mathbf{N}$. Затоа, $f(n)=2n$ е единствено решение на дадената равенка.

47. За функцијата $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ важи

$$f(f(n))=4n+9\text{, за секој } n\in\mathbf{N}, \qquad (1)$$

$$f(2^k)=2^{k+1}+3\text{, за секој } k\in\mathbf{N}\cup\{0\}. \qquad (2)$$

Пресметај $f(1789)$.

**Решение.** Бидејќи

$$25=4\cdot4+9$$

$$109=4\cdot25+9$$

$$445=4\cdot109+9$$

$$1789=4\cdot445+9$$

од (1) имаме

$$f^9(4)=f^7(25)=f^5(109)=f^3(445)=f(1789).$$

Понатаму, од (2) следува

$$f^9(4)=f^9(2^2)=f^8(2^3+3)=f^8(11).$$

Сега, бидејќи

$$53=4\cdot11+9$$

$$221=4\cdot53+9$$

$$893=4\cdot221+9$$

$$3581=4\cdot893+9$$

од (1) имаме

$$f^8(11)=f^6(53)=f^4(221)=f^2(893)=3581.$$

Според тоа,

$$f(1789)=f^9(4)=f^8(11)=3581.$$

48. Најди ги сите функции $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ такви што

$$f(n|m|)+f(n(|m|+2))=2f(n(|m|+1)).$$

**Решение.** Ставаме $n=1$ и добиваме

$$f(|m|)+f(|m|+2)=2f(|m|+1).$$

Ако во последната равенка означиме $k=|m|>0$ истата го добива обликот

$$f(k+2)-f(k+1)=f(k+1)-f(k),\ k\in\mathbf{N}_0.$$

Според тоа, на множеството $\mathbf{N}_0$ таа е аритметичка прогресија, па затоа постојат $a,b \in \mathbf{Z}$ такви што

$$f(k) = ak + b \text{, за секој } k \in \mathbf{N}_0 . \qquad (1)$$

Ставаме $n = -1$ и добиваме

$$f(-|m|) + f(-(|m|+2)) = 2f(-(|m|+1)) .$$

Ако во последната равенка означиме $k = -|m| - 2 < 0$ истата го добива обликот

$$f(k+2) - f(k+1) = f(k+1) - f(k) ,\ k \in \mathbf{Z}^- .$$

Според тоа, на множеството $\mathbf{Z}^-$ таа е аритметичка прогресија, па затоа постојат $c,d \in \mathbf{Z}$ такви што

$$f(k) = ck + d \text{, за секој } k \in \mathbf{Z}^- . \qquad (2)$$

Сега, за $m = 0$ имаме $f(0) = 2f(1) - f(2)$ и $f(0) = 2f(-1) - f(-2)$, па затоа $2f(1) - f(2) = 2f(-1) - f(-2)$ и ако ги искористиме (1) и (2) добиваме $2(a+b) - (2a+b) = 2(-c+d) - (-2c+d)$, што значи $b = d$ .

Конечно, решение на задачата се сите функции од облик

$$f(n) = \begin{cases} an+b, & n \ge 0 \\ cn+b, & n < 0, \end{cases}$$

каде $a,b,c \in \mathbf{Z}$ .

49. Најди ги сите функции $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ такви што

$$\frac{f(x+y)+f(x)}{2x+f(y)} = \frac{2y+f(x)}{f(x+y)+f(y)} \text{, за секои } x,y \in \mathbf{N} . \qquad (1)$$

**Решение.** Ако во (1) ставиме $x = y$ добиваме

$$\frac{f(2x)+f(x)}{2x+f(x)} = \frac{2x+f(x)}{f(2x)+f(x)} \text{, т.е. } (\frac{f(2x)+f(x)}{2x+f(x)})^2 = 1$$

и како $\frac{f(2x)+f(x)}{2x+f(x)} > 0$ добиваме $\frac{f(2x)+f(x)}{2x+f(x)} = 1$, односно $f(2x) = 2x$. Според тоа, за секој парен природен број $n = 2x$ имаме $f(n) = f(2x) = 2x = n$.

Ако $x \neq y$, тогаш $x - y \neq 0$. Можни се следниве случаи:

- $x$ и $y$ се парни броеви,
- $x$ и $y$ се непарни броеви и
- еден од броевите $x$ и $y$ е парен, а другиот е непарен.

Бидејќи треба да ја определиме функцијата $f$ на множеството непарни броеви ќе ги разгледаме случаите кога барем еден од броевите $x$ и $y$ е непарен.

Ако $x$ и $y$ се непарни, тогаш $x + y$ е парен, па затоа од (1) и фактот дека $f(n) = n$, кога $n$ е парен број добиваме

$$\frac{x+y+f(x)}{2x+f(y)} = \frac{2y+f(x)}{x+y+f(y)} ,$$

па затоа

$$(x-y)[x-y-f(x)+f(y)] = 0$$

и како $x-y\neq 0$ последователно добиваме

$$x-y-f(x)+f(y)=0\text{, т.е. } f(x)-x=f(y)-y\,.$$

Од последното равенство, кое е исполнето на множеството непарни броеви следува дека постои $k\in\mathbf{N}$ таков што $f(x)-x=k$, т.е. $f(x)=x+k$ за секој непарен природен број $x$. Сега треба да ја определиме константата $k$. Но, ако $x$ е парен, а $y$ е непареб број, тогаш од претходно изнесеното и од (1) добиваме

$$\frac{x+y+k+x}{2x+y+k}=\frac{2y+k}{x+y+k+y+k}\,,$$

односно $k=0$. Според тоа, $f(x)=x$, ако $x$ е непарен природен број, што заедно со претходно изнесеното значи дека $f(n)=n$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

50. Даден е природен број $k$. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви да

$$f(m)+f(n)\,|\,(m+n)^k\text{, за секои } m,n\in\mathbf{N}\,.$$

**Решение.** Прво ќе докажеме дека $f$ е инјекција. Нека претпоставиме дека $a\neq b$, но $f(a)=f(b)$. Тогаш, од условот на задачата имаме дека $f(a)+f(n)\,|\,(a+n)^k$ и $f(b)+f(n)\,|\,(b+n)^k$, што значи дека за секој природен број $n$ броевите $(a+n)^k$ и $(b+n)^k$ имаат заеднички делител $f(a)+f(n)>1$, што не е можно за сите броеви $n$ за кои $\mathrm{NZD}(a+n,b+n)=1$, на пример, такви се простите броеви $n$ за кои важи $n>|a-b|$. Конечно, од добиената противречност следува дека $f$ е инјекција.

Нека $a\in\mathbf{N}$. Од $f(a)+f(n)\,|\,(a+n)^k$, $f(a+1)+f(n)\,|\,(a+1+n)^k$ и

$$\mathrm{NZD}(a+n,a+1+n)=1$$

следува

$$\mathrm{NZD}(f(a)+f(n),f(a+1)+f(n))=1,$$

па затоа

$$\mathrm{NZD}(f(a)+f(n),f(a+1)-f(a))=1.$$

Ќе докажеме дека $f(a+1)-f(a)=\pm1$. Ако претпоставиме дека последното не е точно и нека $p$ е прост делител на $f(a+1)-f(a)$, тогаш за $n=p^b-a$ важи $f(a)+f(n)\,|\,(a+n)^k=p^{kb}$, па затоа $p$ е делител на $f(a)+f(n)$, што противречни на

$$\mathrm{NZD}(f(a)+f(n),f(a+1)-f(a))=1.$$

Јасно, од добиената противречност следува дека $f(a+1)-f(a)=\pm1$, од што следува дека $f(a+1)-f(a)\equiv1$ или $f(a+1)-f(a)\equiv-1$, бидејќи промената на знакот функцијата $f$ противречи на инјективноста на $f$ (провери!). Второто равенство не е можно, бидејќи $f$ прима само позитивни вредности, па затоа $f(a+1)-f(a)=1$, за секој $a\in\mathbf{N}$.

Ако $f(1)=1+c$ за некој природен број $c$, тогаш со индукција следува дека $f(n)=n+c$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Нека претпоставиме дека $c\neq 0$ и да земеме прост број $p>2c$. Тогаш $p+2c\,|\,f(1)+f(p-1)\,|\,p^k$, што не е можно. Значи, $c=0$ и $f(n)=n$ е единствена функција која го задоволува условот на задачата.

51. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви што $(f(m))^2+f(n)\,|\,(m^2+n)^2$.

**Решение.** За $m=n=1$ добиваме

$$(f(1))^2+f(1)\,|\,(1^2+1)^2=4\text{, т.е. } f(1)(f(1)+1)\,|\,4.$$

Значи, $f(1)|4$, па затоа $f(1)=1$, $f(1)=2$ или $f(1)=4$. Од $f(1)=2$, следува $f(1)+1=3|4$, што не е можно, а од $f(1)=4$ следува $f(1)+1=5|4$, што повторно не е можно. Значи, $f(1)=1$.

Нека $m=1$ и $n=p-1$, каде $p$ е прост број. Тогаш

$$(f(1))^2+f(p-1)\,|\,(1^2+p-1)^{\ 2}=p^2\text{, т.е. } f(p-1)+1\,|\,p^2.$$

Но, $f(p-1)+1\geq 2$, па затоа $f(p-1)+1\,|\,p^2$ следува

*i)* $f(p-1)+1=p$, т.е. $f(p-1)=p-1$,

*ii)* $f(p-1)+1=p^2$, т.е. $f(p-1)=p^2-1$.

Нека $f(p-1)=p^2-1$. Ставаме $m=p-1$ и $n=1$ и добиваме дека за секој прост број $p$ бројот

$$(f(p-1))^2+f(1)=(p^2-1)^2+1=p^4-2p^2+2=a_p\,,$$

е делител на бројот

$$[(p-1)^2+1]^2=p^4-4p^3+8p^2-8p+4=b_p\,,$$

што значи дека $a_p\leq b_p$. Но,

$$\begin{aligned}b_p-a_p&=(p^4-4p^3+8p^2-8p+4)-(p^4-2p^2+2)\\&=2p^2(5-2p)+4(1-2p)<0,\end{aligned}$$

за секој $p>2$, што противречи на $a_p\leq b_p$, па затоа $f(p-1)\neq p^2-1$.

Според тоа, $f(p-1)=p-1$, за секој прост број $p$.

Нека $n$ е фиксен природен број и $p$ произволен прост број. Тогаш последователно добиваме

$$(p-1)^2+f(n)\equiv 0(\mathrm{mod}\,(p-1)^2+f(n)),$$

$$n+(p-1)^2+f(n)-n\equiv 0(\mathrm{mod}\ (p-1)^2+f(n)),$$

$$[n+(p-1)^2-(n-f(n))][n+(p-1)^2+(n-f(n))]\equiv 0(\mathrm{mod}\ (p-1)^2+f(n)),$$

$$[n+(p-1)^2]^2-[(n-f(n))]^2\equiv 0(\mathrm{mod}\ (p-1)^2+f(n)),$$

т.е.

$$[n+(p-1)^2]^2\equiv[(n-f(n))]^2\,(\mathrm{mod}\ (p-1)^2+f(n))\,. \qquad (1)$$

Од друга страна, од условот на задачата следува

$$[n+(p-1)^2]^2 \equiv 0(\text{mod }(p-1)^2+f(n)) . \qquad (2)$$

Од конгруенциите (1) и (2) добиваме

$$[(n-f(n))]^2 \equiv 0 \ (\text{mod }(p-1)^2+f(n)) , \qquad (3)$$

што значи дека за секој прост број $p$ важи

$(p-1)^2+f(n)\,|\,[(n-f(n))]^2$,

а тоа е можно ако и само ако $[(n-f(n))]^2=0$, за секој $n\in\mathbf{N}$, т.е. ако и само ако $f(n)=n$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

52. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}_0\to\mathbf{N}_0$ такви што

$$f(m+f(n))=f(f(m))+f(n)\text{ , за секои } m,n\in\mathbf{N}_0 .$$

**Решение.** За $m=n=0$ добиваме $f(0)=0$. Ако ставиме $m=0$, $n$ произволен број добиваме $f(f(n))=f(n)$, за секој $n\in\mathbf{N}_0$. Затоа дадената равенка е еквивалентна со

$$f(m+f(n))=f(m)+f(n),\ f(0)=0 .$$

Нека сега дефинираме функција $g$ со $g(n)=f(n)-n$, за $n\in\mathbf{N}_0$. Функцијата $g$ ги има својствата

$1^0$ $g(0)=0$

$2^0$ $g(f(n))=0$ , за секое $n\in\mathbf{N}_0$

$3^0$ $g$ е периодична функција, т.е. $g(m+f(n))=g(m)$, за секои $m,n\in\mathbf{N}_0$

Својствата $1^0$ и $2^0$ се очигледни и важи

$$\begin{aligned} g(m+f(n)) &= f(m+f(n))-m-f(n)=f(m)+f(n)-m-f(n) \\ &= f(m)-m=g(m), \end{aligned}$$

од каде следува $3^0$.

Можни се два случаја, и тоа:

а) $g$ е идентички еднаква на нула, и тогаш $f(n)=n$, за секој $n\in\mathbf{N}_0$.

б) $g$ не е идентички еднаква на нула. Нека $k$ е најмалиот од броевите $f(1),f(2),\ldots$. Ќе докажеме дека $k$ е најмалиот број таков што $g(k)=0$ за $k>0$. Навистина, ако $0<u<k$, добиваме $u=f(u)<k$ што противречи на изборот на $k$. Освен тоа $k$ е број од облик $f(t)$ за некој $t$, па $k$ е најмал период на функцијата $g$. Нека $0<i<k$. Бидејќи $g(f(i))=0$ следува дека $f(i)=kn_i$, за некој природен број $n_i$. Бидејќи $k$ е период, за $g$ добиваме $g(rk+s)=g(s)$ за $0\le s<k$, што значи

$$f(rk+s)-kr-s=f(s)-s\text{ , т.е. } f(rk+s)=kr+f(s)=k(r+n_s) .$$

Ако $n_1,n_2,\ldots,n_{k-1}$ се произволни природни броеви или се еднакви на нула, ќе покажеме дека оваа функција $f$ го задоволува условот на задачата. Навистина, нека $m=kp+s$ и $n=kq+t$ каде $0\le s,t<k$. Тогаш

$$\begin{aligned} f(m+f(n)) &= f(kp+s+k(q+n_t)) = f(k(p+q+n_t)+s) \\ &= k(p+q+n_t+n_s) = k(p+n_s)+k(q+n_t) \\ &= f(m)+f(n). \end{aligned}$$

Функцијата $f$ може да се запише во следниот облик

$$f(n) = ([\tfrac{n}{k}]+n_s)k$$

каде $s$ е остатокот при делење на $n$ со $k$ .

53. Нека функцијата $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$, е таква што за секој природен број $n>1$, постои прост делител $p$ на $n$ така што

$$f(n) = f(\tfrac{n}{p}) - f(p) .$$

Ако $f(2^{2007})+f(3^{2008})+f(5^{2009})=2006$, пресметај

$$f(2007^2)+f(2008^3)+f(2009^5) .$$

**Решение.** Ако $n=p$ е прост број, тогаш

$$f(p) = f(\tfrac{p}{p}) - f(p) = f(1) - f(p) ,$$

од што следува дека за секој прост број $p$ важи

$$f(p) = \tfrac{f(1)}{2} . \qquad (1)$$

Ако $n=pq$ , $p$ и $q$ се прости броеви, тогаш

$$f(n) = f(\tfrac{n}{p}) - f(p) = f(q) - f(p) = \tfrac{f(1)}{2} - \tfrac{f(1)}{2} = 0 .$$

Ако $n$ е производ од три прости броеви, тогаш

$$f(n) = f(\tfrac{n}{p}) - f(p) = 0 - f(p) = -f(p) = -\tfrac{f(1)}{2} .$$

Со индукција по бројот на прости множители на бројот $n$ , лесно се покажува дека ако $n$ е производ од $k$ прости броеви, тогаш

$$f(n) = (2-k)\tfrac{f(1)}{2} . \qquad (2)$$

Понатаму од $f(2^{2007})+f(3^{2008})+f(5^{2009})=2006$ и од (2) имаме

$$\begin{aligned} 2006 &= f(2^{2007})+f(3^{2008})+f(5^{2009}) \\ &= \tfrac{2-2007}{2}f(1)+\tfrac{2-2008}{2}f(1)+\tfrac{2-2009}{2}f(1) = -\tfrac{3\cdot 2006}{2}f(1), \end{aligned}$$

т.е

$$f(1) = -\tfrac{2}{3} \quad . \qquad (3)$$

Конечно, бидејќи $2007=3^2\cdot 223$, $2008=2^3\cdot 251$, $2009=7^2\cdot 41$, од равенствата (2) и (3) следува

$$\begin{aligned} f(2007^2)+f(2008^3)+f(2009^5) &= \tfrac{2-6}{2}f(1)+\tfrac{2-12}{2}f(1)+\tfrac{2-15}{2}f(1) \\ &= -\tfrac{27}{2}f(1) = -\tfrac{27}{2}\cdot(-\tfrac{2}{3}) = 9. \end{aligned}$$

54. Докажи дека постои единствена функција $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ таква да

$$f(m+f(n))=n+f(m+95)\text{, за секои } m,n\in\mathbf{N}.$$

Пресметај $f(1)+f(2)+...+f(19)$!

**Решение.** Нека $F(n)=f(n)-95$, за секој $n\geq 1$. За $k=m+95$ имаме

$$F(k+F(n))=n+F(k), \tag{1}$$

за секој $n\geq 1$ и за секој $k\geq 96$. Понатаму, од (1) последователно следува

$$F(m+F(n))=n+F(m)$$

$$k+F(m+F(n))=k+n+F(m)$$

$$F(k+F(m+F(n)))=F(k+n+F(m))$$

$$m+F(n)+F(k)=F(k+n)+m$$

$$F(k+n)=F(k)+F(n), \tag{2}$$

за секој $n\geq 1$ и за секој $k\geq 96$. Тврдиме дека

$$F(96q)=qF(96), \tag{3}$$

за секој $q\geq 1$. Јасно, (3) важи за $q=1$, па сега точноста на (3) следува индуктивно од (2). Нека $m$ е произволен број и нека $F(m)=96q+r$. За секој $n\geq 1$ од (1), (2) и (3) добиваме

$$\begin{aligned} m+F(n)&=F(n+F(m))=F(n+96q+r)\\ &=F(n+r)+F(96q)=F(n+r)+qF(96). \end{aligned} \tag{4}$$

Ако $1\leq n\leq 96-r$, тогаш $1+r\leq n+r\leq 96$. Ако $97-r\leq n\leq 96$, каде $r\geq 1$, тогаш $1\leq n+r-96\leq r$. Од (2) и (4) имаме

$$m+F(n)=F(n+r-96+96)+qF(96)=F(n+r-96)+(q+1)F(96) \tag{5}$$

Сега во (4) земаме $n=1$ до $n=96-r$ и ако $r\geq 1$ во (5) земаме $n=97-r$ до $n=96$ и ги собираме добиените равенства со замената во (4) и добиените равенства со замената во (5). Добиваме

$$96m=F(96)[q(96-r)+(q+1)r]=F(96)F(m). \tag{6}$$

Ако во (6) ставиме $m=96$ добиваме $96^2=[F(96)]^2$ и како $F(96)>0$ имаме $F(96)=96$. Конечно, од (6) добиваме $F(m)=m$, односно $f(m)=m+95$, за секој $m\geq 1$. Јасно

$$f(1)+f(2)+...+f(19)=19\cdot 95+\sum_{k=1}^{19}k=19\cdot 95+\tfrac{19\cdot 20}{2}=1995.$$

55. Дадена е функцијата $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}_0$, за која важи:

    $(a)$ за секои $m$ и $n$ важи $f(m+n)-f(m)-f(n)=0$ или $1$;

    $(b)$ $f(2)=0$

    $(c)$ $f(3)>0$

    $(d)$ $f(9999)=3333$.

    Пресметај $f(1982)$.

    **Решение.** За $m=n=1$ според $(a)$ и $(b)$ добиваме

    $$0=f(2)=2f(1) \text{ или } 0=2f(1)+1.$$

    Вториот случај не е можен бидејќи функцијата прима ненегативни вредности. Затоа $f(1)=0$.

За $m=2, n=1$ важи $f(3)=f(2)+f(1)=0$ или $f(3)=f(2)+f(1)+1=1$, што според $(c)$ значи $f(3)=1$.

Јасно, $f(3n+3)\ge f(3n)+f(3)=f(3n)+1$, од каде со индукција се докажува дека $f(3n)\ge n$. Ако за некој $n$ важи строго неравенство, тогаш тоа е исполнето и за секој број поголем од $n$. Бидејќи $f(9999)=3333$, заклучуваме дека $f(3n)=n$, за секој $n\le 3333$. Во нашиот случај важи

$$1982=f(3\cdot 1982)\ge f(2\cdot 1982)+f(1982)\ge 3f(1982),$$

па според тоа

$$661>\tfrac{1982}{3}\ge f(1982)\ge f(1980)+2=660.$$

Значи, $f(1982)=660$.

**Забелешка.** Функцијата $f(n)=[\frac{n}{3}]$ ги задоволува условите на задачата.

56. Да ги разгледаме сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ каде што

$$f(n^2f(m))=m(f(n))^2 \qquad (1)$$

за секои $m,n\in\mathbf{N}$. Определи ја најмалата можна вредност на $f(1998)$.

**Решение.** Ќе докажеме дека $f$ е инјекција. Нека $f(k)=f(p)$. Тогаш за произволен природен број $n$ важи $f(f(k)n^2)=f(f(p)n^2)$ и од (1) следува дека $k(f(n))^2=p(f(n))^2$, т.е. $k=p$.

Нека $f(1)=a$. Ако во (1) ставиме $n=1$ добиваме

$$f(f(m))=m(f(1))^2=a^2m, \qquad (*)$$

а ако ставиме $m=1$ добиваме

$$(f(n))^2=f(n^2f(1))=f(an^2). \qquad (**)$$

Од последните две равенства и од условот (1) добиваме

$$(f(m)f(n))^2=(f(m))^2(f(n))^2=(f(m))^2f(an^2)=f(m^2f(f(an^2)))$$
$$=f(m^2a^3n^2)=f(a(amn)^2)=(f(amn))^2,$$

и како $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, од последното равенство следува

$$f(amn)=f(m)f(n). \qquad (2)$$

Ако во (2) ставиме $n=1$ добиваме $f(am)=af(m)$, па затоа точно е равенството

$$af(mn)=f(m)f(n) \qquad (3)$$

Од (3) и од принципот на математичка индукција непосредно следува дека за произволни природни броеви $x_1,x_2,...,x_k$ важи

$$a^{k-1}f(x_1x_2...x_k)=f(x_1)f(x_2)...f(x_k). \qquad (4)$$

Ќе докажеме дека $a$ е делител на $f(n)$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Од (4) за $x_1=x_2=...=x_k=n$ се добива $(f(n))^k=a^{k-1}f(n^k)$, т.е. $a^{k-1}\,|\,(f(n))^k$, за секој природен број $k$. Нека $p$ е произволен прост број и нека $p^\alpha\,|\,a$ и $p^\beta\,|\,f(n)$, каде $\alpha,\beta\ge 0$ и притоа $p^{\alpha+1}\nmid a$ и $p^{\beta+1}\nmid f(n)$. Тогаш $(k-1)\alpha\le k\beta$, и бидејќи последното неравенство важи за секој $k$, слдеува неравенството $\alpha \le \beta$, а бидејќи $p$ е произволен прост број добиваме дека $a \mid f(n)$.

Дефинираме функција $g(n) = \frac{f(n)}{a}$. Од $a \mid f(n)$, за секој $n \in \mathbf{N}$ следува дека $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ и како $f$ е инјекција, добиваме дека и $g$ е инјекција. Понатаму, од (3) непосредно следува дека

$$g(mn) = g(m)g(n), \tag{5}$$

а од равенството $f(am) = af(m)$ и од (*) следува

$$g(g(m)) = \frac{f(g(m))}{a} = \frac{af(g(m))}{a^2} = \frac{f(ag(m))}{a^2} = \frac{f(f(m))}{a^2} = m,$$

т.е.

$$g(g(m)) = m \tag{6}$$

Лесно се проверува дека за секоја функција $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ која ги задоволува условите (5) и (6), функцијата $f(n) = \alpha g(n)$, $\alpha \in \mathbf{N}$ го задоволува условот на задачата.

Сега ќе го најдеме општиот облик на функциите $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ кои ги задоволуваат условите (5) и (6). За $n = m = 1$ од (3) следува

$$g(1) = 1 \tag{7}$$

Со $P$ ќе го означиме множеството од прости броеви. Ќе докажеме дека $g(p) \in P$, за секој $p \in P$. Навистина, ако $g(p) = uv$, од (6) и (5) следува

$$p = g(g(p)) = g(uv) = g(u)g(v).$$

Без губење од општоста можеме да претпоставиме дека $g(u) = 1$, па оттука добиваме $u = g(g(u)) = g(1) = 1$, т.е. $g(p) \in P$. Ако $n \ge 2$ е произволен природен број и $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ е неговото канонично разложување на прости множители, од (5) добиваме:

$$g(n) = (g(p_1))^{\alpha_1} \dots (g(p_k))^{\alpha_k}. \tag{8}$$

Од претходно изнесеното следува следува дека произволна функција $g : P \to P$ таква што $g(g(p)) = p$, за секој $p \in P$, со помош на равенствата (7) и (8) може еднозначно да се продолжи на множеството на природните броеви и притоа функцијата $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ги задоволува равенствата (5) и (6).

Сега ќе докажеме дека најмалата можна вредност на $f(1998)$ е 120. Од дефиницијата на функцијата $g$, равенството (8) и фактот дека $g$ е инјекција следува

$$\begin{aligned} f(1998) &= f(1)g(1998) = f(1)g(2 \cdot 3^3 \cdot 37) \\ &= f(1)g(2)(g(3))^3 g(37) \ge 1 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 5 = 120. \end{aligned}$$

Оваа вредност се за функција $f$ дефинирана со

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 2^b 3^a 4^c 37^d s, & n = 2^a 3^b 4^c 37^d s, \end{cases}$$

каде што $s$ е заемно прост со 2, 3, 5, и 37. Може да се провери дека оваа функција го задоволува условот (1).

57. Функцијата $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ е дефинирана со

$$f(1)=1,\ f(3)=3,\ f(2n)=f(n),$$
$$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n),$$
$$f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n)\ .$$

Одреди го бројот на сите броеви $n\in\mathbf{N}$, помали или еднакви на 1988, за кои $f(n)=n$.

**Решение.** За првите 20 природни броеви функцијата $f$ ги прима следниве вредности:

$f(1)=1$,
$f(2)=f(1)=1$,
$f(3)=3$,
$f(4)=f(2)=1$,
$f(5)=2f(3)-f(1)=5$,
$f(6)=f(3)=3$,
$f(7)=3f(3)-2f(1)=7$,
$f(8)=f(4)=1$,
$f(9)=2f(5)-f(2)=9$,
$f(10)=f(5)=5$,
$f(11)=3f(5)-2f(2)=13$,
$f(12)=f(6)=3$,
$f(13)=2f(7)-f(3)=11$,
$f(14)=f(7)=7$,
$f(15)=3f(7)-2f(3)=15$,
$f(16)=f(8)=1$,
$f(17)=2f(9)-f(4)=17$,
$f(18)=f(9)=9$,
$f(19)=3f(9)-2f(4)=25$
$f(20)=f(10)=5.$

На прв поглед претходните равенства не ни даваат никаква информација за функцијата $f$. Да ги запишеме овие равенства во бинарен броен систем

$f(1)=1$
$f(10)=01$
$f(11)=11$
$f(100)=001$
$f(101)=101$
$f(110)=011$
$f(111)=111$
$f(1000)=0001$
$f(1001)=1001$
$f(1010)=0101$
$f(1011)=1101$
$f(1100)=0011$
$f(1101)=1011$
$f(1110)=0111$
$f(1111)=1111$
$f(10000)=00001$
$f(10001)=10001$
$f(10010)=01001$
$f(10011)=11001$
$f(10100)=00101.$

Ќе докажеме дека функцијата $f$ секој број $n$ го пресликува во број чиј бинарен запис се добива од бројот $n$, ако цифрите ги запишеме во обратен редослед.

Ова тврдење ќе го докажеме со математичка индукција. Се договараме сите броеви да се запишани во систем со основа 2. Јасно, тоа е точно за $n=1,2,3,4,...,17,18,19,20$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за секој природен број помал од $n$. За бројот $n$ можни се следниве три случаи: *i)* $n=2k$, *ii)* $n=4k+1$ и *iii)* $n=4k+3$. Користејќи ја индуктивната претпоставка и дадената дефиниција за $f$ добиваме во случаите *i), ii)* и *iii)* добиваме:

$$f(\overline{a_k...a_1 0})=f(\overline{10}\cdot\overline{a_k...a_1 0})=f(\overline{a_k...a_1})=\overline{a_1...a_k}=\overline{0a_1...a_k}\ ;$$

$$\begin{aligned} f(\overline{a_k...a_2 01}) &= f(\overline{100}\cdot\overline{a_k...a_2}+1) = \overline{10}f(\overline{a_k...a_2 1}) - f(\overline{a_k...a_2}) \\ &= \overline{10}\cdot\overline{1a_2...a_k} - \overline{a_2...a_k} = \overline{10a_2...a_k} \\ f(\overline{a_k...a_2 11}) &= f(\overline{100}\cdot\overline{a_k...a_2}+\overline{11}) = \overline{11}f(\overline{10}\cdot\overline{a_k...a_2}+1) - \overline{10}f(\overline{a_k...a_2}) \\ &= \overline{11}f(\overline{a_k...a_2 1}) - \overline{10}f(\overline{a_k...a_2}) = \\ &= \overline{11}\cdot\overline{1a_2...a_k} - \overline{10}\cdot\overline{a_2...a_k} = \overline{11a_2...a_k}, \end{aligned}$$

со што доказот е завршен.

Од досега изнесеното следува дека треба да се пребројат оние природни броеви $n,\ n<1988$, кои имаат симетричен запис во бинарен броен систем, во литературата познати како *полиндроми*.

Јасно, број со $2k$ цифри во бинарен запис е полиндром ако и само ако има облик $\overline{1a_{k-1}...a_2a_1a_1a_2...a_{k-1}1}$, каде $a_1,a_2,...,a_k\in\{0,1\}$. Такви броеви има $2^{k-1}$. Аналогно, број во бинарен систем запишан со $2k+1$ цифра е палиндрон ако и само ако е од облик $\overline{1a_{k-1}...a_2a_1a_2...a_{k-1}1}$ каде што $a_1,a_2,...,a_k\in\{0,1\}$, и такви има $2^k$. Имајќи предвид дека $2^{10}<1988<2^{11}$, броеви помали од $2^{11}$ кои во бинарен запис се симетрични има

$$2^0+2^0+2^1+2^1+2^2+2^2+2^3+2^3+2^4+2^4+2^5=2\cdot(2^5-1)+32=94\,.$$

Меѓу нив има точно два броја поголеми од $1988=11111000100_2$ и тоа се броевите $11111011111_2$ и $11111111111_2$. Значи, бараниот број е $94-2=92$.

58. Најди ги сите функции $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ такви што $f(1)=1$ и

$$f(m+n)[f(m)-f(n)]=f(m-n)[f(m)+f(n)],\ \text{за секои } m,n\in\mathbf{Z}. \qquad (1)$$

**Решение.** Нека функцијата $f$ ги задоволува условите на задачата. Ставаме $m=n=1$ и добиваме $2f(0)=0$, т.е. $f(0)=0$. Во (1) ставаме $m=0$ и добиваме $f(n)(-f(n))=f(-n)f(n)$, т.е. $f(n)[f(-n)+f(n)]=0$. Ова значи дека $f(n)=0$ или

$$f(-n)=-f(n)\,. \qquad (2)$$

Ако претпоставиме дека $f(n)=0$ и во (1) $m$ и $n$ ги замениме со 0 и $-n$, соодветно, добиваме

$$f(-n)(-f(-n))=f(n)f(-n)\,,$$

т.е.

$$f(-n)[f(-n)+f(n)]=0\,,$$

што значи дека $f(-n)=0$ или за секој $n\in\mathbf{Z}^+$ е точно равенството (2).

Нека во (1) ставиме $m=2$ и $n=1$. Тогаш

$$f(3)[f(2)-1]=f(2)+1\,,$$

т.е.

$$(f(3)-1)(f(2)-1)=2\,,$$

и како броевите $f(3)-1$ и $f(2)-1$ се цели, добиваме дека се можни следниве случаи:

a) $f(2)-1=1,\ f(3)-1=2$, т.е. $f(2)=2,\ f(3)=3$,

b) $f(2)-1=2,\ f(3)-1=1$, т.е. $f(2)=3,\ f(3)=2$,

c) $f(2)-1=-1,\ f(3)-1=-2$, т.е. $f(2)=0,\ f(3)=-1$, и

d) $f(2)-1=-2,\ f(3)-1=-1$, т.е. $f(2)=-1,\ f(3)=0$.

Одделно ќе ги разгледаме сите шетири случаи. Имаме

a) Нека $f(2)=2,\ f(3)=3$. Ќе докажеме дека

$$f(n)=n\text{, за секој } n\in\mathbf{Z}. \tag{3}$$

Јасно, (3) важи за $n=1,2,3$. Нека претпоставиме дека $f(m)=m$, за секој $m\in\{1,2,...,n-1\}$, каде $n\geq 4$. Од (1) следува дека

$$f(n)[f(n-1)-1]=f(n-2)[f(n-1)+1]$$

и ако ја искористиме индуктивната претпоставка добиваме

$$f(n)(n-2)=n(n-2),$$

т.е. $f(n)=n$. Сега од $f(n)\neq 0$, за $n>0$ и од (2) следува дека $f(-n)=-n$, за $n>0$, што значи дека точна е формулата (3).

b) Нека $f(2)=3,\ f(3)=2$. Тогаш од (1) следува дека

$$f(4)[f(3)-1]=f(2)[f(3)+1]\text{, т.е. } f(4)=9 \text{ и}$$

$$f(5)[f(4)-1]=f(3)[f(4)+1]\text{, т.е. } 8f(5)=20,$$

што е противречност.

c) Нека $f(2)=0,\ f(3)=-1$. Ќе докажеме дека

$$f(n)=\begin{cases}0, & n=2k\\ 1, & n=4k+1\\ -1, & n=4k+3.\end{cases} \tag{4}$$

Од (1) следува $f(m+2)f(m)=f(m-2)f(m)$. Според тоа, ако $f(m)\neq 0$, тогаш $f(m+2)=f(m-2)$, па затоа $f(4k+1)=1$ и $f(4k+3)=-1$. Освен тоа

$$f(4k)[f(4k-1)-1]=f(4k-2)[f(4k-1)+1]=0 \text{ и}$$

$$f(4k+3)[f(4k+2)-1]=f(4k-3)[f(4k+2)+1,$$

па затоа $f(4k)=f(4k+2)=0$.

d) Нека $f(2)=-1,\ f(3)=0$. Слично, како и во претходниот случај, користејќи ги равенствата

$$f(3k)[f(3k-1)-1]=f(3k-2)[f(3k-1)+1],$$

$$f(3k+1)[f(3k)-1]=f(3k-1)[f(3k)+1],$$

$$f(3k+2)[f(3k)-(-1)]=f(3k-2)[f(3k)+(-1)]=0$$

со индукција по $k$ може да се докаже дека

$$f(n)=\begin{cases}0, & n=3k\\ 1, & n=3k+1\\ -1, & n=3k+2.\end{cases} \tag{5}$$

Конечно, функциите (3), (4) и (5) се единствените кои ги задоволуваат условите на задачата.

59. Нека $m \in \mathbf{N}$ и $f : \{1,2,3,...,m\} \to \mathbf{N}$ е пресликување такво што:

1) $f(1)+f(2)+...+f(m)=2s$, за некој $s \in \mathbf{N}$ и

2) $m > s$.

Докажи дека постојат $a \in \mathbf{N}_0$ и $n \in \mathbf{N}$ такви што

$$\{a+1, a+2, ..., a+n\} \subset \{1,2,...,m\} \text{ и}$$

$$f(a+1)+f(a+2)+...+f(a+n)=s.$$

**Решение.** Да означиме

$$p_1 = f(1),\ p_2 = f(1)+f(2), ..., p_s = f(1)+f(2)+...+f(s).$$

а) Ако постои $k \in \{1,2,...,s\}$ таков што $p_k = s$, тогаш тврдењето е докажано: $a=0, n=k$.

б) Нека

$$p_k \neq s \text{, за секој } k \in \{1,2,...,s-1\} \tag{1}$$

Од $f(k)>0$ за секој $k \in \{1,2,...,s-1\}$ добиваме

$$p_k < p_{k+1} \text{, за секој } k \in \{1,2,...,s-1\}. \tag{2}$$

Понатаму, од $p_s = f(1)+f(2)+...+f(s)$, $s<m$ имаме

$$p_s < 2s. \tag{3}$$

Од (1), (2) и (3) следува дека $0<p_k<2s$ и $p_k$ не е делив со $s$, па од принципот на Дирихле следува дека постојат $i, j \in \{1,2,...,s\}$, $i<j$ такви да $p_i \equiv p_j \pmod s$.

Бидејќи $0<p_i<p_j<2s$, добиваме $0<p_j-p_i<2s$ и како $s \mid (p_j-p_i)$ имаме $p_j-p_i=s$, па за $a=i$ и $n=j-i$ тврдењето е докажано.

60. Дали множеството цели броеви може да се разбие на три подмножества така да за секој цел број $n$ броевите $n, n+70$ и $n+1987$ припаѓаат на трите различни подмножества?

**Решение.** Да претпоставиме дека множествата $A, B$ и $C$ ги задоволуваат условите на задачата и нека $n$ е произволен цел број. Ставаме $p=70, q=1987$ и добиваме дека броевите $n, n+p, n+q$ припаѓаат на три различни множества. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $n \in A, n+p \in B, n+q \in C$.

Со $f_A(x)$ да ја означиме карактеристичната функција на множеството $A$, определена со

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Забележуваме дека бројот $n+p+q=(n+p)+q=(n+q)+p$ не припаѓа ниту на множеството $B$, ниту на множеството $C$, па затоа $n+p+q \in A$. Според тоа, ако $n \in A$, тогаш $n+p+q \in A$. Понатаму, заради симетрија ова својство го имаат и множествата $B$ и $C$. Исто така, ако $n \in A$, тогаш $n-p-q \in A$. Слично, на пример, ако $n-p-q \in B$, тогаш $n \in B$. Од досега изнесеното следува дека функцијата $f_A(x)$ има периода $p+q$.

Понатаму, броевите $n+p, n+2p, n+p+q$ лежат во три различни множества и затоа $n+2p\in C$. Според тоа, $n+q\in C$ и $n+2p\in C$, при што не е важно дали $n\in A$, $n=p\in B$ или обратно. Оттука, ставајќи $n=k-q$ добиваме дека од $k\in C$ следува $k+2p-q\in C$. Според тоа, функцијата $f_C(x)$ има две периоди: $2p-q$ и $p+q$. Но, $2p-q$ и $p+q$ се заемно прости, па затоа период на функцијата $f_C(x)$ е и бројот 1, т.е. $f_C(x)$ е константна функција на $\mathbf{Z}$, што е противречност. Значи бараното разбивање на множеството $\mathbf{Z}$ не е можно.

61. Нека $a,b,c,d\in\mathbf{N}_0$ и $d\neq 0$. Функцијата $f:\mathbf{N}_0\to\mathbf{N}_0$ е определена со $f(x)=[\frac{ax+b}{cx+d}], x\in\mathbf{N}_0$. Докажи дека $f$ е инјективна ако и само ако $c=0$ и $a\geq d$.

**Решение.** Нека претставиме дека $c=0$ и $a\geq d$ и нека $x,y\in\mathbf{N}_0$ се такви да $x<y$. Тогаш $y-x\geq 1$, па затоа

$$\frac{ay+b}{d}-\frac{ax+b}{d}=\frac{a}{d}(y-x)\geq 1,$$

т.е. $f(y)-f(x)>0$, што значи дека $f$ е инјекција.

За да го докажеме обратното тврдење ќе докажеме дека кој било од условите

1) $c\neq 0$ и

2) $c=0$ и $a<d$

повлекува дека $f$ не е инјекција.

Во случајот 1) можеме да запишеме

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}.$$

Ако $\frac{a}{c}=\alpha$ е цел број, тогаш во еден од интервалите $(\alpha-1,\alpha]$ и $[\alpha,\alpha+1)$, во зависност од знакот на $bc-ad$, за доволно голем број $x$ ќе се наоѓаат сите броеви $\frac{ax+b}{cx+d}$, што значи дека функцијата $f$ не е инјекција. Слично, ако $\alpha$ не е цел број и $[\alpha]=\beta$, тогаш за доволно голем број $x$ сите броеви $\frac{ax+b}{cx+d}$ ќе се наоѓаат во интервалот $[\beta,\beta+1)$, па затоа и во овој случај $f$ не е инјекција.

Во случајот 2) да означиме $y_n=\frac{an+b}{d}$, за $n\in\mathbf{N}_0$ и да избереме природен број $k$, таков што $\frac{a}{d}<1-\frac{1}{k}$. Бидејќи за $n\in\mathbf{N}_0$ важи $y_{n+1}-y_n=\frac{a}{d}$, добиваме $y_k-y_0=k\frac{a}{d}<k-1$. Но, тоа значи дека за некој $i\in\{0,1,...,k-1\}$ броевите $y_i$ и $y_{i+1}$ припаѓаат на ист интервал од обликот $[m.m+1)$, за некој $m\in\mathbf{N}_0$. Тогаш $f(i)=f(i+1)$, што значи дека $f$ не е инјекција.

62. Најди функција $f:\mathbf{Q}^+\to\mathbf{Q}^+$, таква што

$$f(xf(y))=\frac{f(x)}{y}, \qquad (1)$$

за секои $x,y\in\mathbf{Q}^+$.

**Решение.** Ако $f(y_1)=f(y_2)$, тогаш $xf(y_1)=xf(y_2)$, па затоа од (1) следува

$$\frac{f(x)}{y_1}=f(xf(y_1))=f(xf(y_2))=\frac{f(x)}{y_2},$$

од каде следува дека $y_1=y_2$, т.е. функцијата $f$ е инјекција. Ако во (1) земеме $y=1$ и искористиме дека $f$ е инјекција добиваме $f(1)=1$. За $x=1$ имаме

$$f(f(y))=\frac{1}{y}, \qquad (2)$$

за секој $y\in\mathbf{Q}^+$. Ако $f$ ја примениме на последното равенство, добиваме

$$f(\tfrac{1}{y})=f[f(f(y)]=f(f[f(y)])=\frac{1}{f(y)},$$

т.е.

$$f(y)f(\tfrac{1}{y})=1, \qquad (3)$$

за секој $y\in\mathbf{Q}^+$. Сега, ако во (1) ставиме $y=\frac{1}{f(t)}$, тогаш користејќи ги (2) и (3) добиваме

$$f(x)f(t)=f(xf(\tfrac{1}{f(t)}))=f(xf(f(\tfrac{1}{t})))=f(xt),$$

т.е.

$$f(xt)=f(x)f(t), \qquad (4)$$

за секои $x,t\in\mathbf{Q}^+$. Со тоа покажавме дека секое решение на равенката (1) ги задоволува условите (2) и (4). Обратно, ако за функцијата $f$ се исполнети условите (2) и (4), тогаш за секои $x,y\in\mathbf{Q}^+$ важи

$$f(xf(y))=f(x)f(f(y))=f(x)\frac{1}{y}=\frac{f(x)}{y},$$

т.е. таа е решение на равенката (1).

Останува да се конструира функција $f:\mathbf{Q}^+\to\mathbf{Q}^+$ за која важат (2) и (4). Нека $p_i$ е $i-$тиот прост број. Дефинираме $f(1)=1$ и

$$f(p_k)=\begin{cases} p_{k+1}, & \text{ако } k \text{ е парен број,}\\ \frac{1}{p_{k-1}}, & \text{ако } k \text{ е непарен број.}\end{cases} \qquad (5)$$

Ако $n=p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_k^{n_k}$, каде $n_1,n_2,...,n_k\geq 0$, дефинираме

$$f(n)=f(p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_k^{n_k})=(f(p_1))^{n_1}(f(p_2))^{n_2}\dots(f(p_k))^{n_k},$$

и на крајот ако $\frac{m}{n}$ е рационален број, каде $m,n\in\mathbf{N}$ ставаме $f(\frac{m}{n})=\frac{f(m)}{f(n)}$. Лесно се проверува дека оваа функција е добро дефинирана, т.е. дека од $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$, тогаш $f(\frac{m}{n})=\frac{f(m)}{f(n)}=\frac{f(p)}{f(q)}=f(\frac{p}{q})$. Лесно се проверува дека за вака дефинираната функција условот (4) е исполнет. Понатаму, од (5) непосредно седува дека $f(f(p))=\frac{1}{p}$, за секој прост број $p$. Понатаму, со индукција по $s$ лесно се докажува дека

$$f(m_1 m_2 ... m_s) = f(m_1) f(m_2) ... f(m_s)\,, \qquad (6)$$

Ако $m_1, m_2, ..., m_s \in \mathbf{N}$. Затоа, за секој природен број $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_k^{n_k}$ добиваме

$$\begin{aligned} f(f(n)) &= f((f(p_1))^{n_1} (f(p_2))^{n_2} \dots (f(p_k))^{n_k}) \\ &= [f(f(p_1))]^{n_1} [f(f(p_2))]^{n_2} \dots [f(f(p_k))]^{n_k} \\ &= (\tfrac{1}{p_1})^{n_1} (\tfrac{1}{p_2})^{n_2} ... (\tfrac{1}{p_k})^{n_k} = \tfrac{1}{n}. \end{aligned}$$

Конечно, за секој $\frac{m}{n} \in \mathbf{Q}^+$ добиваме

$$f(f(\tfrac{m}{n})) = f(\tfrac{f(m)}{f(n)}) = \tfrac{f(f(m))}{f(f(n))} = \tfrac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n}} = \tfrac{1}{\frac{m}{n}}\,,$$

т.е. исполнет е условот (2).

63. Нека $X$ е множеството од сите конечни слогови чии членови се броевите 0 и 1 и $F: X \to X$ е функција дефинирана на следниов начин: за $x \in X$, $F(x)$ го добиваме така да во слогот $x$ секоја единица ја заменуваме со 01, а секоја нула со 10.

Колку парови 00 се појавуваат во слогот $F^n(1) = \underbrace{F(F(...F}_{n \text{ пати}}(1)...))$?

**Решение.** Со $a_n$ да го означиме бројот на 00 во слогот

$$F^n(1) = \underbrace{F(F(...F}_{n \text{ пати}}(1)...))\,.$$

Од равенствата

$$F(1) = 01$$

$$F^2(1) = 1001$$

$$F^3(1) = 01101001$$

$$F^4(1) = 1001011001101001$$

$$F^5(1) = 01101001100101101001011001101001$$

добиваме $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 3, a_5 = 5$. Понатаму, да забележиме дека важат следниве тврдења, кои се докажуваат со математичка индукција:

a) Слогот $F^n(1)$ има $2^n$ членови,

b) Втората половина на слогот $F^{n+1}(1)$ е еднаква на слогот $F^n(1)$.

c) Слогот $F^{2n}(1)$ е симетричен со два централни членови еднакви на 00.

d) Првата половина на слогот $F^{2n+1}(1)$ се добива од втората кога секоја единица се замени со нула, а секоја нула со единица. Затоа оваа низа содржи еднаков број парови на нули и единици.

e) Бројот на паровите 11 во слогот $F^{2n}(1)$ од бројот на паровите 00 во тој слог.

Од наведените својства следува дека за секој природен број $n$ важи

$$a_{2n}=2a_{2n-1}+1 \text{ и } a_{2n+1}=2a_{2n}-1,$$

па затоа

$$\begin{aligned}a_{2n}&=2a_{n-1}+1=2^2a_{2n-2}-2+1=2^3a_{2n-3}+4-2+1=\dots\\&=2^{2n-1}a_1+(2^{2n-2}-2^{2n-3}+2^{2n-4}-\dots+2^2-2+1)=\tfrac{1-(-2)^{2n-1}}{1-(-2)}=\tfrac{2^{2n-1}+1}{3},\end{aligned}$$

$$a_{2n+1}=2\tfrac{2^{2n-1}+1}{3}-1=\tfrac{2^{2n}-1}{3}.$$

64. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви да

$$f(f(n))=n^2, \text{ за секој } n\in\mathbf{N}.$$

**Решение.** Нека претпоставиме дека за функцијата $f$ важи $f(f(n))=n^2$. Од $f(m)=f(n)$ следува $m^2=f(f(m))=f(f(n))=n^2$, па затоа $m=n$, што значи дека $f$ е инјекција.

Имаме $f(n^2)=f(f(f(n)))=(f(n))^2$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Нека $f(1)=a$. Тогаш $a=f(1^2)=(f(1))^2=a^2$, па затоа $a=1$, т.е. $f(1)=1$. Ако $f(\mathbf{N})=\mathbf{N}$, тогаш ќе важи $f(f(\mathbf{N}))=f(\mathbf{N})=\mathbf{N}$, што противречи на условот на задачата. Според тоа, $f(\mathbf{N})\neq\mathbf{N}$. Нека

$$S_i=\{n^{2^i}\mid n\in\mathbf{N}, n\neq1\}, i=0,1,2,3,\dots \text{ и } M_i=S_i\setminus S_{i+1}.$$

Лесно се гледа дека $\mathbf{N}=\{1\}\cup\bigcup_{i=0}^{\infty}M_i$. Нека $A=S_0\setminus f(\mathbf{N})$. Множеството $A$ не е празно. Бидејќи $S_1\subset f(\mathbf{N})$, имаме $A\subset M_0$ и нека $B=M_0\setminus A$. Ќе докажеме дека $f(A)=B$ и дека рестрикцијата $f:A\to B$ е биекција. За секој $a\in A$ имаме $f(a)\in M_0$, бидејќи во спротивно од $f(a)\in S_1$ ќе следува

$$f(a)=n^2=f(f(n)),$$

односно $a=f(n)\in f(\mathbf{N})$. Значи, $f(a)\in B$. За секој $b\in B\subset f(\mathbf{N})$ постои $c$ така да $f(c)=b$. Ако $c\in f(\mathbf{N})$, тогаш постои $k$ така да $c=f(k)$ и $b=f(f(k))=k^2\in S_1$, што противречи на $B\cap S_1=\emptyset$. Значи, $f(A)=B$ и рестрикцијата на $f$ на $A$ е биекција. Но, тоа значи дека $|A|=|B|=\infty$. Од досега изнесеното следува дека за секоја функција која ги задоволува условите на задачата постои разбивање $M_0=A\cup B$, такво да $f:A\to B$ е биекција.

Ќе го докажеме обратното тврдење. Нека $M_0=A\cup B$, $|A|=|B|=\infty$, $A\cap B=\emptyset$ и $g:A\to B$ е биекција. Ќе докажеме дека постои единствена функција $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ која ги задоволува условите на задачата и таква да $f(a)=g(a)$, за секој $a\in A$. Функцијата $f$ на $\mathbf{N}=\{1\}\cup\bigcup_{i=0}^{\infty}M_i$ ја дефинираме на следниот начин: $f(1)=1$ и на $\bigcup_{i=0}^{\infty}M_i$ ја дефинираме $f$ индуктивно:

$1^0$ Случај $i=0$. $M_0=A\cup B$. За $a\in A$ ставаме $f(a)=g(a)$, а за $b\in B$ постои $a\in A$ таков да $b=f(a)$, па затоа $f(b)=f(f(a))=a^2$.

$2^0$ Нека претпоставиме дека $f$ е дефинирана на $M_i$. Функцијата $f$ ќе ја дефинираме на $M_{i+1}$ користејќи го фактот дека за $x\in M_{i+1}$ постои единствен $y\in M_i$, така да $x=y^2$. Од $f(x)=f(y^2)=(f(y))^2$ добиваме $f(x)$ за $x\in M_{i+1}$.

65. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви да, за секои природни броеви $a$ и $b$, постои недегениран триаголник чии страни се со должини $a, f(b)$ и $f(b+f(a)-1)$.

**Решение.** За $a=1$ добиваме дека постои триаголник со страни $1, f(b)$ и $f(b+f(1)-1)$. Од $f(b), f(b+f(1)-1)\in\mathbf{N}$, следува $f(b)=f(b+f(1)-1)$. Ако $f(1)\neq 1$, добиваме дека функцијата $f$ е периодична, што значи дека е ограничена со граница $M=\max\limits_{b\in\{1,2,...,f(1)-1\}} f(b)$. За $a>2M$, бидејќи $a$, $f(b)\leq M$ и $f(b+f(a)-1)\leq M$ се страни на триаголник, имаме противречност. Значи, $f(1)=1$.

Со замена $b=1$, следува дека постои триаголник со страни $a, 1, f(f(a))$ и како $a, f(f(a))\in\mathbf{N}$, добиваме $f(f(a))=a$, за секој $a\in\mathbf{N}$. Според тоа, $f$ е биекција.

Со индукција ќе докажеме дека

$$f((n-1)(f(2)-1)+1)=n, \text{ за секој } n\in\mathbf{N}. \qquad (1)$$

За $n=1$ имаме $f((2-1)(f(2)-1)+1)=f(1)=1$, што значи дека важи (1), а за $n=2$ имаме $f((2-1)(f(2)-1)+1)=f(f(2))=2$. Што значи дека важи (1). Нека $n>2$ и нека (1) важи за сите броеви помали или еднакви на $n-1$. Тогаш со замена $a=2$ и $b=(n-2)(f(2)-1)+1$ добиваме дека

$$2,\ f((n-2)(f(2)-1)+1)=n-1 \text{ и}$$
$$f((n-2)(f(2)-1)+1+f(2)-1)=f((n-1)(f(2)-1)+1)$$

се страни на триаголник. Значи, $n-3<f((n-1)(f(2)-1)+1)<n+1$, па како сите вредности на $f$ се во $\mathbf{N}$ добиваме $f((n-1)(f(2)-1)+1)\in\{n-2,n-1,n\}$ Меѓутоа, $f((n-1)(f(2)-1)+1)\in\{n-2,n-1\}$, бидејќи $f((k-1)(f(2)-1)+1)=k$ за секој $k\leq n-1$ и $f$ е биекција. Значи, $f((n-1)(f(2)-1)+1)=n$, па од принципот на математичка индукција следува дека (1) важи за секој $n\in\mathbf{N}$.

Ако искористиме $f(f(a))=a$, со замена $n=f(2)$ во (1) добиваме дека $2=f(f(2))=(f(2)-1)^2+1$, па затоа $f(2)=2$. Конечно со замена во (1) добиваме дека $f(n)=n$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

Со непосредна проверка се докажува дека функцијата $f(n)=n$, $n\in\mathbf{N}$ навистина е решение на задачата.

66. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви да

$$f(f(m)^2+2f(n)^2)=m^2+2n^2 \text{, за секои } m,n\in\mathbf{N}. \qquad (1)$$

**Решение.** Нека $f(m_1)=f(m_2)$ и $n\in\mathbf{N}$. Тогаш

$$m_1^2+2n^2=f(f(m_1)^2+2f(n)^2)=f(f(m_2)^2+2f(n)^2)=m_2^2+2n^2,$$

па затоа $m_1=m_2$, т.е. $f$ е инјекција. Според тоа,

$$f(m)^2+2f(n)^2=f(p)^2+2f(q)^2 \quad\Leftrightarrow\quad m^2+2n^2=p^2+2q^2. \qquad (2)$$

Нека $f(1)=a$. Тогаш ако во (1) ставиме $m=n=1$ добиваме $f(3a^2)=3$. Од (2) за $m=5a^2,=na^2,\ p=q=3a^2$ следува

$$f(5a^2)^2+2f(a^2)^2=f(3a^2)^2+2f(3a^2)^2=3f(3a^2)^2=27.$$

Бидејќи во множеството $\mathbf{N}$ единствени решенија на равенката $x^2+2y^2=27$ се $(x,y)=(3,3)$ и $(x,y)=(5,1)$ следува $f(a^2)=1$ и $f(5a^2)=5$. Повторно од (2), со замена $m=5a^2, n=2a^2,\ p=a^2, q=4a^2$, добиваме

$$2f(4a^2)^2-2f(2a^2)^2=f(5a^2)^2-f(a^2)^2=24.$$

Бидејќи во $\mathbf{N}$ единствено решение на равенката $x^2-y^2=12$ е $(x,y)=(4,2)$, добиваме $f(2a^2)=2$ и $f(4a^2)=4$. Од индентитетот

$$(k+4)^2+2(k+1)^2=k^2+2(k+3)^2$$

следува

$$f((k+4)a^2)^2=2f((k+3)a^2)^2-2f((k+1)a^2)^2+f(ka^2)^2.$$

Сега, со индукција се докажува дека $f(ka^2)=k$. Специјално за $a=k$ добиваме $f(a^3)=f(a)=1$ и како $f$ е инјекција следува дека $a=1$. Според тоа, $f(k)=k$, $k\in\mathbf{N}$ е единствената функција која е решение на равенката (1).

67. Нека $k$ е природен број. За $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, нека низата функции $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ е дефинирана о $f_1=f$ и $f_{m+1}=f\circ f_m$, за $m\geq 1$. Функцијата $f$ е $k-$фина ако за секој $n\in\mathbf{N}$ важи $f_k(n)=f(n)^k$.

а) За кои $k$ постои инјективна $k-$фина функција?

б) За кои $k$ постои сурјективна $k-$фина функција?

**Решение.** За $k=1$ условот се сведува на $f(n)=f(n)$, т.е. секоја функција е $1-$ фина, што значи дека одговорот на прашањата под а) и б) во овој случај е потврден.

Ако $k\geq 2$ и $f$ е сурјективна $k-$фина функција, тогаш за секој $a_0\in\mathbf{N}$ постои низа $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ така да $a_i=f(a_{i+1})$, за секој $i\in\mathbf{N}_0$. Притоа

$$a_0=f_k(a_k)=f(a_k)^k,$$

што не е можно ако $a_0$ не е $k-$ти степен на некој природен број, па затоа за $k\geq 2$ не постои сурјективна $k-$фина функција.

Нека $k \geq 2$ и функцијата $f$ е дефинирана индуктивно на следниов начин: нека $n$ е најмалиот број за кој функцијата $f$ не е сеуште дефинирана;

*i)* ако $n=1$, тогаш $f(n)=1$;

*ii)* ако $n=a^k$ за некој $a \in \mathbf{N}$, тогаш $f(n)=f(a)^k$;

*iii)* ако $n$ не е $k-$ти степен на природен број и ако $n=n_1, n_2, ..., n_{k-1}$ се најмалите $k-1$ природни броеви кои не се $k-$ти степени на природни броеви и за кои дотогаш $f$ не е дефинирана, тогаш

$$f(n_1)=n_2, f(n_2)=n_3, ..., f(n_{k-2})=n_{k-1}, f(n_{k-1})=n_1^k .$$

Тогаш функцијата $f$ е добро дефинирана.

Ако $n \in \mathbf{N}$ е број кој не е $k-$ти степен на природен број, постојат $n_1, n_2, ..., n_{k-1}$ како во *iii*), така да $n=n_i$ за некој $1 \leq i \leq k-1$. Притоа $f_k(n_i)=f_i(n_1^k)=f_i(n_1)^k=f(n_i)^k$, првото и третото равенство се добиваат со примена на *iii*), а второто со примена на *ii*). Ако $n \in \mathbf{N}$ е $k-$ти степен на природен број различен од 1, тогаш е $n=n_i^{k^s}$ за некои $i, s \in \mathbf{N}$, каде $n_i$ не е $k-$ти степен на природен број, па од претходното и со последователна примена на *ii*) следува $f_k(n)=f_k(n_i)^{k^s}=f(n_i)^{k^{s+1}}=f(n)^k$. Според тоа, функцијата $f$ е $k-$фина.

Ако $a \neq b$ и $a$ и $b$ не се $k-$ти степени на природни броеви, според *iii*) имаме $f(a) \neq f(b)$. Во спротивно, ако $f(a)=f(b)$, со последователна примена на *ii*), бидејќи функцијата $x^k$ е инјективна на $\mathbf{N}$, добиваме дека $f(n_i)=f(m_j^{k^s}), 1 \leq i, j \leq k-1$, каде $n_i, m_j$ не се $k-$ти степени на природен број, т.е. за нив $f$ е дефинирана во *iii*). Бидејќи $f(m_j^{k^s})=f(m_j)^{k^s}$, следува $i=k-1$, т.е. постои $n_1$ таков што $n_1=f(m_j)^{k^{s-1}}$ и $n_1$ не е $k-$ти степен на природен број. Следува $s=1$, па затоа $m_{j+1}=f(m_j)=n_1$, што според *iii*) не е можно. Значи, функцијата $f$ е инјекција.

Според тоа, за $k \geq 2$ со претходната конструкција е дефинирана $k-$фина функција, т.е. одговорот на прашањето под а) е за секој природен број $k$.

68. Нека $f: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ е таква да за секои $x, y \in \mathbf{N}$ важи:

(1) $f(x,x)=x+2$,

(2) $f(x,y)=f(y,x)$ и

(3) $(x+y)f(x,y)=yf(x,x+y)$.

Пресметај $f(9,7)$.

**Решение.** Нека $z=x+y$. Од третиот услов добиваме

$$f(x,z)=\tfrac{z}{z-x} f(x,z-x) .$$

Според тоа,

$$f(9,7)=f(7,9)=\tfrac{9}{2}f(7,2)=\tfrac{9}{2}f(2,7)=\tfrac{9}{2}\cdot\tfrac{7}{5}f(2,5)$$
$$=...=\tfrac{9}{2}\cdot\tfrac{7}{5}\cdot\tfrac{5}{3}\cdot\tfrac{3}{1}\cdot\tfrac{2}{1}f(1,1)=189.$$

69. Нека функцијата $f:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ е таква да

(1) $f(1,1)=2$,

(2) $f(i+1,j)=2(i+j)+f(i,j)$ и

(3) $f(i,j+1)=2(i+j-1)+f(i,j)$.

Најди ги сите парови природни броеви $(i,j)$ такви да $f(i,j)=1994$.

**Решение.** Со примена на (1) и (2) добиваме

$$f(k,1)=2k+f(k-1,1)=...=2+4+...+2k=k(k+1).$$

Слично, со примена на (3) имаме

$$\begin{aligned}f(k,h)&=f(k,h-1)+2(k+h-2)=...\\&=k(k+1)+2k+2(k+1)+...+2(k+h-2)\\&=k^2+2kh-k+h^2-3h+2\\&=(k+h)^2-(k+h)-2h+2.\end{aligned}$$

Од $f(k,h)=1994$ добиваме

$$h=\tfrac{(k+h)^2-(k+h)-1992}{2},$$

па од условот $k+h\geq h>0$ следува $k=7,h=39$.

70. Нека $f:\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}^+$ е функција за која важи:

$$f(xy,z)=f(x,z)f(y,z)$$
$$f(z,xy)=f(z,x)f(z,y)$$
$$f(x,1-x)=1$$

за секои $x,y,z\in\mathbf{Q}$. Докажи $f(x,x)=1,\ f(x,-x)=1$ и $f(x,y)f(y,x)=1$, за секои $x,y\in\mathbf{Q}$.

**Решение.** Ако во првото равенство ставиме $x=y=0$ и $x=y=1$ добиваме $f(0,z)=1,\ f(1,z)=1$. Нека сега $x=y=-1$. Имаме $1=f(1,z)=(f(-1,z))^2$, односно $f(-1,z)=1$. Слично, од второто равенство добиваме дека $f(z,0)=f(z,1)=f(z,-1)=1$. Специјално $f(0,0)=1$ и $f(0,z)f(z,0)=1$. Сега нека $x\neq 0$. Од $1=f(1,z)=f(x,z)f(\tfrac{1}{x},z)$, следува

$$f(x,z)=\frac{1}{f(\frac{1}{x},z)}.$$

Од

$$1=\tfrac{1}{f(x,1-x)}=f(\tfrac{1}{x},1-x)=f(\tfrac{1}{x},\tfrac{1-x}{x}\cdot x)=f(\tfrac{1}{x},\tfrac{1-x}{x})f(\tfrac{1}{x},x),$$

$$f(\tfrac{1}{x},\tfrac{1-x}{x})=f(\tfrac{1}{x},\tfrac{1}{x}-1)=f(\tfrac{1}{x},\tfrac{1}{x}-1)f(\tfrac{1}{x},-1)=f(\tfrac{1}{x},1-\tfrac{1}{x})=1,$$

следува $f(\tfrac{1}{x},x)=1$. Од

$$1=f(x,1)=f(x,\tfrac{1}{x})=f(x,x)=f(x,x)f(x,-1)=f(x,-x)$$

имаме $f(x,x)=f(x,-x)=1$. За $x\neq 0, y\neq 0$ важи

$$f(x,y)=f(x,y)f(\tfrac{1}{y},y)=f(\tfrac{x}{y},y)=f(\tfrac{x}{y},y)f(\tfrac{x}{y},\tfrac{x}{y})$$
$$=f(\tfrac{x}{y},x)=f(\tfrac{x}{y},x)f(\tfrac{1}{x},x)=f(\tfrac{1}{y},x)=\tfrac{1}{f(y,x)}.$$

71. Докажи дека пресликувањето $f:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ определено со

$$f(i,j)=\begin{cases}(i-1)^2+2j-1, & j\leq i,\\ (j-1)^2+2i, & i<j,\end{cases}$$

е биекција.

**Решение.** Дефиницијата на пресликувањето $f$ ќе ја запишеме во следниов облик:

$$f(i,j)=[-1+\max\{i,j\}]^2+2\min\{i,j\}-\begin{cases}0, & \text{ако } i<j,\\ 1, & \text{ако } i\geq j.\end{cases} \qquad (1)$$

Ако $i=j$ имаме

$$f(i,i)=(i-1)^2+2i-1=i^2. \qquad (2)$$

Ако $i\neq j$ имаме

$$\max\{i,j\}-1>0,$$

а исто така

$$[\max\{i,j\}-1]^2+2\min\{i,j\}<[\max\{i,j\}]^2.$$

Бидејќи $2\min\{i,j\}\geq 2$, добиваме дека $i\neq j$ важи

$$[\max\{i,j\}-1]^2<f(i,j)<[\max\{i,j\}]^2. \qquad (3)$$

Ќе ја докажеме сурјективноста. Ако $n=k^2$, тогаш $n=f(k,k)$. Нека $n=k^2+r$, каде $0<r\leq 2k$. За $r$ парен број, ставаме $\max\{i,j\}=k+1$ и $\min\{i,j\}=\frac{r}{2}$. Тогаш

$$f(\tfrac{r}{2},k+1)=(k+1-1)^2+2\tfrac{r}{2}-0=k^2+r=n.$$

Ако $r$ е непарен број, тогаш земеме $\max\{i,j\}=k+1$ и $\min\{i,j\}=\frac{r+1}{2}$. Тогаш $k+1>\frac{r+1}{2}$, па затоа

$$f(k+1,\tfrac{r+1}{2})=(k+1-1)^2+2\tfrac{r+1}{2}-1=k^2+r=n.$$

Да ја докажеме инјективноста. Од (2) следува дека $f(i,i)\neq f(j,j)$, за $i\neq j$. Од (3) следува дека $f(i,i)\neq f(j,k)$, ако е $j\neq k$. Нека $i_1\neq j_1$ и $i_2\neq j_2$ и нека $f(i_1,j_1)=f(i_2,j_2)$. Ќе докажеме дека $(i_1,j_1)=(i_2,j_2)$. Од (3) и фактот дека секој природен број на единствен начин се сместува меѓу два квадрати, следува $\max(i_1,j_1)=\max(i_2,j_2)$. Броевите $f(i_1,j_1)$ и $f(i_2,j_2)$ се со иста парност, па од (1) добиваме дека

$$(i_1-j_1)(i_2-j_2)>0 \text{ и } \min(i_1,j_1)=\min(i_2,j_2).$$

Конечно, од претходно изнесеното следува дека $i_1=i_2,\ j_1=j_2$, со што е докажана инјективноста на $f$.

72. Функцијата $f(x,y)$ ги задоволува условите
    (1) $f(0,y)=y+1$,
    (2) $f(x+1,0)=f(x,1)$ и
    (3) $f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y))$
    за секои $x$, $y\in\mathbf{N}_0$. Најди $f(4,1981)$.

    **Решение.** Од $(1)$ и $(2)$ добиваме
    $$f(1,0)=f(0,1)=2.$$
    Од последното равенство и од $(1)$ и $(3)$ при $x=0$ добиваме
    $$f(1,y+1)=f(0,\ f(1,y))=f(1,y)+1,\text{ за } y\ge 0,$$
    од што со индукција добиваме
    $$f(1,y)=y+2,\text{ за } y\ge 0. \qquad (4)$$
    Од $(2)$ и $(4)$ следува $f(2,0)=f(1,1)=3$. Од $(3)$ за $x=1$ и $(4)$ се добива
    $$f(2,y+1)=f(1,\ f(2,y))=f(2,y)+2,\text{ за } y\ge 0.$$
    Користејќи ги овие два резултати со помош на математичка индукција добиваме
    $$f(2,y)=2y+3,\text{ за } y\ge 0. \qquad (5)$$
    Ако во $(3)$ ставиме $x=2$, тогаш од $(5)$ добиваме
    $$f(3,y+1)=f(2,\ f(3,y))=2f(3,y)+3,\text{ за } y\ge 0.$$
    Од последното равенство и од равенството
    $$f(3,0)=f(2,1)=5=2^3-3,$$
    со примена на индукција добиваме
    $$f(3,y)=2^{y+3}-3,\text{ за } y\ge 0. \qquad (6)$$
    Ако во (3) ставиме $x=3$, тогаш од $(6)$ добиваме
    $$f(4,y+1)=f(3,\ f(4,y))=2^{f(4,y)+3}-3,\ \text{ за } y\ge 0.$$
    Бидејќи $f(4,0)=f(3,1)=2^4-3$, со индукција добиваме
    $$f(4,y)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3,\text{ за } y+3 \text{ двојки и за } y\ge 0,$$
    односно
    $$f(4,1891)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3\ ,\ \text{(1984 двојки)}.$$

73. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви што
    *i)* $f(n!)=f(n)!$, за секој $n\in\mathbf{N}$,
    *ii)* $m-n$ е делител на $f(m)-f(n)$ за секои $m,n\in\mathbf{N}, m\ne n$.

    **Решение.** Да забележиме, дека од $f(n_0)=n_0$ за некој $n_0\ge 3$ следува $f(n_k)=n_k$ за секој $k\ge 0$, каде $n_k=n_{k-1}!$. Од друга страна,
    $$m-n_k \mid f(m)-f(n_k)=f(m)-n_k=f(m)-m+m-n_k,$$

од каде следува дека $m-n_k \mid f(m)-m$. Според тоа, $f(m)-m$ има бесконечно многу делители, па затоа $f(m)=m$, за секој $m$.

Од $f(1)=f(1!)=f(1)!$ и $f(2)=f(2!)=f(2)!$ следува, дека $f(1), f(2)\in\{1,2\}$. Оттука и од $4=3!-2 \mid f(3!)-f(2)=f(3!)-f(2)$, следува дека $f(3)\le 3$.

Ако $f(3)=3$, тогаш $f(m)=m$, за секој $m\in\mathbf{N}$.

Нека $f(3)\in\{1,2\}$ и $n>3$ е произволен природен број. Тогаш од

$$n!-3 \mid f(n!)-f(3)=f(n)!-f(3)$$

следува, дека $f(n)!$ не се дели со 3, т.е. $f(n)\in\{1,2\}$. Ако $f$ не е константа, тогаш постојат природни броеви $m$ и $m$ , за кои $f(n)=1$ и $f(m)=2$. Тогаш за $k=2+\max\{m,n\}$ од $k-m \mid f(k)-f(m)\in\{-1,0,1\}$ следува, дека $f(k)=f(m)=2$ и аналогно $f(k)=1$ , што е противречност.

Конечно, единствени функции кои ги задоволуваат условите на задачата се $f\equiv 1,\ f\equiv 2$ и $f=\mathrm{id}_{\mathbf{N}}$.

74. Најди ги сите функции $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ такви што за произволни цели броеви $a,b,c$, за кои $a+b+c=0$ е исполнето равенството

$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a).$$

**Решение.** Ако ставиме $a=b=c=0$, добиваме $f(0)=0$. Понатаму, ако ставиме $c=0$ и $b=-a$, добиваме дека $f(a)=f(-a)$. Но, $c=-a-b$, па затоа дадената равенка може да биде запишана во видот

$$f(a)^2+f(b)^2+f(a+b)^2=2f(a)f(b)+2f(a+b)[f(a)+f(b)],\ a,b\in\mathbf{Z}.$$

Нека $f(1)=k$. Ако $k=0$, тогаш ставаме $b=1$ и добиваме $f(a+1)=f(a)$, т.е. $f\equiv 0$.

Нека $k\ne 0$. За $a=b$ добиваме дека $f(2a)=0$ или $f(2a)=4f(a)$. Значи, $f(2)=0$ или $f(2)=4k$.

Нека $f(2)=0$. Ако ставиме $b=2$, добиваме $f(a)=f(a+2)$, па затоа

$$f(a)=\begin{cases}0, & a \text{ е парен,}\\ k, & a \text{ е непарен.}\end{cases}$$

Нека $f(2)=4k$. Ако $f(4)=0$, тогаш ставаме $b=4$ и добиваме дека $f(a+4)=f(a)$. Во случајов $f(3)=f(-1)=f(1)=k$. Значи,

$$f(a)=\begin{cases}0, & a=4a_1\\ k, & a \text{ е непарен}\\ 4k, & a=4a_1+2.\end{cases}$$

Конечно, нека $f(4)=4f(2)=16k$. Ставаме $a=1,b=2$ и $a=1,b=3$ и добиваме дека $f(3)\in\{k,9k\}\cap\{9k,25k\}=\{9k\}$, бидејќи $k\ne 0$. Значи, $f(n)=kn^2$, за $n=1,2,3$. Да претпоставиме дека $f(n)=kn^2$, за некој $n\ge 3$. Ставаме $a=1,b=n$ и $a=2,b=n-1$ и добваме дека

$$f(n+1)\in\{k(n+1)^2,k(n-1)^2\}\cap\{k(n+1)^2,k(n-3)^2\}=\{k(n+1)^2\},$$

бидејќи $k\neq 0$ и $n\neq 2$. Сега, по индукција со разгледување на парноста следува $f(a)=ka^2$, за секој $a\in\mathbf{Z}$.

Непосредно се проверува дека најдените функции ги задоволуваат условите на задачата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

75. Даден е природен број $k$. Определи ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви што за секои природни броеви $m$ и $n$ важи

$$f(m+f^k(n))=n+f(m+2014),$$

каде $f^k(n)=\underbrace{f(f(...(f}_{k\text{ пати}}(n))...))$.

**Решение.** Да претпоставиме дека постои $n$ таков што $f^k(n)<2014$ и нека $f^k(n)=c$. Тогаш $f(m+c)=n+f(m+c+2014-c)$, т.е. за $x=m+c\geq c+1$ имаме $f(x)=n+f(x+r)$, за $r=2014-c>0$. За фиксиран $x$ тоа значи дека

$$f(x)=n+f(x+r)=2n+f(x+2r)=...=sn+f(x+sn),$$

што не е можно, бидејќи десната страна на последната низа равенства неограничено расте. Значи, $f^k(n)>2014$ (при $f^k(n)=2014$ добиваме $x=0$, што не е можно). За $n=1$ добиваме

$$f(m+f^k(1)-2014+2014)=1+f(m+2014)$$

и ако ставиме $r=f^k(1)-2014$ и $x=m+2014$, наоѓаме $f(x+r)=1+f(x)$, за секој $x>2014$. Од последното равенство со индукција следува дека за секој $x\geq 2015$ е исполнето равенството $f(x+tr)=t+f(x)$. За $t=n$ и $x=2015$ наоѓаме $f(2015+nr)=n+f(2015)$, а од равенството од условот при $m=1$ имаме $n+f(2015)=f(1+f^k(n))$. Според тоа, $f(2015+nr)=f(1+f^k(n))$. Ако претпоставиме дека $f(a)=f(b)$, тогаш

$$a+f(m+2014)=f(m+f^k(a))=f(m+f^k(b))=b+f(m+2014),$$

т.е. $a=b$, што е шротивречност. Значи,

$$f^k(n)=2014+nr \tag{1}$$

за секој $n$. Од (1) и од условот следува

$$f(m+nr+2014)=n+f(m+2014). \tag{2}$$

Освен тоа

$$f^{k+1}(n)=f(f^k(n))=f(2014+nr)\text{ и }f^{k+1}(n)=f^k(f(n))=2014+rf(n)$$

па затоа

$$f(2014+nr)=2014+rf(n). \tag{3}$$

Од (3) при замена на $n$ со $n+1$ и од (2) при $m=r$ добиваме

$$f(nr+r+2014)=rf(n+1)+2014=n+f(r+2014) \tag{4}$$

од каде следува дека $r$ е делител на $n+f(r+2014)-2014$ за секој $n$. Последното е можно само ако $r=1$, што заедно со (4) дава

$$f(n+1)=n+f(2015)-2014=n+1+f(2015)-2015=n+1+c$$

т.е. $f(n)=n+c$, за $n\geq 2$ и $c=f(2015)-2015$. Во (3) ставаме $n=1$ и добиваме $f(1)=f(2015)-2014=1+f(2015)-2015=1+c$. Значи, $f(n)=n+c$, за секој $n$. Оттука и од (1) следува $f^k(n)=n+kc=n+2014$, т.е. $c=\frac{2014}{k}$. Непосредно се проверува дека кога $k$ е делител на 2014, функцијата $f(n)=n+c$ го задоволува условот на задачата. Кога $k$ не е делител на 2014, тогаш таква функција не постои.

76. Даден е природен број $k$. Определи ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви што $m^2+f(n^k)\,|\,mf(m)+n^k$, за секои $m,n\in\mathbf{N}$.

**Решение.** Очигледно функцијата $f(n)=n$ е решение на задачата. Ќе докажеме дека тоа е единствено решение. Од условот следува дека

$$m^2+f(n^k)\leq mf(m)+n^k\text{, т.е. } f(n^k)-n^k\leq m[f(m)-m]\text{, за секои } m,n\in\mathbf{N}.$$

Сега, ако во последното неравенство ставиме $n=1$ добиваме дека $f(m)\geq m$, за секој $m\in\mathbf{N}$. Од друга страна, ако во условот $m$ го замениме со $f(n^k)$, добиваме дека $f(n^k)\,|\,n^k$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Така, условот го добива видот $m^2+n^k\,|\,mf(m)+n^k$, за секои $m,n\in\mathbf{N}$, од каде следува дека

$$m^2+n^k\,|\,mf(m)+n^k-(m^2+n^k)=m[f(m)-m]\text{, за секои } m,n\in\mathbf{N}.$$

Последното е можно само ако $f(n)=n$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

77. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви што за секои $m,n\in\mathbf{N}$ важи

$$f(f(m+n))=f(m)+f(n).$$

**Решение.** Од условот на задачата следува дека за секои $m,n\in\mathbf{N}$ важи

$$f(f(f(f(m+n))))=f(f(f(m)+f(n)))=f(f(m))+f(f(n)).$$

Според тоа, за секои $m,n,p\in\mathbf{N}$ важи

$$f(f(m))+f(f(n+p))=f(f(f(f(m+n+p))))=f(f(m+n))+f(f(p)).$$

Но, бидејќи $f(f(m+n))=f(m)+f(n)$ и $f(f(n+p))=f(n)+f(p)$, добиваме

$$f(f(m))+f(n)+f(p)=f(f(p))+f(m)+f(n).$$

Тогаш за $p=1$ добиваме дека $f(f(m))=f(m)+c$, каде $c=f(f(1))-f(1)$. Значи, $f(m+n)=f(f(m)n))-c=f(m)+f(n)-c$. Ако ставиме $g=f-c$, тогаш претходната равенка се трансформира во равенката $g(m+n)=g(m)+g(n)$ за која со помош на математичка индукција лесно се докажува дека има решение од $g(n)=g(1)n$.

Според тоа, функцијата $f$ има вид $f(n)=an+b$, каде $a$ и $b$ се константи. Со непосредна проверка се покажува дека $a=1$, т.е. решенијата на дадената равенка се од видот $f(n)=n+b$, каде $b$ е произволна ненегативна константа.

78. Дадени се природен број $n$ и функција $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ со следниве својства:

1) $f(1)\leq f(2)\leq ...\leq f(n)\leq f(1)+n$;

2) $f(n+i)=f(i)$, за секој природен број $i$;

3) $f(f(i))\leq n+i-1$, за секој природен број $i$.

Докажи дека $f(1)+f(2)+...+f(n)\leq n^2$.

**Решение.** Нека $m<n$ е фиксиран природен број. Тогаш од 3) следува $f(f(m+1))\leq n+m$, па ако го искористиме 1) добиваме

$$\begin{aligned}f(f(m)+1)+...+f(f(m+1))&\leq[f(m+1)-f(m)]f(f(m+1))\\&\leq[f(m+1)-f(m)](m+n).\end{aligned}$$

Нека $f(1)=k$. Тогаш $k<n$ и од горното неравенство за $m=1,2,...,k-1$ соодветно добиваме

$$f(f(1)+1)+...+f(f(2))\leq[f(2)-f(1)](n+1)$$
$$f(f(2)+1)+...+f(f(3))\leq[f(3)-f(2)](n+2)$$
$$......................................................................................$$
$$f(f(k-1)+1)+...+f(f(k))\leq[f(k)-f(k-1)](n+k-1).$$

Освен тоа, од 1) имаме

$$f(f(k)+1)+...+f(n)\leq(n-f(k))(n+f(1)).$$

Ако ги собереме овие неравенства, го добиваме бараното неравенство.

79. Најди ги сите функции $f,g,h:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви што $f(g(n))<f(n+1)$, $g(h(n))<g(n+1)$ и $h(f(n))<h(n+1)$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

Решение. Ќе докажеме дека $f(n)=g(n)=h(n)=n$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Нека $\mathrm{Im}f$, $\mathrm{Im}g$ и $\mathrm{Im}h$ се сликите на $f,g$ и $h$, соодветно. Нека $f(t)$ е минимален елемент во $\mathrm{Im}f$. Ако $s>1$, тогаш $f(g(s-1))<f(s)$, што е противречност. Аналогно се покажува дека $g(1)$ и $h(1)$ се минималните елементи на $g$ и $h$, соодветно.

Сега нека $f(t)$ е минимален елемент на $\mathrm{Im}f\setminus\{f(1)\}$. Јасно, $t\geq 2$. Тогаш од $f(g(t-1))<f(t)$ следува дека $f(g(t-1))=f(1)$. Тоа значи дека $g(t-1)=1$, т.е. $1\in\mathrm{Im}g$, па затоа $g(1)=1$ и $t=2$. Аналогно се докажува дека $f(1)=h(1)=1$ и $g(2)$ и $h(2)$ се минималните елементи во $\mathrm{Im}g\setminus\{g(1)\}$ и $\mathrm{Im}h\setminus\{h(1)\}$.

Нека за некој природен број $k$ важи $f(i)=g(i)=h(i)=i$, за $i\leq k$ и $f(k+1)$, $g(k+1)$ и $h(k+1)$ се минималните елементи во $\mathrm{Im}f\setminus\{1,...,k\}$, $\mathrm{Im}g\setminus\{1,...,k\}$ и $\mathrm{Im}h\setminus\{1,...,k\}$, соодветно. Нека $f(a)$ е минимален елемент во множеството $\mathrm{Im}f\setminus\{1,...,k,f(k+1)\}$. Јасно, $a\geq k+2$. Тогаш од $f(g(a-1))<f(a)$ и изборот на $a$ следува дека $f(g(a-1))=f(r)$ за некој $r\in\{1,2,...,k+1\}$. Но,

тоа значи дека $g(a-1)=r$ и ако допуштиме дека $r\neq k+1$, добиваме дека $a-1=r$, т.е. $a=r+1\leq k+1$, што противречи на изборот на $a$. Значи, $r=k+1,\ \ k+1\in \mathrm{Im}\, g\setminus\{1,2,...,k\}$, $g(k+1)=k+1$ и $a=k+2$. Аналогно се докажува дека $f(k+1)=h(k+1)=k+1$ и дека $g(k+2)$ и $h(k+2)$ се минималните елементи во $\mathrm{Im}\, g\setminus\{1,...,k,g(k+1)\}$ и $\mathrm{Im}\, h\setminus\{1,...,k,h(k+1)\}$, соодветно. Со тоа индуктивниот доказ е завршен.

80. Најди ги сите реални функции $f$, дефинирани на множеството цели броеви, за кои

$$f(m)+f(n)=f(mn)+f(m+n+mn),$$

за секои цели броеви $m$ и $n$.

**Решение.** Полагаме $n=1$ и добиваме $f(m)+f(1)=f(m)+f(2m\ +\ 1)$, што значи дека за секој непарен число $d$ имаме $f(d)=f(1)=a$ , за некој $a\in\mathbf{R}$.

Секој цел број, различен од нула може да се претстави во видот $2^k d$ , каде $k$ е ненегативен цел број, а $d$ е непарен цел број. Ставаме $m=d$ и $n=2^k$ и добиваме

$$f(d)+f(2^k)=f(2^k d)+f(2^k(d+1)+d).$$

Бидејќи $d$ и $2^k(d+1)+d$ се непарни броеви, важи

$$f(d)=f(2^k(d+1)+d)=a.$$

Следствено $f(2^k d)=f(2^k)$ и функцијата $f$ се определува еднозначно од вредностите $f(2^k)$, за $k=0,1,2,...$ и $f(0)$.

За $k\geq 2$ ставаме $m=2k$ и $n=2$ и добиваме

$$f(2^k)+f(2)=f(2^k+1)+f(2^k\cdot 3+2).$$

Понеже $2^k\cdot 3+2$ е од видот $2d$ за $d$ непарен број, важи $f(2^k\cdot 3+2)=f(2)$, од каде наоѓаме $f(2^k)=f(2^{k+1})$, за $k\geq 2$. Следствено $f(2^k)=b$, за $k\geq 2$. За $m=n=2$ добиваме $2f(2)=f(4)+f(8)=2b$, т.е. $f(2)=b$. За $m=n=-2$ добиваме $2f(-2)=f(4)+f(0)$ и следствено $f(0)=b$. Добивме дека секоја функција, која го задоволува условот треба да има вид

$$f(n)=\begin{cases} a, & n \text{ парен} \\ b, & n \text{ непарен или 0} \end{cases}$$

за некои реални броеви $a$ и $b$. Ќе докажеме, дека секоја таква функција го задоволува условот на задачата. Заради симетрија доволно е да разгледаме три случаи за парноста на $m$ и $n$.

- Ако $m$ и $n$ се парни, двете страни на дадената во условот равенка се еднакви на $2b$.
- Ако $m$ и $n$ се непарни, двете страни на дадената во условот равенка се еднакви на $2a$.
- Ако $m$ и $n$ се со различна парност, двете страни на дадената во условот равенка се еднакви на $a+b$.

Следствено секоја функција од опишаниот вид го задоволува условот на задачата.

81. Да се докаже, дека постои единствена функција $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, за која $f(1)=f(2)=1$ и

$$f(n)=f(f(n-1))+f(n-f(n-1)),\ n=3,4,...$$

За оваа функција да се најде $f(2m)$, за $m\geq 2$ .

**Решение.** Со индукција ќе докажеме дека за секој $n>1$ вредноста на функцијата $f(n)$ еднозначно се определува со $f(1), f(2),..., f(n-1)$ и $\frac{n}{2}\leq f(n)\leq n$.

За $n=2$ имаме $f(2)=1$ и тврдењето е точно. Нека претпоставиме дека за секој $k,\ 1\leq k<n$, вредноста $f(k)$ е определена и дека $\frac{k}{2}\leq f(k)\leq k$ . Тогаш $1\leq\frac{n-1}{2}\leq f(n-1)\leq n-1$ и $1\leq n-f(n-1)\leq n-1$ и од индуктивната претпоставка следува дека вредностите $f(f(n-1))$ и $f(n-f(n-1))$ са еднозначно определени. Според тоа

$$f(n)=f(f(n-1))+f(n-f(n-1)) \qquad (1)$$

исто така е еднозначно определено. Освен това

$$\frac{1}{2}f(n-1)\leq f(f(n-1))\leq f(n-1),$$

$$\frac{1}{2}(n-f(n-1))\leq f(n-f(n-1))\leq n-f(n-1).$$

Од (1) сега следува

$$\frac{n}{2}\leq f(n)\leq f(n-1)+(n-f(n-1))=n,$$

т.е. тврдењето е точно и за $n$. Докажавме, дека постои единствена функција $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, која ги задоволува условите и за неа важи $\frac{n}{2}\leq f(n)\leq n$.

Повторно со индукција ќе докажеме, дека за секој природен број $n$ важи

$$f(n+1)-f(n)\in\{0,1\}. \qquad (2)$$

За $n=1$ условот (2) важи. Нека претпоставиме дека (2) важи за $n\leq k$ . Од (1) добиваме

$$\begin{aligned}f(k+1)-f(k)&=(f(f(k+1))\ +f(k+2-f(k+1)))-(f(f(k))+f(k+1-f(k)))\\&=(f(f(k+1))-f(f(k)))+(f(k+2-f(k+1))-f(k+1-f(k))).\end{aligned}$$

Од индуктивната претпоставка следува $f(k+1)-f(k)\in\{0,1\}$.

Ако $f(k+1)=f(k)+1$, тогаш од $1\leq f(k)\leq k$ и од индуктивната претпоставка следува

$$f(k+2)-f(k+1)=f(f(k)+1)-f(f(k))\in\{0,1\}.$$

Ако $f(k+1)=f(k)$, од $1\leq k+1-f(k)\leq k$ и од индуктивната претпоставка повторно добиваме

$$f(k+2)-f(k+1)=f(k+1-f(k))-f(k+1-f(k))\in\{0,1\}.$$

Според тоа, за секој $n$ имаме $f(n+1)-f(n)\in\{0,1\}$.

На крајот, со индукција ќе докажеме, дека за секој природен број $m$ важи $f(2^m)=2^{m-1}$. За $m=1$ тврдењето е точно и да допуштиме, дека тоа е точно за $m=k$, т.е. $f(2^k)=2^{k-1}$.

Нека претпоставиме дека $f(2^{k+1})\neq 2^k$. Бидејќи $f(2^{k+1})>2^k$ и $f(2^{k+1})$ е природен број, добиваме дека $f(2^{k+1})\geq 2^k+1$. Но, $f(1)=1$, па од (2) следува, дека постои најмал природен број $n$, за кој $f(n)=2k+1$. Од минималноста на $n$ следува, дека $f(n-1)=2^k$. Сега, од $n-2^k\leq 2^k$ добиваме

$$2^{k+1}=f(n)=f(f(n-1))+f(n-f(n-1))=f(2^k)+f(n-2^k)\leq 2f(2^k)=2^k,$$

што е противречност. Следствено $f(2^{k+1})=2^k$ и по индукција следува, дека $f(2^m)=2^{m-1}$ за секој природен број $m$.

82. Најди ги сите функции $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$, такви што

$$xf(2f(y)-x)\ +\ y^2f(2x-f(y))\ =\frac{f(x)^2}{x}+f(yf(y)),$$

за секои цели броеви $x$ и $y$, $x\neq 0$.

**Решение.** Нека $p$ е прост број. Бидејќи $p$ е делител на $f(p)^2$, заклучуваме дека $p$ е делител на $f(p)$. Сега ако ставиме $y=0$ и $x=p$ добиваме, дека $p$ е делител на $f(0)$. Но, $p$ е произволен прост број, па затоа $f(0)=0$. Ставаме $y=0$ и добиваме $xf(-x)=\frac{f(x)^2}{x}$. Сега заменувајќи го $x$ со $-x$ и комбинирајќи ги добиените равенства добиваме $f(x)=0$ или $f(x)=x^2$, за секој $x$. Со непосредна проверка заклучуваме дека најдените функции навистина го задоволуваат условот на задачата.

83. Најди ги сите функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такви да

$$2n+2001\leq f(f(n))+f(n)\leq 2n+2002,\ \text{за секој}\ n\in\mathbf{N}.$$

**Решение.** Нека функцијата $f$ ги задоволува условите на задачата. Прво ќе докажеме дека $f(n)>n$ за секој $n\in\mathbf{N}$. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека постои $m$ таков што $f(m)\leq m$ и нека $k=f(m)$ е најмалиот можен број. Така $k<m$ и ако $l=f(k)$, тогаш $k+l\geq 2m+2001$ и $f(l)+l\leq 2k+2002$ Следствено $2k+2002\geq f(l)+2m+2001-k$, од каде $f(l)\leq 3k-2m+1<k$, што е противречност. Според тоа, функцијата $g(n)=f(n)-n$ е позитивна. Ако $g(p)$ е нејзината најмала вредност и $q=g(p)+p$, тогаш од условот на задачата следува $2g(p)+g(q)\geq 2001$ и $1g(q)+g(g(q)+q)\leq 2002$, од каде следува дека $4g(p)\geq 4002-2g(q)\geq 2000+g(g(q)+q)\geq 2000+g(p)$, па затоа $g(p)\geq 667$. Сега, од равенството $2g(n)+g(g(n)+n)\leq 2002$ заклучуваме дека $g(n)=667$, т.е. $f(n)=n+667$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Лесно се гледа дека оваа функција ги исполнува условите на задачата.

## В) РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД ВТОРА ГЛАВА

1. Најди го општиот член на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ зададена со $x_1 = 1, x_2 = 2$ и $x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2})$, за $n \geq 3$.

**Решение.** Лесно се проверува дека $x_1 = 1!, x_2 = 2!, x_3 = 3!, x_4 = 4!$. Ќе докажеме дека $x_n = n!$ за секој природен број $n$. Нека претпоставиме дека за некој природен број $n = k$ важи $x_k = k!$ и $x_{k-1} = (k-1)!$. Тогаш за $n = k+1$ имаме

$$x_{k+1} = (k+1-1)(x_k + x_{k-1}) = k[k! + (k-1)!] = k \cdot (k-1)!(k+1) = (k+1)!,$$

па од принципот на математичка индукција следува дека $x_n = n!$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

2. Нека $x_1 = 1, x_2 = 2+3, x_3 = 4+5+6, x_4 = 7+8+9+10, \dots$. Пресметај го општиот член $x_n$.

**Решение.** Од условот следува дека $x_n$ е збир на $n$ последователни природни броеви, од кои првиот е еднаков на

$$1+2+3+\dots+(n-1)+1 = \tfrac{n(n-1)}{2} + 1 = \tfrac{1}{2}(n^2 - n + 2).$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=0}^{n-1} [\tfrac{1}{2}(n^2 - n + 2) + k] = \tfrac{1}{2} n(n^2 - n + 2) + \sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= \tfrac{1}{2} n(n^2 - n + 2) + \tfrac{1}{2} n(n-1) = \tfrac{1}{2} n(n^2 + 1). \end{aligned}$$

3. Низата од реални броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена со $a_1 = 5; a_2 = 19$ и за $n \geq 3$, $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$. Најди го $a_{2007}$.

**Решение.** Со математичка индукција, ќе докажеме дека

$$a_n = 3^{n+1} - 2^{n+1},\ n \geq 1.$$

Имено, $a_1 = 3^2 - 2^2$; $a_2 = 3^3 - 2^3$. Нека за $k \leq n-1$ важи

$$a_k = 3^{k+1} - 2^{k+1}.$$

Тогаш

$$\begin{aligned} a_n &= 5a_{n-1} - 6a_{n-2} = (3+2)(3^n - 2^n) - 3 \cdot 2(3^{n-1} - 2^{n-1}) \\ &= 3^{n+1} + 2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n - 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n = 3^{n+1} - 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Оттука следува дека $a_{2007} = 3^{2008} - 2^{2008}$.

4. Низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се дефинирани со

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1},\ n > 1,$$
$$b_1 = 1,\ b_2 = 2,\ b_{n+1} = 7b_n - b_{n-1} - 2,\ n > 1.$$

Докажи дека $b_n = a_n^2$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

**Решение.** Тврдењето ќе го докажеме со индукција по $n$.

За $n=1$ и $n=2$ тврдењето очигледно важи. Нека претпоставиме дека за $n=k\geq 2$ важи $b_i=a_i^2$, за секој $i=1,2,...,k$. Имаме

$$\begin{aligned}b_{k+1}&=7b_k-b_{k-1}-2=7a_k^2-a_{k-1}^2-2\\&=(3a_k-a_{k-1})^2+2a_{k-1}(3a_k-a_{k-1})-2a_k^2-2\\&=a_{k+1}^2+2(a_{k-1}a_{k+1}-a_k^2-1),\end{aligned}$$

што значи дека е доволно да докажеме дека за секој $k>1$ важи

$$a_{k-1}a_{k+1}-a_k^2=1. \qquad (1)$$

За $k=2$ равенството (1) очигледно важи. Нека претпоставиме дека тоа важи за $k=p>1$. Тогаш

$$\begin{aligned}a_pa_{p+2}-a_{p+1}^2&=a_p(3a_{p+1}-a_p)-a_{p+1}^2\\&=a_{p+1}(3a_p-a_{p+1})-a_p^2\\&=a_{p+1}a_{p-1}-a_p^2=1,\end{aligned}$$

па од принципот на математичка индукција следува дека (1) важи за секој $k>1$.

5. Нека $c$ е призволен реален број и нека низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е определена со $a_0=c$ и $a_{n+1}=a_n^2+(a_n-1)^2$, за $n\geq 0$. Најди формула за општиот член на низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

**Решение.** Од дадената рекурентна формула последователно добиваме

$$a_{n+1}=2a_n^2-2a_n+1=2(a_n-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{1}{2}$$

$$2a_{n+1}-1=(2a_n-1)^2.$$

Понатаму, со индукција по $n$ лесно се добива дека $2a_n-1=(2c-1)^{2^n}$, т.е. $a_n=\frac{1}{2}[(2c-1)^{2^n}+1]$, за $n\in\mathbf{N}$.

6. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $a_1=1$ и $a_{n+1}=3a_n+\sqrt{8a_n^2+1}$, за $n\geq 1$. Докажи дека сите членови на низата се природни броеви.

**Решение.** Од $a_{n+1}=3a_n+\sqrt{8a_n^2+1}$ последователно добиваме

$$(a_{n+1}-3a_n)^2=8a_n^2+1$$

$$a_{n+1}^2-6a_{n+1}a_n+a_n^2=1.$$

Аналогно,

$$a_{n+2}^2-6a_{n+2}a_{n+1}+a_{n+1}^2=1.$$

Ако ги одземеме последните две равенки добиваме ж

$$a_{n+2}^2-a_n^2-6a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=0$$
$$(a_{n+2}-a_n)(a_{n+2}-6a_{n+1}+a_n)=0.$$

Низата строго монотоно расте, па затоа $a_{n+2}-a_n\neq 0$ и од последното равенство добиваме $a_{n+2}-6a_{n+1}+a_n=0$, т.е.

$$a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n\text{, за } n\geq 1. \qquad (1)$$

Конечно, од $a_1=1$, $a_2=6$ и (1) следува тврдењето на задачата.

7. Нека $a_1=2, a_2=3, a_{2n}=a_{2n-1}+2a_{2n-2}, a_{2n+1}=a_{2n}+a_{2n-1}, \; n\geq 1$. Најди рекурентна формула за $a_n$.

**Решение.** Ги собираме двете рекурентни формули и добиваме

$$a_{2n+1}=2a_{2n-1}+2a_{2n-2}.$$

Од втората рекурентна формула добиваме $a_{2n-2}=a_{2n-1}-a_{2n-3}$, па затоа

$$a_{2n+1}=4a_{2n-1}-2a_{2n-3}. \qquad (1)$$

Ги одземаме двете рекурентни формули и добиваме

$$2a_{2n}=a_{2n+1}+2a_{2n-2}.$$

Од првата рекурентна формула добиваме $a_{2n+1}=a_{2n+2}-2a_{2n}$, па затоа

$$a_{2n+2}=4a_{2n}-2a_{2n-2}. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) добиваме

$$a_n=4a_{n-2}-2a_{n-4}, n\geq 5$$

и $a_1=2, a_2=3, a_3=5, a_4=11$.

8. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $a_1=6,\ a_2=34$ и $a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$. Докажи дека ниеден член на оваа низа не се дели со 5.

**Решение.** Од

$$a_{n+3}=6a_{n+2}-a_{n+1}=5a_{n+2}+6a_{n+1}-a_n-a_{n+1}=5(a_{n+2}+a_{n+1})-a_n$$

следува дека $a_{n+3}$ се дели со 5 ако и само ако $a_n$ се дели со 5. Но, $a_1=6,\ a_2=34$ и $a_3=198$ не се деливи со 5, па затоа ниту еден член на дадената низа не се дели со 5.

9. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со

$$a_0=1,\ a_n=a_0+a_1+...+a_{n-1},\text{ за секој } n\in\mathbf{N}.$$

Пресметај го збирот $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i^2$.

**Решение.** Имаме

$$a_n=(a_0+a_1+...+a_{n-2})+a_{n-1}=2a_{n-1}.$$

Со индукција по $n$ лесно се докажува дека $a_n=2^{n-1}, n\in\mathbf{N}$. Според тоа,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i^2=1+\sum_{i=1}^{n}(2^{i-1})^2=1+\sum_{i=1}^{n}4^{i-1}=1+\tfrac{4^n-1}{3}=\tfrac{4^n+2}{3}.$$

10. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена со $a_0 = a_1 = 1$ и

$$n(n+1)a_{n+1} = n(n-1)a_n - (n-2)a_{n-1}, \text{ за } n \in \mathbf{N}. \qquad (1)$$

Пресметај $\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + ... + \frac{a_{2012}}{a_{2013}}$.

**Решение.** Ќе докажеме дека $a_{n-1} = na_n$, за секој $n \in \mathbf{N}$. За $n = 1$ равенството очигледно важи. Нека претпоставиме дека за $n = k$ важи $a_{k-1} = ka_k$. Од (1) имаме

$$k(k+1)a_{k+1} = k(k-1)a_k - (k-2)a_{k-1} = k(k-1)a_k - k(k-2)a_k = ka_k,$$

па затоа $a_k = (k+1)a_{k+1}$, што значи дека равенството важи за $n = k+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека тоа важи за секој природен број $n$.

Ако ја искористиме формулата $a_{n-1} = na_n$, за $n \in \mathbf{N}$ добиваме

$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + ... + \frac{a_{2012}}{a_{2013}} = 1 + 2 + 3 + ... + 2013 = \frac{2013 \cdot 2014}{2}.$$

11. Нека $a_0 = 1997$ и $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n + 1}$, за секој $n \in \mathbf{N}$. Докажи дека $1997 - n$ е најголемиот цел број помал или еднаков на $a_n$, $1 \le n \le 999$.

**Решение.** Прво да забележиме дека $a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2}{a_n+1} = \frac{a_n}{a_n+1} > 0$, т.е. $a_0 > a_1 > ... > a_n > ...$. Затоа

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + ... + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a_0 - \frac{a_0}{a_0+1} - \frac{a_1}{a_1+1} - ... - \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1} \\ &= a_0 - n + \frac{1}{a_0+1} + \frac{1}{a_1+1} + ... + \frac{1}{a_{n-1}+1} \\ &= 1997 - n. \end{aligned}$$

Од друга страна

$$\frac{1}{a_0+1} + \frac{1}{a_1+1} + ... + \frac{1}{a_{n-1}+1} < \frac{n}{a_{n-1}+1} \le \frac{999}{a_{999}+1} \le \frac{999}{1997-999+1} = 1,$$

па затоа $[a_n] = 1997 - n,$ за $1 \le n \le 999$.

12. Нека $k \in \mathbf{Z}$. Дефинираме низа $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ така да $a_0 = 0, a_1 = k$ и $a_{n+2} = k^2 a_{n+1} - a_n$, за $n = 0,1,2,...$. Докажи дека $a_{n+1}a_n + 1$ е делител на $a_{n+1}^2 + a_n^2$, за $n = 0,1,2,...$.

**Решение.** Ќе докажеме дека

$$a_{n+1}^2 + a_n^2 = k^2(a_{n+1}a_n + 1), \qquad (1)$$

за секој $n = 0,1,2,...$, од што ќе следува тврдењето, бидејќи $a_{n+1}a_n + 1 \ne 0$, за секој $n = 0,1,2,...$.

За $n = 0$ имаме

$$a_1^2 + a_0^2 = k^2 + 0^2 = k^2(1+0) = k^2(a_1 + a_0),$$

т.е. точно е равенството (1). Нека претпоставиме дека (1) важи за некој $n \geq 0$. Тогаш

$$\begin{aligned} a_{n+2}^2 + a_{n+1}^2 &= a_{n+2}^2 - a_n^2 + a_{n+1}^2 + a_n^2 \\ &= (a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} + a_n) + k^2(a_{n+1}a_n + 1) \\ &= k^2 a_{n+1}(a_{n+2} - a_n) + k^2(a_{n+1}a_n + 1) \\ &= k^2(a_{n+2}a_{n+1} + 1), \end{aligned}$$

што значи дека (1) важи и за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n \geq 0$.

13. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена со $a_1 = \frac{1}{2}$ и $a_m = \frac{a_{m-1}}{2ma_{m-1}+1}$, за секој $m > 1$. Пресметај го збирот $a_1 + a_2 + ... + a_k$, $k \in \mathbf{N}$.

**Решение.** Од условот на задачата имаме

$$a_m = \frac{1}{2m + \frac{1}{a_{m-1}}}. \tag{1}$$

Нека $b_m = \frac{1}{a_m}$, $m \in \mathbf{N}$. Од (1) следува дека

$$b_m = 2m + b_{m-1},\ m = 2,3,4,... .$$

Сега, со математичка индукција лесно се докажува дека $b_m = m(m+1)$, за секој $m \in \mathbf{N}$, па затоа $a_m = \frac{1}{b_m} = \frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$, $m \in \mathbf{N}$. Конечно,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + ... + a_k &= (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) + ... + (\tfrac{1}{k-1} - \tfrac{1}{k}) + (\tfrac{1}{k} - \tfrac{1}{k+1}) \\ &= 1 - \tfrac{1}{k+1} = \tfrac{k}{k+1}, \end{aligned}$$

за секој $k \in \mathbf{N}$.

14. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со равенствата $a_1 = 2,\ a_2 = 5$ и

$$a_{n+2} = (2 - n^2)a_{n+1} + (2 + n^2)a_n,\ n \geq 1.$$

Дали постојат $p, q, r$ такви да $a_p a_q = a_r$.

**Решение.** Имаме $a_1 = 2 = 3 \cdot 0 + 2$ и $a_2 = 5 = 3 \cdot 1 + 2$. Ќе докажеме дека сите членови на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ се од облик $3k+2$. Навистина зако $a_n = 3k_n + 2$ и $a_{n+1} = 3k_{n+1} + 2$, за некој $n \geq 0$, тогаш

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= (2 - n^2)a_{n+1} + (2 + n^2)a_n = (2 - n^2)3k_{n+1} + 2 + (2 + n^2)(3k_n + 2) \\ &= 3(n^2 k_n - n^2 k_{n+1} + 2k_n + 2k_{n+1} + 2) + 2 = 3k_{n+2} + 2, \end{aligned}$$

па од принципот на математичка индукција следува дека сите членови на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ се од облик $3k+2$.

Ако постојат природни броеви $p, q, r$ такви да $a_p a_q = a_r$, тогаш

$$a_p a_q = (3k_p + 2)(3k_q + 2) = 3(3k_p k_q + 2k_p + 2k_q + 1) + 1 = 3k_r + 2 = a_r,$$

што не е можно, бидејќи левата страна на последното равенство е број од облик $3k+1$, а десната е број од облик $3k+2$. Според тоа, не постојат броеви $p,q,r$ такви да $a_p a_q = a_r$.

15. За низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ќе велиме дека се *пропорционални* ако постои $t$ таков што $a_i = tb_i$, за $i=1,2,...$. Ако низите не се пропорционални, тогаш ќе велиме дека се *непропорционални*. Докажи дека за секој $n \geq 3$ постојат бесконечно многу непропорционални низи цели броеви $a_1,a_2,...,a_n$ за кои важи
$$a_1^2+a_2^2+...+a_{n-1}^2=a_n^2\,. \qquad (1)$$
**Решение.** За $a_1,a_2,...,a_{n-3}$ да земеме произволни парни броеви, за $a_{n-2}$ е произволен парен број. Тогаш збирот на квадратите на овие броеви е непарен број. Нека
$$a_1^2+a_2^2+...+a_{n-2}^2=2k+1$$
и да ставиме $a_{n-1}=k,\ a_{n+1}=k+1$. Тогаш
$$a_1^2+a_2^2+...+a_{n-1}^2=2k+1+k^2=(k+1)^2=a_n^2,$$
т.е. конструираната низа го задоволува условот (1). Јасно со оваа постапка може да се конструираат бесконечно многи различни низи, кои поради
$$\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}=\frac{k}{k_1}\neq\frac{k+1}{k_1+1}=\frac{a_n}{b_n}\text{, при } k\neq k_1$$
се непропорционални.

16. За низата броеви $a_1,a_2,...,a_{1988}$ важи
$$a_1=1, |a_{k+1}|=|a_k+1|\text{, за } k=1,2,...,1987\,.$$
Најди ја најмалата вредност на изразот $|a_1+a_2+...+a_{1988}|$.

**Решение.** На низата да и го додадеме, членот $a_0=0$ и членот $a_{1989}$ кој ги задоволува истите услови. Имаме
$$|a_1|=|a_0+1|$$
$$|a_2|=|a_1+1|$$
$$|a_3|=|a_2+1|$$
$$....................$$
$$|a_{1989}|=|a_{1988}+1|$$
и ако ги квадрираме последните равенства и ги собереме добиваме
$$\sum_{i=1}^{1989}a_i^2=\sum_{i=1}^{1988}a_i^2+2\sum_{i=1}^{1988}a_i+1989$$
$$\left|\sum_{i=1}^{1988}a_i\right|=\left|\frac{a_{1989}^2-1989}{2}\right|.$$
Но,
$$44^2=1936<1989<2025=45^2,$$

па затоа изразот на десната страна во последното равенство ќе биде минимален ако може да се добие $a_{1989}=45$. Во следниов пример ќе покажеме дека тоа е можно:

$$a_1=1, a_2=-2, a_3=1, a_4=-2, ..., a_{1944}=-2, a_{1945}=1,$$
$$a_{1946}=2, a_{1947}=3, ..., a_{1988}=44, a_{1989}=45.$$

Според тоа,

$$\min|\sum_{i=1}^{1988} a_i|=|\frac{45^2-1989}{2}|=\frac{2025-1989}{2}=18.$$

17. Дадена е низа од природни броеви $1=x_1<x_2<x_3<....<x_n<...$ таква што $x_{n+1}\le 2n$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Дали постојат два члена на низата $x_i$ и $x_j$ такви што $x_i-x_j=2008$?

**Решение.** Ќе го докажеме следново поопшто тврдење: За секој природен број $k$ постојат членови на низата $x_i$ и $x_j$ такви што $x_i-x_j=k$.

Навистина, нека $k\in\mathbf{N}$ е фиксиран природен број и нека претпоставиме дека $x_i-x_j\ne k$, за секои $i,j\in\mathbf{N}$. За множеството

$$A_k=\{1,2,3,...,2k-1,2k\}$$

го формираме множеството

$$B_k=\{(1,k+1),(2,k+2),...,(k,2k)\}.$$

Во секој од паровите на множеството $B_k$ се наоѓа најмногу еден член на низата. Ако претпоставиме дека двата члена на еден пар се и членови на низата, на пример $x_i=t$, $x_j=k+t$, тогаш

$$x_j-x_i=(k+i)-i=k,$$

што противречи на претпоставката. Значи, во паровите на множеството $B_k$ има најмногу $k$ членови на низата, што значи дека во множеството $A_k$ се содржат најмногу $k$ членови на низата. Но, тогаш од

$$x_1=1, x_2\le 2, x_3\le 4, ..., x_k\le 2(k-1)<2k,$$

Следува дека $x_{k+1}\notin A_k$, што значи дека $x_{k+1}>2k$, што противречи на $x_{n+1}\le 2n$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Конечно, од добиената противречност следува дека за секој природен број $k$ постојат членови на низата $x_i$ и $x_j$ такви што $x_i-x_j=k$.

18. Низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е определена со

$$x_1=2008,\ x_1+x_2+...+x_{n-1}=(n^2-1)x_n,\ n\ge 2.$$

Низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е определена со

$$a_n=x_n+\frac{1}{n}S_n,\ S_n=x_1+x_2+...+x_n.$$

Определи за кои природни броеви $n$, броевите $a_n$ се полни квадрати.

**Решение.** Од равенството $x_1+x_2+...+x_{n-1}=(n^2-1)x_n$, добиваме

$$x_1+x_2+...+x_{n-1}+x_n=(n^2-1)x_n+x_n=n^2x_n,\ n=2,3,... . \tag{1}$$

Според тоа

$$x_1+x_2+...+x_{n-1}=(n-1)^2x_{n-1},\ n=3,4,...$$

и ако замениме во $x_1+x_2+...+x_{n-1}+x_n=n^2x_n$ имаме

$$(n-1)^2x_{n-1}+x_n=n^2x_n$$

односно

$$x_n=\frac{n-1}{n+1}x_{n-1},\ n=2,3,... \tag{2}$$

Ако ги помножиме првите $n$ равенства во (2) наоѓаме

$$x_k=\frac{2x_1}{k(k+1)},\ k=2,3,... . \tag{3}$$

Но, $S_n=x_1+x_2+...+x_n=n^2x_n$, па затоа

$$S_{n+1}=(n+1)^2x_{n+1}=(n+1)^2(S_{n+1}-S_n),$$

$$S_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}S_n,\ n=1,2,3,... . \tag{4}$$

На потполно аналоген начин, множејќи ги првите $n$ равенства во (4) добиваме

$$S_n=\frac{2S_1n}{n+1}=\frac{2x_1n}{n+1},\ n=1,2,3,... . \tag{5}$$

Сега од (3) и (5) имаме

$$a_n=x_n+\frac{1}{n}S_n=\frac{2x_1}{n(n+1)}+\frac{2x_1n}{n(n+1)}=\frac{2x_1(n+1)}{n(n+1)}=\frac{2x_1}{n}=\frac{2^4251}{n}.$$

Бараните вредности за $n$ се: $n=251,2^2\cdot251,2^4\cdot251$

19. Нека $a_1<a_2<...<a_n<...$ се природни броеви такви да $a_{2n}=a_n+n$. Освен тоа, ако $a_n$ е прост број, тогаш $n$ е исто така прост број. Најди $a_{2013}$.

**Решение.** Прво со индукција ќе докажеме дека $a_n=a_1+(n-1)$, за секој $n\geq1$. Имаме, $a_2=a_1+1, a_4=a_2+2=a_1+3$. Но,

$$a_1+1=a_2<a_3<a_4=a_1+3,$$

па затоа $a_3=a_1+2$. Нека претпоставиме дека $a_k=a_1+(k-1)$, за некој $k>1$. Од $a_{2k}=a_k+k$ добиваме $a_{2k}=a_1+(2k-1)$. Но, $a_{k+1},a_{k+2},...,$ $a_{2k-1}$ се природни броеви и

$$a_k=a_1+k<a_{k+1}<a_{k+2}<...<a_{2k-1}<a_{2k}=a_1+(2k-1),$$

па затоа $a_{k+1}=a_1+k$ и од принципот на математичка индукција следува дека $a_n=a_1+(n-1)$, за секој $n\geq1$.

Нека претпоставиме дека $a_1>1$. Тогаш броевите

$$(a_1+1)!+2,(a_1+1)!+3,...,(a_1+1)!+(a_1+1)$$

се сложени. Нека $p$ е најмалиот прост број таков што

$$p>(a_1+1)!+(a_1+1) \tag{1}$$

и нека $n=p-a_1+1$. Тогаш $a_n=a_1+n-1=p$, т.е. $a_n$ е прост број, што според условот на задачата значи дека $n$ е исто така прост број. Од друга страна

$$(a_1+1)!-a_1+2<p-a_1+1<p-1+1=p\,,$$

и како $p$ е најмалиот прост број за кој важи (1) добиваме дека $p-a_1+1$ е сложен број, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека $a_1=1$, што значи дека $a_n=n$, за секој $n\in\mathbf{N}$ и $a_{2013}=2013$.

20. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низата дадена со

$$a_n=[\tfrac{n}{1}]+[\tfrac{n}{2}]+...+[\tfrac{n}{n}],\;\; n\in\mathbf{N}\,.$$

Докажи дека $a_n=2+a_{n-1}$, ако и само ако $n$ е прост број.

**Решение.** Равенството

$$a_n=2+a_{n-1} \tag{1}$$

ќе го запишеме во обликот

$$[\tfrac{n}{1}]+[\tfrac{n}{2}]+...+[\tfrac{n}{n}]=2+[\tfrac{n-1}{1}]+[\tfrac{n-1}{2}]+...+[\tfrac{n-1}{n-1}]$$

т.е. во обликот

$$[\tfrac{n}{2}]+[\tfrac{n}{3}]+...+[\tfrac{n}{n-1}]=[\tfrac{n-1}{2}]+[\tfrac{n-1}{3}]+...+[\tfrac{n-1}{n-1}]\,. \tag{2}$$

Но, како $[\frac{n}{k}]\geq[\frac{n-1}{k}]$, за секој $k\in\{2,...,n-1\}$ добиваме

$$[\tfrac{n}{2}]+[\tfrac{n}{3}]+...+[\tfrac{n}{n-1}]\geq[\tfrac{n-1}{2}]+[\tfrac{n-1}{3}]+...+[\tfrac{n-1}{n-1}]\,. \tag{3}$$

Нека е исполнето равенството (1), т.е. равенството (2). Ако $n$ е сложен број, тогаш $n=ab,\;2\leq b<n$, па затоа

$$[\tfrac{n}{a}]=b>[\tfrac{n-1}{a}]=b-1,$$

т.е. во (3) важи строго неравенство, што противречи на (2).

Обратно, нека $n$ е прост број. Тогаш, за секој $k\in\{2,...,n-1\}$ имаме $n=kt+r$, каде $t,r\in\mathbf{N},\; o<r<t$. Затоа $[\frac{n}{k}]=t=[\frac{n-1}{k}]$, што значи дека равенството (2), т.е. равенството (1) е исполнето.

21. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е дефинирана со $a_1=1$ и

$$a_n=\tfrac{n+1}{n-1}(a_1+a_2+...+a_{n-1})\text{ , за }n>1\,.$$

Пресметај ја вредноста на $a_{2013}$.

**Решение.** *Прв начин.* Имаме

$$\begin{aligned}(n-1)a_n&=(n+1)[(a_1+a_2+...+a_{n-2})+a_{n-1}]\\&=(n+1)(\tfrac{n-2}{n}a_{n-1}+a_{n-1})\\&=\frac{2(n-1)(n+1)}{n}a_{n-1}\end{aligned}$$

па затоа $a_n=\frac{2(n+1)}{n}a_{n-1}$, за $n>1$, што значи

$$\tfrac{a_n}{n+1}=2\tfrac{a_{n-1}}{n}\,. \tag{1}$$

Земаме $b_n = \frac{a_n}{n+1}$, за $n \geq 1$ и од (1) добиваме дека $b_1 = \frac{1}{2}$ и $b_n = 2b_{n-1}$, за $n > 1$. Според тоа, $b_1 = \frac{1}{2} = 2^{1-2}$, $b_2 = 1 = 2^{2-2}$, $b_3 = 2 = 2^{3-2}$ итн. па логично е да препоставиме дека

$$b_n = 2^{n-2}, \text{ за секој } n \in \mathbf{N}. \qquad (2)$$

Формулата (2) ќе ја докажеме со индукција по $n$. Веќе видовме дека (2) важи за $n = 1, 2$ и 3. Нека претпоставиме дека (2) важи за некој $n \geq 3$. Тогаш од индуктивната претпоставка имаме

$$b_{n+1} = 2b_n = 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{(n+1)-2},$$

што значи дека (2) важи и за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n \in \mathbf{N}$.

Според тоа,

$$a_n = (n+1)b_n = 2^{n-2}(n+1), \text{ за секој } n \in \mathbf{N}$$

па затоа $a_{2013} = 2014 \cdot 2^{2011}$.

*Втор начин.* Како и претходно докажуваме дека $a_n = \frac{2(n+1)}{n} a_{n-1}$, за $n > 1$. Сега

$$a_n = \frac{2(n+1)}{n} a_{n-1} = \frac{2(n+1)}{n} \cdot \frac{2n}{n-1} a_{n-2} = \frac{2(n+1)}{n} \cdot \frac{2n}{n-1} \cdot \frac{2(n-1)}{n-2} a_{n-3}$$
$$= \frac{2(n+1)}{n} \cdot \frac{2n}{n-1} \cdot \frac{2(n-1)}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{2(2+1)}{2} a_1 = 2^{n-2}(n+1).$$

Конечно, $a_{2013} = 2014 \cdot 2^{2011}$.

22. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена со $a_1 = 1, a_2 = 12, a_3 = 20$ и

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n, \text{ за } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Докажи дека за секој $n \in \mathbf{N}$ бројот $1 + 4a_n a_{n+1}$ е квадрат на сел број.

**Решение.** Да запишеме неколку први членови на низите $a_n$, $1 + 4a_n a_{n+1}$ и $q_n = \sqrt{a_n a_{n+1}}$, како во следнава табела:

| $a_n$ | $1 + 4a_n a_{n+1}$ | $q_n$ |
|---|---|---|
| 1 | 49 | 7 |
| 12 | 961 | 31 |
| 20 | 5041 | 71 |
| 63 | 39409 | 197 |

Притоа имаме $q_1 = a_3 - a_2 - a_1$ и $q_2 = a_4 - a_3 - a_2$. Со индукција по $n$ ќе докажеме дека

$$1 + 4a_n a_{n+1} = q_n^2, \qquad (1)$$

каде $q_n = a_{n+2} - a_{n+1} - a_n$.

Од претходно изнесеното следува дека (1) важи за $n = 1$ и $n = 2$. Нека претпоставиме дека (1) важи за $n-1$, т.е. дека

$$1+4a_{n-1}a_n=q_{n-1}^2\,. \qquad (2)$$

Од условот на задчата имаме

$$\begin{aligned} q_{n-1}+2a_n &= a_{n+1}+a_n-a_{n-1}=a_{n+2}-a_{n+2}+a_{n+1}+a_n-a_{n-1} \\ &= a_{n+2}-2a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}+a_{n+1}+a_n-a_{n-1} \\ &= a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=q_n \end{aligned}$$

т.е.

$$q_n=q_{n-1}+2a_n\,. \qquad (3)$$

Сега од (3) и од индуктивната претпоставка следува

$$\begin{aligned} q_n^2 &= (q_{n-1}+2a_n)^2=q_{n-1}^2+4q_{n-1}a_n+4a_n^2=1+4a_{n-1}a_n+4q_{n-1}a_n+4a_n^2 \\ &=1+4a_n(a_{n-1}+q_{n-1}+a_n)=1+4a_na_{n+1}, \end{aligned}$$

што значи дека (1) важи и за $n$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број.

23. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена со рекурзијата $x_1,x_2$ произволни и

$$x_n=\frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2}-x_{n-1}}\text{, за } n=3,4,5,\dots .$$

Докажи дека $x_n$ е цел број за бесконечно многу $n$ ако и само ако $x_1=x_2$ е цел број.

**Решение.** Со индукција по $n$ ќе докажеме дека

$$x_n=\frac{x_1x_2}{(n-1)x_1-(n-2)x_2}\text{, за } n\geq 3\,. \qquad (1)$$

Очигледно за $n=3$ равенството (1) е исполнето. Нека претпоставиме дека (1) важи за секој $k\leq n$. Тогаш

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{x_{n-1}x_n}{2x_{n-1}-x_n}=\frac{\frac{x_1x_2}{(n-1)x_1-(n-2)x_2}\cdot\frac{x_1x_2}{(n-2)x_1-(n-3)x_2}}{2\frac{x_1x_2}{(n-2)x_1-(n-3)x_2}-\frac{x_1x_2}{(n-1)x_1-(n-2)x_2}} \\ &= \frac{x_1x_2}{2[(n-1)x_1-(n-2)x_2]-(n-2)x_1+(n-3)x_2}=\frac{x_1x_2}{nx_1-(n-1)x_2} \end{aligned}$$

што значи дека (1) важи и за $n+1$. Сега, од принципот на математичка индукција следува дека (1) важи за секој природен број.

Значи,

$$x_n=\frac{x_1x_2}{n(x_1-x_2)+2x_2-x_1}. \qquad (2)$$

Броителот во (2) не зависи од $n$ и ако $x_1\neq x_2$, тогаш за доволно големи вредности на $n$ имаме

$$|\,x_1x_2\,|<|\,n(x_1-x_2)+2x_2-x_1\,|\,,$$

што значи дека $x_n$ не е цел број. Значи, $x_n$ е цел број за бесконечно многу вредности на $n$ ако и само ако $x_1=x_2$ и тогаш $x_n=x_1=a\in\mathbf{Z},\, a\neq 0$ .

24. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена со

$$x_1=c,\;\; x_{n+1}=cx_n+\sqrt{(c^2-1)(x_n^2-1)},\; n\geq 1\,.$$

Докажи дека ако $c\in\mathbf{N}$, тогаш $x_n\in\mathbf{N}$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

**Решение.** Имаме

$$x_{n+1}-cx_n=\sqrt{(c^2-1)(x_n^2-1)}$$
$$x_{n+1}^2-2cx_nx_{n+1}+c^2x_n^2=c^2x_n^2-c^2-x_n^2+1$$
$$x_{n+1}^2-2cx_nx_{n+1}+x_n^2=1-c^2.$$

Значи

$$x_{n+2}^2-2cx_{n+1}x_{n+2}+x_{n+1}^2=1-c^2$$

и ако ги одземеме последните две равенства последователно добиваме

$$x_n^2-x_{n+2}^2-2cx_{n+1}(x_n-x_{n+2})=0$$
$$(x_n-x_{n+2})(x_n+x_{n+2}-2cx_{n+1})=0.$$

Според тоа, ако $c=1$, тогаш низата е константна. Ако $c>1$, тогаш $x_{n+1}>x_n$, па затоа $x_n-x_{n+2}\neq 0$, т.е. $x_n+x_{n+2}-2cx_{n+1}=0$, од што следува

$$x_{n+2}=2cx_{n+1}-x_n\,. \qquad (1)$$

Но, $x_1=c$, $x_2=2c^2-1$, па од (1) следува дека $x_n\in\mathbf{N}$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

25. Нека $a\in\mathbf{N}$, $a_0=0$ и

$$a_{n+1}=(a_n+1)a+(a+1)a_n+2\sqrt{a(a+1)a_n(a_n+1)}, \qquad (1)$$

за $n\geq 1$. Докажи дека $a_n\in\mathbf{N}$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

**Решение.** За секој $n\in\mathbf{N}$ важи $a_n\geq 0$, па затоа (1) последователно добиваме

$$\sqrt{a_{n+1}^2}=(\sqrt{(a_n+1)a}+\sqrt{(a+1)a_n})^2,$$
$$\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{(a+1)a_n}=\sqrt{(a_n+1)a}$$
$$a_{n+1}+(a+1)a_n-2\sqrt{(a+1)a_na_{n+1}}=(a_n+1)a$$
$$a_{n+1}+a_n-a=2\sqrt{(a+1)a_na_{n+1}}$$
$$(a_{n+1}+a_n-a)^2=4(a+1)a_na_{n+1}$$
$$a_{n+1}^2+a_n^2-2a_{n+1}a_n-4a_{n+1}a_na-2a(a_{n+1}+a_n)=0.$$

Во последното равенство наместо $n$ ставаме $n+1$ и добиваме

$$a_{n+2}^2+a_{n+1}^2-2a_{n+2}a_{n+1}-4a_{n+2}a_{n+1}a-2a(a_{n+2}+a_{n+1})=0\,.$$

Ако од последното равенство го одзмеме претпоследното добиваме, после средувањето добиваме

$$(a_{n+2}-a_n)(a_{n+2}+a_n-2a_{n+1}-4a_{n+1}a-2a)=0.$$

Но, $a_{n+2}-a_n\neq 0$, па затоа

$$a_{n+2}+a_n-2a_{n+1}-4a_{n+1}a-2a=0\,,$$

т.е.

$$a_{n+2}=2a_{n+1}+4a_{n+1}a+2a-a_n\,. \qquad (2)$$

Конечно, бидејќи

$$a_1=a\in\mathbf{N} \text{ и } a_2=4a(a+1)\in\mathbf{N}\,,$$

од (2) и принципот на математичка индукција следува дека $a_n \in \mathbf{N}$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

26. Нека $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{16}(1+4a_n + \sqrt{1+24a_n}), n \geq 1$. Изрази го $a_n$ со помош на $n$.

**Решение.** Бидејќи $a_n > 0$, за секој $n \in \mathbf{N}$ можеме да земеме

$$b_n^2 = 1 + 24a_n, \tag{1}$$

каде $b_n > 0$, за секој $n \in \mathbf{N}$, т.е. $a_n = \frac{b_n^2 - 1}{24}$, за секој $n \in \mathbf{N}$. Тогаш од условот на задачата последователно добиваме:

$$\frac{b_{n+1}^2-1}{3} = \frac{1}{2}(1+\frac{b_n^2-1}{6}+b_n)$$

$$b_{n+1}^2 = \frac{b_n^2+6b_n+9}{4} = (\frac{b_n+3}{2})^2$$

$$b_{n+1} = \frac{b_n+3}{2}. \tag{2}$$

Од (1) имаме $b_1 = 5$ и од (2) последователно добиваме

$$b_{n+1} = \frac{b_n+3}{2} = \frac{\frac{b_{n-1}+3}{2}+3}{2} = \frac{b_{n-1}+3+3\cdot 2}{2^2} = \dots$$

$$= \frac{b_1+3+3\cdot 2+3\cdot 2^2+\dots+3\cdot 2^{n-1}}{2^n}$$

$$= \frac{5+3(1+2+2^2+\dots+2^{n-1})}{2^n} = \frac{2+3\cdot 2^n}{2^n},$$

па затоа

$$b_n = \frac{2+3\cdot 2^{n-1}}{2^{n-1}}, \text{ за } n = 1,2,3,\dots. \tag{3}$$

Конечно, од (3) и од $a_n = \frac{b_n^2-1}{24}$ добиваме

$$a_n = \frac{(\frac{2+3\cdot 2^{n-1}}{2^{n-1}})^2-1}{24}, \text{ за } n = 1,2,3,\dots.$$

27. Нека $\alpha \neq \beta$ се корени на равенката $x^2 + px + q = 0$ и нека

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \ n \in \mathbf{N}.$$

а) Најди ги сите $p$ и $q$ такви што $a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+3} = (-1)^n$, за секој $n \geq 1$.

b) Докажи дека за овие $p$ и $q$ важи $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, за секој $n \geq 1$ и ако $3 | n$, тогаш $a_n$ е парен број.

**Решение.** а) Бидејќи $\alpha$ и $\beta$ се корени на равенката $x^2 + px + q = 0$ имаме $\alpha + \beta = -p, \ \alpha\beta = q$ и затоа

$$(-1)^n = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha^{n+3}-\beta^{n+3}}{\alpha-\beta}$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}[-(\alpha+\beta)(\alpha\beta)^{n+1} + (\alpha^3+\beta^3)(\alpha\beta)^n]$$

$$=\frac{1}{p^2-4q}(pq^{n+1}-p(p^2-3q)q^n)$$

$$=\frac{q^n}{p^2-4q}(-p^3+4pq)=-pq^n.$$

Според тоа, за $n=1$ и $n=2$ добиваме $pq=1$ и $pq^2=-1$, од каде наоѓаме $p=q=-1$. Со непосредна проверка се уверуваме дека за $p=q=-1$ важи $pq^n=(-1)^{n+1}$.

b) Бидејќи $\alpha$ и $\beta$ се корени на $x^2-x-1=0$ добиваме $\alpha^2=\alpha+1$ и $\beta^2=\beta+1$. Затоа

$$a_{n+1}+a_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^n(\alpha+1)-\beta^n(\beta+1)}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{\alpha^n\alpha^2-\beta^n\beta^2}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}=a_{n+2}.$$

Понатаму, од $a_1=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}=1$ и $a_2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta=1$ со индукција по $n$ од релацијата

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \qquad (1)$$

следува дека $a_n$ е природен број за секој $n\in\mathbf{N}$. Понатаму, од (1) имаме

$$a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}=2a_{n+1}+a_n.$$

Бидејќи $a_3=a_1+a_2=2$ е парен број, со индукција по $n$ се добива дека $a_n$ е парен за $3\,|\,n$.

28. Да ја разгледаме низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ определена со $a_0=4$, $a_1=22$ и $a_n=6a_{n-1}-a_{n-2}$, за $n\geq 2$. Докажи дека постојат низи $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ од природни броеви такви да $a_n=\frac{y_n^2+7}{x_n-y_n}$, за секој $n\geq 0$.

**Решение.** Нека $x_n=\frac{a_n+a_{n-1}}{2}$, $x_0=3$ и $y_n=\frac{a_n-a_{n-1}}{2}$, $y_0=1$. Тогаш $x_n=3x_{n-1}+4y_{n-1}$ и $y_n=2x_{n-1}+3y_{n-1}$. Бидејќи $a_n=x_n+y_n$, доволно е да докажеме дека $x_n+y_n=\frac{y_n^2+7}{x_n-y_n}$, т.е. $x_n^2=2y_n^2+7$. Последното равенство ќе го докажеме со индукција по $n$. За $n=0$ со непосредна проверка се уверуваме дека равенството е точно. Нека претпоставиме дека $x_{n-1}^2=2y_{n-1}^2+7$. Последното равенство го запишуваме во облик

$(3x_{n-1}+4y_{n-1})^2=2(2x_{n-1}+3y_{n-1})^2+7$, па затоа $x_n^2=2y_n^2+7$, што и требаше да се докаже.

29. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со

$$a_1=a,\, a_2=b,\, a_{n+1}=\frac{a_n^2+c}{a_{n-1}}, \text{ за } n=2,3,...,$$

каде $a,b,c\in\mathbf{R}$, $ab\neq 0$ и $c>0$. Докажи дека $a_n\in\mathbf{Z}$ за $n=1,2,3,...$ ако и само ако $a,b,\frac{a^2+b^2+c}{ab}\in\mathbf{Z}$.

**Решение.** Рекурентната релација можеме да ја запишеме во обликот $a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2=c$, за $n\geq 2$. Оттука имаме $a_{n+2}a_n-a_{n+1}^2=c$, па затоа $a_{n+2}a_n-a_{n+1}^2=a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2$, т.е. $a_n(a_n+a_{n+2})=a_{n+1}(a_{n-1}+a_{n+1})$, од каде добиваме

$$\frac{a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{a_n}=k\text{, за } n\geq 2.$$

Според тоа,

$$a_{n+1}=ka_n-a_{n-1},\ n\geq 2, \tag{1}$$

каде

$$k=\frac{a_1+a_3}{a_2}=\frac{a_1+\frac{a_2^2+c}{a_1}}{a_2}=\frac{a^2+b^2+c}{ab}.$$

Сега, ако $a,b,\frac{a^2+b^2+c}{ab}\in\mathbf{Z}$, тогаш $a_1=a$ и $a_2=b$ се цели броеви и од (1) следува дека $a_n\in\mathbf{Z}$ за $n=1,2,3,...$.

Обратно, нека $a_n\in\mathbf{Z}$ за $n=1,2,3,...$. Тогаш $a_1=a$ и $a_2=b$ се цели броеви и нека $k=\frac{a_1+a_3}{a_2}$ е рационален број, при што $k=\frac{p}{q}$, каде $p$ и $q>0$ се заемно прости броеви. Да претпоставиме дека $q>1$. Од $pa_2=qa_1+qa_3$ следува $q\mid a_2$. Аналогно од $pa_n=qa_{n-1}+qa_{n+1}$ по индукција следува дека $q\mid a_n$ за $n\geq 2$. Од последното равенство следува дека за $n\geq 3$, $q^2$ го дели $a_n$, за $n\geq 4$, $q^3$ го дели $a_n$ итн. за $n\geq s+1$, $q^s$ го дели $a_n$. Од друга страна од равенството

$$a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2=c,$$

кое важи за секој $n\geq 2$ следува дека $c$ е цел број и дека $q^s$ е делител на $c$ за секој природен број $s$, што е противречност. Според тоа, $q=1$ и $k=\frac{a_1+a_3}{a_2}=\frac{a^2+b^2+c}{ab}$ е цел број.

30. Дали постои низа ненегативни цели броеви $F(1),F(2),F(3),...$ за кои важат следниве услови:

1) секој од броевите 0,1,2,3,.... се содржи во низата,
2) секој природен број се содржи бесконечно многу пати во низата,
3) $F(F(n^{163}))=F(F(n))+F(F(361))$, за секој $n\geq 2$.

**Решение.** Нека $F(1)=0$ и $F(361)=1$. Тогаш условот 3) го добива обликот

$$F(F(n^{163}))=F(F(n))\text{, за } n\geq 2.$$

Ставаме $F(n)=n$, за $2\leq n\leq 360$. Понатаму, за $n\geq 362$ индуктивно дефинираме

- ако $n = m^{163}$, за некој $m$, тогаш $F(n) = F(m)$,
- во спротивно $F(n)$ е најмалиот природен број кој не се содржи во множеството $\{F(k) \mid k < n\}$.

Јасно, постојат бесконечно многу природни броеви кои не се од облик $m^{163}$, па затоа секој ненегативен цел број во низата се појавува барем еднаш. Понатаму, секој природен број во низата се содржи бесконечно многу пати, бидејќи ако се појави како $F(n)$, тогаш тој се појавува како $F(n^{163})$, $F((n^{163})^{163})$, ..., т.е. како $F(n^{163k}), k \geq 1$.

Конечно, условот 3) е исполнет бидејќи од $F(n) = F(n^{163})$ следува $F(F(n^{163})) = F(F(n))$.

31. За произволен природен број $x > 1$ нека $p(x)$ е најмалиот прост број кој не е делител на $x$ и $p(1) = 2$. Ако $p(x) \geq 3$, со $q(x)$ го означуваме производот на сите прости броеви помали од $q(x)$, а ако $p(x) = 2$ ставаме $q(x) = 1$. Низата $x_0, x_1, x_2, ...$ е определена со $x_0 = 1$ и $x_{n+1} = \frac{x_n p(x_n)}{q(x_n)}$, за $n \geq 0$. Најди ги сите природни броеви $n$ за кои $x_n = 1995$.

**Решение.** Од дефиницијата на $p(x)$ и $q(x)$ е јасно дека $q(x)$ е делител на $x$ за секој $x$, па затоа $x_{n+1} = \frac{x_n p(x_n)}{q(x_n)}$ е природен број за секој $n \geq 0$. Исто така, со индукција може да се докаже дека $x_n$ не е полн квадрат за секој $n \in \mathbf{N}$. Оттука следува дека на секој $x_n$ можеме да му придружиме единствена конечна низа од нули и единици, која ја формираме според неговите прости делители. Нека $p_0 = 2, p_1 = 3, ...$ е низата прости броеви подредени според растечки редослед. Нека $x > 1$ е природен број кој не е полн квадрат и нека $p_m$ е неговиот најголем прост делител. Тогаш на бројот $x$ му ја придружуваме подредената $(m+1)-$торка од нули и единици

$$(1, S_{m-1}, S_{m-2}, ..., S_1, S_0) \qquad (1)$$

каде $S_i = 1$ ако $p_i$ е делител на $x$ и $S_i = 0$ ако $p_i$ не е делител на $x$, за $i = 0, 1, 2, ..., m-1$. Дефинираме $f(x) = \frac{xp(x)}{q(x)}$. Јасно, ако $S_0 = 0$, тогаш $x$ е непарен број, $p(x) = 2, q(x) = 1$ и $f(x) = 2x$. Јасно, во овој случај низата на $f(x)$ е иста со онаа на $x$, со тоа што крајната 0 е заменета со 1. Понатаму, ако низата (1) придружена на $x$ завршува на 01...11, тогаш низата (1) придружена на $f(x)$ завршува на 10...00. Според тоа, ако ги разгледуваме низите (1) како бинарни броеви, тогаш низата придружена на $f(x)$ се добива кога на низата низата придружена на се додаде 1. Од $x_1 = 2$ и $x_{n+1} = f(x_n)$, за $n \geq 2$ следува дека низата придружена на $x_n$ всушност е бинарниот запис на бројот $n$, па затоа постои единствен број $n$ за кој $x_n = 1995 = 3\cdot 5\cdot 7\cdot 19$. Но, низата придружена на $x_n$ е 10001110, па затоа $n = 10001110_2 = 142$.

32. Нека $a_1 > 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$, за $n \ge 1$. Најди формула за општиот член на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

**Решение.** Да го разгледаме системот

$$\begin{cases} u+v = \sqrt{a_1^2+2} \\ u-v = \sqrt{a_1^2-2} \end{cases}$$

чии решенија се

$$u = \tfrac{1}{2}(\sqrt{a_1^2+2} + \sqrt{a_1^2-2}),\ \ v = \tfrac{1}{2}(\sqrt{a_1^2+2} - \sqrt{a_1^2-2})$$

и за кои важи

$$\begin{aligned} uv &= \tfrac{1}{4}(\sqrt{a_1^2+2} + \sqrt{a_1^2-2})(\sqrt{a_1^2+2} - \sqrt{a_1^2-2}) \\ &= \tfrac{1}{4}[a_1^2+2-(a_1^2-2)] = 1 \end{aligned}.$$

Понатаму, од првата равенка на системот последователно добиваме

$$\begin{aligned} (u+v)^2 &= a_1^2+2 \\ a_1^2 &= u^2+v^2 \end{aligned}$$

и ако ја земеме предвид рекурентната формула $a_{n+1} = a_n^2 - 2$, за $n \ge 1$ добиваме

$$a_2 = a_1^2 - 2 = (u^2+v^2)^2 - 2 = (u^2)^2 + (v^2)^2 + 2u^2v^2 - 2 = u^{2^2} + v^{2^2},$$

па затоа логично е општиот член да го побараме во облик

$$a_n = u^{2^n} + v^{2^n},\ n \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Јасно, формулата (1) важи за $n=1$ и $n=2$. Нека претпоставиме дека таа важи за $n=k$. Тогаш

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k^2 - 2 = (u^{2^k} + v^{2^k})^2 - 2 = (u^{2^k})^2 + (v^{2^k})^2 + 2(uv)^{2^k} - 2 \\ &= u^{2^{k+1}} + v^{2^{k+1}}, \end{aligned}$$

што значи дека (1) важи и за $n = k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број $n$.

33. Нека $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа од природни броеви такви што $a_n > a_{n-1}+1,\ n \ge 2$. Низата природни броеви $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ е зададена со

$$b_n = a_1 + a_2 + ... + a_n,\ n = 1, 2, ....$$

Да се докаже дека барем еден од броевите $b_n, b_n+1, b_n+2, ..., b_{n+1}-1$ е полн квадрат.

**Решение.** Доволно е да докажеме дека

$$\sqrt{b_{n+1}} - \sqrt{b_n} \ge 1. \tag{1}$$

Навистина, ако последното неравенство е точно, тогаш

$$\sqrt{b_{n+1}} \ge 1+\sqrt{b_n} > \sqrt{b_n}\ ,$$

па затоа постои природен број $p$ таков што

$$\sqrt{b_n} \le p < \sqrt{b_n}+1 \le \sqrt{b_{n+1}}\ ,$$

односно $b_n \le p^2 < b_{n+1}$. Според тоа постои $k \in \mathbf{N}$ таков што

$$b_n + k = p^2 \le b_{n+1}-1$$

односно

$$b_n \le b_n + k = p^2 \le b_{n+1}-1 .$$

Неравенство (1) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$b_{n+1} \ge 1+b_n+2\sqrt{b_n}\ ,$$

$$a_{n+1} \ge 1+2\sqrt{b_n}\ ,$$

$$\frac{a_{n+1}-1}{2} \ge \sqrt{b_n}$$

$$(\frac{a_{n+1}-1}{2})^2 \ge b_n = a_1+a_2+...+a_n . \tag{2}$$

Неравенството (2) ќе го докажеме со помош на математичка индукција. За $k=1$, од неравенството $a_2 > a_1+1$, последователно добиваме

$$a_2 \ge a_1+2\ ,\ \ a_2-1 \ge a_1+1\ ,\ \ \frac{a_2-1}{2} \ge \frac{a_1+1}{2}\ ,$$

$$(\frac{a_2-1}{2})^2 \ge (\frac{a_1+1}{2})^2 \ge (\frac{1}{2}2\sqrt{a_1 \cdot 1})^2 = a_1 .$$

Нека претпоставиме дека (2) е точно за $k=n$, односно дека е точно неравенството

$$(\frac{a_{n+1}-1}{2})^2 \ge b_n = a_1+a_2+...+a_n . \tag{3}$$

За $k=n+1$, имаме

$$(\frac{a_{n+1}+1}{2})^2 = (\frac{a_{n+1}-1}{2})^2 + a_{n+1}\ ,$$

и како

$$a_{n+2} > a_{n+1}+1\ ,\ \ a_{n+2} \ge a_{n+1}+2\ ,\ \ a_{n+2}-1 \ge a_{n+1}+1\ ,\ \ \frac{a_{n+2}-1}{2} \ge \frac{a_{n+1}+1}{2}\ ,$$

$$(\frac{a_{n+2}-1}{2})^2 \ge (\frac{a_{n+1}+1}{2})^2 = (\frac{a_{n+1}-1}{2})^2 + a_{n+1} .$$

од неравенството (3) следува

$$(\frac{a_{n+2}-1}{2})^2 \ge (\frac{a_{n+1}-1}{2})^2 + a_{n+1} \ge a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1} .$$

Значи, неравенството (2) е точно и за $k=n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека неравенството (2) е точно за секој $n \in \mathbf{N}$.

34. Низата $u_0, u_1, ...$ е определена со

$$u_0 = 2, u_1 = \frac{5}{2},\ \ u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2-2)-u_1\ \ ,\ n=1,2,... .$$

Докажи, дека за секој $n=1,2,....$ важи $[u_n] = 2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$.

**Решение.** Ќе докажеме дека

$$u_n = 2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}} + 2^{-\frac{2^n-(-1)^n}{3}}, \text{ за секој } n=0,1,2,... \qquad (1)$$

Равенството (1) ќе го докажеме со математичка индукција по $n$. За $n=0$ и $n=1$ равенството (1) е точно. Ако (1) е точно за $n=k-1$ и $n=k$, тогаш бидејќи $2^{(-1)^{k+1}} + 2^{-(-1)^{k+1}} = \frac{5}{2}$ добиваме

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= (2^{\frac{2^k-(-1)^k}{3}} + 2^{-\frac{2^k-(-1)^k}{3}})(2^{2\frac{2^{k-1}-(-1)^{k-1}}{3}} + 2^{-2\frac{2^{k-1}-(-1)^{k-1}}{3}}) - \frac{5}{2} \\ &= 2^{\frac{2^k-(-1)^k+2^k-2(-1)^{k-1}}{3}} + 2^{\frac{2^k-(-1)^k-2^k+2(-1)^{k-1}}{3}} + \\ &\quad + 2^{\frac{-2^k+(-1)^k+2^k-2(-1)^{k-1}}{3}} + +2^{\frac{-2^k+(-1)^k-2^k+2(-1)^{k-1}}{3}} - \frac{5}{2} \\ &= 2^{\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}} + 2^{(-1)^{k+1}} + 2^{-(-1)^{k+1}} + 2^{\frac{-2^{k+1}+(-1)^{k+1}}{3}} - \frac{5}{2} \\ &= 2^{\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}} + 2^{-\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}}, \end{aligned}$$

т.е. (1) е точно за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека .

За $n>0$ вториот собирок во

$$u_n = 2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}} + 2^{-\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$$

е помал од еден и како $2^n-(-1)^n \equiv 0 \,(\bmod 3)$, добиваме дека

$$[u_n] = 2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}, \text{ за секој } n=1,2,... .$$

35. Најди ја најголемата можна вредност на бројот $x_0$, за која постои низа позитивни реални броеви $x_0, x_1, ..., x_{1995}$ кои ги задоволуваат условите:

1) $x_0 = x_{1995}$ и

2) $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$, за секој $i \in \{1,2,...,1995\}$.

**Решение.** Условот 2) е еквивалентен со

$$2x_i^2 - (x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}})x_i + 1 = 0.$$

Последната равенка ја решаваме по $x_i$ и добиваме

$$x_i = \frac{1}{2}x_{i-1} \text{ и } x_i = \frac{1}{x_{i-1}}.$$

Со математичка индукција по $i$ ќе докажеме дека:

$$x_i = 2^{k_i} x_0^{\varepsilon_i}, \; k_i \in \mathbf{Z}, \; |k_i| \le i \text{ и } \varepsilon_i = (-1)^{k_i+i}. \qquad (1)$$

Јасно, (1) важи за $i=0$, при што $k_0=0$ и $\varepsilon_0=1$. Нека претпоставиме дека (1) важи за некој $i-1 \ge 0$. Од претходно изнесеното имаме

- $x_i = \frac{1}{2}x_{i-1}$ и тогаш имаме $k_i = k_{i-1}-1$ и $\varepsilon_i = \varepsilon_{i-1}$ и

- $x_i = \frac{1}{x_{i-1}}$ и тогаш имаме $k_i = -k_{i-1}$ и $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i-1}$,

при што и во двата случаја важи $|k_i| \le i$ и $\varepsilon_i = (-1)^{k_i + i}$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека (1) важи за секој природен број $i$.

Значи, $x_{1995} = 2^k x_0^{\varepsilon}$, $k = k_{1995}$ и $\varepsilon = \varepsilon_{1995}$, при што $0 \le |k| \le 1995$ и $\varepsilon = (-1)^{1995+k}$. Сега од условот 1) добиваме $x_0 = x_{1995} = 2^k x_0^{\varepsilon}$. Ако $k$ е непарен број, тогаш $\varepsilon = 1$, па имаме $2^k = 1$, што противречи на $k \ne 0$. Затоа $k$ мора да е парен број, па имаме $\varepsilon = -1$ и $x_0^2 = 2^k$. Бидејќи $k$ е парен и $|k| \le 1995$ добиваме дека $k \le 1994$. Од овде $x_0 \le 2^{997}$. Равенство се достигнува за

$$x_0 = 2^{997},\ x_i = \tfrac{1}{2} x_{i-1} \text{ за } i = 1, 2, 3, ..., 1994 \text{ и } x_{1995} = \frac{1}{x_{1994}}.$$

Тогаш,

$$x_{1994} = 2^{-997} \text{ и } x_{1995} = 2^{997} = x_0 .$$

36. Нека $a_k$ е општиот член, а $S_k$ е збирот на првите $k$ членови на некоја аритметичка прогресија. Ако за некои $m$ и $n$, каде $m \ne n$, важи $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$, докажи дека

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

**Решение.** Од условот на задачата следува

$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{S_m}{S_n} = \frac{\frac{1}{2}m(a_1+a_m)}{\frac{1}{2}n(a_1+a_n)} = \frac{m(2a_1+(m-1)d)}{n(2a_1+(n-1)d)}.$$

Од овде добиваме

$$2ma_1 + m(n-1)d = 2na_1 + n(m-1)d \text{ , т.е. } m(2a_1 - d) = n(2a_1 - d),$$

па затоа $a_1 = \frac{d}{2}$. Според тоа,

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{\frac{d}{2}+(m-1)d}{\frac{d}{2}+(n-1)d} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

37. Нека $S_n$ е збирот на првите $n$ членови на аритметичка прогресија. Ако за некои $m$ и $n$, каде $m \ne n$, важи $S_m = S_n$, докажи дека $S_{m+n} = 0$.

**Решение.** Нека $a_1$ е првиот член и $d$ е разликата на аритметичката прогресија. Од условот $S_m = S_n$ следува

$$\tfrac{1}{2} m(2a_1 + (m-1)d) = \tfrac{1}{2} n(2a_1 + (n-1)d),$$

и како $m \ne n$ добиваме $d = -\frac{2a_1}{m+n-1}$. Според тоа

$$S_{m+n} = \tfrac{m+n}{2}[2a_1 + (m+n-1)\tfrac{-2a_1}{m+n-1}] = 0 .$$

38. Дадени се реалните броеви $a,b,c$. При кои услови постои аритметичка прогресија, таква да за секој $n$ збирот $S_n$ на првите $n$ членови на таа прогресија е еднаков на $an^2+bn+c$?

**Решение.** Од условот на задачата добиваме

$S_1=a+b+c=a_1, S_2=4a+2b+c=a_1+a_2, S_3=9a+3b+c=a_1+a_2+a_3$

т.е. $a+b+c=a_1,\ a_2=3a+b,\ a_3=5a+b$. Понатаму, од $2a_2=a_1+a_3$ следува $c=0$. Според тоа, низата е определена со $a_1=a+b$ и $d=2a$ и за оваа низа важи $S_n=an^2+bn$. Според тоа, бараната низа постои ако и само ако $c=0$.

39. Дали може $\sqrt{5}$ и 5 да бидат членови на аритметичка прогресија чиј прв член е еднаков на 2?

**Решение.** Ако $\sqrt{5}$ и 5 се членови на аритметичка прогресија за која $a_1=2$, тогаш

$$\sqrt{5}=a_1+(m-1)d=2+(m-1)d,$$
$$5=a_1+(n-1)d=2+(n-1)d,$$

каде $d$ е разликата и $m$ и $n$ се природни броеви. Од последните две равенства добиваме $d=\frac{\sqrt{5}-2}{m-1}=\frac{3}{n-1}$, од каде следува $\sqrt{5}=2+\frac{3(m-1)}{n-1}$, што не е можно, бидејќи $\sqrt{5}$ е ирационален број. Значи, таква низа не постои.

40. Дадени се две аритметички прогресии чии разлики се 13 и $\sqrt{13}$. Докажи дека постои најмногу еден член кој е заеднички за двете прогресии.

**Решение.** Ако $x$ и $y$ припаѓаат на аритметичка прогресија со разлика 13, тогаш постојат природни броеви $k$ и $m$ такви да $y-x=13(k-m)$. Ако овие исти броеви припаѓаат на аритметичка прогресија со разлика $\sqrt{13}$, тогаш постојат природни броеви $n$ и $p$ такви што $y-x=\sqrt{13}(n-p)$. Значи, $\sqrt{13}(n-p)=13(k-m)$, т.е $\sqrt{13}=\frac{13(k-m)}{n-p}$, што не е можно бидејќи $\sqrt{13}$ е ирационален број.

41. Дадена е аритметичката прогресија $a_1,a_2,...,a_n$. Докажи дека

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

**Решение.** Ако $d$ е разликата на аритметичката прогресија, тогаш

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}\cdot\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}\cdot\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}\cdot\frac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}$$
$$=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1-a_2}+\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{a_2-a_3}+...+\frac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n-1}-a_n}$$

$$=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}+\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}+...+\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}{-d}$$

$$=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{\frac{a_n-a_1}{n-1}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

42. Дадена е аритметичката прогресија $a_1, a_2, ..., a_n$. Докажи дека

$$\frac{1}{a_1a_n}+\frac{1}{a_2a_{n-1}}+...+\frac{1}{a_{n-1}a_2}+\frac{1}{a_na_1}=\frac{2}{a_1+a_n}(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}).$$

**Решение.** Ако ги собереме очигледните равенства

$$\frac{1}{a_1a_n}=\frac{1}{a_1+a_n}(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n})$$

$$\frac{1}{a_2a_{n-1}}=\frac{1}{a_2+a_{n-1}}(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_{n-1}})$$

..........................................

$$\frac{1}{a_{n-1}a_2}=\frac{1}{a_{n-1}+a_2}(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_2})$$

$$\frac{1}{a_na_1}=\frac{1}{a_n+a_1}(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_1})$$

и земеме во предвид дека $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=...=a_1+a_n$ го добиваме бараниот резултат.

43. Најди ги сите вредности на реалниот параметар $a$, така што ненегативните решенија на равенката $(2a-1)\sin x+(2-a)\sin 2x=\sin 3x$ формираат бесконечна аритметичка прогресија.

**Решение.** Од $\sin 2x=2\sin x\cos x$ и $\sin 3x=\sin x(4\cos^2 x-1)$ следува дека дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$\sin x(2\cos^2 x-(2-a)\cos x-a)=0\,.$$

Значи, $\sin x=0, \cos x=1$ или $\cos x=-\frac{a}{2}$. Ненегативни решенија на равенките $\sin x=0$ и $\cos x=1$ се $x=k\pi$ и $x=2k\pi$, $k=0,1,2,...$, соодветно.

Нека $|a|>2$. Во овој случја равенката $\cos x=-\frac{a}{2}$ нема решенија и затоа ненегативни решенија на почетната равенка се $0,\pi,2\pi,...$ и те формираат аритметичка прогресија.

Нека $|a|\leq 2$ и нека $x_0$ е едно решение на равенката $\cos x=-\frac{a}{2}$ во интервалот $[0,\pi]$. Во овој случај ненегативни решенија на последната равенка се $x=x_0+2k\pi$ и $x=2\pi-x_0+2k\pi$. Сега е јасно дека ненегативните решенија формираат аритметичка прогресија само кога $x_0=0, x_0=\frac{\pi}{2}$ или $x_0=\pi$, па затоа $a=-2$, $a=0$ или $a=2$.

44. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е дефинирана со $a_n=3^n-2^n$, $n\in\mathbf{N}$. Докажи дека не постојат три члена на оваа низа кои припаѓаат на некоја геометриска прогресија.

**Решение.** Од $2\cdot 3^n>2^n$ следува $3^n(3-1)>2^n(2-1)$, што значи дека

$$3^{n+1}-3^n > 2^{n+1}-2^n \text{, т.е. } a_{n+1} = 3^{n+1}-2^{n+1} > 3^n - 2^n = a_n \text{,}$$

за секој $n \in \mathbf{N}$. Според тоа, низата строго монотоно расте.
Ќе докажеме дека за секои $m,n \in \mathbf{N}$, $m < n$ важи

$$a_m a_{2n-m} < a_n^2 < a_m a_{2n-m+1}, \tag{1}$$

од што ќе следува дека $a_m a_k \neq a_n^2$, за секои $k,m,n \in \mathbf{N}$. Имаме

$$\begin{aligned}(3^{n-m}-2^{n-m})^2 > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (3^m-2^m)(3^{2n-m}-2^{2n-m}) < (3^n-2^n)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad a_m a_{2n-m} < a_n^2,\end{aligned}$$

со што е докажано левото неравенство во (1). Десното неравенство во (1) следува од следнава низа еквивалентни неравенства:

$$\begin{aligned}
&(3^m-2^m)(3^{2n-m+1}-2^{2n-m+1}) > (3^n-2^n)^2 \qquad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2\cdot 3^{2n}+2^{2n}+2\cdot 6^n-2^m 3^{2n-m+1}-3^m 2^{2n-m+1} > 0 \\
&\Leftrightarrow 2\cdot 3^{2n-m+1}(3^{m-1}-2^{m-1})+2^{2n}+2\cdot 6^n-3^m 2^{2n-m+1} > 0 \\
&\Leftrightarrow 2\cdot 3^{2n-m+1}(3^{m-1}-2^{m-1})+2^{2n-m+1}(2^{m-1}-3^{m-1})+ \\
&\qquad +2\cdot 6^n-2\cdot 3^{m-1}2^{2n-m+1} > 0 \\
&\Leftrightarrow (3^{m-1}-2^{m-1})(2\cdot 3^{2n-m+1}-2^{2n-m+1})+2\cdot 6^n-2\cdot 3^{m-1}2^{2n-m+1} > 0 \\
&\Leftrightarrow (3^{m-1}-2^{m-1})(2\cdot 3^{2n-m+1}-2^{2n-m+1})+2\cdot 2^n 3^{m-1}(3^{n-m+1}-2^{n-m+1}) > 0
\end{aligned}$$

45. За секој природен број $n$ дефинираме $f(n)$ на следниов начин: $f(1)=1$ и за секој $n \in \mathbf{N}$, $f(n+1)$ е најголемиот природен број $m$ таков што постои аритметичка прогресија од природни броеви $a_1 < a_2 < ... < a_m$ и $f(a_1) = f(a_2) = ... = f(a_m)$. Докажи дека постојат $a,b \in \mathbf{N}$ такви да $f(an+b) = n+2$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

**Решение.** Пресметуваме неколку вредности на $f(n)$ и забележуваме дека

$f(4k) = k,$ но $f(8) = 3$,

$f(4k+1) = 1$, но $f(5) = f(13) = 2$,

$f(4k+2) = k-3$, но $f(6) = f(10),$ $f(14) = f(18) = 3$ и $f(26) = 4$,

$f(4k+3) = 2$.

Одделно ќе ги разгледаме четирите случаи.

1) За $n = 4k$, лесно се гледа дека $f(4) = 1$ и $f(8) = 3$. Нека $k \geq 3$. Од

$$f(3) = f(7) = f(11) = ... = f(4k-1)$$

следува $f(4k) \geq k$. Од друга страна имаме

$$f(n) \leq \max\{f(m) \mid m < n\} + 1.$$

Затоа $f(4k) = k$.

2) За $n = 4k+2$ имаме

$$f(2) = 1, \; f(6) = f(10) = f(22) = 2, \;\; f(14) = f(18) = 3 \;\text{ и }\; f(26) = 4.$$

Нека $k \geq 7$. Од

$$f(17)=f(21)=...=f(4k+1)$$

следува $f(4k+2)\geq k-3$. Меѓутоа, ако $f(4k+1)=f(4k+1-d)$ и $d>4$, тогаш $d\geq 8$. Затоа

$$4k+1-d(k-3)\leq 4k+1-8(k-3)=25-4k<0.$$

Значи, $f(4k+2)=k-3$.

3) За $n=4k+1$ имаме $f(1)=f(9)=1$ и $f(5)=f(13)=2$. Нека $k\geq 3$. Бидејќи $f(4k)=k$ и $f(m)<k$ за секој $m<4k$ добиваме дека $f(4k+1)=1$.

4) За $n=4k+3$ имаме $f(3)=f(7)=...=f(31)=2$. Нека $k\geq 8$. Но, $f(4k+2)=k-3$ за точно еден $m<4k+2$, па затоа $f(4k+3)=2$.

Конечно, ако земеме $a=4$ и $b=8$ добиваме $f(4n+8)=n+2$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

46. Нека се $a,b,x$ реални броеви различни од нула. Низата $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ е определна со $t_0=a, t_1=b, t_n=xt_{n-1}t_{n+1}, n=1,2,...$. Докажи дека оваа низа е периодична!

**Решение.** Од условот на задачата следува дека $t_{n+1}=\frac{t_n}{xt_{n-1}}$, за $n=1,2,...$. Според тоа,

$$t_2=\frac{b}{ax}, t_3=\frac{1}{ax^2}, t_4=\frac{1}{bx^2}, t_5=\frac{a}{bx}, t_6=a, t_7=b,$$

што значи дека за секој природен број $k$ важи

$$t_{6k+r}=t_r, r=0,1,2,3,4,5,$$

т.е. низата $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ е периодична со период 6.

47. Нека $x_1\in\mathbf{R}$ и нека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со рекурентната формула

$$x_{n+1}=\sqrt{3}-\frac{1}{x_n},\ n\in\mathbf{N}.$$

Најди го членот $x_{2014}$.

**Решение.** Ако $x_1=x$, тогаш од рекурентната формула добиваме

$$x_2=\frac{x\sqrt{3}-1}{x},\ x_3=\frac{2x-\sqrt{3}}{x\sqrt{3}-1},\ x_4=\frac{x\sqrt{3}-2}{2x-\sqrt{3}},\ x_5=\frac{x-\sqrt{3}}{x\sqrt{3}-2},\ x_6=\frac{-1}{x-\sqrt{3}},\ x_7=x,$$

па е $x_{n+6}=x_n$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Според тоа, низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е периодична со периода 6, па затоа

$$x_{2014}=x_{6\cdot 335+4}=x_4=\frac{x\sqrt{3}-2}{2x-\sqrt{3}}.$$

48. Низата $a_0,a_1,a_2,...,a_n,...$ е определена со $a_0=a, a\in\mathbf{R}$ и

$$a_n=\frac{a_{n-1}\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-a_{n-1}}, n=1,2,3,....$$

Пресметај $a_{2013}$.

**Решение.** Од $a_0 = a$ и $a_n = \frac{a_{n-1}\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-a_{n-1}}$, $n = 1,2,3,...$ добиваме

$$a_1 = \frac{a\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-a},\ \ a_2 = \frac{a+\sqrt{3}}{1-a\sqrt{3}},\ \ a_3 = \frac{1}{a},\ \ a_4 = \frac{-a+\sqrt{3}}{-1-a\sqrt{3}},\ \ a_5 = \frac{-a\sqrt{3}+1}{-\sqrt{3}-a},\ \ a_6 = a\ .$$

Според тоа, $a_{6k+r} = a_r$, $r = 0,1,2,3,4,5,\ \ k \in \mathbf{N}$. Затоа

$$a_{2013} = a_{6\cdot 335+3} = a_3 = \frac{1}{a}\ .$$

49. Дадена е низата $a_1 = a, a_2 = b, a_{n+2} = \frac{1+a_{n+1}}{a_n}$, за $n \geq 1$, каде $a \neq 0,\ \ b \neq 0$, $a \neq -1$, $b \neq -1$ и $a+b \neq -1$. Пресметај $a_{2014}$!

**Решение.** Лесно добиваме $a_3 = \frac{1+b}{a}$, $a_4 = \frac{a+b+1}{ab}$, $a_5 = \frac{(a+1)(b+1)}{b(b+1)} = \frac{1+a}{b}$, $a_6 = a$, $a_7 = b$, што значи дека низата е периодична со перида 5. Според тоа, $a_{2014} = a_{5\cdot 402+4} = a_4 = \frac{a+b+1}{ab}$.

50. Нека $a_0$ и $a_1$ се произволни ненегативни реални броеви и нека

$$a_{n+1} = | a_n | - a_{n-1}\text{, за } n = 1,2,3,....$$

Докажи дека низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е периодична.

**Решение.** Доволно е да ги разгледаме следниве четири случаи:

1) $0 \leq 2a_1 \leq a_0$
2) $0 \leq a_1 \leq a_0 \leq 2a_1$
3) $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq 2a_0$
4) $0 \leq 2a_0 \leq a_1$.

Да ги воведеме ознаките $a = a_0, b = a_1$. Во разгледуваните случаи за првите 11 членови на низата имаме

1) $a,b,b-a,a-2b,2a-3b,a-b,2b-a,-b,a-b,a,b$ ,
2) $a,b,b-a,a-2b,b,3b-a,2b-a,-b,a-b,a,b$ ,
3) $a,b,b-a,a-2b,b,3b-a,2b-a,-b,a-b,a,b$ ,
4) $a,b,b-a,-a,2a-b,b-a,2b-3a,b-2a,a-b,a,b.$

Според тоа, во сите случаи за секој $n \in \mathbf{N}$ важи $a_{n+9} = a_n$, што значи дека разгледуваната низа е периодична.

51. Низата $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена со $c_1 = 2$, $c_{n+1} = [\frac{3c_n}{2}]$, $n \geq 1$. Докажи дека

a) Низата $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ содржи бесконечно многу парни броеви.

b) Низата $b_n = (-1)^{c_n}$, $n = 1,2,3,...$ не е периодична.

**Решение.** b) Нека $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е периодична од даден $n_0 \in \mathbf{N}$, т.е. $b_{n+T} = b_n$, за секој $n \geq n_0$. Тогаш $c_n$ и $c_{n+T}$ се истовремено парни или непарни, т.е.

$$\frac{3c_n}{2} - [\frac{3c_n}{2}] = \frac{3c_{n+T}}{2} - [\frac{3c_{n+T}}{2}]$$

или

$$c_{n+T+1}-c_{n+1}=\frac{3}{2}(c_{n+T}-c_n)\,. \qquad (1)$$

Но, не постои бесконечна геометриска прогресија од цели броеви со количник $\frac{3}{2}$, т.е. равенството (1) не е можно.

а) Непосредно следува од b).

52. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена со $a_{2n}=a_n$, за $n\geq 1$, $a_{4n+1}=1$ и $a_{4n+3}=0$, за $n\geq 0$. Докажи дека оваа низа нема период.

**Решение.** Ако $T=2^r q$, $q$ е непарен број, е период на низата тогаш за $q=4m+3$ и $k\geq r+2$ имаме

$$\begin{aligned}1=a_{2^k}&=a_{2^k+T}=a_{2^k+2^r(4m+3)}=a_{2^r(2^{k-r}+4m+3)}\\&=a_{2^{k-r}+4m+3}=a_{4(2^{k-r-2}+m)+3}=0,\end{aligned}$$

што е противречност. Понатаму, за $q=4m+1$ и $k\geq r+2$ имаме

$$\begin{aligned}1=a_{2^k}&=a_{2^k+3T}=a_{2^k+3\cdot 2^r(4m+1)}=a_{2^r(2^{k-r}+12m+3)}\\&=a_{2^{k-r}+12m+3}=a_{4(2^{k-r-2}+3m)+3}=0,\end{aligned}$$

што повторно е противречност. Конечно од претходно изнесеното следува дека низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ нема период.

53. Дадени се природни броеви $a_0,a_1,...,a_{100}$. Познато е дека $a_1>a_0$ и $a_{i+1}=3a_i-2a_{i-1}$, за $i=1,2,...,99$. Докажи дека $a_{100}>2^{99}$.

**Решение.** Дадените броеви се природни и $a_1>a_0$, па затоа $a_1\geq a_0+1$. Понатаму,

$$a_{i+1}-a_i=2(a_i-a_{i-1})\,, \qquad (1)$$

за $i=1,2,...,99$. Ако ги помножиме равенствата (1) добиваме

$$a_{100}-a_{99}=2^{99}(a_1-a_0)\geq 2^{99}$$

и како $a_{99}>0$ следува $a_{100}>2^{99}$.

54. Докажи дека во низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ определена со

$$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n^3-3a_n^2+5\,,\text{ за } n\geq 1$$

содржи бесконечно многу различни природни броеви.

**Решение.** Имаме $a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=5$ и $a_4=55$. Понатаму,

$$a_{n+1}-a_n=a_n^3-3a_n^2-a_n+5>0\,, \qquad (1)$$

бидејќи за функцијата $f(n)=n^3-3n^2-n+5$ важи $f(n)>0$, за секој $n\in\mathbf{N}\setminus\{2\}$. Навистина, $f(1)=2>0,\ f(3)=2>0$, а за $n\geq 4$ добиваме

$$f(n)=n\cdot n^2-3n^2-n+5\geq 4n^2-3n^2-n+5=n^2-n+5>0\,.$$

Конечно, од (1) следува дека низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ содржи бесконечно многу различни природни броеви.

55. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со

$$a_1 = 2,\ a_n = 2(n + a_{n-1}),\quad n \geq 2.$$

Докажи дека

$$a_n \leq 2^{n+2}, \text{ за секој } n \in \mathbf{N}.$$

**Решение.** Да ја разгледаме низата $b_n = 2^{n+2} - a_n$, $n \in \mathbf{N}$. За $n = 1$ имаме

$$b_1 = 2^3 - a_1 = 8 - 2 = 6 = 2 \cdot 1 + 4.$$

За $n = 2$ имаме

$$b_2 = 2^4 - a_2 = 2^4 - 8 = 8 = 2 \cdot 2 + 4.$$

Нека претпоставиме дека за некој $k \geq 1$ важи $b_k = 2k + 4$. Тогаш за $k + 1$ имаме

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= 2^{k+3} - a_{k+1} = 2^{k+3} - 2(k + 1 + a_k) \\ &= 2(2^{k+2} - a_k - (k+1)) = 2(b_k - (k+1)) \\ &= 2(2k + 4 - k - 1) = 2(k+1) + 4, \end{aligned}$$

Па од принципот на математичка индукција следува дека $b_n = 2n + 4$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

Според тоа, $2^{n+2} - a_n = b_n = 2n + 4 > 0$, за секој $n \in \mathbf{N}$, т.е. $a_n \leq 2^{n+2}$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

56. За членовите на конечната низа $a_0, a_1, ..., a_n$ важи $a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} \geq 0$, секој $k \in \{1, 2, ..., n\}$ и $a_0 = a_n = 0$. Докажи дека $a_k \leq 0$, за $k \in \{0, 1, ..., n\}$.

**Решение.** Нека претпоставиме дека за некој $m \geq 1$ важи $a_{m-1} \leq 0$ и $a_m > 0$. Од условот на задачата следува $a_{k+1} - a_k \geq a_k - a_{k-1}$, за $k = 1, 2, ..., n-1$, па затоа

$$a_n - a_{n-1} \geq a_{n-2} - a_{n-3} \geq ... \geq a_{m+1} - a_m \geq a_m - a_{m-1} > 0,$$

од што следува

$$a_n \geq a_{n-1} \geq a_{n-2} \geq ... \geq a_{m+1} \geq a_m > 0,$$

што противречни на $a_n = 0$. Конечно, од добиената противречност следува дека $a_k \leq 0$, за $k \in \{0, 1, ..., n\}$.

57. Низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се определени со равенствата

$$a_1 = 1, b_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n}, b_{n+1} = \frac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n},\ n \geq 1.$$

Докажи дека $a_{2013} < 5$.

**Решение.** Од $a_n, b_n > 0$ следува $a_n b_n \neq -1$, па затоа

$$\frac{1}{a_{n+1}+1}-\frac{1}{b_{n+1}+1}=\frac{b_n}{1+a_n+b_n+a_nb_n}-\frac{a_n}{1+a_n+b_n+a_nb_n}$$

$$=\frac{b_n-a_n}{(1+a_n)(1+b_n)}=\frac{1}{a_n+1}-\frac{1}{b_n+1},$$

и по индукција следува дека

$$\frac{1}{a_{n+1}+1}-\frac{1}{b_{n+1}+1}=\frac{1}{a_1+1}-\frac{1}{b_1+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Тогаш, $\frac{1}{a_{n+1}+1}=\frac{1}{b_{n+1}+1}+\frac{1}{6}>\frac{1}{6}$, па затоа $a_n+1<6$, т.е. $a_n<5$.

**Забелешка.** Може да се докаже дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=5$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$.

58. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со

$$a_1=1,\ a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}},\text{ за } n\geq 2.$$

Докажи дека $a_{100}>14$.

**Решение.** За $k>1$ имаме $a_k^2=a_{k-1}^2+2+\frac{1}{a_{k-1}^2}$ и $a_k>1$. Затоа

$$a_{k-1}^2+2<a_k^2<a_{k-1}^2+3,\text{ за } k=2,3,...,n.$$

Ако ги собереме горните неравенства добиваме

$$2n-1<a_n^2<3n-2,\text{ т.е. } \sqrt{2n-1}<a_n<\sqrt{3n-2}.$$

Конечно од последното неравенство, за $n=100$ добиваме

$$14<a_{100}<18.$$

59. Нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ се низи реални броеви такви што

$$x_n=y_{n-1}+\frac{1}{z_{n-1}},\ y_n=z_{n-1}+\frac{1}{x_{n-1}},\ z_n=x_{n-1}+\frac{1}{y_{n-1}},\ n\in\mathbf{N},$$

при што $x_0,y_0,z_0$ се позитивни реални броеви. Дали некоја од трите низи е ограничена?

**Решение.** Бидејќи $x_0,y_0,z_0$ се позитивни реални броеви добиваме дека $x_1,y_1,z_1$ се позитивни реални броеви. Со помош со математичка индукција се добива дека $x_n,y_n,z_n>0$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

Ќе докажеме дека низата $s_n=x_n+y_n+z_n$, $n\in\mathbf{N}$ е неограничена. Нека претпоставиме низата $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ е ограничена. Членовите на оваа низа се позитивни, па затоа постои реален број $c>0$ таков што $0<s_n\leq c$, за секој $n\in\mathbf{N}$, од што следува дека $\frac{1}{s_n}\geq\frac{1}{c}=C>0$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Сега добиваме

$$s_{n+1}=x_n+y_n+z_n+\frac{1}{x_n}+\frac{1}{y_n}+\frac{1}{z_n}\geq s_n+\frac{1}{s_n}+\frac{1}{s_n}+\frac{1}{s_n}$$

$$=s_n+\frac{3}{s_n}\geq s_n+3C$$

и ако се искористи математичка индукција може да се докаже дека $s_n\geq s_0+3Cn$. Но, низата $p_n=3Cn$ не е ограничена низа, па затоа и низата $s_n$ не е ограничена низа, што е противречност.

Докажавме дека низата $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ не е ограничена. Но, тоа значи дека најмалку една од низите $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ не е ограничена. Навистина, ако претпоставиме дека низите $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ се ограничени, тогаш и нивниот збир е ограничена низа, што е противречност.

60. Дали постои низа $a_1, a_2, \dots$ од позитивни реални броеви таква што

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \le n^2 \text{ и } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \le 2008,$$

за секој природен број $n$?

**Решение.** Ќе докажеме дека ако $\sum\limits_{i=1}^{2^n} a_i \le (2^n)^2$ за секој природен број $n$, тогаш $\sum\limits_{i=1}^{2^n} \frac{1}{a_i} > \frac{n}{4}$, од што следува дека не постои низа со бараните својства.

Ќе го користиме неравенството

$$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{a_i} \ge 2^{2k} \text{ за секој } k \ge 0, \tag{1}$$

кое следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. Од

$$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i < \sum_{i=1}^{2^{k+1}} a_i \le 2^{2k+2},$$

и од неравенството (1) следува

$$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{a_i} > \frac{2^{2k}}{\sum\limits_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i} > \frac{2^{2k}}{2^{2k+2}} = \frac{1}{4},$$

па затоа:

$$\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{a_i} > \sum_{i=2}^{2^n} \frac{1}{a_i} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{a_i} > \frac{n}{4}.$$

61. Нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа од позитивни броеви, такви што

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \ge \sqrt{n}, \text{ за секој } n \ge 1.$$

Докажи дека

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}),\ n \ge 1.$$

**Решение.** Воведуваме ознаки $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, $y_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ и $t_n = \sqrt{n}$. Притоа важи $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = t_n$ и од условот на задачата имаме

$$s_n \ge t_n, \text{ за секој } n \ge 1. \tag{1}$$

Од друга страна имаме

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i [y_{n+1} + \sum_{k=i}^{n} (y_k - y_{k+1})] \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=i}^{n} (y_k - y_{k+1}) + \sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+1} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (y_j - y_{j+1}) \sum_{i=1}^{j} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+1} \\ &= \sum_{j=1}^{n} s_j (y_j - y_{j+1}) + y_{n+1} s_n,\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_i y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i [y_{n+1} + \sum_{k=i}^{n} (y_k - y_{k+1})] \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{k=i}^{n} (y_k - y_{k+1}) + \sum_{i=1}^{n} y_i y_{n+1} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (y_j - y_{j+1}) \sum_{i=1}^{j} y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i y_{n+1} \\ &= \sum_{j=1}^{n} t_j (y_j - y_{j+1}) + y_{n+1} s_n.\end{aligned}$$

Сега, од претходните две неравенства, неравенството (1), фактот дека $y_j - y_{j+1} > 0$, за секој $j = 1, 2, ..., n$ и неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 &= \sum_{j=1}^{n} t_j (y_j - y_{j+1}) + y_{n+1} s_n \\ &\le \sum_{j=1}^{n} s_j (y_j - y_{j+1}) + y_{n+1} s_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2},\end{aligned}$$

што значи

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

Конечно,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ge \sum_{i=1}^{n} y_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{i} - \sqrt{i-1})^2 = \sum_{i=1}^{n} (\tfrac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i-1}})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{i} \tfrac{1}{(1+\sqrt{1-\frac{1}{i}})^2} > \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{i} \tfrac{1}{(1+\sqrt{1})^2} = \tfrac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{i},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

62. Нека се дадени позитивни реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ и нека $q \in (0,1)$. Најди $n$ реални броеви $b_1, b_2, ..., b_n$ такви што

1) $a_k < b_k$, за $k = 1, 2, 3, ..., n$,

2) $q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}$, за $k = 1, 2, 3, ..., n-1$, и

3) $b_1 + b_2 + ... + b_n < \frac{1+q}{1-q}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$.

**Решение.** Ќе докажеме дека броевите

$$b_k = a_1 q^{k-1} + a_2 q^{k-2} + a_3 q^{k-3} + ... + a_{k-1} q + a_k + a_{k+1} q + ... + a_n q^{n-k}$$

ги задоволуваат условите 1), 2) и 3).

Јасно, условот 1) е исполнет. Ако $1 \leq k \leq n-1$, тогаш

$$qb_k - b_{k+1} = a_{k+1}(q^2 - 1) + ... + a_n q^{n-k-1}(q^2 - 1) < 0,$$

и аналогно $qb_{k+1} - b_k < 0$, па според тоа и условот 2) е исполнет. Конечно,

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + ... + b_n &= a_1 + a_2 q + ... + a_n q^{n-1} + a_1 q + a_2 q^2 + ... + a_n q^{n-2} + ... \\ &\quad + a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + ... + a_n \\ &< (a_1 + a_2 + ... + a_n)(1 + 2q + ... + 2q^{n-1}) \\ &< (a_1 + a_2 + ... + a_n)\frac{1+q}{1-q}, \end{aligned}$$

што значи дека е исполнет и условот 3).

63. Нека $a \in \mathbf{R}$, $a > 1$. Најди ограничена бесконечна низа реални броеви $x_0, x_1, x_2 ...$ таква што

$$|x_i - x_j| \cdot |i - j|^a \geq 1, \text{ за секои } i, j \in \mathbf{N},\ i \neq j.$$

**Решение.** Бидејќи $a > 1$, од $|i - j| \geq 1$ следува

$$|x_i - x_j| \cdot |i - j|^a \geq |x_i - x_j| \cdot |i - j|,$$

па затоа доволно е да најдеме низа $x_0, x_1, x_2 ...$ таква што

$$|x_i - x_j| \cdot |i - j| \geq 1, \text{ за секои } i, j \in \mathbf{N},\ i \neq j. \qquad (1)$$

Ќе докажеме дека низата $x_i = 4\{i\sqrt{2}\}$, каде $\{x\} = x - [x]$ е функцијата децимален дел од $x$, го задоволува условот (1). Нека $i > j$. Имаме

$$\begin{aligned} r = [i\sqrt{2}] - [j\sqrt{2}] &< i\sqrt{2} - j\sqrt{2} + 1 \\ &\leq i\sqrt{2} - j\sqrt{2} + i - j \\ &= (\sqrt{2} + 1)(i - j) < (4 - \sqrt{2})(i - j). \end{aligned}$$

Освен тоа, ако за природните броеви $m$ и $n$ важи $m < (4 - \sqrt{2})n$, тогаш

$$4n|\sqrt{2}n - m| = \frac{4n|2n^2 - m^2|}{\sqrt{2}n + m} \geq \frac{4n}{\sqrt{2}n + m} > 1.$$

Користејќи ги овие неравенства добиваме

$$\begin{aligned}|x_i - x_j|\cdot|i-j| &= |4\{i\sqrt{2}\} - 4\{j\sqrt{2}\}|\cdot|i-j|\\ &= 4|i-j|\cdot|(i-j)\sqrt{2}-r|\\ &= 4n|\sqrt{2}n - r| > 1.\end{aligned}$$

64. Низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се дефинирани со

$$a_1 = 9, b_1 = 3, a_{k+1} = 9^{a_k}, b_{k+1} = 3^{b_k}, \text{ за секој } k \in \mathbf{N}.$$

Најди го најмалиот природен број $n$ за кој важи $b_n > a_{2013}$.

**Решение.** Ќе докажеме дека за секој $k \in \mathbf{N}$ важи

$$b_k < a_k. \tag{1}$$

За $k = 1$ имаме $b_1 = 3 < 9 = a_1$. Нека претпоставиме дека (1) важи за $k = m$, т.е. дека $b_m < a_m$. Тогаш, од индуктивната претпоставка и од својствата на степените следува

$$a_{m+1} = 9^{a_m} > 9^{b_m} > 3^{b_m} = b_{m+1},$$

што значи дека (1) важи за $k = m+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека (1) важи за секој $k \in \mathbf{N}$.

Ќе докажеме дека за $k \in \mathbf{N}$ важи

$$a_k < b_{k+1} \tag{2}$$

Прво да забележиме дека од $3^p > 3^q$, $p, q \in \mathbf{N}$ следува дека $3^p > 2\cdot 3^q$. Имено, имаме $p \geq q+1$, па затоа $3^p \geq 3^{q+1} = 3\cdot 3^q > 2\cdot 3^q$.

За $k = 1$ имаме $9 = a_1 < b_2 = 3^3$. Нека претпоставиме дека (2) важи за $k = m$, т.е. дека $a_m < b_{m+1}$. Од индуктивната претпоставка имаме

$$3^{b_m} = b_{m+1} > a_m = 9^{a_{m-1}} = 3^{2a_{m-1}},$$

па затоа од претходната забелешка, при $p = b_m$ и $q = 2a_{m-1}$ имаме

$$b_{m+1} = 3^{b_m} > 2\cdot 3^{2a_{m-1}} = 2a_m.$$

Според тоа, за $k = m+1$ добиваме

$$a_{m+1} = 9^{a_m} = 3^{2a_m} < 3^{b_{m+1}} = b_{m+2},$$

што значи дека (2) важи за $k = m+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека (2) важи за секој $k \in \mathbf{N}$.

Сега од (1) и (2) следува дека $b_{2012} < a_{2012} < b_{2013}$, па затоа $n = 2013$.

65. Докажи дека за секои три бесконечни низи природни броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ постојат природни броеви $p$ и $q$ такви да $a_p \geq a_q$, $b_p \geq b_q$ и $c_p \geq c_q$.

**Решение.** Бидејќи броевите $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ се природни постои низа индекси $i_1, i_2, ..., i_n, ...$ така да

$$a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq ... \leq a_{i_n} \leq ...,$$

($a_{i_1}$ е најмалиот член на низата, $a_{i_2}$ е најмалиот член на низата $a_{i_1+1}, a_{i_1+2}, a_{i_1+3},...$ итн.). Аналогно од низата индекси $i_1, i_2,..., i_n,...$ можеме да избереме таква низа низа индекси $j_1, j_2,..., j_n,...$ за која важи

$$b_{j_1} \le b_{j_2} \le ... \le b_{j_n} \le ...$$

и притоа низата $a_{j_1}, a_{j_2},...a_{j_n},...$ останува неопаѓачка. Сега останува од низата индекси $j_1, j_2,..., j_n,...$ да избереме низа индекси $k_1, k_2,..., k_n,...$ такви да

$$c_{k_1} \le c_{k_2} \le ... \le c_{k_n} \le ....$$

Конечно,

$$a_{k_1} \le a_{k_2} \le ... \le a_{k_n} \le ...$$

$$b_{k_1} \le b_{k_2} \le ... \le b_{k_n} \le ...$$

$$c_{k_1} \le c_{k_2} \le ... \le c_{k_n} \le ...,$$

од што следува тврдењето на задачата.

66. Ако $x$ е позитивен ирационален број и $y = \frac{1}{x}$, тогаш меѓу секои два последователни природни броеви се содржи точно еден член на една од низите

$$1+x,\ 2(1+x),\ 3(1+x),\ ...$$

$$1+y,\ 2(1+y),\ 3(1+y),\ ....$$

Докажи!

**Решение.** Нека $n \in \mathbf{N}$. Тогаш во првата низа имаме $[\frac{n}{x+1}]$ членови помали од $n$, аво втората низа имаме $[\frac{n}{1+y}]$ ќленови помали од $n$. Од друга страна

$$\frac{n}{1+x} + \frac{n}{1+y} = \frac{n}{1+x} + \frac{n}{1+\frac{1}{x}} = n$$

и како $x$ и $y$ се ирационални броеви добиваме

$$[\frac{n}{x+1}] + [\frac{n}{1+y}] = n-1.$$

Ова равенство го докажува тврдењето на задачата, бидејќи бројот на членовите помали од $n+1$ кои припаѓаат барем на една од овие две низи е еднаков на

$$[\frac{n+1}{x+1}] + [\frac{n+1}{1+y}] = n,$$

што значи дека меѓу $n$ и $n+1$ има само еден член од овие две низи.

67. Низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ природни броеви се зададени со

1) $a_1 = 1$,

2) $b_n = nu - 1 - a_n$, каде $u > 4$ е даден цел број,

3) $a_{n+1}$ е најмалиот природен број различен од броевите $a_1, a_2,...,$ $a_n; b_1, b_2,..., b_n$.

Докажи дека $a_n = [\alpha n]$ и $b_n = [\beta n]$, каде $\alpha$ и $\beta$ се корени на равенката

$$x^2-ux+u=0.$$

**Решение.** Бидејќи $u>4$ и $\alpha\beta=\alpha+\beta=u$ добиваме $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$, од што следува дека $\alpha$ и $\beta$ се ирационални броеви и $1<\alpha<2$, $\beta>2$ (зошто?). Ќе покажеме дека $[\alpha n]$ и $[\beta n]$ ги задоволуваат условите 1), 2) и 3) од дефиницијата на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Јасно, $[\alpha]=1$ и бидејќи $\alpha$ е ирационален број добиваме

$$[\beta n]=[(u-\alpha)n]=[un-\alpha n]=un+[-\alpha n]=un-1-[\alpha n].$$

За $x=\alpha-1, y=\beta-1$ имаме $(\alpha-1)(\beta-1)=1$, па затоа можеме да ја примениме задача 39. Бидејќи меѓу секои два последователни природни броја ќе се содржи точно еден од броевите $\alpha n$ или $\beta n$, добиваме дека секој природен број $k$ се претставува во облик $[\alpha n]$ или $[\beta n]$ и ниту еден природен број не може истовремено да се претстави и во двата облика. Конечно, ако ги земеме предвид неравенствата

$$[\alpha(n+1)]\geq[\alpha n]+1 \text{ и } [\beta(n+1)]\geq[\beta n]+2>[\alpha n]+1$$

го добиваме тврдењето на задачата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

68. Нека $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа реални броеви таква што

$$k_1>1, k_n>k_1+k_2+...+k_{n-1},\ n\geq 2.$$

Докажи дека постои $q>1$ таков што $k_n>q^n$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

**Решение.** Со индукција по $n$ лесно се докажува дека $k_n>2^{n-2}$, за $n\geq 2$. Нека $q=1+\varepsilon$, каде $0<\varepsilon<\min\{\frac{1}{4},k_1-1,\sqrt{k_2}-1\}$. Ќе докажеме дека $k_n>q^n$. За $n=1,2,3$ лесно се проверува дека неравенството е исполнето. За $n\geq 3$ ќе докажеме дека $2^{n-2}>q^n$. За $n=3$ имаме $2^{3-1}>(\frac{5}{4})^3>q^3$. Нека претпоставиме $2^{n-2}>q^n$. Но, тогаш бидејќи $2>q$ добиваме $2^{n-1}>q^nq=q^{n+1}$, па од принципот на математичка индукција следува дека $2^{n-2}>q^n$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

Конечно, $k_n>2^{n-2}$ и $2^{n-2}>q^n$, за секој $n\in\mathbf{N}$, па затоа $k_n>q^n$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

69. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа различни природни броеви не помали од 2. Докажи дека низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има подниза $\{a_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ таква што $a_{i_n}>i_n$, за секој $n\in\mathbf{N}$

**Решение.** Да претпоставиме дека постојат конечно многу природни броеви $k$ такви што $a_k>k$ и нека тоа се броевите $k_1,k_2,...,k_m$. Нека $N=\max\{a_{k_1},a_{k_2},...,a_{k_m}\}$. Тогаш од $n\leq N$ следува $a_n\leq N$. Навистина за $n=k_i, i=1,2,...,m$ важи

$$a_n = a_{k_i} \le \max\{a_{k_1}, a_{k_2}, ..., a_{k_m}\} = N,$$

а за $n \in \{a_{k_1}, a_{k_2}, ..., a_{k_m}\}$ важи важи $a_n \le n \le N$. Броевите $a_1, a_2, ..., a_N$ се различни природни броеви не помали од 2 и не поголеми од $N$, а такви има $N$. Противречност!

70. Дадена е строго растечка низа природни броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, така да

$$a_1 = 1, a_2 = 2 \text{ и } a_m a_n = a_{mn}, \tag{1}$$

ако $m$ и $n$ се заемно прости броеви. Докажи дека

а) $a_3 = 3$

b) $a_n = n$, за секој природен број $n$.

**Решение.** а) Од $a_2 = 2$ и строгата монотоност на низата следува $a_3 \ge 3$, т.е. $a_3 = 3 + p,\ p \ge 0$. Ќе докажеме дека $p = 0$. Од (1) следува

$$a_6 = a_2 a_3 = 2(3+p) = 6 + 2p,$$

па затоа $a_5 \le 5 + 2p$. Понтаму,

$$a_{10} = a_2 a_5 \le 2(5+2p) = 10 + 4p,$$

па затоа $a_9 \le 9 + 4p$. Аналогно

$$a_{18} = a_2 a_9 \le 2(9+4p) = 18 + 8p \text{ и } a_{15} \le 15 + 8p.$$

Од друга страна имаме бидејќи $a_3 = 3 + p$ и $a_5 > a_4 > a_3$ имаме $a_5 > 5 + p$, па затоа

$$a_{15} = a_3 a_5 \ge (3+p)(5+p) = 15 + 8p + p^2.$$

Значи,

$$15 + 8p + p^2 \le 15 + 8p,$$

па затоа $p = 0$ и $a_3 = 3$.

b) Ако претпоставиме дека тврдењето е точно за некој $k \ge 3$, тогаш тоа е точно за секој $i \le (k-1)k$. Навистина, од $a_{k-1} = k - 1$ и $a_k = k$, а $k-1$ и $k$ се заемно прости следува дека $a_{(k-1)k} = k(k-1)$. Но, низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е строго растечка, па затоа $a_i = i$, за секој $i \le (k-1)k$. Сега, од принципот на математичка индукција следува дека $a_n = n$, за секој природен број $n$.

71. За низата позитивни броеви $a_0, a_1, ..., a_{2014}$ важи

$$a_0 = 1, a_{2014} = 2 \text{ и } a_k^2 \le a_{k-1} a_{k+1}, \text{ за } k = 1, 2, ..., 2013.$$

Докажи дека ниту еден член на оваа низа не е поголем од 2 и дека $a_{1007} \le \sqrt{2}$.

**Решение.** Ставаме $n = 1007$. Од

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} \le \frac{a_{k+1}}{a_k}, \text{ за } k = 1, 2, ..., 2n-1$$

следува дека низата $\{\frac{a_k}{a_{k-1}}\}$ монотоно расте. Затоа

$$a_n^2 \le a_{n-1} a_{n+1} \le a_{n-2} a_{n+2} \le ... \le a_0 a_{2n} = 2, \text{ т.е. } a_n^2 \le 2,$$

од каде следува $a_{1007}=a_n\le\sqrt{2}$.

Да претпоставиме дека $\max a_k=a_i$, $i<2n$. Тогаш $i>1$ и притоа важи $a_i\ge a_{i-1}$ и $a_i\ge a_{i+1}$, што значи $a_i^2\ge a_{i-1}a_{i+1}$. Но, $a_i^2\le a_{i-1}a_{i+1}$, па од последните неравенства следува $a_{i-1}=a_i=a_{i+1}$. Според тоа, $\max a_k=a_{i+1}$. Повторувајќи ја претходната постапка добиваме дека

$$a_{i-1}=a_i=a_{i+1}=...=a_{2n}=2,$$

од што следува дека $a_k\le 2$, за $k=0,1,2,...,2n$.

72. Докажи дека за секој ирационален број $\alpha$ во секој интервал $[c,d]\subset(0,1)$ има барем еден член од низата $a_n=\{\alpha n\}$, $n=1,2,...$.

**Решение.** Нека $[c,d]\subset(0,1)$ и $d-c=a$. Тогаш меѓу $N$ точки $\{\alpha n\}$, $n=1,2,...,N$ каде $N$ е природен број поголем од $\frac{1}{a}$, постојат две точки такви да растојанието меѓу нив е помало од $\frac{1}{N}$. Нека тоа се точките $\{\alpha k\}$ и $\{\alpha t\}$, $t>k$. Овие две точки не се совпаѓаат, бидејќи од равенството $\{\alpha k\}=\{\alpha t\}$ и својствата на функцијата $\{x\}=x-[x]$ следува $\alpha=\frac{m}{n}$, $m,n\in\mathbf{Z}, n>0$, т.е. $\alpha$ е рационален број, што е противречност. Тогаш $\{(t-k)\alpha\}<a$ или $\{(t-k)\alpha\}<1-a$. Нека, на пример, $\{(t-k)\alpha\}<a$. Тогаш во интервалот $[c,d]$ припаѓа точката $\{(t-k)p\alpha\}$, за $p=[\frac{c}{\{(t-k)\alpha\}}]+1$.

73. Докажи дека во секој интервал $[c,d]\subset(0,1)$ има барем еден член од низата $a_n=\{\lg n\}$, $n=1,2,...$.

**Решение.** Бројот $\lg 2$ е ирационален. Според задача 72 во секој интервал $[c,d]\subset(0,1)$ има барем еден член од низата

$$b_k=\{k\lg 2\}=\{\lg 2^k\},\ k=1,2,...,\qquad(1)$$

Која е подниза на низата $a_n=\{\lg n\}$, $n=1,2,...$. Според тоа, во секој интервал $[c,d]\subset(0,1)$ има барем еден член на низата $a_n=\{\lg n\}$, $n=1,2,...$.

74. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа реални броеви таква да

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+a_n-1},\text{ за } n\ge 1.$$

Докажи дека $a_1\notin(-2,1)$.

**Решение.** Да претпоставиме дека $a_1\in(-2,1)$. Тогаш $a_2\in[0,1)$ и со индукција од $a_{n+1}^2-a_n^2=a_n-1$ следува дека $0<a_{n+1}<a_n<1$, за $n\ge 2$. Според тоа, низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира и ако $c$ е нејзината граница, тогаш $c=\sqrt{c^2+c-1}$, од што следува $c=1$. Но, тогаш $0\le c<a_2<1$, што е противречност.

75. Докажи дека за секој позитивен $a$ низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ определена со

$$x_1 = 1, x_2 = a \text{ и } x_{n+2} = \sqrt[3]{x_{n+1}^2 x_n} \ , \ n \geq 1$$

е конвергентна и најди ја нејзината граница.

**Решение.** Со индукција лесно се докажува дека за низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ важи $x_n = a^{\alpha_n}$, каде $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа дефинирана со $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$ и $\alpha_{n+2} = \frac{2\alpha_{n+1}+\alpha_n}{3}$, за $n \geq 1$. Така

$$\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} = -\tfrac{1}{3}(\alpha_{n+1} - \alpha_n) = ... = (-\tfrac{1}{3})^n (\alpha_2 - \alpha_1) = (-\tfrac{1}{3})^n .$$

Ако ги собереме равенствата $\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1} = (-\frac{1}{3})^k$, за $k = 0,1,2,...,n$, добиваме

$$\alpha_{n+2} - \alpha_1 = (-\tfrac{1}{3})^0 + (-\tfrac{1}{3})^1 + ... + (-\tfrac{1}{3})^n = \frac{1-(-\frac{1}{3})^{n+1}}{1+\frac{1}{3}} = \tfrac{3}{4}(1 - (-\tfrac{1}{3})^{n+1}) .$$

Бидејќи $\alpha_1 = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} (-\frac{1}{3})^{n+1} = 0$ добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{3}{4}$. Според тоа, низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a^{\frac{3}{4}}$.

76. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со рекурентната релација:

$$a_1 = k, a_2 = 5k - 2 \text{ и } a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n, n \geq 1 ,$$

каде $k$ е реален број.

а) Најди ги сите вредности на $k$ за кои низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна.

b) Докажи дека за $k = 1$ важи $a_{n+2} = [\frac{7a_{n+1}^2 - 8a_n a_{n+1}}{1+a_n+a_{n+1}}], n \geq 1$.

**Решение.** а) Дадената рекурентна формула да ја запишеме во облик

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$$

и да ја разгледаме низата $c_n = a_{n+1} - a_n$. Јасно, ако низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира, тогаш и низата $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира. Од друга страна, од $c_1 = a_2 - a_1 = 4k - 2$ и $c_{n+1} = 2c_n$ следува дека низата $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ е геометриска прогресија и затоа $c_n = (4k-2) \cdot 2^{n-1} = (2k-1) \cdot 2^n$, за секој $n \geq 1$. Според тоа, ако $2k - 1 \neq 0$, тогаш низата $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ е неограничена, што значи не е коневергентна. Затоа $2k - 1 = 0$, т.е. $k = \frac{1}{2}$. Притоа сите членови на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ се еднакви на $\frac{1}{2}$ и затоа таа е конвергентна.

b) Со индукција лесно се докажува дека за $k = 1$ важи $a_n = 2^n - 1$ и тогаш

$$[\frac{7a_{n+1}^2 - 8a_n a_{n+1}}{1+a_n+a_{n+1}}] = [\frac{7(2^{n+1}-1)^2 - 8(2^n-1)(2^{n+1}-1)}{1+2^n-1+2^{n+1}-1}] = [\frac{3 \cdot 2^{2n+2} - 2^{n+2}}{3 \cdot 2^n - 1} + \frac{-1}{3 \cdot 2^n - 1}]$$

$$= [2^{n+2} + \frac{-1}{3 \cdot 2^n - 1}] = 2^{n+2} - 1 = a_{n+2},$$

што и требаше да се докаже.

77. Дадена е низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква да $a_1=\frac{1}{2}$ и $a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+2a_n}$ , за $n\geq 1$. Докажи дека:

a) за секој $n\in\mathbf{N}$ важи $a_n<\frac{2n^2}{2n+1}$ и

b) низата $\{\frac{a_n}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира.

**Решение.** а) За $n=1$ имаме $a_1=\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, т.е. неравенството важи. Нека претпоставиме дека за $n=k$ важи $a_k<\frac{2k^2}{2k+1}$. Тогаш за $n=k+1$ имаме

$$a_{k+1}=\sqrt{a_k^2+2a_k}<\sqrt{(\frac{2k^2}{2k+1})^2+\frac{4k^2}{2k+1}}=\frac{2k(k+1)}{2k+1}<\frac{2(k+1)^2}{2k+3},$$

па од принципот на математичка индукција следува дека $a_n<\frac{2n^2}{2n+1}$ , за секој $n\in\mathbf{N}$.

b) За низата $b_n=\frac{a_n}{n}$ имаме

$$b_{n+1}=\sqrt{b_n^2+\frac{b_n(2n-(2n+1)b_n)}{(2n+1)^2}}$$

и $0<b_n<\frac{2n}{2n+1}<1$, што значи дека низата е монотона и ограничена, што значи дека таа е конвергетна.

78. Најди ја граничната вредност на низата со општ член

$$x_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{n}{3^n}.$$

**Решение.** Од

$$x_n-\frac{1}{3}x_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{n}{3^n}-\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{n}{3^n})$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}$$

следува $x_n=\frac{3}{4}(1-\frac{1}{3^n})-\frac{n}{3^{n+1}}$ и како низите $\{\frac{1}{3^n}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\frac{n}{3^{n+1}}\}_{n=1}^{\infty}$ конвергираат ко 0 добиваме $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{4}$.

79. Нека $|q|<1$. Пресметај $T_n=1+3q+5q^2+...+(2n+1)q^n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$.

**Решение.** Нека $A=\sum\limits_{k=1}^{n}q^k$ и $B=\sum\limits_{k=1}^{n}kq^k$ . Тогаш

$$A=\frac{q-q^{n+1}}{1-q} \text{ и } B-A=\sum_{k=2}^{n}(k-1)q^k=\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k+1}=q\sum_{k=1}^{n-1}kq^k=q(B-nq^n),$$

па затоа

$$B=\frac{A}{1-q}-\frac{n}{1-q}q^{n+1}=\frac{q-q^{n+1}}{(1-q)^2}-\frac{n}{1-q}q^{n+1}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}T_n&=1+3q+5q^2+...+(2n+1)q^n=1+A+2B\\&=1+\frac{q-q^{n+1}}{1-q}+2\frac{q-q^{n+1}}{(1-q)^2}-\frac{2n}{1-q}q^{n+1}\\&=1+\frac{q}{1-q}+\frac{2q}{(1-q)^2}-q^{n+1}[\frac{2n+1}{1-q}+\frac{2}{(1-q)^2}]\\&=\frac{q+1}{(1-q)^2}-q^{n+1}[\frac{2n+1}{1-q}+\frac{2}{(1-q)^2}],\end{aligned}$$

и $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\frac{1+q}{(1-q)^2}$.

80. Нека $|q|<1$. Пресметај $T_n=1+2^2q+...+(n+1)^2q^n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$.

**Решение.** Нека $A=\sum\limits_{k=1}^{n}q^k$, $B=\sum\limits_{k=1}^{n}kq^k$ и $C=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2q^k$. Од решението на задача 83 имаме $A=\frac{q-q^{n+1}}{1-q}$ и $B=\frac{q-q^{n+1}}{(1-q)^2}-\frac{n}{1-q}q^{n+1}$. Понатаму,

$$C-2B+A=\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2q^k=q\sum_{k=1}^{n}k^2q^k-n^2q^{n+1}=qC-n^2q^{n+1},$$

па затоа

$$C=\frac{2}{1-q}B-\frac{A}{1-q}-\frac{n^2}{1-q}q^{n+1}=\frac{2(q-q^{n+1})}{(1-q)^3}-\frac{2n}{(1-q)^2}q^{n+1}-\frac{q-q^{n+1}}{(1-q)^2}-\frac{n^2}{1-q}q^{n+1}.$$

Но, $T_n=1+A+2B+C$ и ако во последната формула замениме за $A,B$ и $C$ лесно го пресметуваме $T_n$. Конечно, ако искористиме дека

$$\lim_{n\to\infty}A=\frac{q}{1-q},\ \lim_{n\to\infty}B=\frac{q}{(1-q)^2}\text{ и }\lim_{n\to\infty}C=\frac{2q}{(1-q)^3}-\frac{q}{(1-q)^2}=\frac{q+q^2}{(1-q)^3}$$

добиваме

$$\lim_{n\to\infty}T_n=1+\lim_{n\to\infty}A+2\lim_{n\to\infty}B+\lim_{n\to\infty}C=1+\frac{q}{1-q}+\frac{2q}{(1-q)^2}+\frac{q+q^2}{(1-q)^3}=\frac{1+q}{(1-q)^3}.$$

81. Нека $a>0, x_1>0$ и $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n}),$ за $n\geq1$. Докажи дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна и најди $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

**Решение.** Од $a>0, x_1>0$ следува дека сите членови на низата се позитивни. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\geq\sqrt{x_n\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a},$$

па затоа

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(\frac{a}{x_n}-x_n)=\frac{1}{2x_n}(a-x_n^2)=\frac{1}{2x_n}(\sqrt{a}-x_n)(\sqrt{a}+x_n)\leq0.$$

Според тоа, низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно опаѓа и е ограничена од долу, па значи таа е коневергентна, т.е. постои $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Ако во рекурентната врска $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ преминеме кон граница добиваме $x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$, од каде следува $2x^2 = x^2 + a$ и како $x_n > 0$, за секој $n \in \mathbf{N}$ добиваме $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = \sqrt{a}$.

82. Нека $a > 0, x_1 > 0$ и $x_{n+1} = \frac{1}{3}(2x_n + \frac{a}{x_n^2}),$ за $n \ge 1$. Докажи дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна и најди $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

**Решение.** Од $a > 0, x_1 > 0$ следува дека сите членови на низата се позитивни. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(2x_n + \frac{a}{x_n^2}) \ge \sqrt[3]{x_n x_n \frac{a}{x_n^2}} = \sqrt[3]{a} \text{ , т.е. } x_n^3 - a \ge 0 .$$

Оттука следува

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{3}(\frac{a}{x_n^2} - x_n) = \frac{1}{3x_n^2}(a - x_n^3) \le 0 .$$

Според тоа, низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно опаѓа и е ограничена од долу, па значи таа е коневергентна, т.е. постои $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Ако во рекурентната врска $x_{n+1} = \frac{1}{3}(2x_n + \frac{a}{x_n^2})$ преминеме кон граница добиваме $x = \frac{1}{3}(2x + \frac{a}{x^2})$, од каде следува $x^3 = a$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = \sqrt[3]{a}$.

83. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = (\sqrt{2})^{x_n}$, за $n \ge 1$. Најди $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

**Решение.** Имаме $x_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2}^{\sqrt{2}} = x_2$. Нека претпоставиме дека за $n = k$ важи $x_{k-1} < x_k$. Но, низата е позитивна и како $\sqrt{2} > 1$ од индуктивната претпоставка следува $x_k = (\sqrt{2})^{x_{k-1}} < (\sqrt{2})^{x_k} = x_{k+1}$, па од принципот на математичка индукција следува $x_n < x_{n+1}$, за секој $n \in \mathbf{N}$, т.е. низата монотоно расте.

Понатаму, $x_1 = \sqrt{2} < 2$. Нека претпоставиме дека $n = k$ важи $x_k < 2$. Тогаш $x_{k+1} = (\sqrt{2})^{x_k} < (\sqrt{2})^2 = 2$, па од принципот на математичка индукција следува дека $x_n < 2$, за секој $n \in \mathbf{N}$, т.е. низата е ограничена од горе.

Според тоа, низата мнотоно расте и е ограничена од горе, па значи таа е конвергентна, т.е. постои $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Ако во $x_{n+1} = (\sqrt{2})^{x_n}$ преминеме кон граница добиваме $x=2^{\frac{x}{2}}$. Оваа равенка има најмногу две решенија, бидејќи графиците на линеарната и експоненцијалната функција може да имаат најмногу два пресека (направи цртеж). Лесно се проверува дека решенија на равенката $x=2^{\frac{x}{2}}$ се $x=2$ и $x=4$. Но, $x_n<2$, за секој $n\in\mathbf{N}$, па затоа $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = 2$.

84. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа реални броеви таква да за секој природен број $n$ важи $0<x_n<1$ и $x_{n+1}(1-x_n)\geq\frac{1}{4}$. Докажи дека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

**Решение.** Ќе докажеме дека низата монотоно расте. Навистина, од $x_{n+1}(1-x_n)\geq\frac{1}{4}$ следува

$$\sqrt{x_{n+1}(1-x_n)}\geq\frac{1}{2}. \tag{1}$$

Од друга страна од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\sqrt{x_n(1-x_n)}\leq\frac{x_n+1-x_n}{2}=\frac{1}{2}. \tag{2}$$

Сега, од (1) и (2) добиваме

$$\sqrt{x_n(1-x_n)}\leq\frac{1}{2}\leq\sqrt{x_{n+1}(1-x_n)},$$

па затоа $x_n(1-x_n)\leq x_{n+1}(1-x_n)$, т.е. $x_n\leq x_{n+1}$. Но, по услов низата е ограничена и како таа монотоно расте следува дека е конвергетна, т.е. постои $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Ако во условот $x_{n+1}(1-x_n)\geq\frac{1}{4}$ преминеме кон граница, добиваме $x(1-x)\geq\frac{1}{4}$. Сега повторно од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $x(1-x)\leq\frac{x+1-x}{4}=\frac{1}{4}$, па затоа $x(1-x)=\frac{1}{4}$, од каде добиваме $x=\frac{1}{2}$. Конечно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = \frac{1}{2}$.

85. Нека $p$ е прост број и $f(n)$ е најголемиот делител на природниот број $n$ кој не се дели со $p$. Нека

$$a_k = f(1)+f(2)+...+f(p^k),\ \text{за}\ k=1,2,....$$

а) Изрази го $a_k$ како функција од $k$.

b) Најди ги сите реални броеви $t$ за кои низата $b_k=\frac{a_k}{t^k}$, за $k=1,2,...$ конвергира.

**Решение.** а) Нека $k$ е фиксиран и

$$A=\{1,2,...,p^k\},\ B=\{x\in A\,|\,\mathrm{NZD}(x,p)=1\},\ C=A\setminus B.$$

Тогаш

$$a_k=\sum_{n\in A} f(n)=\sum_{n\in B} f(n)+\sum_{n\in C} f(n).$$

Бидејќи $f(pn)=f(n)$ за секој $n\in\mathbf{N}$, добиваме

$$\sum_{n\in C} f(n) = f(p) + f(2p) + f(3p) + ... + 2(p^k)$$

$$= f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(p^{k-1}) = a_{k-1}.$$

Оттука $a_k = a_{k-1} + \sum_{n\in B} f(n)$. Но, ако $\text{NZD}(n,p) = 1$, тогаш $f(n) = n$ и

$$\sum_{n\in B} f(n) = 1 + 2 + 3 + ... + p^k - (p + 2p + ... + p^k)$$

$$= \frac{p^k(p^k+1)}{2} - p\frac{p^{k-1}(p^{k-1}+1)}{2} = \frac{1}{2}(p^{2k} - p^{2k-1}),$$

па затоа $a_k - a_{k-1} = \frac{1}{2}(p^{2k} - p^{2k-1})$, за $k = 2,3,4,...$. Понатаму, ако претходните равенства ги собереме за $k = 1,2,...,n$ добиваме

$$a_n - a_1 = \frac{1}{2}[(p^{2n} + p^{2n-2} + ... + p^4) - (p^{2n-1} + p^{2n-3} + ... + p^3)]$$

каде

$$a_1 = f(1) + f(2) + ... + f(p) = 1 + 2 + 3 + ... + p - 1 + 1 = \frac{p(p-1)}{2} + 1,$$

т.е.

$$a_n = \frac{p(p-1)}{2} + 1 + \frac{p^3(p^{2n-2}-1)}{2(p+1)}.$$

b) Од а) следува дека за $t < p^2$ низата неограничено расте, а за $t \geq p^2$ таа конвергира.

86. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $x_1 = a, x_2 = b$ и $x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$, за $n \geq 1$. Докажи дека оваа низа е коневергентна и најди $\lim_{n\to\infty} x_n$.

**Решение.** Користејќи ја рекурентната формула добиваме

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{x_n - x_{n-1}}{2},$$

од каде следува

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}(b-a). \qquad (1)$$

Сега од (1) добиваме

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = x_1 + (b-a)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}}$$

и како низата $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}}$ конвергира добиваме дека и низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира и притоа важи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(x_1 + (b-a)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}}) = a + \frac{2(b-a)}{3} = \frac{a+2b}{3}.$$

87. Низата реални броеви $a_o, a_1, ..., a_n, ...$ го задоволува условот

$$1 = a_o \leq a_1 \leq a_2 \leq .... \leq a_n \leq ... \qquad (1)$$

а низата $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ дефинирана е со

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{a_{k-1}}{a_k})\frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

Докажи дека:

а) $0\le b_n<2$, за секој $n\in\mathbf{N}$,

б) за дадено $c$, таков што $0\le c<2$, постои низа $a_o,a_1,...,a_n,...$ која го задоволува условот (1) и при тоа $b_n>c$ за бесконечно многу индекси $n$.

**Решение.** а) Ќе докажеме дека ако $0<x\le y$, тогаш

$$(1-\frac{x}{y})\frac{1}{\sqrt{y}}\le 2(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}). \qquad (2)$$

Навистина,

$$\frac{y-x}{y\sqrt{y}}\le 2\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \Leftrightarrow \frac{y-x}{y}\le 2\frac{y-x}{\sqrt{x}(\sqrt{y}+\sqrt{x})} \Leftrightarrow (y-x)(2y-\sqrt{x}\sqrt{y}-x)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (y-x)[(y-x)+\sqrt{y}(\sqrt{y}-\sqrt{x})]\ge 0.$$

и како последното неравенство важи при $0<x\le y$, добиваме дека неравенството (2) важи при $0<x\le y$. Од неравенството (2) следува:

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{a_{k-1}}{a_k})\frac{1}{\sqrt{a_k}}\le\sum_{k=1}^{n}2(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}})=2(\frac{1}{\sqrt{a_0}}-\frac{1}{\sqrt{a_n}})<2.$$

б) Нека $a_n=q^n$, $q>1$. Во овој случај е исполнет условот (2). Наоѓаме:

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{q^{k-1}}{q^k})\frac{1}{\sqrt{q^k}}=(1-\frac{1}{q})\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{\sqrt{q}})^k$$

$$=(1-\frac{1}{q})\frac{1}{\sqrt{q}}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{q^n}}}{1-\frac{1}{\sqrt{q}}}=\frac{\sqrt{q}+1}{q}(1-\frac{1}{\sqrt{q^n}}).$$

Сега од $\lim\limits_{q\to1}\frac{\sqrt{q}+1}{q}=2$, следува дека $\frac{\sqrt{q}+1}{q}>c$ и како $\lim\limits_{q\to1}b_n=\frac{\sqrt{q}+1}{q}$, заклучуваме дека скоро сите членови на низата $\{b_n\}$ се поголеми од $c$.

88. Нека $a_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}(\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+...+\frac{2^n}{n})$, $n=1,2,....$. Докажи дека

а) $a_{n+1}\le a_n$, за секој $n\ge 3$,

b) Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира и најди ја нејзината граница.

**Решение.** а) Имаме $a_3=\frac{5}{3}, a_4=\frac{5}{3}, a_5=\frac{8}{5}$, што значи $a_5\le a_4\le a_3$. Нека претпоставиме дека $a_{n+1}\le a_n$, за некој $n\ge 3$. Но,

$$a_{n+1}=\frac{n+2}{2^{n+2}}(\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+...+\frac{2^n}{n}+\frac{2^{n+1}}{n+1})$$

$$=\frac{n+2}{2(n+1)}\frac{n+1}{2^{n+1}}(\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+...+\frac{2^n}{n})+\frac{n+2}{2(n+1)}$$

$$=\frac{n+2}{2(n+1)}a_n+\frac{n+2}{2(n+1)}=\frac{n+2}{2(n+1)}(a_n+1),$$

и бидејќи $a_n>0$ за секој $n\in\mathbf{N}$ од индуктивната претпоставка следува дека

$$a_{n+1}-a_{n+2}=\frac{n+2}{2(n+1)}(a_n+1)-\frac{n+3}{2(n+2)}(a_{n+1}+1)$$
$$=\frac{(n+2)^2(a_n+1)-(n+1)(n+3)(a_{n+1}+1)}{2(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{(n+2)^2(a_n-a_{n+1})+(a_{n+1}+1)}{2(n+1)(n+2)}\geq 0$$

односно $a_{n+1}\geq a_{n+2}$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека $a_{n+1}\leq a_n$, за секој $n\geq 3$.

b) За $n\geq 3$ низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно опаѓа и како таа е ограничена од долу, т.е. $a_n>0$ за секој $n\in\mathbf{N}$ добиваме дека оваа низа е конвергентна. Нека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=a$. Ако го искористиме равенството $a_{n+1}=\frac{n+2}{2(n+1)}(a_n+1)$, добиваме $a=\frac{1}{2}(a+1)$, т.е. $a=1$.

89. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $x_1=-\frac{3}{2}$, $x_{n+1}=\frac{x_n^2-3}{2}$, $n=1,2,3,...$.

a) Докажи дека низата $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира.

b) Докажи дека низата $\{x_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира.

c) Докажи дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира и најди ја границата.

**Решение.** Имаме

$$x_{n+2}=\frac{x_{n+1}^2-3}{2}=\frac{(\frac{x_n^2-3}{2})^2-3}{2}=\frac{(x_n^2-3)^2-12}{8}, \tag{1}$$

па затоа

$$x_{n+2}-x_n=\frac{(x_n^2-3)^2-12}{8}-x_n=\frac{(x_n+1)^3(x_n-3)}{8}. \tag{2}$$

a) Имаме $x_2=-\frac{3}{8}\in(-1,0)$. Со индукција по $k$ лесно се докажува дека $x_{2k}\in(-1,0)$, за секој $k\in\mathbf{N}$. Тогаш, од (2) следува дека $x_{2k}-x_{2k-2}<0$, за секој $k\in\mathbf{N}$. Според тоа, низата $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ е монотона и ограничена, па затоа таа е конвергентна.

b) Аналогно како во а) се докажува дека $x_{2k+1}\in[-\frac{3}{2},-1)$ и дека $x_{2k+1}-x_{2k-1}>0$, за секој $k\in\mathbf{N}$. Според тоа, низата $\{x_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ е монотона и ограничена, па затоа таа е конвергентна.

c) Нека $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=x$. Тогаш $-1\leq t\leq 0$ и од (1) следува $\frac{(x^2-3)^2-12}{8}=x$, т.е. $\frac{(x+1)^3(x-3)}{8}=0$. Затоа $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=x=-1$. Слично, $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=-1$. Конечно, од

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}x_{2n}=-1$$

и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\{x_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}\cup\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ следува $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$.

90. Низата $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ е определена со $a_0 = a, a \in \mathbf{R}$ и

$$a_{n+1} = 2^n - 3a_n, \ n = 0,1,2,3,... .$$

a) Изрази го $a_n$ со помош на $a$ и $n$.

b) Најди $a$ таков да $a_{n+1} > a_n$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

**Решение.** a) Имаме

$$a_n = 2^{n-1} - 3a_{n-1} = 2^{n-1} - 3(2^{n-2} - 3a_{n-2}) = 2^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-2} + 3^2 a_{n-2}$$

и со индукција добиваме

$$\begin{aligned} a_n &= 2^{n-1}[1 - \tfrac{3}{2} + (\tfrac{3}{2})^2 - ... + (-1)^{n-1}(\tfrac{3}{2})^{n-1}] + (-1)^n 3^n a \\ &= \tfrac{1}{5} 2^n [1 - (-1)^n (\tfrac{3}{2})^n] + (-1)^n 3^n a \\ &= \tfrac{1}{5}[2^n + (-1)^{n-1} 3^n] + (-1)^n 3^n a. \end{aligned}$$

b) Имаме

$$a_{n+1} - a_n = \tfrac{1}{5}[2^n + (-1)^n \cdot 4 \cdot 3^n] + (-1)^{n+1} 4 \cdot 3^n a,$$

и така

$$\tfrac{a_{n+1} - a_n}{3^n} = \tfrac{1}{5}(\tfrac{2}{3})^n + 4(-1)^n(\tfrac{1}{5} - a).$$

Ако $a \neq \frac{1}{5}$, тогаш за бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2}{3})^n = 0$, за доволно голем ќе имаме знакот на $a_{n+1} - a_n$ ќе зависи од знакот на $4(-1)^n(\frac{1}{5} - a)$, па затоа нема да важи $a_{n+1} > a_n$, за секој $n \in \mathbf{N}$. Ако $a = \frac{1}{5}$, тогаш

$$a_{n+1} - a_n = \tfrac{2^n}{5} > 0, \text{ за секој } n \in \mathbf{N}.$$

91. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена со:

$$x_1 = 1, \ x_{n+1} = \tfrac{1}{1+x_n}, \ n = 1,2,... .$$

a) Докажи дека важи: $x_{2014}^2 + x_{2014} < 1$.

b) Испитај ја конвергенцијата на низата.

**Решение.** a) Ќе докажеме поопшто тврдење, т.е. ќе докажеме дека за секој $n \in \mathbf{N}$ важи:

$$x_{2n}^2 + x_{2n} < 1. \qquad (1)$$

Неравенството (1) ќе го докажеме паралелно докажувајќи го дека за секој $n \in \mathbf{N}$ важи:

$$x_{2n+1}^2 + x_{2n+1} > 1. \qquad (2)$$

За $n = 1$ имаме

$$x_1^2 + x_1 = 1 + 1 = 2 > 1 \text{ и } x_2^2 + x_2 = (\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{4} < 1,$$

т.е. неравенствата (1) и (2) се исполнети. Нека претпоставиме дека (1) и (2) се точни за некој $n \geq 1$. Тогаш за $n+1$ имаме

$$x_{2n}^2 + x_{2n} < 1$$
$$x_{2n}^2 + 2x_{2n} + 1 < 2 + x_{2n}$$
$$1 < \frac{2+x_{2n}}{1+2x_{2n}+x_{2n}^2} = \frac{1+(1+x_{2n})}{(1+x_{2n})^2} = (\frac{1}{1+x_{2n}})^2 + \frac{1}{1+x_{2n}} = x_{2n+1}^2 + x_{2n+1}$$

и

$$x_{2n+1}^2 + x_{2n+1} > 1$$
$$x_{2n+1}^2 + 2x_{2n+1} + 1 > 2 + x_{2n+1}$$
$$1 > \frac{2+x_{2n+1}}{x_{2n+1}^2+2x_{2n+1}+1} = \frac{1+(1+x_{2n+1})}{(1+x_{2n+1})^2} = (\frac{1}{1+x_{2n+1}})^2 + \frac{1}{1+x_{2n+1}} = x_{2n+2}^2 + x_{2n+2}$$

па од принципот на математичка индукција следува дека неравенствата (1) и (2) важат за секој $n \in \mathbf{N}$.

Во случајов за $n = 1007$ имаме $x_{2014}^2 + x_{2014} < 1$.

b) Нека $a$ е позитивен реален број кој е решение на равенката $x = \frac{1}{1+x}$. Јасно, $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$. Понатаму

$$0 <| x_{n+1} - a |=| \frac{1}{1+x_n} - \frac{1}{1+a} |= \frac{|a-x_n|}{(1+x_n)(1+a)} < \frac{|a-x_n|}{(1+a)} < ... < \frac{|a-x_1|}{(1+a)^n}$$

и како $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a-x_1|}{(1+a)^n} = 0$ добиваме $\lim\limits_{n\to\infty} | a - x_{n+1} |= 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a$.

92. Нека $x_1$ е произволен реален број и $x_{n+1} = \frac{n+1}{n} x_n - 1$, за $n \geq 1$. Докажи дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е неограничена и опаѓачка почнувајќи од некој член.

**Решение.** Со собирање на равенствата

$$\frac{x_{k+1}}{k+1} - \frac{x_k}{k} = -\frac{1}{k+1},\ k = 1,2,3,...,n-1,\ n > 1$$

добиваме

$$x_n = n(x_1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - ... - \frac{1}{n}),\ \text{за}\ n > 1.$$

Но, за хармониската низа

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n},\ n \geq 1$$

важи $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = +\infty$, па затоа низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, т.е. таа е неограничена од долу.

Понатаму, од $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = +\infty$ следува дека постои $k \in \mathbf{N}$ таков што $h_k > x_1$ и ако $k_0$ е најмалиот природен број таков што $h_{k_0} > x_1$, тогаш за $n \geq k_0$

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)(x_1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - ... - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) - n(x_1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - ... - \frac{1}{n})$$
$$= x_1 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - ... - \frac{1}{n} < 0,$$

што значи дека почнувајќи од $k_0$ низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно опаѓа.

93. Да ја разгледаме низата $a_n = n + a\sqrt{n^2+1}$, $n = 1,2,3,...$ и $a$ е реален број.

a) За кои вредности на $a$ низата конвергира?

b) За кои вредности на $a$ низата монотоно расте?

**Решение.** a) Ако $a = -1$, тогаш низата конвергира бидејќи

$$a_n = n - \sqrt{n^2+1} = \frac{-1}{n+\sqrt{n^2+1}} \to 0, \quad n \to \infty .$$

Обратно, нека низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира. Од

$$a_n = n + a\sqrt{n^2+1} = n - \sqrt{n^2+1} + (a+1)\sqrt{n^2+1} ,$$

следува дека низата $(a+1)\sqrt{n^2+1}$ исто така конвергира. Меѓутоа, $\sqrt{n^2+1} \to \infty$, $n \to \infty$, па затоа последното е можно само ако $a = -1$.

b) Нека низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно опаѓа, т.е. $a_{n+1} \geq a_n$, за секој $n$. Тогаш

$$\frac{a(2n+1)}{\sqrt{(n+1)^2+1}+\sqrt{n^2+1}} \geq -1. \qquad (1)$$

Бидејќи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2+1}+\sqrt{n^2+1}} = 1,$$

од (1) следува $a \geq -1$. Обратно, ако $a \geq -1$, тогаш од

$$\frac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2+1}+\sqrt{n^2+1}} < \frac{2n+1}{n+1+n} = 1,$$

Следува дека неравенството (1) е исполнето, т.е. низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно опаѓа.

94. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е дефинирана со

$$a_1 = 1994, \; a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2[a_n]+21}, \; n = 1,2,\ldots .$$

a) Докажи дека $a_{12} < 1$.

b) Докажи дека низата конвергира и најди ја нејзината граница.

c) Најди го најмалиот број $k$ таков да $a_k < 1$.

**Решение.** a) Имаме $a_1 = 1994 > 0$. Нека претпоставиме дека $a_n > 0$, за некој $n \in \mathbf{N}$. Тогаш $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2[a_n]+21} > 0$, па од принципот на математичка индукција следува дека $a_n > 0$, за секој $n \in \mathbf{N}$. Но, тоа значи дека $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2[a_n]+21} < \frac{a_n}{2}$, па затоа

$$a_{12} < \frac{a_{11}}{2} < \frac{a_{10}}{2^2} < \frac{a_9}{2^3} < \ldots < \frac{a_1}{2^{11}} = \frac{1994}{2^{11}} = \frac{1994}{2048} < 1 .$$

b) Во a) докажавме дека $a_n < \frac{a_{n-1}}{2} < a_{n-1}$, за секој $n \geq 2$ и како $0 < a_1 \leq a_1$, добиваме $0 < a_n \leq a_1 = 1994$, за секој $n \in \mathbf{N}$. Значи, низата монотоно опаѓа и е ограничена, па според тоа таа е конвергентна. Во a) видовме дека $a_{n+1} < \frac{a_n}{2}$.

Користејќи го ова неравенство со индукција по $n$ лесно се докажува дека $0<a_{n+1}<\frac{a_1}{2^n}$. Сега од теоремата за три низи следува дека $0\leq\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}\leq\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1}{2^n}=0$, што значи $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=0$.

с) Ќе докажеме дека $a_{10}<1$. За таа цел прво ќе докажеме дека $a_n<s+\sqrt{s^2+19s}$, тогаш $a_{n+1}>s$. Навистина, последователно имаме

$$a_n-s<\sqrt{s^2+19s}$$

$$(a_n-s)^2<s^2+19s$$

$$a_n^2<2a_ns+19s$$

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2}{2[a_n]+21}<\frac{a_n^2}{2a_n+19}<s.$$

Од претходно докажаното тврдење следува:

- $a_1=1994<995+\sqrt{995(995+19)}$, па затоа $a_2<995$,
- $a_2<995<495+\sqrt{495(495+19)}$, па затоа $a_3<495$,
- $a_3<495<245+\sqrt{245(245+19)}$, па затоа $a_4<245$,
- $a_4<245<118+\sqrt{118(118+19)}$, па затоа $a_5<118$,
- $a_5<118<55+\sqrt{55(55+19)}$, па затоа $a_6<55$,
- $a_6<55<24+\sqrt{24(24+19)}$, па затоа $a_7<24$,
- $a_7<24<9+\sqrt{9(9+19)}$, па затоа $a_8<9$,
- $a_8<9<3+\sqrt{3(3+19)}$, па затоа $a_9<3$,
- $a_9<3<1+\sqrt{1(1+19)}$, па затоа $a_{10}<1$.

Сега ќе докажеме дека $a_9>1$. За таа цел прво ќе докажеме дека од $a_n>s+\sqrt{s^2+21s}$ следува $a_{n+1}>s$. Навистина последователно добиваме

$$a_n-s>\sqrt{s^2+21s}$$

$$(a_n-s)^2>s^2+21s$$

$$a_n^2>2a_ns+21s$$

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2}{2[a_n]+21}>\frac{a_n^2}{2a_n+21}>s.$$

Од претходно докажаното тврдење следува:

- $a_1=1994>989+\sqrt{989(989+21)}$, па затоа $a_2>989$,
- $a_2>989>489+\sqrt{489(489+21)}$, па затоа $a_3>489$,
- $a_3>489>239+\sqrt{239(239+21)}$, па затоа $a_4>239$,
- $a_4>239>114+\sqrt{114(114+21)}$, па затоа $a_5>114$,

- $a_5 > 114 > 52 + \sqrt{52(52+21)}$ , па затоа $a_6 > 52$ ,
- $a_6 > 52 > 21 + \sqrt{21(21+21)}$ , па затоа $a_7 > 21$ ,
- $a_7 > 21 > 6 + \sqrt{6(6+21)}$ , па затоа $a_8 > 6$ ,
- $a_8 > 6 > 1 + \sqrt{1(1+21)}$ , па затоа $a_9 > 1$.

Од досега изнесеното имаме $a_{10} < 1 < a_9$, па затоа $k = 10$.

95. За секој природен број $n$ со $P(n)$ да го означиме производот од цифрите на бројот $n$ запишан во декаден броен систем. Дефинираме низа $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ на следниов начин:

$$x_1 \text{ е даден природен број, } x_{k+1} = x_k + P(x_k), \text{ за } k \geq 1.$$

Дали може $x_1$ да се избере така што низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ биде ограничена?

**Решение.** Ако во записот на бројот $x_k$ не се среќава цифрата 0, тогаш $x_{k+1} > x_k$, а во спротивно $x_{k+1} = x_k$. Според тоа броевите $x_1, x_2, x_3, ...$ се различни се додека во записот на некој од нив не се појави цифрата 0, а потоа сите броеви се еднакви меѓу себе.

Да претпоставиме дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е неограничена. Нека $c(n)$ е бројот на цифрите во записот на бројот $n$. Бидејќи секоја цифра во $x_k$ не е поголема од 9, добиваме

$$x_k < x_{k+1} \leq x_k + 9^{c(x_k)},\ k = 1, 2, 3, \dots .$$

Нека $t$ е таков природен број, што $9^t < 10^{t-1}$ (бројот $t$ постои бидејќи $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{9^t}{10^{t-1}} = \lim\limits_{t\to\infty} 9(\frac{9}{10})^{t-1} = 0$ ) и $10^t > x_1$. Нека освен тоа $r$ е таков природен број што $x_r < 10^t$ и $x_{r+1} \geq 10^t$. Тогаш

$$10^t \leq x_{r+1} \leq x_r + 9^{c(x_r)} < 10^t + 10^{t-1}.$$

Од горните неравенства следува дека првата (од лево на десно) цифра на $x_{r+1}$ е 1, а следната е 0. Но, тогаш $x_{r+1} = x_{r+2} = x_{r+3} = ...$ и низата е ограничена, што противречи на претпоставката. Според тоа, како и да го избереме бројот $x_1$ низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена.

96. Најди $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$ .

**Решение.** Најмалиот собирок во збирот

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

е $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ , а најголемиот собирок е $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ . Оттука

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq x_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

и како низите $y_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ и $z_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ се конвергентни и важи

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 1,$$

од теоремата за три низи следува дека $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

97. Нека $a, x_1 \in \mathbf{R}$ и

$$x_{n+1} = x_n\sqrt{\frac{n}{n+1}} + \frac{a}{2n+1}, \; n \in \mathbf{N}.$$

Докажи дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира и најди ја нејзината граница.

**Решение.** Со собирање на равенствата

$$x_{k+1}\sqrt{k+1} = x_k\sqrt{k} + \frac{a\sqrt{k+1}}{2k+1}, \; k = 1,2,...,n-1$$

добиваме дека за секој $n > 1$ важи

$$x_n\sqrt{n} = x_1 + a\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sqrt{k+1}}{2k+1},$$

т.е.

$$x_n = \frac{x_1}{\sqrt{n}} + \frac{a}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sqrt{k+1}}{2k+1}. \quad (1)$$

Лесно се проверува дека за секој $k \in \mathbf{N}$ важи

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{\sqrt{k+1}}{2k+1} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1},$$

од каде следува дека

$$\sqrt{n} - 1 < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sqrt{k+1}}{2k+1} < \sqrt{n-1},$$

па затоа

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sqrt{k+1}}{2k+1} = 1. \quad (2)$$

Конечно од (1) и (2) добиваме $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

98. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со равенствата $x_1 = 3$ и

$$x_{n+1} = x_n^2 - 3x_n + 4, \; n \geq 1.$$

a) Докажи дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно расте и е неограничена.

b) Докажи дека низата $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, определена со

$$y_n = \frac{1}{x_1-1} + \frac{1}{x_2-1} + ... + \frac{1}{x_n-1}, \; n \geq 1,$$

конвергира. Најди ја нејзината граница.

**Решение.** а) Имаме $x_{n+1} - x_n = (x_n - 2)^2 \geq 0$, што значи дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно расте. Со индукција ќе докажеме дека $x_n \geq n+2$, за секој $n \in \mathbf{N}$. Јасно неравенството важи за $n = 1$. Нека претпоставиме дека неравенството важи за $n = k \geq 1$. Тогаш, за $n = k+1$ имаме

$$x_{k+1} = x_k(x_k - 3) + 4 \geq (k+2)(k-1) + 4 \geq k+3\,,$$

што значи дека неравенството важи и за $n = k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека тоа важи за секој природен број $n$. Конечно, од $x_n \geq n+2,$ за секој $n \in \mathbf{N}$ следува дека низата е неограничена.

b) Од рекурентната врска следува равенството

$$x_{k+1} - 2 = (x_k - 1)(x_k - 2)\,.$$

Оттука имаме

$$\frac{1}{x_{k+1}-2} = \frac{1}{(x_k-1)(x_k-2)} = \frac{1}{x_k-2} - \frac{1}{x_k-1},\ \text{за } k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Ако ги собереме овие равенства за $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ добиваме

$$y_n = \frac{1}{x_1-1} - \frac{1}{x_{n+2}-1} = 1 - \frac{1}{x_{n+2}-1}\,.$$

Но, од a) следува дека $0 \leq \frac{1}{x_{n+2}-1} \leq \frac{1}{n}$, за секој $n \in \mathbf{N}$ и како $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ од теоремата за три низи следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{x_{n+2}-1}) = 1$.

99. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е дефинирана со $a_1 = 2, a_2 = 11$ и $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$, за $n \geq 3$. Докажи дека секој член на оваа низа е од облик $a^2 + 2b^2$, за некои природни броеви $a$ и $b$.

**Решение.** Ќе докажеме дека

$$a_{2n-1} = a_{n-1}^2 + 2(\tfrac{a_n - a_{n-1}}{2})^2 \text{ и } a_{2n} = a_n^2 + 2(\tfrac{a_n - a_{n-1}}{2})^2,\ \text{за } n \geq 1 \text{ и } a_0 = 1. \qquad (1)$$

Навистина, $a_1 = 1 + 2\cdot 1^2, a_2 = 3^2 + 2\cdot 1^2, a_3 = 3^2 + 2\cdot 4^2, a_4 = 11^2 + 2\cdot 4^2$, а ако тврдењето важи за $n$, тогаш

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= 4a_{2n} - a_{2n-1} = 4a_n^2 + 8(\tfrac{a_n - a_{n-1}}{2})^2 - a_{n-1}^2 - 2(\tfrac{a_n - a_{n-1}}{2})^2 \\ &= \tfrac{11a_n^2}{2} - 3a_n a_{n-1} + \tfrac{a_{n-1}^2}{2} = \tfrac{11a_n^2}{2} - 3a_n(4a_n - a_{n+1}) + \tfrac{(4a_n - a_{n+1})^2}{2} \\ &= \tfrac{3a_n^2}{2} - a_n a_{n+1} + \tfrac{a_{n+1}^2}{2} = a_n^2 + 2(\tfrac{a_{n+1} - a_n}{2})^2; \\ a_{2n+2} &= 4a_{2n+1} - a_{2n} = 4a_n^2 + 8(\tfrac{a_{n+1} - a_n}{2})^2 - a_n^2 - 2(\tfrac{a_n - a_{n-1}}{2})^2 \\ &= 3a_n^2 + 8(\tfrac{a_{n+1} - a_n}{2})^2 - 2(\tfrac{a_{n+1} - 3a_n}{2})^2 = \tfrac{a_n^2}{2} - a_n a_{n+1} + \tfrac{3a_{n+1}^2}{2} \\ &= a_{n+1}^2 + 2(\tfrac{a_{n+1} - a_n}{2})^2, \end{aligned}$$

па равенствата (1) следуваат од принципот на математичка индукција. Бидејќи сите членови на низата се непарни, следува и тврдењето на задачата.

100. Дали постојат природни броеви $a, b$ и $c$, поголеми од 2011, такви да во декаден запис важи $(a + \sqrt{b})^c = \ldots 2010,2011\ldots$?

**Решение.** Бројот $x = (a + \sqrt{b})^c + (a - \sqrt{b})^c$ е цел, па затоа за да докажеме дека постојат броеви $a, b$ и $c$ кои го задоволуваат условот на задачата доволно е да избереме броеви $a, b$ и $c$ такви да $x$ биде делив со $10^4$ и 7989,

$$7989 > (a-\sqrt{b})^c > 7989,7988$$

За непарно $c$, бројот $x = 2a^c + 2\binom{c}{2}a^{c-2} + ... + 2\binom{c}{c-1}a$ е делив со $a$, па затоа доволно е да се земе $a$ кој е делив со $10^4$. Вториот услов може да се постигне со избор на $a$ и $b$ така да важи

$$1 < a-\sqrt{b} < \sqrt{\tfrac{7989,7989}{7989,7988}} = t\ .$$

На пример, $a = 10^n$ и $b = (a-1)^2 - 1$, за доволно голем $n$, $n \geq 4$. Навистина, бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}(10^n - \sqrt{10^{2n} - 2\cdot 10^n}) = 1\ ,$$

постои $n \in \mathbf{N}$ таков да

$$s = 10^n - \sqrt{10^{2n} - 2\cdot 10^n} < t\ .$$

Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} s^n = \infty$ и $s < 7989,7988$, постои најголем непарен природен број $n$ за кој $s^n \leq 7989,7988$. Но, тогаш

$$7989,7988 < s^{n+2} = s^n s^2 < 7989,7988t^2 = 7989,7989\ ,$$

па може да се земе $c = n+2$. Очигледно, $a,b,c > 2011$.

101. а) Најди го бројот на реалните корени на равенката $x = \cos x$.

б) Нека $a_1, a_2, ...$ е низа реални броеви таква што $a_{n+1} = \cos a_n$, за $n \geq 1$. Докажи дека низата конвергира.

**Решение.** а) За $f(x) = x - \cos x$ имаме , $f'(x) = 1 + \sin x > 0$ , кога $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, па значи дека $f$ е строго монотоно растечка функција. Бидејќи $f(0) < 0 < f(1)$, заклуччуваме дека $f$ има точно една нула.

б) Нека $a$ е нулата на $f$. Бидејќи $a \in (0,1)$ и $a_n \in [-1,1]$, за $n \geq 2$, важи

$$|a_{n+1} - a| = |\cos a_n - \cos a| = 2|\sin\tfrac{a+a_n}{2}\sin\tfrac{a-a_n}{2}| \leq k\,|a_n - a|\,,$$

каде $k = \sin 1 \in (0,1)$. Според тоа, $|a_n - a| \leq k^{n-2}|a_2 - a|$, кога $n \geq 2$, па затоа $a_n \to a$, кога $n \to \infty$.

102. Дадена е бесконечна геометриска прогресија $a_1, a_2, a_3, ...$ таква што

$$a_1 - 3a_2 + 2a_3 = 0 \text{ и } a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \leq 2012\ .$$

Колку најмногу природни броеви може да се содржат меѓу членовите на прогресијата?

**Решение.** Бидејќи $a_1 \neq 0$, од $a_1 - 3a_2 + 2a_3 = 0$ следува дека $2q^2 - 3q + 1 = 0$, каде $q$ е количникот на прогресијата. Оттука $q = 1$ или $q = \frac{1}{2}$. Но, при $q = 1$ збирот $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ е неограничен, па затоа $q = \frac{1}{2}$. Но, тогаш $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \frac{a_1}{1-q} = 2a_1$, па затоа $0 < a_1 \leq 1006$. Најголем степен на бројот 2 кој може да е делител на бројот $a_1$ е $2^9 = 512$. Според тоа, прогресијата може да содржи најмногу 10 природни броеви.

103. Нека $a_1, a_2, a_3, ...$ и $b_1, b_2, b_3, ...$ се низи од позитивни броеви такви што

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{b_n}) \text{ и } b_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + \frac{1}{a_n}), \text{ за секој } n \in \mathbf{N}.$$

Докажи дека низите се коневергентни.

**Решение.** Од условот на задачата следува дека

$$4a_{n+1}b_{n+1} = 2 + a_n b_n + \frac{1}{a_n b_n} \geq 4 .$$

Тогаш

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1 - a_{n+1}b_{n+1}}{2b_{n+1}} \leq 0 .$$

Аналогно се докажува дека $b_{n+2} \leq b_{n+1}$, т.е. почнувајќи од вториот член низите монотоно опаѓаат. Но, овие низи се ограничени од долу, па затоа тие се конвергентни.

104. Најди ги сите вредности на $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, за кои броевите $\sin x \cos x, 1$ и $\frac{1}{ainx + \cos x}$ во некој редослед формираат геометрсика прогресија.

**Решение.** Ако 1 е средниот член на прогресијата, тогаш $\frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} = 1$, што не е можно бидејќи $(\sin x - 1)(\cos x - 1) < 1$, односно $\sin x \cos x < \sin x + \cos x$.

Ако $\sin x \cos x$ е средниот член на прогресијата, тогаш

$$\frac{1}{\sin x + \cos x} = \sin^2 x \cos^2 x ,$$

што не е можно бидејќи од познатото неравенство $\sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$ следува $\frac{1}{\sin x + \cos x} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ од една страна, а од друга страна

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2 2x \leq \frac{1}{4} < \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Ако $\frac{1}{\sin x + \cos x}$ е средниот член на прогресијата, тогаш $\sin x \cos x = (\frac{1}{\sin x + \cos x})^2$.

Бидејќи $\sin x \cos x = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2}$, ако ставиме $a = \sin x + \cos x$, од горното равенство добиваме $\frac{1}{a^2} = \frac{a^2 - 1}{2}$. Единствено решение на последната равенка е $a^2 = 2$, т.е. $a = \sqrt{2}$ и тогаш $x = \frac{\pi}{4}$.

105. Четири позитивни броеви формираат растечка геометриска прогресија. Најди го количникот на прогресијата ако три од броевите се нули на полином од трет степен, а четвртиот е нула на неговиот извод.

**Решение.** Нека броевите се $x_1, x_2, x_3, x_4$, каде $x_4$ е нула на полиномот

$$((x - x_1)(x - x_2)(x - x_3))' = 3x^2 - 2x(x_1 + x_2 + x_3) + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) .$$

Тогаш $3x_4 = x_1 + x_2 + x_3 \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1}$. Можеме да сметаме дека $1 = x_1 < x_2 < x_3$. При знак − имаме $x_1 < x_4 < x_2$ и значи $x_4 = q$,

$x_2 = q^2, x_3 = q^3$, а при знак $+$ следува дека $x_2 < x_4 < x_3$, од каде наоѓаме $x_2 = q, x_4 = q^2, x_3 = q^3$. Значи $q > 1$ и

$$3q = 1 + q^2 + q^3 - \sqrt{1 - q^2 - q^3 + q^4 - q^5 + q^6} \text{ или}$$

$$3q = 1 + q + q^3 + \sqrt{1 - q + q^2 - q^3 - q^4 + q^6}\ .$$

Во првиот случај добиваме дека

$$(q-1)\sqrt{1 + 2q + 2q^2 + q^3 + q^4} = (q-1)(q^2 + 2q - 1)$$

$$1 + 2q + 2q^2 + q^3 + q^4 = 1 - 4q + 2q^2 + 4q^3 + q^4$$

$$q(q^2 - 2) = 0$$

а во вториот случај добиваме

$$(1-q)\sqrt{1 + q + 2q^2 + 2q^3 + q^4} = (q-1)(q^2 - 2q - 1)$$

$$1 + q + 2q^2 + 2q^3 + q^4 = 1 + 4q + 2q^2 - 4q^3 + q^4$$

$$q(2q^2 - 1) = 0.$$

Всушност вториот случај се сведува на првиот ако $q$ го замениме со $\frac{1}{q}$.

Конечно, $q = \sqrt{2}$.

106. Определи ги сите природни броеви $d$, за кои постои бесконечна аритметичка прогресија $a_1, a_2, a_3, ...$ од природни броеви со разлика $d$ со следново својство: постои природен број $k$ за кој за секој $n$ броевите $a_{S_{n+1}}, (n+k)a_k, -a_{S_n}$ образуваат (во овој редослед) аритметичка прогресија. ($S_n$ е збирот на првите $n$ членови на прогресијата $a_1, a_2, a_3, ...$).

**Решение.** Од $a_{S_{n+1}} - a_{S_n} = 2(n+k)a_k$ добиваме $a_{n+1}d = (n+k)a_k$, односно $(a_1 + nd)d = (n+k)a_k$. Но, ова равенство важи за секој $n$, па затоа добиваме $d^2 = a_k$ и $a_1 d = k a_k$. Според тоа, $a_1 d = k a_k = k d^2$, т.е. $a_1 = kd$. Сега од $d^2 = a_k = a_1 + (k-1)d$ добиваме $d^2 = kd + (k-1)d$ или $d = 2k - 1$. Значи, бараните броеви се сите непарни природни броеви.

107. Дадена е бесконечна низа $a_1, a_2, a_3, ...$ за која $a_2 = 2015, x a_{n+1} = a_n + y, n \geq 1$ за некои реални броеви $x$ и $y$. Определи го $y$, ако е познато дека низата $b_1, b_2, b_3, ...$ зададена со $b_n = a_n - 2014$, $n = 1, 2, 3, ...$ е бесконечна геометриска прогресија чиј збир на членови е еднаков на 4.

**Решение.** Нека $b_1, b_2, b_3, ...$ е геометриска прогресија со количник $r$. Тогаш $b_1 = \frac{b_2}{r} = \frac{a_2 - 2014}{r} = \frac{1}{r}$ и затоа $S = \frac{b_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{r}}{1-r} = 4$, од каде наоѓаме $r = \frac{1}{2}$. Сега од равенството $x a_{n+1} = a_n + y$ после замената во $a_{n+1} = b_{n+1} + 2014 = \frac{b_n}{2} + 2014$ и $a_n = b_n + 2014$ добиваме

$$x(\frac{b_n}{2}+2014)=b_n+2014+y\ .$$

Оттука $b_n(\frac{x}{2}-1)=2014+y-2014y$, па затоа $\frac{x}{2}-1=2014+y-2014y=0$ (во спротивно низата $b_1,b_2,b_3,...$ ќе има еднакви членови). Значи, $x=2$ и $y=2014$ .

108. Синусите на три различни агли од интервалот $[0,2\pi]$ формираат аритметичка прогресија. Докажи дека нивните косинуси не може да формираат аритметичка прогресија во истиот редослед.

**Решение.** Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека постојат три различни броеви $x,y,z\in[0,2\pi]$ за кои важи

$$\sin x+\sin y=2\sin z \text{ и } \cos x+\cos y=2\cos z\ .$$

Ако последните две равенства ги кавдрираме, а потоа ги собереме добиваме $\cos(x-y)=\sin x\sin y+\cos x\cos y=1$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $x>y$. Но, $x-y\in(0,2\pi]$, па затоа $x=2\pi$ и $y=0$. Тогаш $z=x$ или $z=y$, што е противречност.

109. Нека $a_0<a_1<a_2<...$ е бесконечна низа природни броеви. Докажи дека постои единствен природен број $n$ таков што $a_n<\frac{a_0+a_1+...+a_n}{n}\le a_{n+1}$.

**Решение.** *Прв начин*. Да ставиме

$$b_n=(n-1)a_n-(a_{n-1}+...+a_1)=(a_n-a_{n-1})+...+(a_n-a_1)\ ,\ n\ge1.$$

Од второто претставување следува дека членовите на низата $b_1,b_2,...$ се природни броеви и таа е строго растечка. ЈСега барањето на задачата е еквивалентно на очигледната егзистенција и единственост на $n$ за кој $b_n<a_0\le b_{n+1}$. Навистина имаме

$$b_n<a_0 \ \Leftrightarrow\ a_n<\frac{a_0+a_1+...+a_n}{n} \text{ и } a_0\le b_{n+1}\ \Leftrightarrow\ \frac{a_0+a_1+...+a_n}{n}\le a_{n+1}.$$

*Втор начин*. Егзистенција. Нека претпоставиме дека не постои $n$ со саканите својства. Бидејќи $a_1<a_0+a_1$ заклучуваме дека $2a_2<a_0+a_1+a_2$ $\Leftrightarrow$ $a_2<a_0+a_1$. Сега со индукција се докажува дека $a_n<a_0+a_1$, што е противречност бидејќи дадената низа тежи кон бесконечност.

Единственост. Нека $n$ ги има саканите својства и е најмалиот таков природен број. Имаме $na_n<a_0+a_1+...+a_n\le na_{n+1}$. Од десното неравенство добиваме $a_0+a_1+...+a_n+a_{n+1}\le(n+1)a_{n+1}$, што значи дека $n+1$ ги нема саканите својства. Освен тоа, $a_0+a_1+...+a_n+a_{n+1}\le(n+1)a_{n+1}<(n+1)a_{n+2}$, па затоа $a_0+a_1+...+a_n+a_{n+1}+a_{n+2}<(n+2)a_{n+2}$ и по индукција следува дека $a_0+a_1+...+a_m\le ma_m$, за секој $m\ge n+1$. Според тоа, ниту еден $m\ge n+1$ ги нема саканите својства, со што е докажана единственоста.

110. Нека $a_n=\frac{4(2n)^4+1}{4(2n-1)^4+1}$, $n\in\mathbf{N}$. Пресметај ја границата $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1a_2...a_n}{n^2}$ .

**Решение**. Бидејќи $2x^2+2x+1=2(x+1)^2-2(x+1)+1$ добиваме

$$a_n=\frac{4(2n)^4+1}{4(2n-1)^4+1}=\frac{4(2n)^4+4(2n)^2+1-4(2n)^2}{4(2n-1)^4+4(2n-1)^2+1-4(2n-1)^2}=\frac{[2(2n)^2+1]^2-(2\cdot 2n)^2}{[2(2n-1)^2+1]^2-[2\cdot(2n-1)]^2}$$

$$=\frac{[2(2n)^2+2\cdot 2n+1][2(2n)^2-2\cdot 2n+1]}{[2(2n-1)^2+2\cdot(2n-1)+1]^2[2(2n-1)^2-2\cdot(2n-1)+1]^2}=\frac{2(2n+1)^2-2\cdot(2n+1)+1}{2(2n-1)^2-2\cdot(2n-1)+1}$$

па затоа $a_1a_2...a_n=\frac{2(2n+1)^2-2\cdot(2n+1)+1}{2\cdot 1^2-2\cdot 1+1}=8n^2+4n+1$. Според тоа,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1a_2...a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+4n+1}{n^2}=8.$$

111. За низата реални броеви $\{a_n\}$ точно е равенството

$$a_{m+n}+a_{m-n}-m+n-1=\tfrac{1}{2}(a_{2m}+a_{2n})$$

за произволни $m\geq n\geq 0$. Ако $a_1=3$, пресметај $a_{2004}$.

**Решение.** За $m=n=0$ следува $a_0=1$ и тогаш за $n=0$ добиваме

$$a_{2m}=4a_m-2m-3.$$

Оттука со индукција добиваме дека $a_{2m}=(2m)^2+2m+1$. Според тоа, $a_m=\frac{a_{2m}+2m+3}{4}=m^2+m+1$, за секој $m\in\mathbf{N}$. Непосредно се проверува дека оваа низа ги задоволува условите на задачата. Значи, $a_{2004}=2004^2+2005$.

## C) РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД ТРЕТА ГЛАВА

1. Дадена е функцијата $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$, $x\in\mathbf{R}$. Пресметај го збирот

$$\begin{gathered}f(\tfrac{1}{1})+f(\tfrac{2}{1})+\ldots+f(\tfrac{n-1}{1})+f(\tfrac{n}{1})+\\ f(\tfrac{1}{2})+f(\tfrac{2}{2})+\ldots+f(\tfrac{n-1}{2})+f(\tfrac{n}{2})+\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f(\tfrac{1}{n})+f(\tfrac{2}{n})+\ldots+f(\tfrac{n-1}{n})+f(\tfrac{n}{n}),\end{gathered}$$

$n\in\mathbf{N}$.

**Решение.** Забележуваме дека

$$f(x)+f(\tfrac{1}{x})=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}=1 \text{ и } f(1)=\tfrac{1}{2}.$$

Збирот на членовите на дијагоналата е еднаков на $\frac{n}{2}$, а додека збирот на останатите $n^2-n$ членови е еднаков на $\frac{n^2-n}{2}$. Значи, вкупниот збир е $\frac{n^2}{2}$.

2. Дадена е функцијата $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$. Пресметај го збирот

$$f(0)+f(\tfrac{1}{n})+f(\tfrac{2}{n})+\ldots+f(\tfrac{n-1}{n})+f(\tfrac{n}{n}),\ n\in\mathbf{N}.$$

**Решение.** За дадената функција важи

$$f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{2}{4^x+2}=1. \tag{1}$$

Ако во (1) за $x$ замениме $0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},\frac{n}{n}$ и ги собереме добиените равенства, имаме

$$f(0)+f(\tfrac{n}{n})+f(\tfrac{1}{n})+f(\tfrac{n-1}{n})+\ldots+f(\tfrac{n-1}{n})+f(\tfrac{1}{n})+f(\tfrac{n}{n})+f(0)=n+1,$$

што значи дека

$$f(0)+f(\tfrac{1}{n})+f(\tfrac{2}{n})+\ldots+f(\tfrac{n-1}{n})+f(\tfrac{n}{n})=\tfrac{n+1}{2}.$$

3. Докажи дека функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, за која важи

$$f(x^2)-[f(x)]^2\geq\tfrac{1}{4}$$

не е инјекција, т.е. дека постојат $x_1,x_2\in\mathbf{R}$, $x_1\neq x_2$ такви да $f(x_1)=f(x_2)$.

**Решение.** Бидејќи даденото тврдење важи за секој $x\in\mathbf{R}$, важи и за $x=0$ и $x=1$. За $x=0$ добиваме $f(0)-(f(0))^2\geq\frac{1}{4}$, односно $(f(0)-\frac{1}{2})^2\leq 0$, од каде $f(0)=\frac{1}{2}$. За $x=1$ добиваме $f(1)-(f(1))^2\geq\frac{1}{4}$, односно $(f(1)-\frac{1}{2})^2\leq 0$, од каде $f(1)=\frac{1}{2}$. Следи дека $f(0)=f(1)$, односно дадената функција не е инјекција.

4. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е функција таква да

1) $f(x+y)=f(x)f(y)$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$ и

2) Постои еден и само еден $c$ таков да $f(c)=2013$.

Докажи дека функцијата $f$ е инјекција.

**Решение.** Од условот на задачата имаме $f(c)=f(c+0)=f(c)f(0)$, па затоа $f(0)=1$. Понатаму $1=f(x+(-x))=f(x)f(-x)$, од што следува $f(x)\neq 0$ и $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Ако $f(x)=f(y)$, тогаш

$$1=\frac{f(x)}{f(y)}=f(x)f(-y)=f(x-y).$$

Според тоа,

$$2013=f(c)f(x-y)=f(c+x-y),$$

па од (2) следува дека $c+x-y=c$, т.е. $x=y$, што значи дека $f$ е инјекција.

5. Нека $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ е непрекината опаѓачка функција за која важи

$$f(x+y)+f(f(x)+f(y))=f(f(x+f(y))+f(y+f(x))), \qquad (1)$$

за секои $x,y\in\mathbf{R}^+$. Докажи дека $f(x)=f^{-1}(x)$.

**Решение.** Ако во (1) ставиме $y=x$ добиваме

$$f(2x)+f(2f(x))=f(2f(x+f(x))). \qquad (2)$$

Ако во (2) $x$ го замениме со $f(x)$ наоѓаме

$$f(2f(x))+f(2f(f(x)))=f(2f(f(x)+f(f(x)))). \qquad (3)$$

Од (3) ја одземаме (2) и добиваме

$$f(2f(f(x)))-f(2x)=f(2f(f(x)+f(f(x))))-f(2f(x+f(x))). \quad (4)$$

Нека $x\in\mathbf{R}^+$. Ако $x<f(f(x))$, тогаш бидејќи функцијата $f$ е опаѓачка добиваме дека левата страна во (4) е негативна, што значи дека и десната е негативна. Но, функцијата $f$ е опаѓачка па затоа

$$f(x+f(x))<f(f(x)+f(f(x))),$$

односно

$$f(x)+f(f(x))<x+f(x),$$

т.е. $f(f(x))<x$, што е противречност. Аналогно, случајот $f(f(x))<x$ доведува до противречност. Според тоа, $f(f(x))=x$, за секој $x\in\mathbf{R}^+$, што значи дека $f(x)=f^{-1}(x)$.

6. Нека $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ се непрекинати биекции такви да

$$f(g^{-1}(x))+g(f^{-1}(x))=2x,\ \text{за секој } x\in\mathbf{R}.$$

Докажи дека ако постои $x_0\in\mathbf{R}$ таков да $f(x_0)=g(x_0)$, тогаш $f\equiv g$.

**Решение.** Нека $h=f\circ g^{-1}$. Тогаш $h$ е непрекината биекција и важи

$$h(x)+h^{-1}(x)=2x,\ \text{за секој } x\in\mathbf{R}.$$

Но, непрекината биекција е строго монотона функција, па затоа нејзината инверзна функција е строго монотона од истиот тип. Понатаму, бидејќи функцијата $q(x)=2x$ е монотоно растечка, добиваме дека и $h$ е монотоно растечка функција.

Нека претпоставиме дека постои $a\in\mathbf{R}$ таков да $h(a)\neq a$ и да ставиме $r=a-h(a)$. Од $h(a)+h^{-1}(a)=2a,$ следува $h^{-1}(a)=a+r$, па затоа $h(a+r)=a$. Понатаму, од

$$h(a+r)+h^{-1}(a+r)=2(a+r)$$

и претходно изнесеното следува $h(a+2r)=a+r$ и користејќи математичка индукција добиваме

$$h(a+nr)=a+(n-1)r\text{, за секој } n\in\mathbf{N}. \qquad (1)$$

Исто така

$$h(a-r)+h^{-1}(a-r)=2(a-r)$$

и од $h(a)=a-r$ следува $h^{-1}(a-r)=a$, па затоа $h(a-r)=a-2r$. Повторно со математичка индукција се докажува дека

$$h(a-nr)=a-(n+1)r\text{, за секој } n\in\mathbf{N}. \qquad (2)$$

Сега од (1) и (2) следува дека

$$h(a+nr)=a+(n-1)r\text{, за секој } n\in\mathbf{Z}. \qquad (1)$$

Од друга страна, за бројот $x_0$ постои цел број $n$ таков да

$$a+nr\leq x_0<a+(n+1)r\text{,}$$

(случајот $r<0$ се разгледува авалогно). Значи

$$h(x_0)<h(a+(n+1)r)=a+nr\leq x_0\text{,}$$

што противречи на $x_0=(f\circ g^{-1})(x_0)=h(x_0)$.

Конечно, од добиената противречност следува дека $h(a)=a$, за секој $a\in\mathbf{R}$, што значи $(f\circ g^{-1})(a)=a$, за секој $a\in\mathbf{R}$, т.е. $g^{-1}(a)=f^{-1}(a)$, за секој $a\in\mathbf{R}$, односно $f(a)=g(a)$, за секој $a\in\mathbf{R}$.

7. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ се функции за кои што

$$f(g(x))=g(f(x))=-x\text{, за секој } x\in\mathbf{R}.$$

a) Докажи дека функциите $f$ и $g$ се непарни.

b) Најди пример на две такви функции.

**Решение.** a) Од равенството $f(g(x))=-x$ добиваме

$$g(f(g(x)))=g(-x). \qquad (1)$$

Од друга страна, од равенството $g(f(t))=-t$, за дадена вредност $x$ и $t=g(x)$ имаме

$$g(f(g(x)))=-g(x). \qquad (2)$$

Сега, од (1) и (2) следува $g(-x)=-g(x)$, што значи дека функцијата $g$ е непарна.

Од равенството $g(f(x))=-x$ добиваме

$$f(g(f(x)))=f(-x)$$

и ако во $f(g(t)) = -t$ ставиме $t = f(x)$ наоѓаме

$$f(g(f(x))) = -f(x),$$

што значи $f(-x) = -f(x)$, т.е. функцијата $f$ е непарна.

b) Доволно е да земеме $f(x) = x$ и $g(x) - x$.

8. Ако функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е непрекината во точката $x_0$ и ако за секои $x, y \in \mathbf{R}$ важи

$$f(x+y-xy) + f(xy) = f(x) + f(y),$$

тогаш функцијата $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x) = f(x) - f(0)$ е непарна на интервалот $(-1,1)$. Докажи!

**Решение.** Нека $x \in (-1,1)$. Ако во дадената релација ставиме $y = -x$, добиваме

$$f(x^2) + f(-x^2) = f(x) + f(-x).$$

Со последователна примена на добиеното равенство имаме:

$$f(x) + f(-x) = f(x^2) + f(-x^2) = f(x^4) + f(-x^4) = ...$$
$$= f(x^{2^n}) + f(-x^{2^n}),$$

за секој $n \geq 1$, односно $f(x) + f(-x) = f(x^{2^n}) + f(-x^{2^n})$, за секој $n \geq 1$. Сега од непрекинатоста на $f$ во точката $x_0$ следува:

$$\lim_{n\to\infty} f(x^{2^n}) = \lim_{n\to\infty} f(-x^{2^n}) = f(0),$$

и ако замениме во последното равенство наоѓаме

$$f(x) + f(-x) = 2f(0),$$

што значи:

$$g(-x) = f(-x) - f(0) = -f(x) + f(0) = -g(x),$$

т.е. $g$ е непарна на интервалот $(-1,1)$.

9. За функциите $f$ и $g$ важи

$$f(x) = f(\tfrac{x+y}{2})g(\tfrac{x-y}{2}) + g(\tfrac{x+y}{2})f(\tfrac{x-y}{2}), \qquad (1)$$

и $f$ е непарна и $g$ е парна функција. Докажи дека важи

$$[f(x)]^2 - [f(y)]^2 = f(x+y)f(x-y). \qquad (2)$$

**Решение.** Ако во 1) ги замениме местата на $x$ и $y$ добиваме

$$f(y) = f(\tfrac{x+y}{2})g(\tfrac{y-x}{2}) + g(\tfrac{x+y}{2})f(\tfrac{y-x}{2}).$$

Бидејќи $f$ е непарна и $g$ е парна функција имаме

$$g(\tfrac{y-x}{2}) = g(\tfrac{x-y}{2}) \text{ и } f(\tfrac{y-x}{2}) = -f(\tfrac{x-y}{2}),$$

односно

$$f(y) = f(\tfrac{x+y}{2})g(\tfrac{y-x}{2}) - g(\tfrac{x+y}{2})f(\tfrac{x-y}{2}). \qquad (3)$$

Од (1) и (3) добиваме

$$[f(x)]^2-[f(y)]^2=4f(\tfrac{x+y}{2})g(\tfrac{x-y}{2})g(\tfrac{x+y}{2})f(\tfrac{x-y}{2}). \qquad (4)$$

За $y=0$ од (1) добиваме $f(x)=2f(\tfrac{x}{2})g(\tfrac{x}{2})$, што значи дека

$$f(x\pm y)=2f(\tfrac{x\pm y}{2})g(\tfrac{x\pm y}{2}). \qquad (5)$$

Конечно, од (4) и (5) следува (2).

10. Ако периодична функција $f$ за некој $k\neq\pm1,0$ го задоволува условот $f(kx)=kf(x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$, тогаш таа нема најмала периода. Докажи!

**Решение.** Нека $T$ е периода на функцијата и $|k|>1$. Тогаш

$$f(kx+T)=kf(x) \text{ и } f(kx+T)=f(k(x+\tfrac{T}{k}))=kf(x+\tfrac{T}{k})$$

и затоа $f(x+\tfrac{T}{k})=f(x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$, т.е. $\tfrac{T}{|k|}$ исто така е периода на функцијата $f$. Според тоа, секој број од видот $\tfrac{T}{|k|^n}, n\in\mathbf{N}$ е периода на функцијата $f$, па затоа во овој случај $f$ нема најмала периода.

Ако $|k|<1$, тогаш од

$$f(kT+x)=f(k(T+\tfrac{x}{k}))=kf(T+\tfrac{x}{k})=kf(\tfrac{x}{k})=f(x)$$

следува дека $|k|T$ е периода на $f$, па значи и секој број од облик $|k|^n\,T$ е периода на $f$. Според тоа, и во овој случај $f$ нема најмала периода.

11. Функцијата $f(x)$ има својство да за секој $x\in\mathbf{R}$ и за некој $a\in\mathbf{R}$ важи

$$f(x+a)=\tfrac{1+f(x)}{1-f(x)}.$$

Докажи дека оваа функција е периодична.

**Решение.** За дадената функција имаме

$$f(x+2a)=\frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)},$$

$$f(x+3a)=\frac{1+f(x+2a)}{1-f(x+2a)}=\frac{1-\frac{1}{f(x)}}{1+\frac{1}{f(x)}}=\frac{f(x)-1}{f(x)+1} \text{ и}$$

$$f(x+4a)=\frac{1+f(x+3a)}{1-f(x+3a)}=\frac{1+\frac{f(x)-1}{f(x)+1}}{1-\frac{f(x)-1}{f(x)+1}}=f(x),$$

што значи дека функцијата има периода $T=4a$.

12. Нека $a>0$ е реален број и функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е таква што

$$f(x+a)=\tfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}, \text{ за секој } x\in\mathbf{R}.$$

a) Докажи дека функцијата $f$ е периодична, т.е. дека постои реален број $b>0$ таков што $f(x+b)=f(x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

b) За $a=1$ најди пример на таква функција $f$, $f\not\equiv\text{const}$.

**Решение.** а) За функцијата $f$ исполнето е

$$f(x+2a)=f((x+a)+a)=\tfrac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-[f(x+a)]^2}$$
$$=\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}-(\tfrac{1}{4}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}+f(x)-[f(x)]^2)}$$
$$=\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{4}-f(x)+[f(x)]^2}=\tfrac{1}{2}+|\,f(x)-\tfrac{1}{2}\,|.$$

Од друга страна

$$f(x)=f((x-a)+a)=\tfrac{1}{2}+\sqrt{f(x-a)-[f(x-a)]^2}\geq\tfrac{1}{2},$$

па затоа $|\,f(x)-\frac{1}{2}|=f(x)-\frac{1}{2}$ и ако замениме во последното равенство добиваме

$$f(x+2a)=\tfrac{1}{2}+|\,f(x)-\tfrac{1}{2}|=\tfrac{1}{2}+f(x)-\tfrac{1}{2}=f(x),$$

т.е. функцијата $f$ е периодична со период $b=2a$.

b) За $a=1,(b=2)$ дадениот услов го задоволува, на пример периодичната функција $f(x)=\frac{1}{2}(1+|\cos\frac{\pi x}{2}|)$.

13. Дадена е функција $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ за која важи

а) $f(x)\leq 1$, за секој $x\in\mathbf{R}$,

б) $f(x+\frac{13}{42})+f(x)=f(x+\frac{1}{6})+f(x+\frac{1}{7})$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

Докажи дека функцијата $f$ е периодична.

**Решение.** Нека $x\in\mathbf{R}$ и да дефинираме $a_{kl}=f(x+\frac{k}{6}+\frac{l}{7})$, $k,l\in\mathbf{N}_0$. Лесно се проверува дека $a_{k\,l+1}+a_{k+1l}=a_{kl}+a_{k+1l+1}$. Во последното равенство ставаме $k=0,1,2,...,m-1$ и ако ги собереме добиените равенства наоѓаме

$$a_{0l+1}+a_{ml}=a_{0l}+a_{ml+1}.$$

Во последното равенство ставаме $l=0,1,2,...,n-1$ и ако ги собереме добиените равенства наоѓаме $a_{0n}+a_{m0}=a_{00}+a_{mn}$. Во последното равенство ставаме $m=6$ и $n=7$ и ја добиваме функционалната равенка

$$2f(x+1)=f(x)+f(x+2). \qquad (1)$$

Од (1) следува дека низата $\{f(x+n)\}$ е аритметичка прогресија со разлика $f(x+1)-f(x)$. Но, функцијата $f$ е ограничена, па затоа $f(x+1)-f(x)=0$, т.е. $f(x+1)=f(x)$. Конечно, од произволноста на $x$ следува дека функцијата $f$ е периодична со период $T=1$.

14. Докажи дека функцијата $f(x)=\cos x+\cos\alpha x,\ x\in\mathbf{R}$ е периодична ако и само ако $\alpha$ е рационален број.

**Решение.** Ако функцијата $f$ е периодична, тогаш постои $T>0$, таков да за секој $x\in\mathbf{R}$ важи

$$\cos x+\cos\alpha x=\cos(x+T)+\cos(\alpha x+\alpha T).$$

За $x=0$ добиваме $2=\cos T+\cos\alpha T$ и бидејќи $\cos T\le 1$ и $\cos\alpha T\le 1$, заклучуваме дека важи $\cos T=1$ и $\cos\alpha T=1$. Според тоа, постојат цели броеви $k>0$ и $p$ такви да $2k\pi=T$ и $2p\pi=\alpha T$, од каде добиваме $\alpha=\frac{p}{k}$, што значи дека $\alpha$ е рационален број.

Обратно, ако $\alpha=\frac{p}{k}$, каде $k>0$ и $p$ се цели броеви, тогаш важи

$$\cos x+\cos\frac{p}{k}x=\cos(x+2k\pi)+\cos(\frac{p}{k}(x+2k\pi)),$$

па затоа $T=2k\pi$ е периода на функцијата $f$ .

15. Дали може функцијата $y=x^2$ да се претстави како збир на две функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, каде $f$ е непарна, а $g$ е периодична функција.

**Решение.** Нека претпоставиме дека бараните функции постојат. Според условот $f(-x)=-f(x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$ и постои позитивен број $T$ таков што $g(x+T)=g(x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Бидејќи $x^2=f(x)+g(x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$ имаме

$$(kT)^2=f(kT)+g(kT)=f(kT)+g(0) \text{ и}$$

$$(-kT)^2=f(-kT)+g(-kT)=-f(kT)+g(0)\text{, за секој } k\in\mathbf{Z}.$$

Затоа $g(0)=(kT)^2$, за секој $k\in\mathbf{Z}$, што противречи на $T>0$. Според тоа, бараните функции не постојат.

16. Дали може функцијата $f(x)=x$ да се претстави како збир на две функции $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ каде $g$ е парна функција и $h$ е периодична функција.

**Решение.** Нека претпоставиме дека функциите $g$ и $h$ постојат. Имаме $g(x)=g(-x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$ и $h(x+T)=h(x)$, за некој $T>0$ и за секој $x\in\mathbf{R}$. Од $x=g(x)+h(x)$, за $x=T$ добиваме

$$T=g(T)+h(T)=g(T)+h(0). \tag{1}$$

Од друга страна за $x=-T$ добиваме

$$-T=g(-T)+h(-T)=g(T)+h(0). \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува $T=0$, што противречи на $T>0$, па затоа не постојат функции $g$ и $h$ со саканото својство.

17. Дали може функцијата $f(x)=x^2\sin x$ да се претстави како збир на две функции $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ каде $g$ е парна функција и $h$ е периодична функција.

**Решение.** Нека претпоставиме дека функциите $g$ и $h$ постојат. Имаме $g(x)=g(-x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$ и $h(x+T)=h(x)$, за некој $T>0$ и за секој $x\in\mathbf{R}$. За $x=-\frac{T}{2}$ имаме

$$\begin{aligned}(-\tfrac{T}{2})^2\sin(-\tfrac{T}{2}) &= g(-\tfrac{T}{2})+h(-\tfrac{T}{2}) = g(-\tfrac{T}{2})+h(-\tfrac{T}{2}+T)\\ &= g(\tfrac{T}{2})+h(\tfrac{T}{2}) = (\tfrac{T}{2})^2\sin(\tfrac{T}{2}).\end{aligned}$$

Бидејќи $T \neq 0$ добиваме $\sin\frac{T}{2}=0$, т.е. постои $k \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$ таков што $T = 2k\pi$. Сега нека $x_0$ е таков што $\sin x_0 \neq 0$. Тогаш

$$\begin{aligned}g(x_0)+h(x_0) &= x_0^2\sin x_0 \text{ и}\\ h(x_0)+g(x_0+T) &= h(x_0+T)+g(x_0+T)\\ &= (x_0+T)^2\sin(x_0+T) = (x_0+T)^2\sin x_0.\end{aligned}$$

Од последните две равенства имаме

$$((x_0+T)^2 - x_0^2)\sin x_0 = g(x_0+T)-g(x_0)\,. \tag{1}$$

Од друга страна

$$\begin{aligned}g(-x_0)+h(-x_0) &= -x_0^2\sin x_0 \text{ и}\\ h(-x_0)+g(-x_0-T) &= h(-x_0-T)+g(-x_0-T)\\ &= (-x_0-T)^2\sin(-(x_0+T)) = -(x_0+T)^2\sin x_0.\end{aligned}\;.$$

Затоа

$$-((x_0+T)^2 - x_0^2)\sin x_0 = g(-x_0-T)-g(-x_0) = g(x_0+T)-g(x_0)\,. \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува $(x_0+T)^2 - x_0^2 = 0$ и затоа $x_0 = -\frac{T}{2}$, односно $\sin x_0 = -\sin\frac{T}{2} = 0$, што противречи на $\sin x_0 \neq 0$, па затоа не постојат функции $g$ и $h$ со саканото својство.

18. Неконстантните функции $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ го задоволуваат условот

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y),\ x, y \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Ако $f$ е периодична, тогаш и $g$ е периодична. Докажи!

**Решение.** Нека $T$ е периода на функцијата $f$. Тогаш

$$\begin{aligned}f(x+y) &= f(x+y+T) = f(x)f(y+T) - g(x)g(y+T)\\ &= f(x)f(y) - g(x)g(y+T).\end{aligned} \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува дека $g(x)g(y) = g(x)g(y+T)$, за секој $x \in \mathbf{R}$ и како функцијата $g$ не е константна, добиваме $g(y+T) = g(y)$, за секој $y \in \mathbf{R}$.

19. Ако постојат функции $f, g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такви што

$$f(g(x)) + f(h(x)) = g(x)\text{ , за секој } x \in \mathbf{R},$$

докажи дека постои функција $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ таква што

$$F(g(x)) + F(h(x)) = h(x)\,.$$

**Решение.** Да ја разгледаме функцијата $F(x) = x - f(x)$. Имаме

$$F(g(x)) = g(x) - f(g(x)) \text{ и } F(h(x)) = h(x) - f(h(x))\,,$$

па затоа

$$\begin{aligned}F(g(x)) + F(h(x)) &= g(x) - f(g(x)) + h(x) - f(h(x))\\ &= g(x) + h(x) - [f(g(x)) + f(h(x))]\end{aligned}$$

$$=g(x)+h(x)-g(x)=h(x).$$

20. Дали постојат функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што за секој реален број $x$ важи $g(x)=g(-x)$ и $x=f([x])+g(x)$?

**Решение.** Ако во равенството $x=f([x])+g(x)$ замениме $-x$ за $x$ добиваме $-x=f([-x])+g(-x)=f([-x])+g(x)$, т.е. $x=-f([-x])-g(x)$. Според тоа

$$2x=f([x])-f([-x]). \tag{1}$$

Ако во (1) ставиме $x=\frac{1}{2}$ добиваме $1=f(0)-f(-1)$, а за $x=\frac{1}{3}$ добиваме $\frac{2}{3}=f(0)-f(-1)$, што е противречност. Значи, не постојат функции со бараните својства.

21. Докажи дека не постои функција $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ таква да

$$(f(x))^2\geq f(x+y)(f(x)+y).$$

**Решение.** Нека претпоставиме дека постои функција која ги задоволува условите на задачата и даденото неравенство да го запишеме во обликот

$$f(x)-f(x+y)\geq\frac{f(x)y}{f(x)+y}.$$

Ќе докажеме дека $f(x)-f(x+1)\geq\frac{1}{2}$, за секој $x>0$ Јасно, функцијата строго монотоно опаѓа. Фиксираме $x>0$ и наоѓаме природен број $n$ таков да $nf(x+1)\geq 1$. Тогаш за секој $k=0,1,2,...,n-1$ имаме

$$f(x+\tfrac{k}{n})-f(x+\tfrac{k+1}{n})\geq\frac{f(x+\frac{k}{n})\frac{1}{n}}{f(x+\frac{k}{n})+\frac{1}{n}}\geq\frac{1}{2n}.$$

Ако ги собереме овие $n$ неравенства, добиваме $f(x)-f(x+1)\geq\frac{1}{2}$.

Сега, нека $m$ е природен број таков што $m\geq 2f(x)$. Тогаш

$$f(x)-f(x+m)=\sum_{i=0}^{m-1}(f(x+i)-f(x+i+1))\geq\frac{m}{2}\geq f(x),$$

што е противречност, бидејќи $f(x+m)>0$.

22. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е непрекината функција. Дали постојат непрекинати функции $g,h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да

$$f(x)=g(x)\sin x+h(x)\cos x\text{, за секој } x\in\mathbf{R}.$$

**Решение.** Да, такви се функциите $g(x)=f(x)\sin x$ и $h(x)=f(x)\cos x$, $x\in\mathbf{R}$.

23. Дали постојат функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $f(g(x))=x^2$ и $g(f(x))=x^3$?

**Решение.** Не постојат. Од второто равенство добиваме

$$f(-1)=f(g(f(-1)))=f^2(-1),$$

$$f(0)=f(g(f(0)))=f^2(0),$$

$$f(1)=f(g(f(1)))=f^2(1).$$

Тогаш секој од броевите $f(-1), f(0), f(1)$ е еднаков на 0 или 1. Значи, постојат $a \neq b$ такви да $f(a)=f(b)$. Но, тогаш од $g(f(a))=g(f(b))$ следува $a^3=b^3$, т.е. $a=b$, што е противречност.

24. Дали постојат функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $f(g(x))=x^2$ и $g(f(x))=x^4$?

**Решение.** Постојат. Пример на такви функции се

- за $x>1$, $f(x)=2^{2^{\log_4\log_4 x}}$, $g(x)=4^{4^{\log_2\log_2 x}+1}$,
- за $x=1$, $f(1)=g(1)=1$,
- за $0<x<1$, $f(x)=\frac{1}{f(x^{-2})}$, $g(x)=\frac{1}{g(x^{-1})}$,
- за $x=0$, $f(0)=g(0)=0$ и
- за $x<0$, $f(x)=f(-x), g(x)=g(-x)$.

25. Докажи дека не постојат функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што за секој реален број $x$ важи

$$x^2=f([x])+h(\{x\}). \qquad (1)$$

**Решение.** Нека претпоставиме дека функциите $f(x)$ и $h(x)$ се такви што важи (1). Со замена за $x=0$ добиваме $f(0)+h(0)=0$. Нека $h(0)=a$. Тогаш $f(0)=-a$. За $x=[t], t\in\mathbf{R}$ имаме $[t]^2=f([t])+h(0)=f([t])+a$. Ако во (1) ставиме $x=\{t\}, t\in\mathbf{R}$ добиваме $\{t\}^2=f(0)+h(\{t\})=-a+h(\{t\})$. Ако ги собереме последните две равенства и го земеме предвид (1) добиваме

$$[t]^2+\{t\}^2=f([t])+a-a+g(\{t\})=f([t])+h(\{t\})=t^2,$$

т.е. $t^2=[t]^2+\{t\}^2$, за секој $t\in\mathbf{R}$, што не е можно. Од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

26. Дали постои функција $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ таква што

а) постои $M>0$ таков што $|f(x)|\leq M$, за секој $x\in\mathbf{R}$,

б) $f(1)=1$ и

в) ако $x\neq 0$, тогаш $f(x+\frac{1}{x^2})=f(x)+[f(\frac{1}{x})]^2$?

**Решение.** Ќе покажеме дека не постои функција $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ која ги задоволува бараните услови.

Нека претпоставиме дека функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ги задоволува условите на задачата. Според а) множеството $\{f(x)\,|\,x\in\mathbf{R}\}$ е ограничено од горе. Нека со $c$ ја означиме најмалата горна граница на множеството $\{f(x)\,|\,x\in\mathbf{R}\}$. Од

$$f(2)=f(1+\tfrac{1}{1^2})=f(1)+[f(1)]^2=2$$

следува дека $c \geq 2$. Понатаму, бидејќи $c$ е најмалата горна граница за множеството $\{f(x) \,|\, x \in \mathbf{R}\}$, добиваме дека постои низа реални броеви $x_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ таква што $f(x_k) \geq c - \frac{1}{k}$, за $k = 1, 2, 3, \ldots$. Тогаш

$$c \geq f(x_k + \tfrac{1}{x_k^2}) = f(x_k) + [f(\tfrac{1}{x_k})]^2 \geq c - \tfrac{1}{k} + [f(\tfrac{1}{x_k})]^2,$$

па затоа $[f(\frac{1}{x_k})]^2 \leq \frac{1}{k}$, односно $f(\frac{1}{x_k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ и $f(\frac{1}{x_k}) \geq -\frac{1}{\sqrt{k}}$. Исто така

$$c \geq f(x_k^2 + \tfrac{1}{x_k}) = f(\tfrac{1}{x_k}) + [f(x_k)]^2 \geq -\tfrac{1}{\sqrt{k}} + (c - \tfrac{1}{k})^2.$$

Значи,

$$\tfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \tfrac{1}{\sqrt{k}} - \tfrac{1}{k^2} \geq c(c - 1 - \tfrac{2}{k}) \geq 2(1 - \tfrac{2}{k}), \text{ за секој } k \in \mathbf{N}.$$

Но, ако $k \geq 4$, тогаш $\frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{2}$ и $2(1 - \frac{2}{k}) \geq 1$, што е противречност.

27. Дали постои функција $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ која ги задоволува условите

*i)* $f(x) < x$, за секој $x \in \mathbf{R}$,

*ii)* секој реален број $t$ припаѓа на најмногу конечно многу интервали од облик $(f(x), x)$, за $x \in \mathbf{R}$.

**Решение.** Избираме произволен број $a_1$. Од условот следува дека постои $b_1 > a_1$ таков што $f(x) \in (a_1, b_1)$, кога $x \in (a_1, b_1)$. Ставаме $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Тогаш постои $b_2$ таков што $f(x) \in (a_2, b_2)$, кога $x \in (a_2, b_2)$. Ставаме $a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$ итн. Бидејќи $|b_i - a_i| \to 0$, кога $i \to \infty$ добиваме дека постои еден и само еден $t \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ и тогаш за секој $i$ важи $a_i < f(t) < t < b_i$, што е противречност.

28. Дали постојат функции $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такви да за секој $x \in \mathbf{R}$ важи

$$g(x) = g(-x), \;\; x = f([x]) + g(x).$$

**Решение. Прв начин.** Нека претпоставиме дека постојат функции со саканите својства. Ако ставиме $x = 0$ добиваме $0 = f(0) + g(0)$. Понатаму, ако $x = \alpha \in [0,1)$, тогаш $[\alpha] = 0$, па затоа

$$\alpha = f(0) + g(\alpha). \qquad (1)$$

Ако земеме $x = -\alpha$, каде $\alpha \in [0,1)$, тогаш $[\alpha] = -1$, па затоа

$$-\alpha = f(-1) + g(-\alpha). \qquad (2)$$

Од (1) и (2) и условот $g(\alpha) = g(-\alpha)$ следува $2\alpha = f(0) - f(-1)$, што не е можно за секој $\alpha \in [0,1)$. Според тоа, не постојат функции $f$ и $g$ со саканите својства.

**Втор начин.** Ако во равенството $x = f([x]) + g(x)$ замениме $-x$ за $x$ добиваме

$$-x = f([-x]) + g(-x) = f([-x]) + g(x), \text{ т.е. } x = -f([-x]) - g(x).$$

Според тоа

$$2x = f([x]) - f([-x]) . \qquad (1)$$

Ако во (1) ставиме $x = \frac{1}{2}$ добиваме $1 = f(0) - f(-1)$, а за $x = \frac{1}{3}$ добиваме $\frac{2}{3} = f(0) - f(-1)$, што е противречност. Значи, не постојат функции со бараните својства.

29. Дали постои непрекината функција $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ таква да $f(f(x)) = e^{-x}$, за секој $x \in \mathbf{R}$ ?

**Решение.** Ако $f(x) = f(y)$, тогаш $e^{-x} = f(f(x)) = f(f(y)) = e^{-y}$, па затоа $x = y$, што значи дека функцијата $f$ е инјекција. Но, непрекината инјекција е монотона функција (зошто?). Понатаму, композиција на монотоно растечки функции и композиција на монотоно опаѓачки функции е монотоно растечка функција, па затоа функцијата $f(f(x))$ монотоно расте. Но, функцијата $e^{-x}$ монотоно опаѓа, па затоа не постои функција $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ таква да $f(f(x)) = e^{-x}$, за секој $x \in \mathbf{R}$ .

30. Дали постои функција $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ која ги задоволува условите

*i)* $f(x) < x$, за секој $x \in \mathbf{R}$,

*ii)* секој реален број $t$ припаѓа на најмногу конечно многу интервали од облик $(f(x), x)$, за $x \in \mathbf{R}$.

**Решение.** Избираме произволен број $a_1$. Од условот следува дека постои $b_1 > a_1$ таков што $f(x) \in (a_1, b_1)$, кога $x \in (a_1, b_1)$. Ставаме $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Тогаш постои $b_2$ таков што $f(x) \in (a_2, b_2)$, кога $x \in (a_2, b_2)$. Ставаме $a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$ итн. Бидејќи $|b_i - a_i| \to 0$, кога $i \to \infty$ добиваме дека постои еден и само еден $t \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$ и тогаш за секој $i$ важи $a_i < f(t) < t < b_i$, што е противречност.

31. За функцијата $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ важи

1) $f(x) \le x$, за секој $x \in \mathbf{R}$ и

2) $f(x + y) \le f(x) + f(y)$, за секои $x, y \in \mathbf{R}$.

Докажи дека $f(x) = x$, за секој $x \in \mathbf{R}$ .

**Решение.** Од $f(0+0) \le f(0) + f(0)$ следува $2f(0) \ge f(0)$, т.е. $f(0) \ge 0$ . Понатаму, од $f(x + (-x)) \le f(x) + f(-x)$ добиваме

$$f(x) \ge f(0) - f(-x) \ge 0 - f(-x) \ge -(-x) = x,$$

што заедно со условот 1) дава $f(x) = x$ .

32. Нека $f : [0,1] \to [0,1]$ е непрекината функција која ги задоволува условите

1) $f(0) = 0,\ f(1) = 1$,

2) $f^n(x) = (f \circ f \circ ... \circ f)(x) = x$, за секој $x \in [0,1]$.

Докажи дека $f(x)=x$, за секој $x\in[0,1]$.

**Решение.** Функцијата $f$ е инјекција, бидејќи од $f(x)=f(y)$ следува

$$x=f^n(x)=f^{n-1}(f(x))=f^{n-1}(f(y))=f^n(y)=y.$$

Функцијата $f$ строго монотоно расте, бидејќи ако имаме $x<y$ и $f(x)\ge f(y)$, тогаш од непрекинатоста на $f$ следува дека постои $z\in[0,x]$ таков што $f(z)=f(y)$, што противречи на инјективноста на $f$. Од монотоноста на $f$ имаме:

- ако $x<f(x)$, тогаш $x<f(x)<f^2(x)<...<f^n(x)=x$, што е противречност,
- ако $x>f(x)$, тогаш $x>f(x)>f^2(x)>...>f^n(x)=x$, што е противречност.

Конечно од претходно изнесеното следува $f(x)=x$, за секој $x\in[0,1]$.

33. Нека за функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ важи

$$f(x+y)\le yf(x)+f(f(x)),\text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}. \qquad (1)$$

Докажи дека $f(x)=0$, за секој $x\le 0$.

**Решение.** Нека $a,b\in\mathbf{R}$. Ако во (1) ставиме $x=a, y=f(b)-a$ добиваме $f(f(b))-f(f(a))\le f(a)f(b)-af(a)$. Ако ги замениме местата на $a$ и $b$ и ги собереме добиените неравенки наоѓаме $af(a)+bf(b)\le 2f(a)f(b)$. Последното неравенство е точно за секои $a,b\in\mathbf{R}$, па ако ставиме $b=2f(a)$ добиваме наоѓаме $af(a)\le 0$, што значи дека $f(a)\ge 0$, за $a<0$.

Ако $f(x_0)>0$ за некој $x_0$, со замена $x=x_0$ во (1) добиваме дека е точно неравенството $f(x_0+y)\le yf(x_0)+f(f(x_0))$. Десната страна на последното неравенство е линеарна функција по $y$, со позитивен водечки член, па затоа $f$ прима и негативни вредности во негативните точки, што не е можно, па затоа $f(x)\le 0$, за секој $x$. Според тоа, $f(x)=0$ за $x<0$. Ако во (1) ставиме $x<0$ и $y=0$, добиваме $0=f(x)\le f(f(x))-f(0)$, а бидејќи $f(0)\le 0$, заклучуваме дека $f(0)=0$.

34. Низата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е определена со рекурентната формула

$$\tfrac{1}{2}<x_0<1,\ x_{n+1}=x_n(2-x_n),\ n\in\mathbf{N}_0.$$

Докажи дека за секој $n\in\mathbf{N}_0$ важи

$$1-2^{-2^n}<x_n<x_{n+1}^2<1.$$

**Решение.** Функцијата $f(x)=x(2-x)$ монотоно расте на интервалот $[\frac{1}{2},1]$ и како $x_0\in[\frac{1}{2},1]$ следува дека $x_0<f(x_0)<1$, т.е. $\frac{1}{2}<x_0<x_1<1$. Оттука со индукција лесно се докажува дека за секој $n\in\mathbf{N}_0$ важи $\frac{1}{2}<x_n<x_{n+1}<1$. Навистина ако претходните неравенства се точни за некој $n\in\mathbf{N}_0$, тогаш од монотоноста на функцијата $f$ следува дека $\frac{1}{2} < f(x_n) < f(x_{n+1}) < 1$, т.е. $\frac{1}{2} < x_{n+1} < x_{n+2} < 1$.

Неравенството $1-2^{-2^n} < x_n$ исто така ќе го докажеме со индукција. Тоа важи за $n=0$, а ако важи $1-2^{-2^n} < x_n$, за секој $n \in \mathbf{N}_0$, тогаш

$$x_{n+1} = f(x_n) > f(1-2^{-2^n}) = (1-2^{-2^n})(1+2^{-2^n}) = 1-2^{-2^{n+1}} .$$

Останува уште да докажеме дека $x_n < x_{n+1}^2$, што последователно е еквивалентно со

$$x_n < x_n^2(2-x_n^2),$$
$$x_n^3 - 4x_n^2 + 4x_n - 1 > 0,$$
$$(1-x_n)(3x_n - 1 - x_n^2) > 0,$$
$$3x_n - 1 - x_n^2 > 0.$$

Последното неравенство се добива со собирање на очигледните неравенства

$$2x_n - 1 > 0,\ \ x_n - x_n^2 > 0 .$$

35. Дадена е функцијата $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ за која важи

а) $f(x) \ge 0$, за секој $x \in [0,1]$,

б) $f(1) = 1$

в) ако $x_1, x_2 \in [0,1]$ и $x_1 + x_2 \le 1$, тогаш

$$f(x_1) + f(x_2) \le f(x_1 + x_2).$$

Докажи дека $f(x) \le 2x$, за секој $x \in [0,1]$ .

**Решение.** Забележуваме дека за $x_1 = x_2 = 0$ од неравенството под в) следува дека $2f(0) \le f(0)$, т.е. $f(0) \le 0$. Од тука и од а) следува дека $f(0) = 0$, значи неравенството $f(x) \le 2x$ важи за $x = 0$.

Ако во в) ставиме $x_1 = x,\ x_2 = 1-x$, добиваме

$$f(x) \le f(x) + f(1-x) \le f(x+1-x) = f(1) = 1,$$

што покажува дека $f(x) \le 1$, за секој $x \in [0,\ 1]$.

Нека сега $x \in (0,\ \frac{1}{2}]$. Тогаш, $2x \in (0,\ 1]$, па од в) за $x_1 = x_2 = x$ следува дека $2f(x) \le f(2x)$, односно

$$\frac{f(x)}{x} \le \frac{f(2x)}{2x}, \text{ за секој } x \in (0,\ \tfrac{1}{2}]. \qquad (1)$$

За да го докажеме неравенството $f(x) \le 2x$, за $x \in (0,\ 1]$, прво да забележиме дека секој $x \in (0,\ 1]$ припаѓа во некој од полуотворените интервали од видот $(2^{-n-1}, 2^{-n}]$, каде $n = 0, 1, 2, \dots$.

Ако $x \in (\frac{1}{2},\ 1]$, т.е. ако $n = 0$, тогаш $\frac{f(x)}{x} \le \frac{1}{x} < 2$, затоа што $f(x) \le 1$ и $x > \frac{1}{2}$. И тогаш, бараното неравенство важи.

Нека $x \in (0, \frac{1}{2}]$, т.е. нека $n \ge 1$. Тогаш,

$$x < 2x < 2^2 x < \cdots < 2^{n-1} x \le \tfrac{1}{2} < 2^n x,$$

за некој $n \in \mathbf{N}$. Тогаш, според (1)

$$\frac{f(x)}{x} \le \frac{f(2x)}{2x} \le \cdots \le \frac{f(2^{n-1}x)}{2^{n-1}x} \le \frac{f(2^n x)}{2^n x} < 2,$$

при што последното неравенство во претходната низа неравенства важи затоа што во неа $2^n x > \frac{1}{2}$, а во тој случај веќе покажавме дека важи бараното неравенство. Со тоа, тврдењето на задачата е докажано.

36. Нека $G$ е непразно множество реални функции од облик $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a \ne 0$, кои ги задоволуваат условите:

$1^\circ$ ако $f, g \in G$, тогаш $g \circ f \in G$, каде $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$2^\circ$ ако $f = ax + b$, тогаш инверзната функција $f^{-1} \in G$, каде

$$f^{-1}(x) = \tfrac{x-b}{a};$$

$3^\circ$ за секој $f \in G$ постои $x_f$, таков што $f(x_f) = x_f$.

Докажи дека постои $k \in \mathbf{R}$ таков што $f(k) = k$ за секоја $f \in G$.

**Решение.** Ако функцијата $f(x) = x + b$ припаѓа на множеството $G$, тогаш од $2^\circ$ имаме $b = 0$, т.е. тогаш $f(x) = x$. Затоа можеме да претпоставиме дека постојат барем две функции $f_1(x) = a_1 x + b_1$ и $f_2(x) = a_2 x + b_2$, такви што $a_1 \ne 1$ и $a_2 \ne 1$. Тогаш, $x_{f_1} = \frac{b_1}{1-a_1}$ и $x_{f_2} = \frac{b_2}{1-a_2}$.

Од $1^\circ$ и $2^\circ$ имаме $g = f_1 \circ f_2 \in G$ и $h = f_2 \circ f_1 \in G$ и $g \circ h^{-1} \in G$. Според тоа,

$$g(x) = a_1(a_2 x + b_2) + b_1,$$
$$h(x) = a_2(a_1 x + b_1) + b_2,$$
$$h^{-1}(x) = \tfrac{x - a_2 b_1 - b_2}{a_1 a_2}, \ (a_1 a_2 \ne 0)$$
$$g \circ h^{-1}(x) = x + [(a_1 b_2 + b_1) - (a_2 b_1 + b_2)].$$

Бидејќи $g \circ h^{-1} \in G$ и бидејќи коефициентот пред $x$ во $g \circ h^{-1}$ е 1, добиваме дека $(a_1 b_2 + b_1) - (a_2 b_1 + b_2) = 0$, т.е. $x_{f_1} = \frac{b_1}{1-a_1} = \frac{b_2}{1-a_2} = x_{f_2}$, што и требаше да се докаже.

37. За секој реален број $x_1$ дефинирана е низа $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ со

$$x_{n+1} = x_n(x_n + \tfrac{1}{n}), \text{ за секој } n \ge 1.$$

Докажи дека постои еден и само еден број $x_1$ за кој

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1, \text{ за секој } n \ge 1.$$

**Решение.** Дефинираме низа функции со

$$f_1(t)=t\,,\quad f_{n+1}(t)=f_n(t)(f_n(t)+\tfrac{1}{n}),\qquad n\geq 1.$$

Доволно е да докажеме дека постои еден и само еден број $a>0$ таков што

$$0<f_n(a)<f_{n+1}(a)<1\text{, за секој } n\in\mathbf{N} \qquad (1)$$

односно

$$1-\tfrac{1}{n}<f_n(a)<1\text{, кога } n\geq 1 \qquad (2)$$

Секоја од функциите $f_n$ е полином со позитивни коефициенти, па затоа таа монотоно расте на интервалот $(0,+\infty)$.

Дефинираме низи $s_n$ и $t_n$

$$f_n(s_n)=1-\tfrac{1}{n},\qquad f_n(t_n)=1 \qquad (3)$$

Јасно е дека $t_n\leq 1$, бидејќи ако $t_n>1$, тогаш

$$f_1(n)>1,\,...\,,\;f_n(t_n)>1,$$

што противречи на (3). Исто така и $s_n\geq 1-\frac{1}{n}$, бидеј ако $s_n<1-\frac{1}{n}$, тогаш

$$f_1(s_n)=s_n<1-\tfrac{1}{n},$$
$$f_2(s_n)=f_1(s_n)[f_1(s_n)+\tfrac{1}{n}]=(s_n+\tfrac{1}{n})s_n<1-\tfrac{1}{n}\,...,$$
$$f_n(s_n)<1-\tfrac{1}{n},$$

што повторно противречи на (3). Од монотоноста на функциите следува $t_n-s_n>0$, а од претходно изнесеното добиваме

$$0<t_n-s_n<\tfrac{1}{n}=f_n(t_n)-f_n(s_n) \qquad (4)$$

Понатаму, од

$$f_{n+1}(s_n)=f_n(s_n)(f_n(s_n)+\tfrac{1}{n})=1-\tfrac{1}{n}<1-\tfrac{1}{n+1}=f_{n+1}(s_{n+1})$$

и монотоноста на функцијата $f_{n+1}$ добиваме

$$s_n<s_{n+1}\text{, за секој } n\in\mathbf{N} \qquad (5)$$

и аналогно од

$$f_{n+1}(t_n)=f_n(t_n)(f_n(t_n)+\tfrac{1}{n})=1+\tfrac{1}{n}>1=f_{n+1}(t_{n+1})$$

добиваме

$$t_{n+1}<t_n\text{, за секој } n\in\mathbf{N}.$$

Значи, низата $s_n$ е монотоно растечка и е ограничена од горе, а низата $t_n$ е монотоно опаѓачка низа и ограничена од долу. Од (4) следува дека постојат границите

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}t_n=a\,. \qquad (6)$$

Ќе докажеме дека низата $x_n=f_n(a)$ ги има бараните својства. Од монотоноста на низите $s_n$ и $t_n$ и монотоноста на функциите $f_n(t)$ следува:

$x_n=f_n(a)>f_n(s_n)=1-\frac{1}{n}>0$,

$x_{n+1}=f_{n+1}(a)=f_n(a)(f_n(a)+\frac{1}{n})>f_n(a)(f_n(s_n)+1)=f_n(a)=x_n$ и

$x_n=f_n(a)<f_n(t_n)=1$.

Останува да докажеме дека постои единствена низа со овие својства. Да претпоставиме дека постои $b \neq a$ , таков да

$$x_1 = b\,,\ x_{n+1} = x_n(x_n + \tfrac{1}{n}) \text{ и } 0 < x_n < x_{n+1} < 1, \text{ за секој } n \geq 1.$$

Ако $b < a$, тогаш постои $s_n \in (b,a)$ и притоа $f_n(b) < f_n(s_n) = 1 - \frac{1}{n}$. Но, тогаш од $f_n(b) < f_{n+1}(b) = f_n(b)(f_n(b) + \frac{1}{n})$ и $f_n(b) > 0$ следува $f_n(b) > 1 - \frac{1}{n}$, што е противречност. Ако $b > a$, тогаш постои $t_n \in (a,b)$ за кое важи $f_n(t_n) = 1$. Но, тогаш $f_n(b) > f_n(t_n) = 1$, што противречи на $x_n = f_n(b) < 1$

38. Функцијата $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ го задоволува равенството

$$f(f(x)) + x = f(2x)\,, \text{ за секој } x \in \mathbf{R}^+ .$$

Докажи дека $f(x) \geq x$ , за секој $x \in \mathbf{R}^+$ .

**Решение.** Од $f(x) \geq 0$ следува $f(2x) = x + f(f(x)) \geq x$ , па затоа

$$f(x) \geq \tfrac{1}{2}x\,, \text{ за секој } x \in \mathbf{R}^+ . \qquad (1)$$

Дефинираме низа реални броеви $a_0, a_1, a_2, ...$ таква што $f(x) \geq a_n x$ , за секој $x \in \mathbf{R}^+$ и за секој $n \in \mathbf{N}$. Имаме $a_0 = \frac{1}{2}$. Од условот на задачата и од (2) добиваме

$$f(x) = f(f(\tfrac{x}{2})) + \tfrac{x}{2} \geq a_n f(\tfrac{x}{2}) + \tfrac{x}{2} \geq a_n^2 \tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{2} = \tfrac{a_n^2+1}{2}x\,,$$

што значи $a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2}$. Лесно се докажува дека $a_n \leq 1$, за секој $n \in \mathbf{N}$. Според тоа, разгледуваната низа е конвергентна и нејзината граница ја задоволува равенката $a = \frac{a^2+1}{2}$ , т.е. $a = 1$. Конечно,

$$f(x) \geq \lim_{n\to\infty} \tfrac{a_n^2+1}{2}x = x\,, \text{ за секој } x \in \mathbf{R}^+ .$$

39. Докажи дека множеството од сите реални броеви $x$ за кои важи

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

е унија од дисјунктни полуотворени интервали, со збир на должини 1988.

**Решение.** Ја разгледуваме функцијата

$$f(x) = \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} - \frac{5}{4}.$$

Задачата сега гласи: докажи дека множеството од сите решенија на неравенката $f(x) \geq 0$ е унија на дисјунктни полуотворени интервали, чиј збир на должини е 1988.

Графиците на поединечните собироци од $f(x)$ се хиперболи, т.е. кривите $y = \frac{k}{x-k}$ , $k = 1, 2, ..., 70$. Ако ги пресметаме границите на $f$ во бесконечност и во точките $1, 2, ..., 70$ заклучуваме:

1. $f$ строго монотоно опаѓа на секој од интервалите $(-\infty,1),(1,2),$ $(2,3),...,(69,70),(70,+\infty)$
2. $f(x)\to-\frac{5}{4}$, кога $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$;
3. $f(x)\to+\infty$, кога $x\to1,2,3,...,70$ од десно;
4. $f(x)\to-\infty$, кога $x\to1,2,3,...,70$ од лево.

Од овде следува дека постојат броеви $x_i, i=1,2,...,70$ такви што $x_i\in(i,i+1),$ $i=1,2,...,69$ и $x_{70}\in(70,+\infty)$ такви што

$$f(x)\geq0 \;\Leftrightarrow\; x\in(1,x_1]\cup(2,x_2]\cup...\cup(69,x_{69}]\cup(70,x_{70}]\ .$$

Останува уште да се докаже дека $\sum\limits_{i=1}^{70}(x_i-i)=1988$.

Броевите $x_1,x_2,...,x_{69},x_{70}$ се нули на функцијата $f$. Но, равенката $f(x)=0$ е еквивалентна со равенката $P(x)=0,$ каде $P$ е полиномот

$$P(x)=\prod_{j=1}^{70}(x-j)-\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70}k\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{70}(x-j)$$

Според Виетовите формули збирот $x_1+...+x_{70}$ ќе биде еднаков на коефициентот пред $x^{69}$ заемен со спротивен знак поделен со коефициентот пред највисокиот степен $x^{70}$. Тогаш добиваме

$$\sum_{i=1}^{70}x_i=-\sum_{i=1}^{70}(-i)-(-\frac{4}{5}\sum_{i=1}^{70}i)=\frac{9}{5}\sum_{i=1}^{70}i\,,$$

а за збирот на должините на интервалите $(i,x_i], i=1,2,...,70$ добиваме

$$\sum_{i=1}^{70}(x_i-i)=\sum_{i=1}^{70}x_i-\sum_{i=1}^{70}i=\frac{4}{5}\sum_{i=1}^{70}i=\frac{4}{5}\cdot\frac{70\cdot71}{2}=1988\,.$$

40. Нека $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ и $M\in\mathbf{R}$ се такви да

$$f(x)f(y)\leq y^2f(\tfrac{x}{2})+x^2f(\tfrac{y}{2}),$$

за секои $x\geq y\geq0$ и $|f(x)|\leq M$, за секој $x\in[0,1]$. Докажи дека $f(x)\leq x^2$, за секој $x\in[0,\infty)$.

**Решение.** За $x=y=0$ имаме $f(0)^2\leq0$, па затоа $f(0)=0$. За секој $x\in(0,1]$ земаме $y=x$ и последователно добиваме дека

$$f(x)^2\leq2x^2f(\tfrac{x}{2}),$$

$$\tfrac{1}{2x^2}f(x)^2\leq f(\tfrac{x}{2})\,.$$

Нека претпоставиме дека постои $z$, $z\in(0,\infty)$ таков да $f(z)>z^2$. Ќе докажеме дека

$$f(\tfrac{z}{2^n})>2^{2^n-2n-1}z^2,$$

за секој $n \in \mathbf{N}_0$. Јасно, неравенството важи за $n = 0$. Нека претпоставиме дека тоа важи за некој $n = k \geq 0$. За $n = k+1$ имаме

$$f(\tfrac{z}{2^{k+1}}) = f(\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{z}{2^k}) \geq \frac{1}{2(\frac{z}{2^k})^2}[f(\tfrac{z}{2^k})]^2 > \frac{2^{2k}}{2z^2}[2^{2^k-2k-1}z^2]^2 = 2^{2^{k+1}-2(k+1)-1}z^2 \ ,$$

па од принципот на математичка индукција следува дека тоа важи за секој $n \in \mathbf{N}_0$.

Понатаму, од $z > 0$ следува дека постои $k \in \mathbf{N}_0$ таков што $0 < \frac{z}{2^k} < 1$ и како $z^2 > 0$ и $M$ е фиксин број добиваме дека постои природен број $N \geq k$ таков што

$$2^{2^N-2N-1}z^2 > M \text{ , т.е. } f(\tfrac{z}{2^N}) > M \ ,$$

што противречи на претпоставката $|f(x)| \leq M$, за секој $x \in [0,1]$. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

41. Нека за функцијата $f:(0,\infty) \to (0,\infty)$ важи

$$f(xy) \leq f(x)f(y) \text{, за секои } x, y \in (0,\infty) . \qquad (1)$$

Докажи дека за секој позитивен реален број $x$ и за секој природен број $n$ важи

$$f(x^n) \leq f(x)f(x^2)^{\frac{1}{2}} ... f(x^n)^{\frac{1}{n}} .$$

**Решение.** Нека $F_n(x) = f(x)f(x^2)^{\frac{1}{2}} ... f(x^n)^{\frac{1}{n}}$. Со индукција ќе докажеме дека за секој $n$ важи $F_n(x) \geq f(x^n)$.

За $n = 1$ имаме $f(x) \geq f(x)$, т.е. неравенството е исполнето.

Нека претпоставиме дека за некој $n \geq 1$ важи $F_n(x) \geq f(x^n)$. Тогаш

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(x)^{n+1} &= F_n(x)^{n+1} f(x^{n+1}) = F_n(x)^n f(x^{n+1})F_n(x) \\
&= F_{n-1}(x)^n f(x^n) f(x^{n+1})F_n(x) \\
&= F_{n-1}(x)^{n-1} f(x^n) f(x^{n+1})F_n(x)F_{n-1}(x) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= f(x)f(x^2)...f(x^n)f(x^{n+1})F_n(x)F_{n-1}(x)...F_1(x) \\
&\geq f(x)f(x^2)...f(x^n)f(x^{n+1})f(x^n)...f(x^2)f(x) \geq \text{(од (1))} \\
&\geq f(xx^n)f(x^2x^{n-1})...f(x^{n-1}x^2)f(x^nx)f(x^{n+1}) = f(x^{n+1})^{n+1}
\end{aligned}$$

па затоа $F_{n+1}(x) \geq f(x^{n+1})$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека за секој $n$ важи $F_n(x) \geq f(x^n)$.

42. Нека $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и нека за секои $x, y \in \mathbf{R}$ важи

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y) .$$

Докажи дека, ако функцијата $f$ не е идентична на нула и ако $|f(x)|\leq 1$, за секој $x\in\mathbf{R}$, тогаш $|g(y)|\leq 1$, за секој $y\in\mathbf{R}$.

**Решение.** Нека $M=\sup|f(x)|$, т.е. нека $M$ е најмалиот од сите броеви $k$ за кои $|f(x)|\leq k$ за секој $x\in\mathbf{R}$. Бројот $M$ постои бидејќи $|f(x)|\leq 1$ и $M\neq 0$, бидејќи функцијата $f$ не е идентично еднаква на нула. Тогаш е исполнето

$$|2f(x)g(y)|=|f(x-y)+f(x+y)|\leq|f(x-y)|+|f(x+y)|\leq 2M\ ,$$

т.е.

$$|f(x)|\cdot|g(y)|\leq M\ ,\text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

Нека за некој $y_0$, $|g(y_0)|>1$. Тогаш за секој $x\in\mathbf{R}$ имаме

$$|f(x)|\leq\tfrac{M}{|g(y_0)|}<M\ ,$$

па според тоа $M$ не е супремум од $|f(x)|$, што противречи на претпоставката.

43. Дадени се функциите

$$f_n(x)=\tfrac{1-\cos x\cos 2x\ldots\cos nx}{x^2}\ ,\ n=1,2,3,\ldots.$$

a) Докажи дека за секој $n\in\mathbf{N}$ постои $\lim\limits_{x\to 0}f_n(x)=f_n$.

b) Најди релација меѓу $f_n$ и $f_{n-1}$.

c) Пресметај го $f_n$.

**Решение.** а) Да забележиме дека $f_1(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2$ и дека за $n>1$ важи

$$\begin{aligned}f_n(x)&=\tfrac{1-\cos x\cos 2x\ldots\cos nx}{x^2}=\tfrac{1-\cos nx+\cos nx-\cos x\cos 2x\ldots\cos nx}{x^2}\\&=\tfrac{1-\cos nx}{x^2}+\tfrac{1-\cos x\cos 2x\ldots\cos(n-1)x}{x^2}\cos nx\\&=\tfrac{n^2}{2}(\tfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\frac{nx}{2}})^2+f_{n-1}(x)\cos nx.\end{aligned}$$

Според тоа,

$$\lim_{x\to 0}f_1(x)=\tfrac{1}{2}(\tfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2=\tfrac{1}{2}\text{ и}$$

$$\lim_{x\to 0}f_n(x)=\tfrac{n^2}{2}\lim_{x\to 0}(\tfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\frac{nx}{2}})^2+\lim_{x\to 0}f_{n-1}(x)\cos nx=\tfrac{n^2}{2}+\lim_{x\to 0}f_{n-1}(x)\ ,$$

па од принципот на математичка индукција следува дека за секој $n\in\mathbf{N}$ постои $\lim\limits_{x\to 0}f_n(x)=f_n$.

b) Од решението под а) следува дека $f_n=\frac{n^2}{2}+f_{n-1}$.

c) Ако ги собереме равенствата

$$f_k=\tfrac{k^2}{2}+f_{k-1}\text{, за } k=2,3,4,\ldots,n$$

добиваме

$$f_n = f_1 + \tfrac{1}{2}(2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$$

44. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ се реални константи, $x$ е реална променлива и

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{\cos(a_2+x)}{2} + \frac{\cos(a_3+x)}{2^2} + \ldots + \frac{\cos(a_n+x)}{2^{n-1}}.$$

Ако $f(x_1) = f(x_2) = 0$, тогаш $x_1 - x_2 = m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$. Докажи!

**Решение.** Имаме

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos(a_i+x)}{2^{i-1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos[(a_i+x_1)+(x-x_1)]}{2^{i-1}} \\ &= \cos(x - x_1)\sum_{i=1}^{n} \frac{\cos(a_i+x_1)}{2^{i-1}} - \sin(x - x_1)\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin(a_i+x_1)}{2^{i-1}} \\ &= \cos(x - x_1)\, f(x_1) - \sin(x - x_1)\, f(\tfrac{\pi}{2} + x_1) \end{aligned}$$

Од условот на задачата имаме $f(x_1) = 0$ и

$$\begin{aligned} f(-a_1) &= \cos 0 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\cos(a_i - a_1)}{2^{i-1}} \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{1}{2^n} > 0 \end{aligned}.$$

Значи, $f(x) \not\equiv 0$ и затоа $f(\frac{\pi}{2} + x_1) \neq 0$. Но, $f(x_2) = 0$, па затоа

$$\sin(x_2 - x_1) = 0, \text{ т.е. } x_2 - x_1 = m\pi.$$

45. Нека $a, b, A, B \in \mathbf{R}$. Да ја разгледаме функцијата

$$f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x$$

Докажи дека, ако $f(x) \geq 0$, за секој $x \in \mathbf{R}$, тогаш

$$a^2 + b^2 \leq 2 \text{ и } A^2 + B^2 \leq 1.$$

**Решение.** Функцијата $f(x)$ можеме да ја запишеме во обликот

$$f(x) = 1 - \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a\cos x}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b\sin x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) - \sqrt{A^2 + B^2}\left(\frac{A\cos 2x}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{B\sin 2x}{\sqrt{A^2+B^2}}\right),$$

односно во обликот

$$f(x) = 1 - \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \phi) - \sqrt{A^2 + B^2}\sin(2x + \psi),$$

каде што $\sin\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\psi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Нека $x_0 + \phi = \frac{\pi}{4}$, $x_1 + \phi = \frac{3\pi}{4}$. Тогаш

$$f(x_0) = 1 - \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{A^2 + B^2}\sin(\psi + \tfrac{\pi}{2} - 2\phi) \geq 0 \text{ и}$$

$$f(x_1) = 1 - \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{A^2 + B^2}\sin(\psi + \tfrac{3\pi}{2} - 2\phi) \geq 0.$$

Бидејќи третите собироци имаат различен знак (аргументите им се разликуваат за $\pi$) добиваме

$$1-\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq 0\text{, т.е. } a^2+b^2\leq 2.$$

Неравенството $A^2+B^2\leq 1$ се добива на сличен начин. Треба да се изберат $x_0$ и $x_1$ така што $2x_0+\psi=\frac{\pi}{2}$, $2x_1+\psi=\frac{5\pi}{2}$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

46. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и нека важи

$$f(xy)=f(x)f(y),\;\; f(x+y)=f(x)+f(y)\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

Ако постои $\theta\in\mathbf{R}$ таков што $f(\cos n\theta)$ е константа за секој $n\in\mathbf{N}$, докажи дека $f\equiv 0$ или $\theta=2k\pi$, за некој $k\in\mathbf{Z}$.

**Решение.** За $x=y=0$ добиваме $f(0)=f(0)+f(0)$, односно $f(0)=0$. Нека постои $x_0$ таков да $f(x_0)\neq 0$. Тогаш од $f(x_0)=f(x_0)f(1)$, па затоа $f(1)=1$, од што следува $f(n)=n$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Ако ставиме $y=-x$ добиваме $f(-x)=-f(x)$. Според тоа, $f(n)=n$, за секој $n\in\mathbf{Z}$. Нека $f(\cos n\theta)=c$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Тогаш од

$$c=f(\cos 2\theta)=f(2\cos^2\theta-1)=f(2)(f(\cos\theta))^2-f(1)=2c^2-1$$

и

$$c=f(\cos 3\theta)=f(\cos\theta\cos 2\theta-2\cos\theta(1-\cos^2\theta))=c^2-2c(1-c^2)$$

заклучуваме дека $c=1$. Бидејќи $\sin^2 n\theta=1-\cos^2 n\theta$ добиваме $f(\sin n\theta)=0$. Ако $\theta\neq 2k\pi$, за $k\in\mathbf{Z}$, тогаш $\sin\frac{\theta}{2}\neq 0$. Користејќи го идентитетот

$$2\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=\sin n\theta\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}+\cos n\theta-1,$$

добиваме $c=0$, што е противречност.

47. Нека $m=2k$ и $n$ се дадени природни броеви поголеми од 1 и нека функцијата $f:\mathbf{R}^+\cup\{0\}\to\mathbf{R}$ ги задоволува условите

1) За секои $x_i\in\mathbf{R}^+\cup\{0\}$ важи

$$f(\frac{x_1^m+x_2^m+...+x_n^m}{n})=\frac{f(x_1)^m+f(x_2)^m+...+f(x_n)^m}{n}.$$

2) $f(1986)\neq 1986$,

3) $f(1988)\neq 0$.

Докажи дека $f(1987)=1$.

**Решение.** Нека $x_i=x, i=1,2,...,n$. Од 1) следува $f(x^m)=(f(x))^m$, за секој $x\in\mathbf{R}^+\cup\{0\}$. Ако земеме $y=x-1, y_2=...=y_{n-1}=x\in\mathbf{N}, y_n=x+1$, добиваме

$$f(x)=\frac{f(x-1)+(n-2)f(x)+f(x+1)}{n},$$

односно

$$f(x+1)-f(x)=f(x)-f(x-1). \qquad (1)$$

Броевите $f(0), f(1), f(2),...$ формираат аритметичка прогресија. Од

$$f(0)=(f(0))^m \text{ и } f(1)=(f(1))^m$$

следува $f(0), f(1)\in\{0,1\}$. Ако ги земеме предвид условите 2) и 3) и $f(x^m)=(f(x))^m$ добиваме $f(0)=f(1)=1$. Конечно, од (1) следува дека $f(1987)=1$.

48. Нека $x\geq 1$ и $y\geq 1$ се такви реални броеви, што

$$a=\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1} \text{ и } b=\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}$$

се цели броеви со разлика поголема од $1$. Да се докаже дека $b=a+2$ и $x=y=\frac{5}{4}$.

**Решение.** Да ја разгледаме функцијата $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}$, дефинирана на $[1,+\infty)$. Лесно се гледа дека таа е строго монотоно растечка, од каде $f(x)\geq f(1)=\sqrt{2}$, за секој $x\geq 1$. Но,

$$b-a=\frac{2}{f(x)}+\frac{2}{f(y)}\leq 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<3.$$

Од друга страна $a$ и $b$ се цели броеви со разлика поголема од $1$, па како $b>a\geq 0$, добиваме $b-a\geq 2$. Значи, $b-a<3$, $b-a\geq 2$ и $a$ и $b$ се цели броеви, од што следува $b-a=2$.

Од досега изнесеното имаме $\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}=1$, т.е. $f(x)+f(y)=f(x)f(y)$. Понатаму без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $x\geq y\geq 1$. Оттука $1=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}\leq\frac{2}{f(y)}$ и $1=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}\geq\frac{2}{f(x)}$. Значи, $f(y)\leq 2=f(\frac{5}{4})$, т.е. $y\leq\frac{5}{4}$ и $f(x)\geq 2=f(\frac{5}{4})$ т.е. $x\geq\frac{5}{4}$. Од друга страна $f(y)\geq\sqrt{2}$ и значи $1=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}\leq\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{\sqrt{2}}$, т.е. $f(x)\geq 2+\sqrt{2}=f(3)$ и $x\leq 3$. Ги добиваме неравенствата $1\leq y\leq\frac{5}{4}\leq x\leq 3$. Со нивна помош заклучуваме дека

$$\begin{aligned}2&<\sqrt{\tfrac{5}{4}+1}+\sqrt{1+1}=b=\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}\\&=\sqrt{3+1}+\sqrt{\tfrac{5}{4}+1}<4\end{aligned},$$

т.е. $2<b<4$ и како $b$ е цел број заклучуваме дека $b=3$. Значи, $a=1$ и за $x$ и $y$ го добиваме системот

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=1\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3\end{cases}$$

Ако ги собереме добиените равенки добиваме $f(x)+f(y)=4$, па значи $f(x)f(y)=4$. Од

$$[f(x)-f(y)]^2=[f(x)+f(y)]^2-4f(x)f(y)=0$$

следува $f(y)=f(x)$ и како $f(x)$ е строго монотоно растечка функција добиваме $x=y$. Од неравенството $y\leq\frac{5}{4}\leq x$ заклучуваме $x=y=\frac{5}{4}$.

49. Нека $0<a<1$ и нека $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ е непрекината функција таква да $f(0)=0,\ f(1)=1$ и важи

$$f(\tfrac{x+y}{2})=(1-a)f(x)+af(y)\text{, за } 0\le x\le y\le 1. \qquad (1)$$

Пресметај $f(\frac{1}{7})$.

**Решение.** Ведностите на функцијата се еднозначно определени во точките од видот $\frac{k}{2^n}$, па заради непрекинатоста функцијата е еднозначно определена. Понатаму, ако $r$ и $s$ се две точки од наведениот облик од $[0,1]$, при што $r<s$, тогаш важи $f(r)<f(s)$. Оттука следува дека $f$ строго монотоно расте, па затоа таа е инјекција. Да ја разгледаме функцијата

$$g(x)=\frac{f(\frac{1}{8}+\frac{x}{8})-f(\frac{1}{8})}{f(\frac{1}{4})-f(\frac{1}{8})}.$$

Оваа функција е непрекината, важи $g(0)=0, g(1)=1$ и ја задоволува функционалната равенка (1). Според тоа $f(x)=g(x), x\in[0,1]$, па затоа $f(\frac{1}{7})=g(\frac{1}{7})$. Оттука лесно следува дека

$$f(\tfrac{1}{7})=\frac{a^3}{1-a^2+a^3}.$$

50. Нека $f:[0,1]\to[0,1]$ е непрекината функција. Докажи дека постои $x_0\in[0,1]$ таков што $f(x_0)=x_0$.

**Решение.** Ако $f(0)=0$ или $f(1)=1$, тогаш тврдењето е докажано. Затоа нека претпоставиме дека $f(0)>0$ и $f(1)<1$. Да ја разгледаме функцијата $g(x)=x-f(x)$. Јасно, $g$ е непрекината на $[0,1]$ и притоа важи $g(0)<0$ и $g(1)>0$. Според тоа, постои $x_0\in[0,1]$ таков, што $g(x_0)=0$, што значи дека постои $x_0\in[0,1]$ таков што $f(x_0)=x_0$.

51. Нека $f\in\mathbf{C}([0,1])$. Докажи дека постои $c\in[0,1]$ таков, што

$$(1-c)[f(c)]^2=c.$$

**Решение.** Да ја разгледаме функцијата $g:[0,1)\to\mathbf{R}$, дефинирана со

$$g(x)=\frac{x}{1-x}-[f(x)]^2.$$

Функцијата $g$ е непрекината $[0,1)$ и важи:

$$g(0)=-[f(0)]^2\le 0 \text{ и } \lim_{x\to 1^-}g(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{1-x}-[f(1)]^2=+\infty.$$

Според тоа, постои $a\in[0,1)$ таков, што $g(a)>0$. Ако $g(0)=0$, тогаш за $c=0$ важи

$$(1-c)[f(c)]^2=c,$$

а ако $g(0)<0$, тогаш постои $c\in[0,a]$ таков што $g(c)=0$, односно

$$(1-c)[f(c)]^2=c.$$

52. Нека $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ е непрекината функција и нека $f(-1)=f(1)$. Докажи дека постојат $x,y\in[-1,1]$ такви, што $|y-x|=1$ и $f(x)=f(y)$.

**Решение.** Да ја разгледаме функцијата $g:[-1,0]\to\mathbf{R}$ определена со равенството $g(x)=f(x+1)-f(x)$ Јасно, $g$ е непрекината на $[-1,0]$ и важи $g(-1)=f(0)-f(-1)=-g(0)$. Според тоа, или $g(-1)=0$ или $g(-1)$ и $g(0)$ се со различен знак, што значи дека во секој случај постои $x_0\in[-1,0]$ таков, што $g(x_0)=0$. Но, тогаш за $y_0=x_0+1$ важи $|y_0-x_0|=1$ и $f(x_0)=f(y_0)$.

53. Нека $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ е реална функција таква што равенката

$$f^n(x)=(f\circ f\circ...\circ f)(x)=x$$

има само едно решение $x_0\in[0,1]$, при што $n$ е фиксиран природен број. Тогаш $x_0$ е единствено решение и на равенката $f(x)=x$. Докажи!

**Решение.** Ако $f(x_0)=y_0\neq x_0$, тогаш

$$f^{n-1}(y_0)=f^{n-1}(f(x_0))=f^n(x_0)=x_0,$$

па затоа $f^n(y_0)=f(f^{n-1}(x_0))=f(y_0)=y_0$, па покрај $x_0$ и $y_0\neq x_0$ ќе биде решение на равенката $f^n(x)=x$. Значи, $f(x_0)=x_0$, што значи дека $x_0$ е решение на равенката $f(x)=x$.

Јасно, друго решение на равенката $f(x)=x$ не постои, бидејќи во тој случај тоа би било решение и на равенката $f^n(x)=x$.

54. Нека $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ е непрекината функција и $x_1,x_2,...,x_n\in[a,b]$. Докажи дека постои $x_0\in[a,b]$ таква што

$$f(x_0)=\tfrac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)].$$

**Решение.** Нека

$$f(x_i)=\min\{f(x_1),f(x_2),...,f(x_n)\},$$
$$f(x_j)=\max\{f(x_1),f(x_2),...,f(x_n)\}$$

Тогаш

$$f(x_i)\le\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\le f(x_j),$$

бидејќи $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)$ е аритметичка средина на броевите $f(x_1),f(x_2),...,$ $f(x_n)$. Нека е, на пример, $x_i\le x_j$. Бидејќи $f$ е непрекината на $[a,b]$ постои $x_0\in[x_i,x_j]$ таков што $f(x_0)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)$.

55. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е непрекината функција таква што $f(f(x))=x$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Тогаш постои $c\in\mathbf{R}$ таква што $f(c)=c$.

**Решение.** Функцијата $f$ е инјекција. Имено, ако $f(x)=f(y)$, тогаш

$$x=f(f(x))=f(f(y))=y.$$

Но, функцијата е непрекината и инјективна, па затоа таа е монотона, на пример, растечка.

Нека претпоставиме дека за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $x<f(x)$. Тогаш од условот и монотоноста на $f$ следува $f(x)<f(f(x))=x$, што е противречност. Според тоа, постои $c\in\mathbf{R}$ таков да $c\geq f(c)$. Но, сега имаме $c=f(f(c))\geq f(c)$, па затоа $f(c)=c$.

56. Нека $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ и $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ се непрекинати функции такви што $f(a)<g(a)$ и $f(b)>g(b)$. Докажи дека постои $c\in[a,b]$ таков што $f(c)=g(c)$.

**Решение.** Да ја разгледаме функцијата $h(x)=f(x)-g(x)$. За оваа функција важи

$$h(a)=f(a)-g(a)<0<f(b)-g(b)=h(b).$$

Но, функцијата $f$ е непрекината на $[a,b]$, па затоа постои $c\in[a,b]$ таков што $h(c)=0$, односно $f(c)=g(c)$.

57. Нека $a>1$. Докажи дека равенката $xa^x=1$ има барем еден позитивен корен помал од 1.

**Решение.** Да ја разгледаме функцијата

$$f(x)=xa^x-1,\ x\in[0,1].$$

За оваа функција важи $f(0)=-1<0<a-1=f(1)$. Но, функцијата $f$ е непрекината на интервалот $[0,1]$, па затоа постои $c\in(0,1)$ таков што $f(c)=0$, т.е. $ca^c=1$.

58. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е непрекината функција за која важи $0\leq f(x)\leq 2013$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Докажи дека во интервалот $[0,2]$ постои точка $c$ таква да $f(c)=c^{11}$.

**Решение.** Да ја разгледаме функцијата $g(x)=x^{11}-f(x)$. За оваа функција важи

$$g(0)=-f(0)\leq 0<2048-2013=2^{11}-f(2)=g(2),$$

па затоа постои $c\in[0,2]$ таков да $g(c)=0$, што значи $f(c)=c^{11}$.

59. Докажи дека равенката $e^{\frac{1}{x}}-x=0$ има барем едно позитивно решение.

**Решение.** Да ја разгледаме функцијата $f(x)=e^{\frac{1}{x}}-x$, на интервалот $[1,2]$. Дадената функција е непрекината на овој интервал и важи

$$f(1)=e-1>0>\sqrt{e}-2=f(2),$$

па затоа постои $x_0\in[1,2]$ таков, што $f(x_0)=0$, т.е. $e^{\frac{1}{x_0}}-x_0=0$.

60. Дадена е функцијата $f:[0,1]\to[0,1]$ таква што $0,1\in f([0,1])$ и за секои $x,y\in[0,1]$ важи

$$|f(x)-f(y)|\leq\frac{|x-f(x)|+|y-f(y)|}{2}. \qquad (1)$$

Докажи, дека постои единствена точка $x\in[0,1]$ таква што $f(x)=x$.

**Решение.** Од $0,1\in f([0,1])$ следува дека постојат $a,b\in[0,1]$ такви што $f(a)=0$ и $f(b)=1$. Со замена во (1) добиваме

$$2=2|f(a)-f(b)|\leq|a-0|+|b-1|\leq 2,$$

па затоа $a=1$ и $b=0$.

Ќе докажеме дека $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. Ако $f(\frac{1}{2})>\frac{1}{2}$, тогаш за $x=\frac{1}{2}$ и $y=1$ добиваме

$$2f(\tfrac{1}{2})=2|f(\tfrac{1}{2})-f(1)|\leq|\tfrac{1}{2}-f(\tfrac{1}{2})|+|1-f(1)|=f(\tfrac{1}{2})-\tfrac{1}{2}+1=f(\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{2},$$

т.е. $f(\frac{1}{2})\leq\frac{1}{2}$, што е противречност. Ако $f(\frac{1}{2})<\frac{1}{2}$, тогаш $x=\frac{1}{2}$ и $y=0$ добиваме

$$2(1-f(\tfrac{1}{2}))=2|f(\tfrac{1}{2})-f(0)|\leq|\tfrac{1}{2}-f(\tfrac{1}{2})|+|0-f(0)|=\tfrac{1}{2}-f(\tfrac{1}{2})+1=\tfrac{3}{2}-f(\tfrac{1}{2}),$$

т.е. $f(\frac{1}{2})\geq\frac{1}{2}$, што е противречност. Според тоа, $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. Ќе докажеме дека не постои точка $x\neq\frac{1}{2}$ таква што $f(x)=x$. Навистина, ако за некој $x\neq\frac{1}{2}$ важи $f(x)=x$, тогаш

$$0<2|x-\tfrac{1}{2}|=2|f(x)-f(\tfrac{1}{2})|\leq|x-f(x)|+|f(\tfrac{1}{2})-\tfrac{1}{2}|=0+0=0,$$

што е противречност.

61. За функцијата $f:[0,1]\to[0,1]$ определена е низа од функции $f_1(x)=f(x)$ и $f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$, за $x\in[0,1]$ и $n=1,2,3,\ldots$. За некој $n\in\mathbf{N}$ и за $x,y\in[0,1]$ е исполнето

$$|f_n(x)-f_n(y)|<|x-y|. \qquad (1)$$

Докажи дека постои единствен $x_0\in[0,1]$ таков што $f(x_0)=x_0$.

**Решение**. Дадениот услов означува дека за фиксниот природен број $n\in\mathbf{N}$ функцијата $f_n$ е непрекината на интервалот $[0,1]$. Навистина, ако низата точки $x_m, m=1,2,3,\ldots$ конвергира кон точката $x'$, тогаш за секој $\varepsilon>0$ постои $N$ таков да кога $m>N$ важи $|x_m-x'|<\varepsilon$. Но, тогаш од (1) следува дека

$$|f_n(x_m)-f_n(x')|<|x_m-x|'<\varepsilon,$$

т.е. низата $f(x_m), m=1,2,3,...$ конвергира кон точката $f(x')$, што значи дека функцијата $f$ е непрекината во точката $x'$. Но, $x'$ е произволна точка од $[0,1]$, па затоа таа е непрекината на $[0,1]$.

Понатаму, $g(x)=f_n(x)-x$ е разлика од непрекинати функции, па затоа таа е непрекината функција. За функцијата $g$ важи

$$g(0)=f_n(0)-0=f_n(0)\geq 0\,,\; g(1)=f_n(1)-1\leq 1-1=0\,.$$

и како а е непрекината постои $x_0\in[0,1]$ таков што $g(x_0)=0$, односно $f_n(x_0)=x_0$. Значи, функцијата $f_n:[0,1]\to[0,1]$ има фиксна точка. Ќе покажеме дека таа е фиксна точка и за $f$ и уште повеќе дека е единствена фиксна точка.

Нека претпоставиме дека $f(x_0)=x_1$ и $x_1\neq x_0$. Јасно е дека

$$f_n(x_1)=f_n(f(x_0))=f(f_n(x_0))=f(x_0)=x_1,$$

односно и $x_1$ е фиксна точка за $f_n$. Од друга страна

$$|x_0-x_1|=|f_n(x_0)-f_n(x_1)|<|x_0-x_1|,$$

што е противречност. Значи, $x_0=x_1$.

Ако претпоставиме дека постои и друга фиксна точка, различна од $x_0$, тогаш таа е фиксна точка и за $f_n$. Но, тогаш како и претходно ќе добиеме противречност со условот (1). Според тоа, $f$ има единствена фиксна точка.

62. Нека $f_i:[0,1]\to\mathbf{R}$, за $i=1,2,...,n$, $n>1$ се непрекинати функции такви што

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(0)<0 \text{ и } \sum_{i=1}^{n} f_i(1)>0\,. \tag{1}$$

Докажи дека постојат бесконечно многу $(n+1)-$ки $(h,x_1,x_2,...,x_n)$ такви што

$$h>0\,,\; x_2-x_1=x_3-x_2=...=x_n-x_{n-1}=h \text{ и } \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)=0\,.$$

**Решение.** За секој $0<h\leq\frac{1}{n}$ да ја разгледаме функцијата

$$g_h:[0,1-(n-1)h]\to\mathbf{R}\,,\; g_h(x)=f_1(x)+f_2(x+h)+...+f_n(x+(n-1)h)\,.$$

Од (1) и непрекинатоста на функциите $f_i$ на $[0,1]$, за $i=1,2,...,n$, следува дека постои $u\in(0,\frac{1}{n-1})$ таков што за $h\in(0,u)$ важи $g_h(0)<0$ и $g_h(1-(n-1)h)>0$. Но, функцијата $g_h$ е непрекината, па затоа постои $x_1^{(h)}\in[0,1-(n-1)h]$ таков што $g_h(x_1^{(h)})=0$. Ставаме $x_i^h=x_1^h+(i-1)h$, за $i=1,2,...,n$ и добиваме дека:

$$h>0\,,\; x_2^{(h)}-x_1^{(h)}=x_3^{(h)}-x_2^{(h)}=...=x_n^{(h)}-x_{n-1}^{(h)}=h \text{ и } \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^{(h)})=0\,.$$

Претходната конструкција е можна за секој $h\in(0,u)$ и вака конструираните $(n+1)-$ки реални броеви се меѓусебно различни, па затоа заклучуваме дека постојат бесконечно многу $(n+1)-$ки реални броеви со саканото својство.

63. Нека функцијата $f:[-1{,}1]\to\mathbf{R}$ е непрекината и нека $f(0)\neq 0$. Докажи дека постојат бесконечно многу тројки различни броеви $a,b,c\in[-1{,}1]$ такви, што

$$c-b=b-a \text{ и } (a+b+c)[f(a)+f(b)+f(c)]=af(a)+bf(b)+cf(c)\,.$$

**Решение.** Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $f(0)>0$. Од непрекинатоста на $f$ следува дека постои $u\in(0{,}1]$ таков, што $f(x)>0$ за секој $x\in(-u,u)$. Земаме произволен $h\in(0,\frac{u}{2})$ и ја разгледуваме функцијата $g_h:[-u,0]\to\mathbf{R}$, каде што

$$g_h(x)=(2x+3h)f(x)+(2x+2h)f(x+h)+(2x+h)f(x+2h)\,.$$

Јасно, $g_h:[-u,0]\to\mathbf{R}$ е непрекината функција и притоа важи $g_h(-u)<0$ и $g_h(0)>0$. Според тоа, постои $a_h\in[-u,0]$ таков, што $g_h(a_h)=0$. Тогаш, ако ставиме $b_h=a_h+h$ и $c\in(g(b_0),g(a_0))$ добиваме

$$(b_h+c_h)f(a_h)+(a_h+c_h)f(b_h)+(a_h+b_h)f(c_h)=0\,,$$

од што следува

$$(a_h+b_h+c_h)[f(a_h)+f(b_h)+f(c_h)]=a_hf(a_h)+b_hf(b_h)+c_hf(c_h)\,,$$

и притоа важи $c_h-b_h=b_h-a_h$.

Претходната конструкција е можна за секој $h\in(0,\frac{u}{2})$ и вака конструираните тројки реални броеви се меѓусебно се различни, па затоа заклучуваме дека постојат бесконечно многу тројки реални броеви со саканото својство.

64. Дали постои непрекината функција $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, која секоја своја вредност ја прима точно двапати.

**Решение.** Нека $f(a)=f(b)$ и $a<b$. На интервалот $[a,b]$ непрекинатата функција $f$ ја достигнува својата најмала и најголема вредност и притоа барем едната од нив се разликува од $f(a)$. Нека тоа е најголемата вредност, која е еднаква на $M$ и нека истата се добива за некој $c\in[a,b]$.

Според условите на задачата постои $d\neq c$ таков што $f(d)=M$. Нека претпоставиме дека $d\in[a,b]$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $c<d$. Сите вредности $f(x)$ на интервалот $[c,d]$ не се поголеми од $M$ и затоа најмалата вредност $m$ на функцијата $f(x)$ на интервалот $[c,d]$ е помала од $f(c)$ и истата се достигнува за некој $e\in[c,d]$. Но, тоа значи дека на секој од интервалите $[a,c],[c,e]$ и $[e,d]$ функцијата ја прима секоја вредност меѓу $m$ и $M$, што противречи на условот на задачата.

Ако пак $d\notin[a,b]$, $b<d$, тогаш функцијата на секој од интервалите $[a,c]$, $[c,b]$ и $[b,d]$ ја прима секоја ведност меѓу $f(a)$ и $M$, што повторно противречи на условот на задачата.

Аналогно, ако $d\notin[a,b].\,d<a$, тогаш функцијата на секој од интервалите $[d,a],[a,c]$ и $[c,b]$ ја прима секоја од вредностите меѓу $f(a)$ и $M$, што повторно противречи на условот на задачата.

Значи, функција со бараното својство не постои.

65. Нека $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ е функција за која важи

$$f(0)=f(1)=0 \qquad (1)$$

$$f(\tfrac{x+y}{2})\leq f(x)+f(y)\text{, за секој } x\in[0,1]. \qquad (2)$$

Докажи дека $f(x)\geq 0$, за секој $x\in[0,1]$ и дека функцијата $f(x)$ има бесконечно многу нули.

**Решение.** Ако во (2) ставиме $x=y$ добиваме

$$f(x)=f(\tfrac{x+x}{2})\leq f(x)+f(x)=2f(x),$$

т.е. $f(x)\geq 0$, за секој $x\in[0,1]$.

Ќе докажеме дека $f(\frac{1}{2^n})=0$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Ако во (2) ставиме $x=1,\ y=0$ и го искористиме (1) добиваме

$$f(\tfrac{1}{2})=f(\tfrac{1+0}{2})\leq f(1)+f(0)=0$$

и како $f(x)\geq 0$, за секој $x\in[0,1]$ добиваме дека $f(\frac{1}{2})=0$, што значи дека тврдењето важи за $n=1$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n=k$, т.е. дека $f(\frac{1}{2^k})=0$. За $n=k+1$ од (1), (2) и од индуктивната претпоставка при $x=\frac{1}{2^k}$, $y=0$ добиваме

$$f(\tfrac{1}{2^{k+1}})=f(\tfrac{\frac{1}{2^k}+0}{2})\leq f(\tfrac{1}{2^k})+f(0)=0$$

и како $f(x)\geq 0$, за секој $x\in[0,1]$, следува дека $f(\frac{1}{2^{k+1}})=0$. Според тоа, тврдењето важи и за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n\in\mathbf{N}$, што значи дека $f(x)$ има бесконечно многу нули.

66. Нека $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ се функции, различни од константа, за кои важи

$$\begin{aligned} f(x+y)&=f(x)g(y)+f(y)g(x),\\ g(x+y)&=g(x)g(y)-f(y)f(x), \end{aligned} \qquad (1)$$

за секои $x,y\in\mathbf{R}$. Најди ги сите вредности на $f0)$ и $g(0)$.

**Решение.** Ако во (1) замениме $x=y=0$ добиваме $f(0)=2f(0)g(0)$ и $g(0)=(g(0))^2-(f(0))^2$. Ако $f(0)\neq 0$, тогаш $g(0)=\frac{1}{2}$. Сега, од второто равенство добиваме $(f(0))^2=-\frac{1}{4}$, што е противречност. Значи, $f(0)=0$. Повторно од второто равенство следува $g(0)=0$ или $g(0)=1$. Ако $g(0)=0$, тогаш $f(x)=f(0)\cdot 0+g(x)\cdot 0=0$, што е противречност. Значи, $g(0)=1$.

Пример на неконстантни функции кои ги задоволуваат условите (1) се $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\cos x$.

67. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ за кои важи

1) $f(x)f(y)=f(x-y),$ за секои $x,y\in\mathbf{R}$ и

2) $f(1993)=1$.

**Решение.** Ако постои $y\in\mathbf{R}$ таков да $f(y)=0$, тогаш според условот 1) имаме $f(t)=0$, за секој $t\in\mathbf{R}$, што противречи на условот 2).

Нека $f(y)\neq 0$, за секој $y\in\mathbf{R}$. Ако земеме $x=2y$, имаме $f(2y)f(y)=f(y)$, па затоа $f(2y)=1$, за секој $y\in\mathbf{R}$. Значи, бараната функција е $f(x)=1$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

68. Најди ја функцијата $f(x)$ ако $f(\frac{x+1}{x-2})+3f(\frac{x-2}{x+1})=x$, за $x\neq 2$ и $x\neq -1$.

**Решение.** Да означиме $t=\frac{x+1}{x-2}$. Тогаш $x=\frac{2t+1}{t-1}$, $t\neq 1$ и даденото равенство го добива обликот

$$f(t)+3f(\tfrac{1}{t})=\tfrac{2t+1}{t-1},\ t\neq 1, t\neq 0. \tag{1}$$

Ако во (1) наместо $t$ ставиме $\frac{1}{t}$ добиваме

$$f(\tfrac{1}{t})+3f(t)=\tfrac{2+t}{1-t},\ t\neq 1, t\neq 0. \tag{2}$$

Равенството (2) го множиме со 3 и го одземаме од равенство (1), па добиваме

$$-8f(t)=\tfrac{2t+1}{t-1}-3\tfrac{2+t}{1-t},$$

од каде следува

$$f(t)=\tfrac{5t+7}{8(1-t)},\text{ т.е. } f(x)=\tfrac{5x+7}{8(1-x)}.$$

69. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\setminus\{\pm\frac{1}{3}\}\to\mathbf{R}$ такви да важи

$$f(\tfrac{x+1}{1-3x})=x-f(x). \tag{1}$$

**Решение.** Ставаме $\frac{x+1}{1-3x}=y$ и наоѓаме $x=\frac{y-1}{3y+1}$, па ако замениме во (1) добиваме $f(y)=\frac{y-1}{3y+1}-f(\frac{y-1}{3y+1})$, т.е.

$$f(x)=\tfrac{x-1}{3x+1}-f(\tfrac{x-1}{3x+1}). \tag{2}$$

Ако во (2) повторно $x$ го замениме со $\frac{x-1}{3x+1}$ добиваме

$$f(\tfrac{x-1}{3x+1})=\tfrac{x+1}{1-3x}-f(\tfrac{x+1}{1-3x}). \tag{3}$$

Конечно, од (1), (2) и (3) следува

$$f(x)=x-f(\tfrac{x+1}{1-3x})=x-\tfrac{x+1}{1-3x}+f(\tfrac{x-1}{3x+1})=x-\tfrac{x+1}{1-3x}+\tfrac{x-1}{3x+1}-f(x),$$

т.е.

$$f(x)=\tfrac{1}{2}(x-\tfrac{x+1}{1-3x}+\tfrac{x-1}{1+3x})=\frac{1}{2}\,\frac{9x^3+6x^2-x+2}{9x^2-1}.$$

70. Најди ги функциите $f(x)$ и $g(x)$, ако

$$f(\tfrac{x}{x-1})+g(2x+1)=2x \text{ и } f(\tfrac{x}{x-1})-g(2x+1)=x,\text{ за } x\neq 1.$$

**Решение.** Со собирање и одземање на дадените равенства добиваме

$$f(\tfrac{x}{x-1})=\tfrac{3}{2}x \text{ и } g(2x+1)=\tfrac{x}{2},\text{ за } x\neq 1.$$

Ако за $x \neq 1$ означиме $\frac{x}{x-1} = t$, $2x+1 = u$, добиваме $u \neq 3$, $x = \frac{u-1}{2}$ и $x = \frac{t}{t-1}$, $t \neq 1$. Според тоа,

$$f(t) = \frac{3t}{2(t-1)}, \text{ за } t \neq 1 \text{ и } g(u) = \frac{u-1}{4}, \text{ за } u \neq 3,$$

односно $f(x) = \frac{3x}{2(x-1)}$, за $x \neq 1$ и $g(x) = \frac{x-1}{4}$, за $x \neq 3$.

71. Нека $\alpha \in \mathbf{R}$. Најди ги сите функции $f : \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}_0^+$ такви што

$$\alpha x^2 f(\tfrac{1}{x}) + f(x) = \frac{x}{x+1}, \text{ за секој } x \in \mathbf{R}_0^+. \qquad (1)$$

**Решение.** Ако во (1) замениме $x = y$ и $x = \frac{1}{y}$ го добиваме системот равенки

$$\alpha y f(\tfrac{1}{y}) + \frac{f(y)}{y} = \frac{1}{y+1}$$

$$\alpha \frac{f(y)}{y} + y f(\tfrac{1}{y}) = \frac{y}{y+1}$$

За $\alpha = \pm 1$ дадениот систем нема решенија. Во останатите случаи имаме

$$f(x) = \frac{(1-\alpha x)x}{(x+1)(1-\alpha^2)}. \qquad (2)$$

Понатаму, за доволно мал $x$ важи $1 - \alpha x > 0$, па затоа мора $\alpha^2 < 1$. Но, тогаш мора да важи $1 - \alpha x > 0$, за секој $x > 0$, што е моижно само за $\alpha < 0$. Значи, $\alpha \in (-1, 0)$ и притоа решението на (1) е дадено со (2). За $\alpha \notin (-1, 0)$ функционалната равенка (1) нема решение.

72. Најди ги сите функции $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такви, што

$$f(x) + x f(1-x) = x^2 - 1, \text{ за секој } x \in \mathbf{R}.$$

**Решение.** Нека $f$ е функција која ја задоволува равенката. Ако воведеме смена $1 - x = t$, добиваме $f(1-t) + (1-t) f(t) = t^2 - 2t$. Последната равенка ќе ја помножиме со $t$ и го добиваме системот

$$\begin{cases} t f(1-t) + (t - t^2) f(t) = t^3 - 2t^2 \\ f(t) + t f(1-t) = t^2 - 1. \end{cases}$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата равенка, добиваме:

$$f(t)(t^2 - t + 1) = -t^3 + 3t^2 - 1$$

од каде добиваме

$$f(t) = \frac{-t^3 + 3t^2 - 1}{t^2 - t + 1}. \qquad (1)$$

Не е тешко да се провери и обратното, т.е. дека фунцкијата (1) ја задоволува дадената равенка.

73. Најди ги сите функции $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такви да за секои $x, y \in \mathbf{R}$ важи

$$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2. \qquad (1)$$

**Решение.** Ако во (1) последователно замениме $x = 0, y = t; x = y = 2t;$ $x = 2t, y = t$ и $x = y = t$ добиваме

$$-f(t)-2f(-t)+a=t-2$$
$$f(3t)-2f(-t)+f(t)-2f(2t)=2t-2$$
$$f(3t)-4f(t)+f(2t)=t-2$$
$$f(2t)-2a-f(t)=t-2$$

каде $a=f(0)$. Ако од последните равенства ги елиминираме $f(-t), f(2t)$ и $f(3t)$ добиваме $f(t)=t+\frac{7a-4}{3}$. Конечно, заменуваме во (1) и добиваме $a=1$. Единствено решение е $f(x)=x+1$.

74. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^{+}$ такви да за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$f(x)f(x+y)=(f(y))^2(f(x-y))^2e^{y+4}. \tag{1}$$

**Решение.** Ако во (1) последователно замениме $x=0,y=t; x=t,y=2t;$ $x=2t,y=t$ и $x=y=t$ добиваме

$$a=f(t)(f(-t))^2e^{t+4}$$
$$f(t)f(3t)=(f(2t))^2(f(-t))^2e^{2t+4}$$
$$f(2t)f(3t)=(f(t))^4e^{t+4}$$
$$f(2t)=f(t)a^2e^{t+4}$$

каде $a=f(0)$. Ако од последните равенства ги елиминираме $f(-t), f(2t)$ и $f(3t)$ добиваме $f(t)=\sqrt[3]{a^7e^8}e^t$. Но, $a=f(0)=\sqrt[3]{a^7e^8}$, па е $a=e^{-2}$. Следува $f(t)=e^{t-2}$ и тоа е единственото решение на (1).

75. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$2f(x+y)+f(x-y)=f(x)(2e^y+e^{-y}). \tag{1}$$

**Решение.** Ако во (1) последователно замениме $x=0,y=t; x=t,y=2t$ и $x=t,y=-2t$ добиваме

$$2f(t)+f(-t)=a(2e^t+e^{-t})$$
$$2f(3t)+f(-t)=f(t)(2e^{2t}+e^{-2t})$$
$$2f(-t)+f(3t)=f(t)(2e^{-2t}+e^{2t})$$

каде $a=f(0)$. Ако од последните равенства ги елиминираме $f(-t)$ и $f(3t)$ добиваме

$$6f(t)=3a(2e^t+e^{-t})-3f(t)e^{-2t}\text{, т.е. } f(t)=ae^t,$$

што навистина е решение на (1).

76. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y. \tag{1}$$

**Решение.** Ако во (1) последователно замениме

$$x=0,y=t; x=\tfrac{\pi}{2}+t,y=\tfrac{\pi}{2} \text{ и } x=\tfrac{\pi}{2},y=\tfrac{\pi}{2}+t$$

ги добиваме равенките

$$f(t)+f(-t)=2a\cos t$$

$$f(\pi+t)+f(t)=0$$

$$f(\pi+t)+f(-t)=2b\cos(\tfrac{\pi}{2}+t)=-2b\sin t$$

каде $a=f(0)$ и $b=f(\frac{\pi}{2})$. Оттука наоѓаме

$$f(t)=a\cos t+b\sin t\,. \qquad (2)$$

Непосредно се проверува дека за секои $a,b\in\mathbf{R}$ со (2) е дадено решение на (1).

77. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$f(x+y)-f(x-y)-4\sqrt{f(x-y)}+4\sqrt{f(x)}-4y=0\,. \qquad (1)$$

**Решение.** Ако во (1) последователно замениме $x=0,y=t;\ x=t+1,y=1$ и $x=1,y=t+1$ ги добиваме равенките

$$f(t)-t(-t)-4\sqrt{f(-t)}+4\sqrt{a}(1-t)=0$$

$$f(t+2)-f(t)-4\sqrt{f(t)}-4=0$$

$$f(t+2)-f(-t)-4\sqrt{f(-t)}-4t\sqrt{b}-4t-4=0$$

каде $a=f(0),b=f(1)$. Ако третата равенка ја одземеме од збирот на првите две, добиваме

$$-4\sqrt{f(t)}-4(\sqrt{a}-\sqrt{b})t+4\sqrt{a}=0\,,$$

од каде следува дека $f(t)=(ct+p)^2$. Ако замениме во (1) добиваме дека важи $(c-1)y(cx+q+1)=0$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$, што е можно за $c=1$ од каде наожаме $f(t)=(t+p)^2$ или за $c=0,q=-1$ од каде наоѓаме $f(t)=0$. Непосредно се проверува дека функциите $f(t)=(t+p)^2$ и $f(t)=0$ се решенија на задачата.

78. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да

$$xf(y)-yf(x)=(x-y)f(xy)\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}\,.$$

**Решение.** Нека $f$ е функција која ги задоволува условите на задачата. За $x\in\mathbf{R}$ и $y=1$, од условот на задачата следува $xf(1)=xf(x)$, од каде следува $f(x)=f(1)$, за $x\neq 0$. Ставаме $f(1)=a\in\mathbf{R}$ и $f(0)=b\in\mathbf{R}$ и добиваме

$$f(x)=\begin{cases} a, & \text{за } x\neq 0,\\ b, & \text{за } x=0.\end{cases} \qquad (1)$$

Од друга страна секоја функција од облик (1) каде $a,b\in\mathbf{R}$ ги задоволува условите на задачата.

79. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ за кои важи

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y)\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}\,.$$

Докажи дека само две од овие функции се непрекинати.

**Решение.** Во дадената равенка ставаме $x = y$ и добиваме

$$2xf(x) = 2x(f(x))^2 \text{, за секој } x \in \mathbf{R}.$$

Од последното равенство добиваме $f(x) = 0$, за секој $x \in \mathbf{R}$ или

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{за } x \neq 0, \\ a, & \text{за } x = 0, a \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Меѓу овие решенија само функциите $f(x) \equiv 0$ и $f(x) \equiv 1$ се непрекинати.

80. Најди ги сите функциии $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такви да

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y \text{, за секои } x, y \in \mathbf{R}.$$

**Решение.** Нека $f$ е функција која ги задоволува условите на задачата. За $x = 0, y = 1$ добиваме $f(-f(1)) = 0$. Понатаму, за $x \in \mathbf{R}$ и $y = -f(1)$ од условот на задачата добиваме $f(x) = 1 + f(1) - x$. Нека $f(1) = a \in \mathbf{R}$. Имаме

$$f(x) = 1 + a - x \text{, за } x \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Од условот на задачата за $y = 1$ добиваме

$$f(x - a) = -x \text{, за } x \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Од (1) за $x = a$ се добива $f(a) = 1$, а од (2) за $x = 2a$ се добива $f(a) = -2a$. Од тука е јасно дека $1 = -2a$, па значи $a = -\frac{1}{2}$. Конечно, од (1) следува

$$f(x) = \tfrac{1}{2} - x \text{, за } x \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Со непосредна проверка се показува дека функцијата (3) ги задоволува условите на задачата.

81. Најди ги сите функции $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такви што

$$f((x - y)^2) = (f(x))^2 - 2xf(y) + y^2 \text{, за секои } x, y \in \mathbf{R}.$$

**Решение.** Ставаме $x = y = 0$ и добиваме $f(0) = (f(0))^2$, па затоа $f(0) = 0$ или $f(0) = 1$. За $x = 0$, важи $f(y^2) = (f(0))^2 + y^2$, па затоа $f(x) = (f(0))^2 + x$, за секој $x \geq 0$. Ставаме $y = x$ и добиваме

$$f(0) = (f(x))^2 - 2xf(x) + x^2 = (f(x) - x)^2.$$

Да претпоставиме дека постои $x_0 < 0$ таков што $f(x_0) \neq (f(0))^2 + x_0$. Тогаш

$$f(0) = (f(x_0) - x_0)^2 \neq (f(0))^4,$$

што противречи на $f(0) = 0$ или $f(0) = 1$. Затоа $f(x) = x$ или $f(x) = x + 1$. Лесно се гледа дека овие функции се решение на задачата.

82. Најди ги сите функции $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ за кои важи

$$x^{f(y)} = y^{f(x)}, \ x, y > 0. \tag{1}$$

**Решение.** Во (1) ставаме $y = 2$ и добиваме

$$f(x) = \log_2 x^{f(2)} = f(2) \log_2 x.$$

Ќе докажеме дека функцијата $f(x)=a\log_2 x,\ a\in\mathbf{R}$ ја задоволува релацијата (1). Од $x,y>0$ следува дека постои $\alpha\in\mathbf{R}$ таков што $y=x^{\alpha}$. Според тоа,

$$x^{f(y)}=x^{a\log_2 y}=x^{a\log_2 x^{\alpha}}=x^{a\alpha\log_2 x}=(x^{\alpha})^{a\log_2 x}=y^{a\log_2 x}=y^{f(x)}.$$

Ако ставиме $y=2,\ f(2)=a$, го добиваме бараниот облик на функцијата. Ако ставиме $y=b,\ b\neq 1$ ќе добиеме функција

$$f(x)=a\log_b x=a\frac{\log_2 x}{\log_2 b}=\frac{a}{\log_2 b}\log_2 x=A\log_2 x\text{, каде }A\in\mathbf{R}.$$

83. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$f([x]y)=f(x)[f(y)]. \qquad (1)$$

**Решение.** Во (1) ставаме $x=y=0$ и добиваме $f(0)=f(0)[f(0)]$, па затоа $f(0)=0$ или $[f(0)]=1$.

Ако $[f(0)]=1$, тогаш во (1) ставаме $y=0$ и добиваме дека $f(x)=f(0)=c$, $c\in[1,2)$. Функцијата $f(x)=c$, $c\in[1,2)$ е решение на равенката (1), бидејќи тогаш $f([x]y)=c=c\cdot 1=c\cdot[c]=f(x)[f(y)]$.

Ако $f(0)=0$, за $x\in[0,1)$ од (1) добиваме $0=f(x)[f(y)]$, па затоа $f(x)=0$ за $x\in[0,1)$ или $[f(y)]=0$, за $y\in\mathbf{R}$.

*i)* Ако $[f(y)]=0$, за $y\in\mathbf{R}$, во (1) ставаме $x=1$ и добиваме $f(y)=0$, за $y\in\mathbf{R}$. Функцијата $f(x)=0$ навистина е решение на задачата бидејќи $f([x]y)=0=0\cdot 0=0\cdot[0]=f(x)[f(y)]$.

*ii)* Ако $f(x)=0$ за $x\in[0,1)$ и $z\neq 0$, земаме $y\in\mathbf{Z}$ таков што $|y|>[|z|]$ и $yz>0$. Тогаш $x=\frac{z}{y}\in[0,1)$, па од (1) следува

$$f(z)=f(xy)=f([y]x)=f(y)[f(x)]=0,$$

т.е. $f(x)\equiv 0$.

Според тоа, сите решенија на равенката (1) се $f(x)=c\in\{0\}\cup[1,2)$.

84. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$x=f(x)+f(\{x\})\text{, за секој }x\in\mathbf{R}.$$

**Решение. Прв начин.** Нека $x=\{t\}$ за некој $t\in\mathbf{R}$. Тогаш $\{t\}=2f(\{t\})$, т.е. $f(\{t\})=\frac{1}{2}\{t\}$. Според тоа, за секој реален број $x$ имаме $f(\{x\})=\frac{1}{2}\{x\}$. Со замена во почетната равенка добиваме

$$f(x)=x-\tfrac{1}{2}\{x\}. \qquad (1)$$

Лесно се гледа дека функцијата (1) ја задоволува почетната равенка.

**Втор начин.** Нека $\alpha\in[0,1)$. Тогаш $[\alpha]=0$, па затоа $\{\alpha\}=\alpha$. Од (1) следува $\alpha=2f(\alpha)$, што значи дека $f(\alpha)=\frac{\alpha}{2}$, за секој $\alpha\in[0,1)$. Но, $\{x\}\in[0,1)$, па затоа $f(\{x\})=\frac{\{x\}}{2}$ и ако замениме во (1) добиваме дека $f(x)=x-\frac{\{x\}}{2}$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Со непосредна проверка се уверуваме дека последната функција навистина е решение на функционалната равенка (1).

85. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да

$$xf(x)=[x]f(\{x\})+\{x\}f([x])\text{, за секој } x\in\mathbf{R}.$$

**Решение.** Нека $f$ е функција која ги задоволува условите на задачата. За $x=n\in\mathbf{Z}$ имаме $[x]=n$ и $\{x\}=0$, па од условот добиваме $nf(n)=nf(0)$, од каде следува дека $f(n)=f(0)$, за $n\neq 0$ и како последното равенство важи и за $n=0$, добиваме дека $f(n)=f(0),$ за секој $n\in\mathbf{Z}$.

Ако $x=a\in[0,1)$, тогаш $[a]=0$ и $\{a\}=a$, па од условот добиваме $af(a)=af(0)$, за $a\neq 0$, од каде следува дека $f(a)=f(0)$, за $a\in[0,1)$.

Нека $x\in\mathbf{R}$ и притоа нека $[x]=n$ и $\{x\}=a$, $a\in[0,1)$. Тогаш од условот добиваме $xf(x)=nf(a)+af(n)$ и како $f(n)=f(a)=f(0)$ и $x=n+a$ добиваме $xf(x)=xf(0)$. Од последното равенство следува дека $f(x)=f(0)$, за $x\neq 0$ и како истото важи за $x=0$ добиваме $f(x)=f(0)$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Ставаме $f(0)=c\in\mathbf{R}$ и добиваме дека решенија на дадената функционална равенка се сите константни функции.

86. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да

$$f(xy)=f(x)f(y)$$
$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$$

за секои $x,y\in\mathbf{R}$.

**Решение.** Користејќи ги последователно дадените равенства добиваме

$$f(x+0)=f(x)+f(0)+0,\text{ т.е. } f(0)=0,$$
$$0=f(0)=f(1+(-1))=f(1)+f(-1)-2,\text{ т.е. } f(1)+f(-1)=2,$$
$$0=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)-2x^2=f(x\cdot 1)+f(x(-1))-2x^2$$
$$=f(x)[f(1)+f(-1)]-2x^2=2f(x)-2x^2,$$

па затоа $f(x)=x^2$. Лесно се проверува дека оваа функција ги задоволува условите на задачата.

87. Најди ги сите функции $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ такви да

$$f(x+y)=f(x^2+y^2)\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}. \quad (1)$$

**Решение.** За секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи $x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}$, $y=\frac{y+x}{2}+\frac{y-x}{2}$ и ако замениме во (1) добиваме

$$f(x)=f(\tfrac{x+y}{2}+\tfrac{x-y}{2})=f((\tfrac{x+y}{2})^2+(\tfrac{x-y}{2})^2)$$
$$=f((\tfrac{y+x}{2})^2+(\tfrac{y-x}{2})^2)$$
$$=f(\tfrac{y+x}{2}+\tfrac{y-x}{2})=f(y).$$

Но, последното равенство важи за секои $x,y\in\mathbf{R}$, па затоа $f(x)=c$, $c\in\mathbf{R}$. Лесно се проверува дека константните функции го задоволуваат условот на задачата.

88. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да за произволни реални броеви $x$ и $y$ важи

$$x^2 f(y)+yf(x^2)=f(xy)+a\,, \tag{1}$$

каде $a$ е реален параметар.

**Решение.** Во (1) ставаме $x=y=1$ и добиваме $2f(1)=f(1)+a$, што значи $f(1)=a$. За $x=1, y=-1$ имаме $f(-1)-f(1)=f(-1)+a$, па значи $f(1)=-a$, од каде следува $a=0$. Според тоа, за $a\neq 0$ функционалната равенка (1) нема решение. Нека, $a=0$. Имаме, $f(1)=a=0$, па ако во (1) ставиме $y=1$ добиваме $x^2 f(1)+f(x^2)=f(x)$, т.е. $f(x^2)=f(x)$. Но, ако во (1) ставиме $y=x$ имаме $x^2 f(x)+xf(x^2)=f(x^2)$ и земеме предвид дека $f(x^2)=f(x)$, добиваме

$$f(x)(x^2+x-1)=0\,.$$

Според тоа, за $x$ за кои $x^2+x-1\neq 0$ имаме $f(x)=0$. Но, ако $x_1$ е решение на равенката $x^2+x-1=0$, тогаш $f(x_1)=f(x_1^2)=0$. Според тоа, единствено решение на равенката (1) е функцијата $f\equiv 0$.

89. Најди ги сите реални функции $f$ такви што

$$f(x-y)=f(x)+f(y)-2xy\,, \tag{1}$$

за секои $x,y\in\mathbf{R}$.

**Решение.** Ако во (1) ставиме $x=y$ добиваме

$$f(0)=2f(x)-2x^2\,,\text{ т.е. } f(x)=x^2+\tfrac{a}{2}\,,$$

каде $a=f(0)$. Сега за $x=y=0$ имаме $a=2a$, т.е. $a=0$. Значи, $f(x)=x^2$. Јасно, $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy$, т.е. најдената функција ја задоволува равенката (1).

90. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ кои ги задоволуваат условите

1) $f(x+f(y))=f(x+y)+1$,

2) $f$ строго монотоно расте.

**Решение.** Од условот 1) следува дека за сите реални броеви $x$ и $y$ важи:

$$f(x+f(y))=f(x+y)+1=f(y+x)+1=f(y+f(x))\,. \tag{1}$$

Но, строго монотоно растечка функција $f$ е инјекција, па од (1) следува дека $x+f(y)=y+f(x)$. Ако во последното равенство ставиме $y=0$ добиваме дека за секој $x\in\mathbf{R}$ важи

$$f(x)=x+f(0)\,. \tag{2}$$

Ако повторно го искористиме условот 1), тогаш од (2) следува

$$x+f(y)+f(0)=x+y+f(0)+1\,,$$

т.е. $f(y)=y+1$, за секој $y\in\mathbf{R}$.

91. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)\le 3f(x+2y+3z)\text{, за секои } x,y,z\in\mathbf{R}.$$

**Решение.** Ако земеме $x=y=-z$, тогаш $x+y=2x, y+z=0, z+x=0$ и $x+2y+3z=0$, па од условот на задачата следува

$$f(2x)+2f(0)\le 3f(0),$$

т.е.

$$f(2x)\le f(0). \qquad (1)$$

Ако пак земеме $x=z=-y$, тогаш

$$x+y=0, y+z=0, z+x=2x \text{ и } x+2y+3z=2x,$$

па од условот на задачата следува $f(2x)+2f(0)\le 3f(2x)$, т.е.

$$f(2x)\ge f(0). \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) добиваме $f(2x)=f(0)$. Ставаме $f(0)=c$, $c\in\mathbf{R}$ и до произволноста на $x$ следува дека функциите од облик $f(x)=c,\ \ c\in\mathbf{R}$ се решение на задачата.

92. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(x+y)+xy=f(x)f(y)\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}. \qquad (1)$$

**Решение.** Ако во (1) земеме $x=y=0$, добиваме $f(0)=[f(0)]^2$. Според тоа, $f(0)=0$ или $f(0)=1$.

Ако $f(0)=0$, тогаш за $x\in\mathbf{R}$ и $y=1$ од (1) следува

$$f(x)=f(x)f(0)=0\text{, за секој } x\in\mathbf{R}.$$

Но, тогаш од (1) добиваме $xy=0$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$, што е противречност.

Ако $f(0)=1$, тогаш за $x=1, y=-1$ од (1) добиваме $f(1)f(-1)=0$. Според тоа, $f(1)=0$ или $f(-1)=0$. Ако $f(1)=0$, тогаш за $y=1$ од (1) имаме $f(x+1)+x=f(x)f(1)$, односно $f(x+1)+x=0$, па затоа $f(x)=1-x$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Ако $f(-1)=0$, тогаш за $y=-1$ од (1) имаме $f(x-1)-x=0$, па затоа $f(x)=x+1$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

Лесно се проверува дека функциите $f(x)=1-x$, за секој $x\in\mathbf{R}$ и $f(x)=x+1$, за секој $x\in\mathbf{R}$ ги задоволуваат условите на задачата.

93. Најди ги сите функции $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$\sin x+\cos y=f(x)+f(y)+g(x)-g(y). \qquad (1)$$

**Решение.** Ако во (1) ставиме $x=y$ добиваме $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{2}$. Понатаму, од (1) следува

$$\sin x-f(x)-g(x)=f(y)-g(y)-\cos y. \qquad (2)$$

Левата страна на (2) зависи од $x$, а десната од $y$, што значи дека и двете се константни. Последното значи дека

$$g(x)=\sin x-f(x)+C=\frac{\sin x-\cos x}{2}+C.$$

Лесно се проверува дека за секој $C$ најдените функции се решенија на (1).

94. Најди ги сите функции $f:[1,+\infty)\to[1,+\infty)$ такви да

1) $f(x)\le 2(x+1)$,

2) $f(x+1)=\frac{1}{x}((f(x))^2-1)$.

**Решение.** Имаме

$$f(x)=\sqrt{xf(x+1)+1}\le\sqrt{2x(x+2)+1}\le\sqrt{2}(x+1).$$

Со индукција лесно се докажува дека $f(x)\le 2^{\frac{1}{2^n}}(x+1)$, и ако земеме $n\to\infty$ добиваме дека $f(x)\le x+1$. Понатаму, од

$$\frac{1}{x}((f(x))^2-1)=f(x+1)\ge 1$$

следува

$$f(x)\ge\sqrt{1+x}>x^{\frac{1}{2}}.$$

Со индукција лсно се докажува дека $f(x)\ge x^{1-\frac{1}{2^n}}$ и ако земеме $n\to\infty$ добиваме дека $f(x)\ge x$. Повторно,

$$f(x)=\sqrt{xf(x+1)+1}\ge\sqrt{x(x+1)+1}\ge x+\frac{1}{2}$$

и со индукција се докажува дека $f(x)\ge x+1-\frac{1}{2^n}$, па ако земеме $n\to\infty$ добиваме дека $f(x)\ge x+1$. Конечно, од $f(x)\le x+1$ и $f(x)\ge x+1$ следува дека единствено решение е $f(x)=x+1$.

95. Нека $a\in\mathbf{R}$ и функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е таква да за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$f(x+y)=f(x)f(a-y)+f(y)f(a-x) \text{ и } f(0)=\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Докажи дека $f$ е константна функција.

**Решение.** Нека за функцијата $f$ важи (1). Ставаме $x=y=0$ и добиваме $f(0)=2f(0)f(a)$ и како $f(0)=\frac{1}{2}$ добиваме $f(a)=\frac{1}{2}$. Ставаме $y=0$ и добиваме

$$f(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(a-x), \text{ т.е. } f(x)=f(a-x).$$

Од последното равенство и од (1) добиваме дека

$$f(x+y)=2f(x)f(y), \text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}. \qquad (2)$$

Ако во последното равенство ставиме $x=y=\frac{t}{2}$ наоѓаме $f(t)=2(f(\frac{t}{2}))^2\ge 0$, за секој $t\in\mathbf{R}$. Понатаму, во (2) ставаме $y=a-x$ и како $f(x)=f(a-x)$ добиваме

$$\frac{1}{2}=f(a)=2f(x)f(a-x)=2(f(x))^2$$

па затоа $f(x)=\frac{1}{2}$ или $f(x)=-\frac{1}{2}$. Но, $f(x)\ge 0$, што значи дека $f(x)=\frac{1}{2}$, за секој $x\in\mathbf{R}$, што и требаше да се докаже.

96. Ако

а) $f(0)=\frac{1}{n}$,

б) $f(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{k=1}^{n} f(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} x_i) f(a-x_k)$, за секои $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{R}$

тогаш $f$ е константна функција. Докажи!

**Решение.** Ако во б) ставиме $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ добиваме $f(0) = \frac{1}{n}$, а ако ставиме $x_1 = x, x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$, добиваме $f(x) = \frac{1}{n} f(a-x) + \frac{n-1}{n} f(x)$, од каде следува дека $f(x) = f(a-x)$, за секој $x \in \mathbf{R}$. Ако го искористиме овој резултат, тогаш од условот б) добиваме

$$f(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) f(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} x_i).$$

Нека $n = 2$, т.е. $f(x_1 + x_2) = 2 f(x_1) f(x_2)$ за секои $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$. Овој случај се совпаѓа со почетната задача. Ако во последното равенство $x_1$ го замениме со $a - x_1$ добиваме

$$f(a + x_2 - x_1) = 2 f(a - x_1) f(x_2) = 2 f(x_1) f(x_2) = f(x_1 + x_2).$$

Ако ставиме $-x_2$ наместо $x_1$ добиваме

$$f(a + 2x_2) = f(0) = \frac{1}{2}, \text{за секој } x_2 \in \mathbf{R}.$$

Сега ставаме $x_2 = \frac{x-a}{2}$ и добиваме $f(x) = \frac{1}{2}$, за секој $x \in \mathbf{R}$.

Понатаму за да го докажеме општото тврдење ќе искористиме математичка индукција по $n$. Ако во б) ставиме $x_n = 0$ и земеме предвид дека $f(x) = f(a-x)$ добиваме

$$f(x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} f(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n-1} x_i) f(x_k) + f(0) f(\sum_{i=1}^{n-1} x_i),$$

па од условот а) наоѓаме

$$\frac{n-1}{n} f(\sum_{i=1}^{n-1} x_i) = \sum_{k=1}^{n} f(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n-1} x_i) f(x_k).$$

Ако последното равенство го помножиме со $(\frac{n}{n-1})^2$ и ставиме $g(x) = \frac{n}{n-1} f(x)$, тогаш

$$g(0) = \frac{1}{n-1} \text{ и } g(x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} g(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n-1} x_i) g(x_k),$$

за секои $x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in \mathbf{R}$. Според индуктивната претпоставка тврдењето е точно за $n-1$. Па $g(x)$ е константна функција. Значи, $f(x)$ е константна функција, т.е. тврдењето е точно и за $n$.

97. Најди ги сите функции $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такви да

$$f(x)+f(y)+g(x)-g(y)=x^3+\sqrt[3]{y}\text{ , за секои } x,y\in\mathbf{R}\,.$$

**Решение.** Земаме $x=y$ и добиваме $f(x)=\frac{1}{2}(x^3+\sqrt[3]{x})$. Сега равенката го добива обликот

$$g(x)+\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{x}-x^3)=g(y)+\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{y}-y^3)\,.$$

Во последната равенка ставаме $y=0$ и добиваме

$$g(x)+\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{x}-x^3)=g(0)+\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{0}-0^3)=g(0)\,,$$

односно

$$g(x)=g(0)+\tfrac{1}{2}(x^3-\sqrt[3]{x})\,.$$

Но, $x$ е произволен и како немаме дополнителни ограничувања можеме даземеме $g(0)=a$, $a\in\mathbf{R}$, па затоа $g(x)=\frac{1}{2}(x^3-\sqrt[3]{x})+a$.

Конечно, лесно се проверува дека функциите

$$f(x)=\tfrac{1}{2}(x^3+\sqrt[3]{x})\text{ и } g(x)=\tfrac{1}{2}(x^3-\sqrt[3]{x})+a\,,\ a\in\mathbf{R}$$

ги исплонуваат условите на задачата.

98. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$f(f(x)+y)=f(f(x)-y)+4f(x)y\,. \tag{1}$$

**Решение.** Ако во (1) ставиме $y=f(x)$ добиваме

$$f(2f(x))=f(0)+4(f(x))^2,$$

а ако ставиме $y=2f(z)-f(x)$ наоѓаме

$$f(2f(z))=f(2(f(x)-f(z))+8f(x)f(z)-4(f(x))^2\,.$$

Од претходните две равенства следува

$$f(0)=f(2(f(x)-f(z)))-(2(f(x)-f(z)))^2\,. \tag{2}$$

Едно решение на почетната равенка е $f\equiv 0$. Во спротивно постои константа $c$, таква да $f(c)\neq 0$, па ако во (1) замениме $x=c$ и $y=\frac{t}{8f(c)}$, $t\in\mathbf{R}$ добиваме

$$t=2(f(f(c)+\tfrac{t}{8f(c)})-f(f(c)-\tfrac{t}{8f(c)}))\,.$$

Според тоа, секој $t\in\mathbf{R}$ може да се запише во обликот $2(f(x)-f(z))$, па затоа од (2) добиваме дека $f(0)=f(t)-t^2$, за секој $t\in\mathbf{R}$. Според тоа, покрај $f\equiv 0$ единствена можност е $f(t)=t^2+d, d\in\mathbf{R}$ и ова се решенија бидејќи

$$f(f(x)+y)-f(f(x)-y)=(f(x)+y)^2+d-(f(x)-y)^2-d=4f(x)y\,.$$

99. Нека $a\in\mathbf{R}$. Најди ги сите функциии $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да

$$f(x^2+y)=f(x)+f(y^2)+a\text{ , за секои } x,y\in\mathbf{R}\,.$$

**Решение.** Нека $f$ е функција која ги задоволува условите на задачата. За $x=y=0$, од условот на задачата добиваме $f(0)=2f(0)+a$, па затоа

$f(0)=-a$. Нека $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е функцијата определена со $g(x)=f(x)+a$. Тогаш, од условот на задачата следува

$$g(x^2+y)=g(x)+g(y^2)\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R} \qquad (1)$$

и освен тоа $g(0)=f(0)+a=-a+a=0$. Ако во (1) ставиме $y=0$, добиваме $g(x^2)=g(x)$, за $x\in\mathbf{R}$, од каде следува

$$g(x^4)=g(x^2)=g(x)\text{, за } x\in\mathbf{R}. \qquad (2)$$

Ако во (1) ставиме $y=-x^2$ добиваме $g(x)+g(x^4)=0$, за $x\in\mathbf{R}$, што заедно со (2) дава $2g(x)=0$, односно $g(x)=0$, за $x\in\mathbf{R}$. Значи,

$$f(x)=g(x)-a=-a\text{, за } x\in\mathbf{R}.$$

Лесно се докажува дека функцијата $f(x)=-a$ ги задоволува условите на задачата.

100. Нека $S$ е множество од сите реални броеви поголеми од $-1$. Најди ги сите функции $f:S\to S$ кои ги задоволуваат условите:

*i)* $f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$, за секои $x,y\in S$;

*ii)* Функцијата $\frac{f(x)}{x}$ е строго растечка во секој од интервалите $-1<x<0$ и $x>0$.

**Решение.** Ако ставиме $x=y$ од *i*) добиваме

$$f(x+f(x)+xf(x))=x+f(x)+xf(x),$$

што значи дека за секој $x\in S$ точката $x+f(x)+xf(x)$ е решение на равенката $f(z)=z$. Но, од условот *ii*) следува дека равенката $f(z)=z$ во интервалот $(-1,0)$ може да има најмногу едно решение, во интервалот има $(0,+\infty)$ може да има најмногу едно решение и 0 може да е нејзино решение.

Нека $f(a)=a$, за некој $a>0$. Ако ставиме $x=y=a$, тогаш од *i*) добиваме

$$f(2a+a^2)=f(a+f(a)+af(a))=a+f(a)+af(a)=2a+a^2.$$

Но, $2a+a^2>0$, па затоа и $2a+a^2$ е решение на $f(z)=z$, при $z>0$. Според тоа, $2a+a^2=a$, т.е. $a(a+1)=0$, што не е можно за $a>0$. Значи, за секој $a>0$ важи $f(a)\neq a$. Нека $f(a)=a$, за некој $a\in(-1,0)$. Ставаме $x=y=a$ и од *i*) добиваме

$$f(2a+a^2)=2a+a^2.$$

Но, за $a\in(-1,0)$ добиваме $a+1\in(0,1)$ и

$$2a+a^2=(a+1)^2-1\in(-1,0).$$

Бидејќи, во интервалот $(-1,0)$ равенката $f(z)=z$ има најмногу едно решение добиваме $2a+a^2=a$, т.е. $a(a+1)=0$, од што следува $a=0$ или $a=-1$, што противречи на $a\in(-1,0)$. Но, видовме дека за секој $x\in S$ точката $x+f(x)+xf(x)$ е решение на равенката $f(z)=z$, па затоа 0 мора да е решение на $f(z)=z$, што значи дека

$$x+f(x)+xf(x)=0\text{, за секој } x>-1,$$

од каде добиваме $f(x)=-\frac{x}{1+x}$, за секој $x>-1$. Лесно се проверува дека $\frac{f(x)}{x}=-\frac{1}{1+x}$ строго монотоно расте на интервалите $(-1,0)$ и $(0,+\infty)$ и притоа важи

$$y+f(x)+yf(x)=y-\frac{x}{1+x}-\frac{yx}{1+x}=\frac{y-x}{1+x}=-\frac{x-y}{1+x}=-\frac{\frac{x-y}{1+y}}{1+\frac{x-y}{1+y}}$$

$$=f(\tfrac{x-y}{1+y})=f(x+f(y)+xf(y)).$$

101. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ такви што

$$(x+y)f(f(x)y)=x^2f(f(x)+f(y))\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}^+.$$

**Решение.** Ставаме $y=1$ и добиваме

$$(x+1)f(f(x))=x^2f(f(x)+f(1)),$$

т.е.

$$\frac{x+1}{x^2}=\frac{f(f(x)+f(1))}{f(f(x))},\ x,f(f(x))\in\mathbf{R}^+. \qquad (1)$$

Ќе докажеме дека функцијата $f$ е инјекција. Нека $f(a)=f(b)$, за некои $a,b\in\mathbf{R}^+$. Тогаш

$$f(f(a))=f(f(b)) \text{ и } f(f(a)+f(1))=f(f(b)+f(1)),$$

па затоа

$$\frac{a+1}{a^2}=\frac{f(f(a)+f(1))}{f(f(a))}=\frac{f(f(b)+f(1))}{f(f(b))}=\frac{b+1}{b^2},$$

$$(a+1)b^2=(b+1)a^2,$$

$$(a-b)(ab+a+b)=0,$$

и како $ab+a+b>0$ од последното равенство следува $a=b$, што значи дека $f$ е инјекција.

Ако $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, тогаш $x^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, па затоа $\frac{x+1}{x^2}=1$ и од (1) следува дека

$$\frac{f(f(x)+f(1))}{f(f(x))}=1\text{, т.е. } f(f(x)+f(1))=f(f(x)).$$

Но, $f$ е инјекција, па од последното равенство добиваме $f(x)+f(1)=f(x)$, т.е. $f(1)=0$, што противречи на фактот дека $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$, односно $f(1)>0$. Конечно, од добиената противтечност следува дека не постои функција која го задоволува условот на задачата.

102. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(xf(x)+f(y))=x^2+y\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}. \qquad (1)$$

**Решение.** Ставаме $x=0$ и добиваме $f(f(y))=y$, за секој $y\in\mathbf{R}$. Ако во (1) наместо $x$ ставиме $f(x)$ и го искористиме претходното равенство добиваме

$$f(f(x)f(f(x))+f(y))=(f(x))^2+y$$

$$f(xf(x)+f(y))=(f(x))^2+y\,. \qquad (2)$$

Сега, од (1) и (2) следува $(f(x))^2=x^2$, т.е. $|f(x)|=|x|$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

Нека претпоставиме дека постојат $a,b\in\mathbf{R}$ такви да $f(a)=a$ и $f(b)=-b$. Тогаш

$$f(-b^2+a)=f(-bb+a)=f(bf(b)+f(a))=b^2+a$$

и како $|f(-b^2+a)|=|-b^2+a|$ добиваме

$$|-b^2+a|=|f(-b^2+a)|=|b^2+a|\,,$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува $f(x)=x$, за секој $x\in\mathbf{R}$ или $f(x)=-x$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

103. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$f(x+y)=f(x)f(y)f(xy)\,. \qquad (1)$$

**Решение.** Во (1) ставаме $x=y=0$ и добиваме $f(0)=[f(0)]^3$, па затоа $f(0)=0$ или $f(0)=\pm1$.

а) Ако $f(0)=0$, тогаш од (1), при $y=0$ добиваме $f(x)=0$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

б) Нека $f(0)=\pm1$. Ако во (1) ставиме $y=-x$ добиваме

$$\pm1=f(x)f(-x)f(-x^2)\,.$$

Значи, $f(x)\neq0$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Во (1) $x$ го заменуваме со $x-1$ и за $y=1$ добиваме

$$f(x)=[f(x-1)]^2f(1)\,. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) имаме

$$f(x)=[f(x-1)]^2f(1)=[f(x)f(-1)f(-x)]^2f(1)\,,$$

па затоа $f(x)]f(-x)]^2=c$, каде $c\neq0$ е константа. Ако во последната равенка $x$ го замениме со $-x$ добиваме $f(-x)[f(x)]^2=c$. Од последните две равенки имаме $f(x)=f(-x)$ и $f(x)=\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{f(0)}=\pm1$.

Конечно, бараните функции се $f(x)=0$ и $f(x)=\pm1$.

104. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви, што

$$f(xf(x)+f(y))=(f(x))^2+y\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}\,. \qquad (1)$$

**Решение.** Нека функцијата $f(x)$ ги задоволува условите на задачата. Ако $f(0)=a$, тогаш ставајќи $x=0$ во (1) добиваме $f(f(y))=a^2+y$, за секој $y\in\mathbf{R}$. Понатаму, во последното равенство ставаме $y=-a^2$ и добиваме $f(f(-a^2))=0$, т.е. за $b=f(-a^2)$ важи $f(b)=0$. Сега, од равенството (1) при $x=b$ добиваме $f(f(y))=y$, за секој $y\in\mathbf{R}$. Повторно од (1), ако $x$ го замениме со $f(x)$ добиваме

$$f(xf(x)+f(y))=x^2+y,$$

па затоа $(f(x))^2+y=x^2+y$, т.е. $(f(x))^2=x^2$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Според тоа, $f(1)=\pm1$.

- Ако $f(1)=1$, тогаш $f(1+f(y))=1+y$ за секој $y\in\mathbf{R}$, па затоа $(f(1+f(y)))^2=(1+y)^2$ односно $(1+f(y))^2=(1+y)^2$. Конечно, $f(y)=y$, за секој $y\in\mathbf{R}$.
- Ако $f(1)=-1$, тогаш $f(-1+f(y))=-1+y$ за секој $y\in\mathbf{R}$, па затоа $(f(-1+f(y)))^2=(1+y)^2$ односно $(-1+f(y))^2=(1+y)^2$. Конечно, $f(y)=-y$, за секој $y\in\mathbf{R}$.

Според тоа, добивме две решенија $f(x)=x$ и $f(x)=-x$. Непосредно се проверува дека овие функции ја задоволуваат равенката (1).

105. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ и за кои се исполнети условите

(1) $f(xf(y))=yf(x)$, за секои $x,y\in\mathbf{R}^+$; и

(2) $f(x)\to0$, кога $x\to+\infty$.

**Решение.** Ако во релацијата (1) ставиме $y=x$ добиваме дека постојат реални броеви $z$, такви што $f(z)=z$. Имено, таков е секој број од облик $x\,f(x)$, $x>0$. Нека $z$ е кој било таков број. Тогаш,

$$f(z^2)=f(zf(z))=zf(z)=z^2.$$

Од последното равенство со помош на математичка индукција добиваме

$$f(z^n)=z^n,\text{ за секој } n\in\mathbf{N}. \qquad (3)$$

Понатаму, од

$$z=f(z)=f(1\cdot f(z))=zf(1),$$

за $z\neq0$ добиваме $f(1)=1$, а од

$$z\,f(\tfrac{1}{z})=f(\tfrac{1}{z}\,f(z))=f(1)=1,$$

следува $f(\frac{1}{z})=\frac{1}{z}$. Сега, повторно со индукција се докажува дека

$$f(\tfrac{1}{z^n})=\tfrac{1}{z^n},\text{ за секој } n\in\mathbf{N}. \qquad (4)$$

Ако $z>1$, тогаш од (2) и (3) следува противречност, а ако $z<1$, тогаш од (2) и (4) следува повторно противречност. Според тоа, единствен број со својство $z=f(z)$ е бројот $z=1$. Но, ова својство го има секој број од облик $xf(x)$, па затоа $f(x)=\frac{1}{x}$, за секој $x>0$. Непосредно се проверува дека оваа функција ги има задоволува својствата (1) и (2).

106. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1,\text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

**Решение.** Нека $A$ е сликата при функцијата $f$ и $c=f(0)$. Ако ставиме $x=y=0$ ќе добиеме $f(-c)=f(c)+c-1$, а оттука следува дека $c\neq0$. Понатаму, за секој $y$ и $x = f(y)$ добиваме $f(0) = (f(y))^2 + 2f(f(y)) - 1$, т.е. $c = x^2 + 2f(x) - 1$, од што следува дека рестрикцијата $f|_A$ е дадена со

$$f(x) = \tfrac{c+1}{2} - \tfrac{x^2}{2}, \qquad (1)$$

за секој $x \in A$.

Ќе докажеме дека $\{u - v \mid u, v \in A\} = \{f(y) - f(x) \mid x, y \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$. Навистина, од условот на задачата и фактот дека $c \neq 0$ следува

$$\begin{aligned}\{f(y) - f(x) \mid x, y \in \mathbf{R}\} &\supseteq \{f(x - c) - f(x) \mid x \in \mathbf{R}\}\\ &= \{f(x - f(0)) - f(x) \mid x \in \mathbf{R}\}\\ &= \{f(f(0)) + xf(0) - 1 \mid x \in \mathbf{R}\}\\ &= \{cx + f(c) - 1 \mid x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R},\end{aligned}$$

па затоа $\{u - v \mid u, v \in A\} = \{f(y) - f(x) \mid x, y \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$.

Ќе ја определиме вредноста $f(x)$ за произволно $x$. Избираме $y_1, y_2 \in A$ такви што $x = y_1 - y_2$. Од $y_2 \in A$ следува дека постои $z \in \mathbf{R}$, таков да $y_2 = f(z)$, па затоа од условот на задачата и од (1) следува

$$\begin{aligned}f(x) &= f(y_1 - y_2) = f(y_1 - f(z)) = f(f(z)) + y_1 f(z) + f(y_1) - 1\\ &= f(y_2) + y_1 y_2 + f(y_1) - 1 = \tfrac{c+1}{2} - \tfrac{y_2^2}{2} + y_1 y_2 + \tfrac{c+1}{2} - \tfrac{y_1^2}{2} - 1\\ &= c - \tfrac{(y_1 - y_2)^2}{2} = c - \tfrac{x^2}{2}.\end{aligned}$$

Конечно, за секој $x \in A \subseteq \mathbf{R}$ точни се формулите (1) и (2), па затоа $c = 1$ и $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, за секој $x \in \mathbf{R}$.

107. Најди ги сите функции $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такви што

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2, \text{ за секои } x, y \in \mathbf{R}. \qquad (1)$$

**Решение.** Ќе докажеме дека функцијата $f$ е биекција. Нека $b \in \mathbf{R}$. Ако во (1) ставиме $y = b - (f(x))^2$ добиваме

$$f(x^2 + f(b - (f(x))^2)) = b,$$

што значи дека $f$ е сурјекција.

Нека $f(s) = f(t)$. Тогаш

$$\begin{aligned}&x^2 + f(s) = x^2 + f(t)\\ &f(x^2 + f(s)) = f(x^2 + f(t))\\ &s + (f(x))^2 = t + (f(x))^2\\ &s = t\end{aligned}$$

што значи дека $f$ е инјекција.

Ќе докажеме дека $f(x) = x$, за секој $x \in \mathbf{R}$, докажувајќи дека не е можно $f(x) \neq x$ за некој $x$. Нека $f(x) < x$ за некој $x$. Тогаш постои $y$ таков што $x = f(x) + y^2$, од каде следува

$$f(x) = f(f(x) + y^2) = x + (f(y))^2$$

од што следува дека $f(x) \geq x$, што е противречност. Нека $f(x) > x$ за некој $f$. Тогаш постои $z$ таков што $f(x) = x + z^2$ и како $f$ е бикеција за ова $z$ постои $y$ таков да $z = f(y)$, т.е.

$$f(x) = x + (f(y))^2 = f(y^2 + f(x)).$$

Но, функцијата $f$ е биекција, па од последното равенство следува

$$x = y^2 + f(x) \geq f(x),$$

што е противречност. Значи, $f(x) = x$, за секој $x \in \mathbf{R}$. Лесно се проверува дека оваа функција го задоволува условот на задачата.

108. Најди ги сите функции $f$ дефинирани на множеството ненегативни реални броеви, со ненегативни реални вредности, така што да важи

$(i)$ $f[xf(y)]f(y) = f(x+y)$, за секои $x, y \geq 0$;

$(ii)$ $f(2) = 0$;

$(iii)$ $f(x) \neq 0$, за секој $0 \leq x < 2$.

**Решение.** Да претпоставиме дека $f$ ги задоволува условите на задачата. Тогаш за $z > 2$ добиваме

$$f(z) = f((z-2)+2) = f[(z-2)f(2)]f(2) = 0,$$

и ако ги земеме $(ii)$ и $(iii)$ добиваме $f(z) = 0$ ако и само ако $z \geq 2$.

Нека $0 \leq y < 2$. За $x = 2 - y$ добиваме

$$f[(2-y)f(y)] \cdot f(y) = f(2) = 0$$

и бидејќи $f(y) \neq 0$, добиваме

$$f[(2-y)f(y)] = 0 \Rightarrow (2-y)f(y) \geq 2 \Rightarrow f(y) \geq \tfrac{2}{2-y}.$$

Ако ставиме $x = \frac{2}{f(y)}$, добиваме

$$0 = f(2) \cdot f(y) = f(\tfrac{2}{f(y)} f(y)) = f(\tfrac{2}{f(y)} + y)$$

па затоа $\frac{2}{f(y)} + y \geq 2$ односно $f(y) \leq \frac{2}{2-y}$.

Значи, бараната функција мора да е од облик

$$f(y) = \begin{cases} \frac{2}{2-y}, & 0 \leq y < 2 \\ 0, & y \geq 2. \end{cases}$$

Лесно се проверува дека оваа функција ги задоволува условите $(ii)$ и $(iii)$. За да го провериме условот $(i)$ ќе разгледаме три можни слчаи. Ако $xf(y) \geq 2$, тогаш $y < 2$ и $f(y) = \frac{2}{2-y}$, па според тоа $\frac{2x}{2-y} \geq 2$ што значи $x + y \geq 2$, па според тоа $f(x+y) = 0$, а како $f[xf(y)] = 0$ добиваме дека и

$$f[xf(y)]f(y) = 0.$$

Ако $xf(y) < 2$ и $y \geq 2$, тогаш $f(y) = 0$, па затоа $f[xf(y)]f(y) = 0$, а исто така и $f(x+y) = 0$, бидејќи $x + y \geq 2$.

Ако $xf(y)<2$ и $y<2$, тогаш $f(y)=\frac{2}{2-y}$, па затоа $\frac{2x}{2-y}<2$ што значи $x+y<2$ па според тоа

$$f[xf(y)]\cdot f(y)=f(\tfrac{2x}{2-y})\cdot f(y)=\frac{2}{2-\frac{2x}{2-y}}\cdot\frac{2}{2-y}=\frac{2}{2-x-y}=f(x+y)\,.$$

109. Најди ги сите функции $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ такви што

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

за сите позитивни реални броеви $w,x,y,z$ за кои важи $wx=yz$.

**Решение.** За $x=y=z=w$ имаме $f(x^2)=f(x)^2$ од каде, поради областа на дефинираност на функцијата, добиваме $f(1)=1$. Понатаму, ако ставиме $w=1$, $z=y=\sqrt{x}$, за кои е исполнет условот од задачата, и земеме предвид дека $f(1)=1$ добиваме

$$\frac{(f(1))^2+(f(x))^2}{f(x)+f(x)}=\frac{1+x^2}{x+x}$$

односно

$$x(f(x))^2-(1+x^2)f(x)+x=0\,. \tag{1}$$

Квадратната равенка (1) ја решаваме по $f(x)$, добиваме:

$$f(x)=\frac{1+x^2\pm\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}}{2x}=\frac{1+x^2\pm\sqrt{(1-x^2)^2}}{2x}=\frac{1+x^2\pm(1-x^2)}{2x}$$

Ќе докажеме дека $x>0$ функцијата $f(x)$ може да прими само една од двете можни вредности: $f(x)=x$ или $f(x)=\frac{1}{x}$. Навистина, нека претпоставиме дека постојат $a\neq 1, b\neq 1, a\neq b$, но $f(a)=a$ и $f(b)=\frac{1}{b}$. Броевите $w=a, x=b,\ \ y=z=\sqrt{ab}$ го задоволуваат условот на задачата и ако замениме во почетната равенка, при што земаме предвид дека $f(a)=a$ и $f(b)=\frac{1}{b}$, добиваме

$$\frac{(f(a))^2+(f(b))^2}{f(ab)+f(ab)}=\frac{a^2+b^2}{ab+ab}\Leftrightarrow\ f(ab)=ab\frac{a^2b^2+1}{b^2(a^2+b^2)}$$

Меѓутоа, како што претходно видовме $f(ab)=ab$ или $f(ab)=\frac{1}{ab}$. Ако $f(ab)=ab$, тогаш $\frac{a^2b^2+1}{b^2(a^2+b^2)}=1$, т.е. $b^4=1$ и бидејќи $b>0$ добиваме дека единственото решение е $b=1$. Ако $f(ab)=\frac{1}{ab}$, тогаш

$$a^2b^2\ \frac{a^2b^2+1}{b^2(a^2+b^2)}=1\text{, т.е. } a^4=1$$

и како $a>0$ добиваме дека единствено решение е $a=1$.

Конечно, од претходно изнесеното следува дека дадената равенка има две решенија и тоа: $f(x)=x,$ за секој $x\in(0,\infty)$ и $f(x)=\frac{1}{x},$ за секој $x\in(0,\infty)$.

110. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$xf(x)-yf(y)=(x-y)f(x+y)\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

**Решение.** Нека $f$ е решение на задачата и за секој $x\in\mathbf{R}$ да означиме $M_x=(x,f(x))$. Од условот на задачата следува

$$f(x+y)-f(x)=\tfrac{f(x)-f(y)}{x-y}(x+y-x),$$

што значи дека за секои $x,y\in\mathbf{R}$ точките $M_x,M_y$ и $M_{x+y}$ лежат на иста права. Според тоа, ако $x\neq 0$, тогаш точките $M_x,M_{2x},M_{3x},...,$ $M_{nx},...$ лежат на иста права која ја означуваме со $l_x$. Нека $x_1\neq x_2$ и со $l_{x_1x_2}$ да ја означиме правата која ги содржи точките $M_{x_1}$ и $M_{x_2}$. Тогаш $M_{x_1+x_2}\in l_{x_1x_2}$ и $M_{2x_1+x_2}\in l_{x_1x_2}$. Од друга страна точките $M_{x_1}$, $M_{2x_1}$ и $M_{2x_1+x_2}$ лежат на иста права и затоа $l_{x_1}\equiv l_{x_1x_2}$. Аналогно, $l_{x_2}\equiv l_{x_1x_2}$, па затоа $l_{x_1}\equiv l_{x_2}$. Според тоа, сите точки $M_x, x\in\mathbf{R}$ лежат на иста права, па затоа $f(x)$ е линеарна функција. Сега лесно се покажува дека функциите $f(x)=ax+b, a,b\in\mathbf{R}$ се решенија на задачата.

111. Нека $S=(1,\infty)$. Најди ги сите функции $f:S\to S$ такви што

$$f(x^my^n)\le f(x)^{\frac{1}{4m}}f(y)^{\frac{1}{4n}}\text{, за секои } x,y\in S \text{ и за секои } m,n>0.$$

**Решение.** Нека претпоставиме дека функцијата $f$ ги исполнува условите на задачата. Тогаш за $m=\frac{1}{2}$ и $n=\frac{\ln x}{2\ln y}$ имаме

$$f(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{\ln x}{2\ln y}})\le f(x)^{\frac{1}{2}}f(y)^{\frac{\ln y}{2\ln x}},$$

и како $f(z)>1$, за секој $z>1$ од последното неравенство следува

$$f(x)^{\ln x}\le f(y)^{\ln y}. \tag{2}$$

Понатаму, заради симетрија добиваме

$$f(x)^{\ln x}\ge f(y)^{\ln y}. \tag{3}$$

Од неравенствата (2) и (3) следува дека функцијата $g(x)=f(x)^{\ln x}$ истовремено и монотоно опаѓа и монотоно расте, па затоа постои $c>1$ таков да $f(x)^{\ln x}=c$, што значи дека $f(x)=c^{\frac{1}{\ln x}}$.

За овие функции важи

$$f(x^my^n)=c^{\frac{1}{\ln x^my^n}}=c^{\frac{1}{m\ln x+n\ln y}}\le c^{\frac{1}{4m\ln x}}c^{\frac{1}{4n\ln y}}=f(x)^{\frac{1}{4m}}f(y)^{\frac{1}{4n}},$$

бидејќи согласно неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина имаме

$$\frac{\frac{1}{m\ln x}+\frac{1}{n\ln y}}{2}\ge\frac{2}{m\ln x+n\ln y}.$$

112. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(x+y)f(f(x)-y)=xf(x)-yf(y), \tag{1}$$

за секои $x, y \in \mathbf{R}$.

**Решение.** Да означиме $a=f(0)$ и во (1) да ставиме $x=y=0$. Добиваме $af(a)=0$, т.е. $a=0$ или $f(a)=0$. Очигледно и двете равенства означуваат дека $f(a)=0$.

Во (1) ставаме $x=0$ и добиваме

$$f(y)f(a-y)=-yf(y). \tag{2}$$

од каде добиваме $f(y)=0$ или $f(a-y)=-y$. Ако ставиме $aiy=u$, заклучуваме дека при $u \neq 0$ и $f(u) \neq 0$ имаме $f(u)=u-a$. Според тоа

$$u \neq 0 \implies f(u)=0 \text{ или } f(u)=u-a. \tag{3}$$

Ќе разгледаме два случаја.

*Случај* 1. $f(u)=0$, за секој $u \neq 0$.

Ако $a=0$, тогаш функцијата $f \equiv 0$ е решение. Нека $a \neq 0$. Тогаш $xf(x)=yf(y)$, за секои $x, y \in \mathbf{R}$, т.е. десната страна во (1) е идентична на 0. Левата страна може да е различна од нула само ако истовремено имаме $x+y=0$ и $f(x)-y=0$. Последното не е можно, бидејќи при $x=y=0$ имаме $f(x)-y=a-0 \neq 0$, а при $x=-y \neq 0$ имаме $f(x)-y=-y \neq 0$.

Според тоа, во овој случја решенија на дадената равенка се функциите

$$f_a(x)=\begin{cases} a, & \text{ако } x=0 \\ 0, & \text{ако } x \neq 0 \end{cases}, \quad a \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

*Случај* 2. Постои $u \neq 0$ таков што $f(u) \neq 0$. Да ставиме $x=a$, $y=-u$. Добиваме $f(a-u)f(u)=uf(-u)$ и ако го искористиме (2) имаме $-uf(u)=uf(-u)$, па затоа $f(-u)=-f(u) \neq 0$. Од (3) добиваме $f(u)=u-a$ и $f(-u)=-u-a$ и ако ги одземеме овие две равенства, од претходно изнесеното следува дека $2f(u)=f(u)-f(-u)=2u$, т.е. $f(u)=0$ и $a=0$.

Ќе докажеме дека $f(x)=x$, за секој $x \in \mathbf{R}$. Нека претпоставиме дека постои $b \in \mathbf{R}$ таков што $f(b) \neq b$. Тогаш $b \neq 0$ и од (3) следува дека $f(b)=0$.

Во (1) ставаме $x=u, y=b$ и добиваме

$$f(u+b)f(u-b)=u^2 \neq 0. \tag{5}$$

Според тоа, $f(u+b) \neq 0$ и $f(u-b) \neq 0$ и оттука добиваме дека $u+b \neq 0$ и $u-b \neq 0$. Сега од (3), применета на $u+b$ и $u-b$ добиваме $f(u+b)=u+b-a=u+b$ и $f(u-b)=u-b$, па затоа од (5) добиваме $(u+b)(u-b)=u^2$, од каде следува $b=0$, што е противречност.

Лесно се гледа дека функцијата

$$f(x)=x, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{6}$$

е решение на задачата.

Конечно сите решенија на равенката (1) се дадени со (4) и (6).

113. Најди ги сите функции $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ такви што графикот на функцијата $y=cf(x)$ е симетричен во однос на правата $y=x$, за секој $c \in \mathbf{R}^+$.

**Решение.** Функцијата $g:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ е симетрична во однос на правата $y=x$ ако и само ако $g(g(x))=x$, за секој $x\in\mathbf{R}^+$.

Нивистина, нека графикот на функцијата $y=g(x)$ е симетричен во однос на правата $y=x$. Точката $X(x,g(x))$ припаѓа на графикот на функцијата $y=g(x)$ и да ја разгледаме точката $Y(g(x),x)$. Тогаш правата $XY$ има коефициент на правец $k=\frac{g(x)-x}{x-g(x)}=-1$, што значи дека е нормална на правата $y=x$ и како средината на отсечката $XY$ е $Z(\frac{x+g(x)}{2},\frac{g(x)+x}{2})$ и припаѓа на правата $y=x$ заклучуваме дека $(x,g(x))$ и $(g(x),x)$ се точки од графикот на функцијата $y=g(x)$. Ако наместо $x$ ставиме $g(x)$ добиваме дека $(g(x),g(g(x)))$ и $(g(x),x)$ се точки од графикот на функцијата $y=g(x)$, што значи дека $g(g(x))=x$, за секој $x\in\mathbf{R}^+$.

Обратно, нека $g(g(x))=x$, за секој $x\in\mathbf{R}^+$. Точката $(x,g(x))$ припаѓа на графикот на функцијата $y=g(x)$. Ако наместо $x$ ставиме $g(x)$ добиваме дека точката $(g(x),g(g(x)))\equiv(g(x),x)$ припаѓа на графикот на функцијата $y=g(x)$. Симетралата на отсечката со крајни точки $(x,g(x))$ и $(g(x),x)$ е правата

$$y-\frac{x+g(x)}{2}=-\frac{g(x)-x}{x-g(x)}(x-\frac{x+g(x)}{2}),$$

т.е. правата $y=x$, што значи дека графикот на функцијата $y=g(x)$ е симетричен во однос на правата $y=x$.

Да се вратиме на задачата. Од условот имаме дека за $g(x)=cf(x),\ c>0,$ $x>0$ важи $g(g(x))=x$, т.е. $cf(c(f(x))=x$. Од произволноста на $c>0, x>0$ следува дека за $c=\frac{1}{f(x)}$ важи $\frac{1}{f(x)}f(1)=x$, односно $f(x)=\frac{f(1)}{x}$. Јасно, $f(1)=a>0$, што значи дека решение на задачата се функциите од облик $f(x)=\frac{a}{x}, a>0, x>0$. Навистина, за овие функции, при $c>0$, важи:

$$cf(cf(x))=cf(c\tfrac{a}{x})=c\frac{a}{\frac{ca}{x}}=x,$$

што значи дека графикот на функцијата $cf(x)$ е симетричен во однос на правата $y=x$.

114. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(x+xy+f(y))=(f(x)+\tfrac{1}{2})(f(y)+\tfrac{1}{2}),\text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

**Решение.** Во равенката ставаме $y=-1$ и добиваме

$$f(f(-1))=(f(x)+\tfrac{1}{2})(f(-1)+\tfrac{1}{2}).$$

Ако $f(-1)+\frac{1}{2}\neq 0$, тогаш за секој $x\in\mathbf{R}$ важи

$$f(x)+\tfrac{1}{2}=\frac{f(f(-1))}{f(-1)+\frac{1}{2}}=c\in\mathbf{R},$$

па затоа за секој $x,y\in\mathbf{R}$ имаме

$$f(x)=c-\tfrac{1}{2},\ f(y)=c-\tfrac{1}{2}\ \text{и}\ f(x+xy+f(y))=c-\tfrac{1}{2}$$

и ако замениме во почетната равенка добиваме $c-\frac{1}{2}=c^2$, т.е. $2c^2-2c+1=0$, што не е можно, бидејќи $2c^2-2c+1=c^2+(c-1)^2>0$, за секој $c\in\mathbf{R}$.

Од добиената противречност следува дека $f(-1)+\frac{1}{2}=0$, односно $f(-1)=-\frac{1}{2}$. Сега, ако во почетната равенка земеме $x=0$, $y=-1$ добиваме

$$f(f(-1))=(f(0)+\tfrac{1}{2})(f(-1)+\tfrac{1}{2})=0,$$

што значи $f(-\frac{1}{2})=0$.

Нека претпоставиме дека постои $y\neq-1$ таков што $f(y)=-\frac{1}{2}$. Тогаш, ако замениме во почетната равенка добиваме

$$f(x+xy-\tfrac{1}{2})=0,\ \text{т.е.}\ f(x(1+y)-\tfrac{1}{2})=0.$$

Сега, за $x=\frac{t+\frac{1}{2}}{1+y}, t\in\mathbf{R}$ со замена во последната равенка добиваме $f(t)=0$. Но, тогаш од условот на задачата следува $0=(0+\frac{1}{2})(0+\frac{1}{2})$, што е противречност. Од добиената противречност следува

$$f(y)=-\tfrac{1}{2}\ \text{ако и само ако}\ y=-1. \qquad (1)$$

Нека $y\neq-1$ и да земеме $x=\frac{-\frac{1}{2}-f(y)}{y+1}$. Тогаш од $f(-\frac{1}{2})=0$ следува

$$0=f(-\tfrac{1}{2})=f(\frac{-\frac{1}{2}-f(y)}{y+1}+\frac{-\frac{1}{2}-f(y)}{y+1}y+f(y))=(f(y)+\tfrac{1}{2})(f(\frac{-\frac{1}{2}-f(y)}{y+1})+\tfrac{1}{2})$$

и како за $y\neq-1$ важи $f(y)+\frac{1}{2}\neq0$ од последното равенство следува

$$f(\frac{-\frac{1}{2}-f(y)}{y+1})+\frac{1}{2}=0,$$

од каде заради (1) добиваме $\frac{-\frac{1}{2}-f(y)}{y+1}=-1$, т.е. $f(y)=y+\frac{1}{2}$. Лесно се проверува дека оваа функција го задоволова условот на задачата.

115. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$xf(x+xy)=xf(x)+f(x^2)f(y),\ \text{за секои}\ x,y\in\mathbf{R}. \qquad (1)$$

**Решение.** Ако во (1) ставиме $x=y=0$ добиваме $(f(0))^2=0$, па затоа $f(0)=0$. Ако во (1) ставиме $y=-1$, тогаш равенката го добива обликот

$$xf(x)+f(x^2)f(-1)=0. \qquad (2)$$

Можни се следниве случаи $f(-1)=0$ и $f(-1)\neq0$.

Ако $f(-1)=0$, тогаш од (2) добиваме $xf(x)=0$, за секој $x\in\mathbf{R}$, што значи $f(x)=0$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Лесно се проверува дека оваа функција е решение на дадената равенка.

Нека $f(-1)\neq 0$. Во (2) ставаме $x=-1$ и добиваме $f(-1)(f(1)-1)=0$, па затоа $f(1)=1$. Во (2) ставаме $x=1$ и добиваме $f(1)(f(-1)+1)=0$, од што следува $f(-1)=-1$, па од (2) следува $xf(x)-f(x^2)=0$, т.е.

$$xf(x)=f(x^2). \qquad (3)$$

Понатаму, во (1) ставаме $y=x-1$ и добиваме

$$xf(x^2)=xf(x)+f(x^2)f(x-1). \qquad (4)$$

Сега, од (3) и (4) следува $xf(x^2)=f(x^2)+f(x^2)f(x-1)$, односно

$$f(x^2)[f(x-1)-(x-1)]=0. \qquad (5)$$

Ќе докажеме дека $f(a)\neq 0$, за $a\neq 0$. Нека претпоставиме дека $f(a)=0$, за некој $a\neq 0$. Сега, од (3) следува $f(a^2)=0$ и ако во (1) ставиме $x=a$ добиваме $af(a+ay)=0$, односно $f(a+ay)=0$, за секој $y\in\mathbf{R}$. Но, тогаш за $y=-\frac{a+1}{a}$ наоѓаме $f(-1)=0$, што противречи на $f(-1)=-1$. Конечно од добиената противречност следува $f(a)\neq 0$, за $a\neq 0$. Но, тоа значи дека за $x\neq 0$ важи $f(x^2)\neq 0$, па од (5) и од $f(-1)=-1$ добиваме $f(x-1)=x-1$, за секој $x\in\mathbf{R}$, т.е. $f(x)=x$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Лесно се проверува дека оваа функција е решение на дадената равенка.

116. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ такви што

$$xf(y)-yf(x)=f(\tfrac{y}{x}). \qquad (1)$$

**Решение.** Ако во (1) ставиме $x=1$, добиваме $f(1)=0$. Ако пак ставиме $y=1$, заради $f(1)=0$ добиваме

$$f(\tfrac{1}{x})=-f(x). \qquad (2)$$

Понатаму, во (1) ставаме $y=\frac{1}{x}$ и од (2) последователно добиваме

$$xf(\tfrac{1}{x})-\tfrac{1}{x}f(x)=f(\tfrac{1}{x^2}),$$

$$-xf(x)-\tfrac{1}{x}f(x)=-f(x^2)$$

односно

$$f(x^2)=(x+\tfrac{1}{x})f(x). \qquad (3)$$

Ако во (1) наместо $x$ и $y$ ставиме $x^2$ и $y^2$, соодветно, добиваме

$$x^2f(y^2)-y^2f(x^2)=f(\tfrac{y^2}{x^2}),$$

па ако ја искористиме (3) наоѓаме

$$x^2(y+\tfrac{1}{y})f(y)-y^2(x+\tfrac{1}{x})f(x)=(\tfrac{x}{y}+\tfrac{y}{x})f(\tfrac{y}{x}). \qquad (4)$$

Понатаму, ако во (4) за $f(\frac{y}{x})$ замениме од (1), после средувањето, ја добиваме равенката

$$y(x^2-1)f(y)=x(y^2-1)f(x),$$

која ја запишуваме во обликот

$$\frac{f(x)}{x-\frac{1}{x}}=\frac{f(y)}{y-\frac{1}{y}}.$$

Но, $x$ и $y$ се произволни, па затоа од последната равенка следува дека

$$f(x)=c(x-\tfrac{1}{x}), \text{ за секој } x\in\mathbf{R}. \qquad (5)$$

Лесно се проверува дека функциите (5) се решенија на почетната равенка.

117. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(x-f(y))=xf(y)-yf(x)+g(x), \text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}. \qquad (1)$$

**Решение.** Ако во (1) ставиме $x=0$ добиваме

$$f(-f(y))=yf(0)+g(0). \qquad (2)$$

Ќе разгледаме два случаја: $f(0)=0$ и $f(0)\neq 0$.

Ако $f(0)=0$, тогаш од (1), при $y=0$ следува $f(x)=g(x)$, а од (2) следува $f(-f(y))=0$. Сега, ако во (1) го замениме $y$ со $-f(y)$, тогаш заради последните равенства добиваме $f(x)f(y)=0$ и како ова важи за секои $x,y\in\mathbf{R}$ добиваме

$$f(x)=g(x)=0, \text{ за секој } x\in\mathbf{R}. \qquad (3)$$

Лесно се проверува дека функциите (3) се решенија на почетната равенка.

Нека $f(0)\neq 0$. Ќе докажеме дека $f$ е биекција. Навистина, ако $f(u)=f(v)$, тогаш $-f(u)=-f(v)$, па затоа

$$f(-f(u))=f(-f(v))$$

и од (2) следува дека

$$uf(0)+g(0)=vf(0)+g(0),$$

т.е. $u=v$, што значи дека $f$ е инејкција. Нека $z\in\mathbf{R}$. Тогаш за $y=\frac{z-g(0)}{f(0)}$, според (2) имаме

$$f(-f(y))=yf(0)+g(0)=\frac{z-g(0)}{f(0)}f(0)+g(0)=z,$$

што значи дека $f$ е сурјекција.

Бидејќи $f$ е биекција, постои $c\in\mathbf{R}$ таков да $f(c)=0$. Ако во (1) ставиме $y=c$ добиваме

$$f(x)=-cf(x)+g(x), \text{ т.е. } (1+c)f(x)=g(x)$$

и ако во последното равенство ставиме $x=c$ добиваме $g(c)=0$. Ако во (1) ставиме $x=c$ добиваме

$$f(c-f(y))=cf(y)$$

и ако во последното равенство наместо $f(y)$ ставиме $c-x$, што е можно бидејќи $f$ е сурјекција, наоѓаме $f(x)=c(c-x)$, па со замена во

$$(1+c)f(x)=g(x)$$

наоѓаме

$$g(x)=c(1+c)(c-x)\,.$$

Лесно се проверува дека функциите

$$f(x)=c(c-x) \text{ и } g(x)=c(1+c)(c-x)\,,\ c\in\mathbf{R}$$

се решенија на (1). За $c=0$ се добива решението $f(x)=g(x)=0$.

118. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ такви што

$$f(f(x)+y)=xf(1+xy)\,,\text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}^+\,. \qquad (1)$$

**Решение.** Ќе докажеме дека функцијата $f$ монотоно не расте. Нека претпоставиме дека постојат $a,b\in\mathbf{R}^+$, такви да $a<b$ и $f(a)<f(b)$. Тогаш $w=\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}>0$ и $w>f(b)$. Понатаму, ако во (1) ставиме $x=a$ и $y=w-f(a)$ добиваме

$$f(w)=af(1+ab\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a})\,,$$

а ако ставиме $x=b$ и $y=w-f(b)$ добиваме

$$f(w)=bf(1+ab\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a})\,.$$

Според тоа,

$$af(1+ab\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a})=f(w)=bf(1+ab\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a})\,,$$

па затоа $a=b$, што противречи на $a<b$. Од добиената противречност следува дека од $0<a<b$ следува $f(b)\le f(a)$.

Ако во (1) ставиме $x=y=1$ добиваме $f(f(1)+1)=f(2)$, а ако ставиме $x=1, y=2$ добиваме $f(f(1)+2)=f(3)$. Слично, за $x=2, y=1$ имаме $f(f(2)+1)=2f(3)$. Според тоа,

$$\begin{aligned}2f(3)&=f(f(2)+1)=f(f(f(1)+1)+1)=(f(1)+1)f(1+(f(1)+1)\cdot 1)\\&=(f(1)+1)f(f(1)+2)=(f(1)+1)f(3)\end{aligned}$$

и како $f(3)>0$ добиваме $f(1)+1=2$, т.е. $f(1)=1$.

Нека $x>1$ и во (1) да ставиме $y=1-\frac{1}{x}$. Добиваме

$$f(f(x)+1-\tfrac{1}{x})=xf(1+x(1-\tfrac{1}{x}))=xf(x)\,. \qquad (2)$$

Ако $f(x)>\frac{1}{x}$, тогаш $f(x)+1-\frac{1}{x}>1$. Но, функцијата $f$ монотоно опаѓа, па од (2) добиваме $xf(x)=f(f(x)+1-\frac{1}{x})\le f(1)=1$, односно $f(x)\le\frac{1}{x}$, што е противречност. Ако $f(x)<\frac{1}{x}$, тогаш $f(x)+1-\frac{1}{x}<1$. Но, функцијата $f$ монотоно опаѓа, па аналогно од (2) добиваме $xf(x)\ge f(1)=1$, односно $f(x)\ge\frac{1}{x}$, што повторно е противречност. Според тоа, $f(x)=\frac{1}{x}$, за секој $x>1$. Понатаму, ако $x>0$, тогаш $f(x)+1>1$, па затоа $f(f(x)+1)=\frac{1}{f(x)+1}$.

Ако пак во (1) ставиме $y=1$ и искористиме дека $f(x)=\frac{1}{x}$, за секој $x>1$ добиваме

$$f(f(x)+1)=xf(1+x)=\tfrac{x}{1+x}.$$

Според тоа, $\frac{1}{f(x)+1}=\frac{x}{1+x}$, односно $f(x)=\frac{1}{x}$, за $x>0$.

119. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ такви што

$$xf(x+\tfrac{1}{y})+yf(y)+\tfrac{y}{x}=yf(y+\tfrac{1}{x})+xf(x)+\tfrac{x}{y}, \text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

**Решение.** Ја воведуваме смената $f(x)=g(x)+x$, при што дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$xg(x+\tfrac{1}{y})+yg(y)=yg(y+\tfrac{1}{x})+xg(x) \tag{1}$$

Ако во (1) ставиме $y=1$ добиваме

$$g(1+\tfrac{1}{x})=xg(x+1)-xg(x)+g(1). \tag{2}$$

Понатаму, ако во (2) наместо $x$ ставиме $\frac{1}{x}$ добиваме

$$xg(1+x)=g(\tfrac{1}{x}+1)-g(\tfrac{1}{x})+xg(1). \tag{3}$$

Ги собираме (2) и (3) и добиваме

$$xg(x)+g(\tfrac{1}{x})=(x+1)g(1). \tag{4}$$

Ако во (1) ставиме $y=-1$ добиваме

$$g(\tfrac{1}{x}-1)=xg(x)-xg(x-1)+g(-1). \tag{5}$$

Ако во (5) наместо $x$ ставиме $\frac{1}{x}$ добиваме

$$g(\tfrac{1}{x}-1)=g(\tfrac{1}{x})-xg(x-1)+xg(-1). \tag{6}$$

Од (5) ја одземаме (6) и добиваме

$$xg(x)-g(\tfrac{1}{x})=(x-1)g(-1). \tag{7}$$

Ако ги собереме (4) и (7) добиваме

$$g(x)=\tfrac{g(1)+g(-1)}{2}+\tfrac{g(1)-g(-1)}{2}\tfrac{1}{x},$$

и како $g(1)$ и $g(-1)$ се произволни константи добиваме дека

$$g(x)=A+\tfrac{B}{x},\ A,B\in\mathbf{R}.$$

Конечно, решение на почетната равенка се функциите

$$f(x)=A+\tfrac{B}{x}+x,\ A,B\in\mathbf{R}.$$

120. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(f(x+y))=f(x+y)+f(x)f(y)-xy, \text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

**Решение.** Ако $y=0$, тогаш

$$f(f(x))=f(x)+f(0)f(x), \text{ за секој } x\in\mathbf{R}. \tag{1}$$

Нека со $E(f)$ го означиме множеството вредности на $f$. Ставаме $f(0)=c$ и од (1) добиваме

$$f(z)=(c+1)z, \text{ за секој } z\in E(f). \tag{2}$$

Бидејќи $f(x+y)\in E(f)$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$ од (2) следува

$$(c+1)f(x+y)=f(x+y)+f(x)f(y)-xy\,,$$

т.е.

$$cf(x+y)=f(x)f(y)-xy\,. \tag{3}$$

Нека $c\neq 0$. Тогаш $0\notin E(f)$, бидејќи од (2) ќе следува $f(0)=0$, што е противречност. Во (3) ставаме $x=-y=c$ и добиваме

$$c^2=cf(0)=f(c)f(-c)+c^2,$$

од што следува $f(c)=0$ или $f(-c)=0$, па затоа $0\in E(f)$, што повторно е противречност. Значи, $c=0$. Понатаму, од (3) имаме

$$f(x)f(y)=xy\,. \tag{4}$$

Лесно се гледа дека функцијата $f(x)\equiv 0$ не ги задоволува условите на задачата. Затоа постои $x_0\in E(f)$, $x_0\neq 0$. Ако во (4) ставиме $y=x_0$ имаме $f(x)x_0=xx_0$, односно $f(x)=x$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

Лесно се проверува дека функцијата $f(x)=x$ е решение на почетната равенка.

121. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(f(x-y))=f(x)-f(y)+f(x)f(y)-xy\,,\text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}\,.$$

**Решение.** Ако $y=0$, тогаш

$$f(f(x))=f(x)-f(0)+f(x)f(0)\,. \tag{1}$$

Нека со $E(f)$ го означиме множеството вредности од $f$. Дефинираме $c=f(0)$. Од (1) имаме

$$f(z)=(c+1)z-c\,,\text{ за секој } z\in E(f)\,. \tag{2}$$

Бидејќи $f(x-y)\in E(f)$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$, ако во (2) ставиме $z=f(x-y)$ добиваме

$$(c+1)f(x-y)-c=f(x)-f(y)+f(x)f(y)-xy\,,\text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}\,. \tag{3}$$

Нека $c\neq 0$. Тогаш $0\notin E(f)$, бидејќи ако во (2) ставиме $z=0$ добиваме $c=f(0)=-c$, т.е. $c=0$, што е противречност. Нека $x_0\in E(f)$ и $x_0\neq 0$. Ако во (3) ставиме $x=y=x_0$ добиваме

$$(c+1)f(0)-c=f(x_0)-f(x_0)+f(x_0)f(x_0)-x_0^2=[f(x_0)]^2-x_0^2\,.$$

Од последната равенка и од (2) добиваме

$$(c+1)c-c=[(c+1)x_0-c]^2-x_0^2=(c+1)^2x_0^2-2c(c+1)x_0+c^2-x_0^2$$

т.е.

$$0=cx_0((c+2)x_0-2(c+1))\,,$$

па како $cx_0\neq 0$ имаме

$$(c+2)x_0-2(c+1)=0\,,\text{ за секој } x_0\in E(f)\,.$$

Според тоа, $E(f)$ има само еден елемент, т.е. $f(x)\equiv\text{const}$, што не е можно. Од добиената противречност следува $c=0$. Значи, (3) можеме да ја запишеме во обликот

$$f(x-y)=f(x)-f(y)+f(x)f(y)-xy\,,\text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}\,. \tag{4}$$

Во (4) ставаме $x=y$ и добиваме

$$[f(x)]^2 = x^2 \text{, за секој } x \in \mathbf{R}. \qquad (5)$$

Освен тоа, за $x=0$ од (4) имаме

$$f(-y) = -f(y) \text{, за секој } y \in \mathbf{R}. \qquad (6)$$

Бидејќи $c=0$, условот (2) можеме да го запишеме во облик

$$f(z) = z \text{ , за секој } z \in E(f). \qquad (7)$$

Да претпоставиме дека постои $x_0 \in \mathbf{R}$ таков што $x_0 \notin E(f)$. Тогаш од (5) и (7) следува дека $f(x_0) = -x_0$, па од (7) имаме $f(-x_0) = -x_0 = f(x_0)$, што противречи на (6). Значи, $E(f) = \mathbf{R}$ и затоа од (7) следува $f(x) = x$.

Лесно се проверува дека функцијата $f(x) = x$ е решение на почетната равенка.

122. Најди ги сите функции $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такви што

$$g(x+y) + g(x)g(y) = g(xy) + g(x) + g(y) \text{, за секои } x, y \in \mathbf{R}. \qquad (1)$$

**Решение.** Во (1) ставаме $x = y = 0$ и добиваме $(g(0))^2 = 2g(0)$, па затоа $g(0) = 0$ или $g(0) = 2$.

Ако $g(0) = 2$, тогаш во (1) ставаме $y = 0$ и добиваме $g(x) = 2$ за секој $x \in \mathbf{R}$.

Нека $g(0) = 0$. Во (1) ставаме $x = y = 2$ и добиваме $(g(2))^2 = 2g(2)$, па затоа $g(2) = 2$ или $g(2) = 0$.

*i)* Нека $g(2) = 0$. За $x = y = 1$ имаме $(g(1))^2 = 3g(1)$, па така $g(1) = 3$ или $g(1) = 0$. Ако $g(1) = 3$, тогаш за $y = 1$ добиваме $g(x+1) + g(x) = 3$ и ако $x$ го замениме со $x+1$ наоѓаме $g(x+2) + g(x+1) = 3$, што значи дека $g(x+2) = g(x)$. Освен тоа, за $y = 2$ имаме $g(x+2) = g(2x) + g(x)$, па затоа $g(2x) = 0$, што противречи на $g(1) = 3$. Затоа $g(x) = 0$. Тогаш, при $y = 1$ имаме $g(x+1) = 2g(x)$ и ако $x$ се замени со $x-1$ наоѓаме $g(x-1) = \frac{1}{2}g(x)$. Освен тоа, за $x = 1$ и $y = -1$ добиваме $g(-1) = 0$. Сега при $y = -1$ имаме $g(x-1) = g(-x) + g(x)$, па така $g(-x) + g(x) = \frac{1}{2}g(x)$, од што следува $g(-x) + \frac{1}{2}g(x) = 0$. Ако $x$ го замениме со $-x$ добиваме дека $g(x) + \frac{1}{2}g(-x) = 0$, па затоа $g(x) = g(-x) = 0$, за секој $x \in \mathbf{R}$.

*ii)* Нека $g(2) = 2$. За $x = y = 1$ добиваме $2 + (g(1))^2 = 3g(1)$, па значи $g(1) = 1$ или $g(1) = 2$. Ако $g(1) = 2$, тогаш при $y = 1$ имаме $g(x+1) = g(1) = 2$, што не е можно за $x = -1$, бидејќи $g(0) = 0$. Затоа $g(1) = 1$. Сега, за $y = 1$ имаме $g(x+1) = g(x) + 1$, од што следува $g(n) = n$, за секој $n \in \mathbf{Z}$ и $g(x+n) = g(x) + n$, за секој $x \in \mathbf{R}$ и за секој $n \in \mathbf{Z}$. Затоа, ако $r \in \mathbf{Q}$, $r = \frac{m}{n}$, за $m \in \mathbf{Z}$ и $n \in \mathbf{N}$, при $x = n$, $y = r$ добиваме $g(r) = r$. Според тоа, $g(x) = x$, за секој $x \in \mathbf{Q}$. Понатаму, за $n \in \mathbf{Z}$ ставаме $y = n$ и наоѓаме дека $g(nx) = ng(x)$ и аналогно $g(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n}g(x)$, за секој $n \in \mathbf{Z}$ и секој

$x\in\mathbf{R}$. Последното значи дека $g(rx)=rg(x)$, за секој $r\in\mathbf{Q}$ и за секој $x\in\mathbf{R}$. Од друга страна, за $r\in\mathbf{Q}$ ставаме $y=r$ и наоѓаме $g(x+r)r+g(x)$, за секој $r\in\mathbf{Q}$ и за секој $x\in\mathbf{R}$. Сега, при $y=-1$ добиваме $g(-x)=-g(x)$, а при $y=-x$ добиваме $g(x^2)=(g(x))^2$, што значи дека $g(t)\geq 0$, за секој $t\geq 0$. Конечно, ќе докажеме дека $g(x)=x$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Нека претпоставиме дека за некој $x\in\mathbf{R}$ важи $g(x)\neq x$ и нека $g(x)<x$. Постои $r\in\mathbf{Q}$ таков што $g(x)<r<x$. Тогаш $r>g(x)=g(x-r)+r\geq r$, што е противречност. Слично се покажува дека $g(x)>x$ доведува до противречност. Значи, $g(x)=x$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

Конечно, бараните функции се $g(x)\equiv 0, g(x)\equiv 2$ и $g(x)=x$.

123. За функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ќе велиме дека е *адитивна* ако

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

Нека $a\in\mathbf{R}$ и $f_1, f_2,..., f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ се адитивни функции такви што

$$f_1(x)f_2(x)...f_n(x)=ax^n\text{, за секој } x\in\mathbf{R}.$$

Докажи дека постојат $b_i, i=1,2,...,n$ такви $f_i(x)=b_ix$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

**Решение.** Јасно, за адитивна функција $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ важи $f(0)=0$ и $f(m)=mf(1)$, за секој $m\in\mathbf{Z}$. Означуваме $f_i(1)=c_i$ и нека $x$ е произволен реален број. Тогаш за секој цел број $m$ важи

$$\prod_{i=1}^{n} f_i(1+mx)=\prod_{i=1}^{n}[c_i+mf_i(x)]=a(1+mx)^n. \qquad \mathbf{(1)}$$

Да ги разгледаме полиномите

$$P_x(T)=\prod_{i=1}^{n}[c_i+f_i(x)T] \text{ и } Q_x(T)=a(1+xT)^n.$$

Можни се два случаја:

*i)* $a\neq 0$. Тогаш $a=\prod\limits_{i=1}^{n} f_i(1)=\prod\limits_{i=1}^{n} c_i\neq 0$ и затоа $c_i\neq 0$, за $i=1,2,...,n$. Во овој случај полиномите $P_x(T)$ и $Q_x(T)$ се ненулти и од (1) заклучуваме дека $P_x(T)=Q_x(T)$. Според тоа, ако се искористи разложувањето на полиноми на множители добиваме дека постојат реални броеви $b_i, i=1,2,...,n$ такви што $c_i+f_i(x)T=b_i(1+xT)$, па затоа $c_i=b_i$ и $f_i(x)=xb_i$. Последното равенство важи за секој $x\in\mathbf{R}$ и за секој $i=1,2,...,n$, т.е. $f_i(x)=c_ix$, за секој $x\in\mathbf{R}$ и за секој $i=1,2,...,n$.

*ii)* $a=0$. Нека претпоставиме дека $\prod\limits_{i=1}^{n} f_i(x)=0$, за секој $x\in\mathbf{R}$ и дека за некој $i$ постои $a_i\in\mathbf{R}$ таков што $f_i(a_i)\neq 0$. Да ги разгледаме реалните броеви $x_m=a_1+ma_2+...+m^{n-1}a_n$, каде $m\in\mathbf{Z}$. Тогаш

$$0=\prod_{i=1}^{n} f_i(x_m)=\prod_{i=1}^{n}(f_i(a_1)+f_i(a_2)m+...+f_i(a_n)m^{n-1}),$$

што значи полиномот

$$\prod_{i=1}^{n}(f_i(a_1)+f_i(a_2)T+...+f_i(a_n)T^{n-1})$$

е нулти полином. Затоа

$$f_i(a_1)+f_i(a_2)T+...+f_i(a_n)T^{n-1}=0, \text{ за секој } i,$$

т.е. $f_i(a_i)=0$, што е противречност.

124. Докажи дека за функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ важи

$$f(xy+x+y)=f(xy)+f(x)+f(y), \text{ за секои } x,y\in\mathbf{R} \qquad (1)$$

ако и само ако е адитивна, т.е. ако и само ако

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}. \qquad (2)$$

**Решение.** Јасно, ако е точно равенството (2), тогаш е точно и равенството (1). Нека претпоставиме дека е исполнето равенството (1). Ако земеме $y=u+v+uv$, со замена во (1) добиваме

$$\begin{aligned}f(x+u+v+uv+xu+xv+xuv)&=f(x)+f(u+v+uv)+f(xu+xv+xuv)\\&=f(x)+f(u)+f(v)+f(uv)+f(xu+xv+xuv).\end{aligned}$$

Ако во последното равенство ги замениме местата на $x$ и $u$ добиваме

$$\begin{aligned}f(u+x+v+xv+ux+uv+uxv)&=f(u)+f(x+v+xv)+f(ux+uv+uxv)\\&=f(u)+f(x)+f(v)+f(xv)+f(xu+uv+xuv).\end{aligned}$$

Сега од последните две равенства следува

$$f(uv)+f(xu+xv+xuv)=f(xv)+f(xu+uv+xuv). \qquad (3)$$

Во (3) ставаме $x=1$ и добиваме

$$f(uv)+f(u+v+uv)=f(v)+f(u+2uv),$$

и ако го искористиме условот (1) наоѓаме

$$f(u)+2f(uv)=f(u+2uv). \qquad (4)$$

Во (4) за $u=0$ добиваме $f(0)=0$, за $v=-1$ добиваме $f(-u)=-f(u)$ и за $v=-\frac{1}{2}$ имаме $f(u)=2f(\frac{u}{2})$, односно $f(2u)=2f(u)$. Сега од (4) следува

$$f(u)+f(2uv)=f(u+2uv). \qquad (5)$$

Конечно, за $x\neq 0$ (2) непосредно следува од (5), а за $x=0$ (2) следува од докажаното равенство $f(0)=0$.

125. Нека функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е адитивна, т.е.

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

за секои $x,y\in\mathbf{R}$. Докажи дека, ако $f$ расте на некој интервал $[a,b]$, тогаш $f$ расте на $\mathbf{R}$.

**Решение.** Со индукција непосредно се докажува дека

$$f(nx)=nf(x), \qquad (1)$$

са секои $n\in\mathbf{Z}, x\in\mathbf{R}$. Нека $t\in[0,b-a]$. Имаме $a\leq a+t\leq b$ и како $f$ расте на $[a,b]$ добиваме

$$f(t)=f((a+t)-a)=f(a+t)-f(a)\geq 0\,. \qquad (2)$$

За произволен $x\in\mathbf{R}^+$ постои $n\in\mathbf{N}$ таков да $n(b-a)>x$. Значи, $f(\frac{x}{n})\geq 0$. Од (1) следува

$$f(x)=f(n\cdot\tfrac{x}{n})=nf(\tfrac{x}{n})\geq 0\,. \qquad (3)$$

Нека $x,y\in\mathbf{R}$ се такви да $x<y$. Тогаш од (1) и (3) следува

$$f(y)-f(x)=f(y)+f(-x)=f(y-x)\geq 0,$$

т.е. $f$ расте на $\mathbf{R}$.

126. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е адитивна функција, монотона на некој интервал $[c,d]$. Докажи дека $f(x)=ax$, каде $a$ е некој реален број.

**Решение.** Од претходната задача следува дека $f$ е монотона на $\mathbf{R}$. Ако во $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ставиме $x=1, y=0$ добиваме $f(1)=f(1)+f(0)$, од што следува $f(0)=0$. Понатаму, ако во $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ставиме $y=-x$, добиваме $f(0)=f(x)+f(-x)$ од што следува $f(-x)=-f(x)$. Сега, од адитивноста со математичка индукција добиваме $f(mx)=mf(x)$, за секој $m\in\mathbf{N}^+$, што заедно со $f(0)=0$ дава

$$f(nx)=nf(x)\,, \qquad (1)$$

за секој $n\in\mathbf{Z}$ и за секој $x\in\mathbf{R}$. Ако $p,q\in\mathbf{Z}$, $q\neq 0$, тогаш од (1) следува

$$\begin{aligned} f(\tfrac{p}{q}) &= \tfrac{1}{q}(qf(\tfrac{p}{q}))=\tfrac{1}{q}f(q\tfrac{p}{q}) \\ &= \tfrac{1}{q}f(p)=\tfrac{p}{q}f(1) \end{aligned},$$

т.е. $f(r)=ar$, за секој $r\in\mathbf{Q}$, каде $a=f(1)$. Нека претпоставиме дека функцијата $f$ монотоно расте. Нека $t\in\mathbf{R}$. Според лема 4.4 постојат низи рационални броеви $\{r_n^{'}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{r_n^{''}\}_{n=1}^{\infty}$ такви да важи $r_n^{'}\leq t\leq r_n^{''}$ и

$$\lim_{n\to\infty} r_n^{'}=\lim_{n\to\infty} r_n^{''}=t\,.$$

Понатаму, од $f(r_n^{'})\leq f(t)\leq f(r_n^{''})$ следува $ar_n^{'}\leq f(t)\leq ar_n^{''}$, па затоа

$$at=\lim_{n\to\infty} ar_n^{'}\leq f(t)\leq \lim_{n\to\infty} ar_n^{''}=at\,,$$

т.е. $f(t)=at$.

127. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е адитивна функција таква да за $x\in\mathbf{R}^+$ важи $f(x)\in\mathbf{R}^+$. Докажи дека $f(x)=ax$, каде $a$ е некој реален број.

**Решение.** Ќе докажеме дека функцијата монотоно расте. Нека $x<y$. Тогаш $y-x>0$, па затоа $f(y)-f(x)=f(y-x)>0$, т.е. $f(x)<f(y)$. Сега тврдењето следува од претходната задача.

128. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е адитивна функција, ограничена во околина на точката $x_0$. Докажи дека $f(x)=ax$, каде $a$ е некој реален број.

**Решение.** Од решението на задача 126 следува дека $f(x)=ax$, за $r\in\mathbf{Q}$. Да ја разгледаме функцијата $g(x)=f(x)-ax$, $x\in\mathbf{R}$. Функцијата $g$ е адитивна и ограничена во околина на точката $x_0$, бидејќи

$$g(x+y)=f(x+y)-a(x+y)=f(x)+f(y)-ax-ay=g(x)+g(y).$$

Од ограниченоста на функцијата $f$ на некој интервал $[c,d]$ кој ја содржи точката $x_0$ и монотоноста на функцијата $-ax$ следува дека $g$ е ограничена од горе на интервалот $[c,d]$, да кажеме со $M$. Нека $y_0$ е произволен реален број. Постои рационален број $r\in[c-y_0,d+y_0]$. Тогаш $z=y_0+r\in[c,d]$ и затоа

$$g(y_0)=g(z-r)=g(z)-g(r)=g(z)\le M.$$

Значи, функцијата е ограничена од горе со $M$ на $\mathbf{R}$. Од

$$g(y_0)=\tfrac{1}{n}g(ny_0)\le\tfrac{M}{n},$$

$$g(y_0)=-\tfrac{1}{n}g(-ny_0)\ge-\tfrac{M}{n}$$

за секој $n\in\mathbf{N}$ следува $-\frac{M}{n}\le g(y_0)\le\frac{M}{n}$, па затоа

$$0=-\lim_{n\to\infty}\tfrac{M}{n}\le g(y_0)\le\lim_{n\to\infty}\tfrac{M}{n}=0,$$

т.е. $g(y_0)=0$, за секој $y_0\in\mathbf{R}$, што значи $f(y_0)=ay_0$, за секој $y_0\in\mathbf{R}$.

129. Најди ги сите решенија на системот функционални равенки

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$
$$f(xy)=f(x)f(y).$$

**Решение.** Од решението на задача 126 следува дека $f(r)=ar$, за секој $r\in\mathbf{Q}$. Од втората равенка на системот следува дека $f(x^2)=(f(x))^2\ge0$, за секој $x\in\mathbf{R}$, што значи $f(y)\ge0$, за $y\ge0$. Сега, од задача 127 следува $f(x)=ax$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Конечно, од втората равенка, за $x=y=1$ добиваме $a=1$ или $a=0$, што значи дека решенија на дадениот систем функционални равенки се $f(x)=0$ и $f(x)=x$.

130. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ такви да

1) $f(1)=1$,
2) $(x+y)f(x+y)=xyf(x)f(y)$, за $xy(x+y)\ne0$,
3) $f(\frac{1}{x+y})=f(\frac{1}{x})+f(\frac{1}{y})$, за $xy(x+y)\ne0$.

**Решение.** Ако во 2) ставиме $x=y=\frac{t}{2}$ добиваме дека $f(t)\ge0$, за секој $t>0$. Од 3) следува дека функцијата $g(t)=f(\frac{1}{t})$ е решение на равенката

$$g(u+t)=g(u)+g(t),\ u,t>0.$$

Но, функцијата $g$ е адитивна и како $x\in\mathbf{R}^+$ важи $g(x)\in\mathbf{R}^+$, од задача 127 следува $g(x)=ax$, т.е. $f(x)=\frac{a}{x}$, за $x>0$, за некоја константа $a\ge0$. Аналогно, $f(x)=\frac{b}{x}$, $x<0$, за некоја константа $b$. Ако во 3) ставиме $x=2, y=-1$ добиваме $f(1)=f(\frac{1}{2})+f(-1)$ и како според 1) важи $f(1)=1$ добиваме $a=\frac{a}{1}=f(1)=1$ и бидејќи $f(\frac{1}{2})=2a=2$ и $f(-1)=-b$, наоѓаме

$$b=-f(-1)=f(\tfrac{1}{2})-f(1)=2-1=1.$$

Конечно, $f(x)=\frac{1}{x}$, за секој $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

131. Најди ги сите функции $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ такви да

$$f(x^y)=f(x)^{f(y)}, \text{ за секои } x,y\in(0,+\infty). \qquad (1)$$

**Решение.** Јасно, $f(x)=1$ е решение на (1). Нека постои $c>0$ таков да $f(c)\neq 1$. Тогаш за секои $x,y>0$ важи

$$f(c)^{f(xy)}=f(c^{xy})=f((c^x)^y)=f(c^x)^{f(y)}=(f(c)^{f(x)})^{f(y)}=f(c)^{f(x)f(y)},$$

и како $f(c)\neq 1$ добиваме дека $f(xy)=f(x)f(y)$, за секои $x,y>0$. Слично, од претходното равенство и од (1) следува

$$\begin{aligned} f(c)^{f(x+y)}&=f(c^{x+y})=f(c^x c^y)=f(c^x)f(c^y)\\ &=f(c)^{f(x)}f(c)^{f(y)}=f(c)^{f(x)+f(y)} \end{aligned}$$

и како $f(c)\neq 1$ добиваме дека $f(x+y)=f(x)+f(y)$, за секои $x,y>0$. Сега, од задача 127 следува $f(x)=ax$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Понатаму, ако во (1) ставиме $x=y=1$ добиваме $f(1)=1$, па затоа $a=f(1)$. Конечно, функцијата $f(x)=x$, $x\in\mathbf{R}$ е второ решение на задачата.

132. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ за кои важи

1) $f(1)=1$,
2) $f(x+y)=f(x)+f(y)$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$,
3) $f(x)f(\frac{1}{x})=1$, за $x\neq 0$.

**Решение.** Од условите 3) и 2) следува

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)-f(x^2)}&=\frac{1}{f(x(1-x))}=f(\tfrac{1}{x(1-x)})=f(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{1-x})=f(\tfrac{1}{x})+f(\tfrac{1}{1-x})\\ &=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(1-x)}=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(1)-f(x)}=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{f(x)-f(x)^2} \end{aligned}$$

па затоа $f(x^2)=(f(x))^2$, што според 3) значи дека за секој $t>0$ важи $f(t)>0$. Сега од задача 127 следува $f(x)=ax$, за некој $a\in\mathbf{R}$. Конечно, од $1=f(1)=a$, добиваме $f(x)=x$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

133. Нека $n\in\mathbf{N}$. Најди ги сите монотони функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да

$$f(x+f(y))=f(x)+y^n, \text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

**Решение.** Нека $u,v\geq 0$ и $f(u)=f(v)$. Тогаш

$$u^n+f(x)=f(x+f(u))=f(x+f(v))=v^n+f(x),$$

па затоа $u^n = v^n$, т.е. $u = v$. Според тоа, функцијата $f$ е инјекција на интервалот $[0,+\infty)$. Да избереме $x_0 > 0$ таков што $x_0 + f(0) > 0$. Бидејќи $f(x_0 + f(0)) = f(x_0)$, заклучуваме дека $f(0) = 0$. Значи,

$$f(f(y)) = y^n \text{, за секој } y \in \mathbf{R}. \qquad (1)$$

Од $f(f(x + f(y))) = f(f(x) + y^n)$ и (1) добиваме

$$\begin{aligned}(x + f(y))^n &= f(y^n + f(x)) = f(y^n) + x^n \\ &= f(f(f(y))) + x^n = f(f(y))^n + x^n.\end{aligned}$$

Од (1) имаме имаме $f(f(1)) = 1$. Претходната релација за $x = 1$ и $y = f(1)$ дава $n = 1$. Така добиваме $f(f(y)) = y$, за секој $y \in \mathbf{R}$. Значи $f$ е биекција и $f = f^{-1}$. Сега условот на задачата го добива видот

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \text{, за секој } x, y \in \mathbf{R},$$

односно

$$f(x + z) = f(x) + f^{-1}(z) \text{, за секои } x, z \in \mathbf{R}.$$

Но, $f = f^{-1}$, што значи дека функцијата е адитивна. Но, функцијата е монотона, па од задача 126 следува $f(x) = Cx$, а од $f = f^{-1}$ следува $C = \pm 1$.

134. Најди ги сите непрекинати функции $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такви да

$$f(x) = x(x+1) + f(\tfrac{x}{2}) \text{, за секој } x \in \mathbf{R}. \qquad (1)$$

**Решение.** Со последователна примена на (1) добиваме

$$\begin{aligned}f(x) &= x(x+1) + f(\tfrac{x}{2}) = x^2 + x + f(\tfrac{x}{2}) \\ &= x^2 + x + \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{x}{2} + f(\tfrac{x}{4}) \\ &= x^2 + x + \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{x}{2} + \tfrac{x^2}{16} + \tfrac{x}{4} + f(\tfrac{x}{8}) = \ldots = \\ &= f(\tfrac{x}{2^{n+1}}) + \sum_{k=0}^{n} \tfrac{x^2}{4^k} + \sum_{k=0}^{n} \tfrac{x}{2^k}\end{aligned}$$

т.е.

$$f(x) = f(\tfrac{x}{2^{n+1}}) + x^2 \frac{1 - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} + x \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}},$$

и ако во последното равенство земеме $n \to \infty$, од непрекинатоста на функцијата $f$ добиваме

$$f(x) = f(0) + \tfrac{4}{3}x^2 + 2x.$$

135. Најди ги сите функции $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непрекинати во нулата и такви да

$$f(2x) - f(x) \le 3x^2 + x \text{ и } f(3x) - f(x) \ge 8x^2 + 2x.$$

**Решение.** Да ја разгледаме следната низа неравенства

$$f(t)-f(\tfrac{t}{2})\leq 3(\tfrac{t}{2})^2+\tfrac{t}{2}$$

$$f(\tfrac{t}{2})-f(\tfrac{t}{4})\leq 3(\tfrac{t}{4})^2+\tfrac{t}{4}$$

......................................

$$f(\tfrac{t}{2^{n-1}})-f(\tfrac{t}{2^n})\leq 3(\tfrac{t}{2^n})^2+\tfrac{t}{2^n}.$$

Ако ги собереме овие неравенства добиваме

$$f(t)-f(\tfrac{t}{2^n})\leq 3[(\tfrac{t}{2})^2+(\tfrac{t}{4})^2+...+(\tfrac{t}{2^n})^2]+\tfrac{t}{2}+\tfrac{t}{4}+...+\tfrac{t}{2^n}.$$

Бидејќи $f$ е непрекината во нулата, ако во претходното неравенство премине кон граница кога $n$ тежи кон бескрајност добиваме

$$f(t)-f(0)\leq 3(\tfrac{t}{2})^2\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{t}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=t^2+t.$$

Слично од другио услов добиваме $f(t)-f(0)\geq t^2+t$. Конечно, од претходните разгледувања следува дека $f(x)=f(0)+x^2+x$. Лесно се проверува дека оваа функција ги задоволува условите на задачата.

136. Најди ги сите непрекинати решенија на функционалната равенка

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y),\ x,y\in\mathbf{R}.$$

**Решение.** Со индукција по $n$ се докажува дека

$$f(nx)=(1+f(x))^n-1.$$

Нека $f(1)=c$. Тогаш

$$(1+c)^m-1=f(m)=f(n\cdot\tfrac{m}{n})=(1+f(\tfrac{m}{n}))^n-1,$$

па затоа

$$f(\tfrac{m}{n})=(1+c)^{\frac{m}{n}}-1.$$

Да забележиме дека

$$1+f(x)=(1+f(\tfrac{x}{2}))^2\geq 0,$$

па затоа изразот $(1+c)^{\frac{m}{n}}$ навистина е дефиниран за $1+c=a\geq 0$. Значи, од непрекинатоста следува дека $f(x)=a^x-1$, за $x\geq 0$. Понатаму, за $x=0$ добиваме $f(y)=f(0)+f(y)+f(0)f(y)$, па или $f(y)=-1$, за секој $y\in\mathbf{R}$ или $f(0)=0$. Во вториот случја ставајќи $y=-x$ добиваме

$$\begin{aligned}0&=f(x-x)=f(x)+f(-x)+f(x)f(-x)\\&=a^x-1+a^xf(-x),\ x>0.\end{aligned}$$

Според тоа, $f(-x)=a^{-x}-1$. Конечно, сите решенија се $f(x)=a^x-1$, $a>0$ и $f(x)=-1$.

137. Нека функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е непрекината во точката $x_0=0$ и нека за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $f(x)+f(\frac{2}{3}x)=x$. Докажи дека $f(x)=\frac{3}{5}x$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

**Решение.** Во равенството $f(x)+f(\frac{2}{3}x)=x$ ставаме $x=0$ и добиваме $f(0)=0$. Понатаму, од

$$f(xy)+f(\tfrac{2}{3}xy)=xy=y[f(x)+f(\tfrac{2}{3}x)]$$

наоѓаме

$$f(xy)-yf(x)=-[f(\tfrac{2}{3}xy)-yf(\tfrac{2}{3}x)] \qquad (1)$$

за секои $x,y\in\mathbf{R}$. Ако во равенството (1) последователно ставиме $x_1=t$, $x_2=\frac{2}{3}t,\ldots,\ x_n=(\frac{2}{3})^n t$ ги добиваме равенствата

$$f(ty)-yf(t)=-[f(\tfrac{2}{3}ty)-yf(\tfrac{2}{3}t)]$$

$$f(\tfrac{2}{3}ty)-yf(\tfrac{2}{3}t)=-[f(\tfrac{4}{9}ty)-yf(\tfrac{4}{9}t)]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(\tfrac{2^n}{3^n}ty)-yf(\tfrac{2^n}{3^n}t)=-[f(\tfrac{2^{n+1}}{3^{n+1}}ty)-yf(\tfrac{2^{n+1}}{3^{n+1}}t)]$$

од што следува:

$$f(ty)-yf(t)=(-1)^{n+1}[f(\tfrac{2^{n+1}}{3^{n+1}}ty)-yf(\tfrac{2^{n+1}}{3^{n+1}}t)], \qquad (2)$$

за секој $n\geq 1$. Понатаму, за секои $y,t\in\mathbf{R}$ важи

$$\tfrac{2^{n+1}}{3^{n+1}}yt\to 0 \text{ и } \tfrac{2^{n+1}}{3^{n+1}}t\to 0, \text{ кога } n\to\infty,$$

па ако се искористи непрекинатоста на функцијата $f$ во точката $x_0=0$, од равенството (2) добиваме $f(ty)-yf(t)=0$, односно $f(ty)=yf(t)$, за секои $y,t\in\mathbf{R}$. Ако во последното равенство ставиме $t=1$, добиваме $f(y)=yf(1)$, за секој $y\in\mathbf{R}$.

Останува да го определиме $f(1)$. Од равенството $f(x)+f(\frac{2}{3}x)=x$ последователно добиваме:

$$f(1)+f(\tfrac{2}{3})=1,$$

$$f(\tfrac{2}{3})+f(\tfrac{4}{9})=\tfrac{2}{3},$$

$$f(\tfrac{4}{9})+f(\tfrac{8}{27})=\tfrac{4}{9},$$

$$f(\tfrac{8}{27})+f(\tfrac{16}{81})=\tfrac{8}{27},$$

$$f(\tfrac{16}{81})+f(\tfrac{32}{243})=\tfrac{16}{81},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f((\tfrac{2}{3})^{2k})+f((\tfrac{2}{3})^{2k+1})=(\tfrac{2}{3})^{2k},$$

$$f((\tfrac{2}{3})^{2k+1})+f((\tfrac{2}{3})^{2k+2})=(\tfrac{2}{3})^{2k+1}$$

за секој $k\geq 1$. Од последните равенства наоѓаме

$$f(1)-f(\tfrac{4}{9})=\tfrac{1}{3},$$
$$f(\tfrac{4}{9})-f(\tfrac{16}{81})=\tfrac{1}{3}\tfrac{4}{9},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f((\tfrac{2}{3})^{2k})-f((\tfrac{2}{3})^{2k+2})=\tfrac{1}{3}(\tfrac{4}{9})^{k}$$

за секој $k\geq 1$. Ако ги собереме последните равенства и искористиме дека $(\frac{4}{9})^{k+1}\to 0$ кога $k\to\infty$, тогаш од непрекинатоста на функцијата $f$ во точката $x_0=0$, добиваме $f(1)-f(0)=\frac{3}{5}$. Но, $f(0)=0$ па затоа $f(1)=\frac{3}{5}$, што значи дека $f(x)=\frac{3}{5}x$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

138. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да

$$f(x)=\tfrac{1}{2}f(\tfrac{x}{2})+x. \qquad (1)$$

**Решение.** Јасно, $f(0)=\frac{1}{2}f(0)$, т.е. $f(0)=0$. Со последователна примена на релацијата (1) добиваме

$$\begin{aligned}f(x)&=\tfrac{1}{2}f(\tfrac{x}{2})+x=x+\tfrac{1}{2}[\tfrac{x}{2}+\tfrac{1}{2}f(\tfrac{x}{4})]=...\\&=x+\tfrac{x}{4}+\tfrac{x}{4^2}+...+\tfrac{x}{4^n}+\tfrac{1}{2^{n+1}}f(\tfrac{x}{2^{n+1}})\\&=x(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4^2}+...+\tfrac{1}{4^n})+\tfrac{1}{2^{n+1}}f(\tfrac{x}{2^{n+1}})\\&=\tfrac{4x}{3}[1-(\tfrac{1}{4})^{n+1}]+\tfrac{1}{2^{n+1}}f(\tfrac{x}{2^{n+1}}).\end{aligned}$$

Но, функцијата $f$ е непрекината и како $(\frac{1}{4})^{n+1}\to 0$, $\frac{1}{2^{n+1}}\to 0$, кога $n\to\infty$ и за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $\frac{x}{2^{n+1}}\to 0$, кога $n\to\infty$ добиваме

$$f(x)=\tfrac{4}{3}x(1-0)+0\cdot f(0)=\tfrac{4}{3}x, \text{ за секој } x\in\mathbf{R}.$$

139. Нека функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е непрекината во точката $x=0$, $f(0)=1$ и

$$f(x)-f(\tfrac{2}{3}x)=x.$$

Најди ја функцијата $f$.

**Решение.** *Прв начин.* Имаме

$$\begin{aligned}f(x)&=x+f(\tfrac{2}{3}x)=x+\tfrac{2}{3}x+f((\tfrac{2}{3})^2x)\\&=x+\tfrac{2}{3}x+(\tfrac{2}{3})^2x+f((\tfrac{2}{3})^3x)\\&=...=x+\tfrac{2}{3}x+(\tfrac{2}{3})^2x+...+(\tfrac{2}{3})^{n-1}x+f((\tfrac{2}{3})^nx)\\&=x(1+\tfrac{2}{3}+(\tfrac{2}{3})^2+...+(\tfrac{2}{3})^{n-1})+f((\tfrac{2}{3})^nx)\\&=x\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}}+f((\tfrac{2}{3})^nx).\end{aligned}$$

Ако во

$$f(x)=x\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}}+f((\tfrac{2}{3})^n x)$$

земеме $n\to\infty$, тогаш $(\frac{2}{3})^n\to 0$ и од непрекинатоста на $f$ и условот $f(0)=1$, добиваме $f(x)=3x+1$.

*Втор начин.* Ставаме $f(x)=g(x)+3x$. Тогаш од $f(x)-f(\frac{2}{3}x)=x$ следува

$$g(x)=g(\tfrac{2}{3}x). \qquad (1)$$

Со последователна примена на (1) добиваме $g(x)=g((\frac{2}{3})^n x)$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Но, $(\frac{2}{3})^n\to 0$, кога $n\to\infty$, па бидејќи функцијата $g$ е непрекината добиваме $g(x)=g(0)=1$. Според тоа, $f(x)=3x+1$.

140. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(x)=f(x^2+\tfrac{1}{4}),\ \text{за секој}\ x\in\mathbf{R}.$$

**Решение.** Нека $f(x)$ е функција која ги задоволува условите на задачата. Јасно, функцијата $f(x)$ е парна.

Нека $x_0\in[0,\frac{1}{2}]$ и да ја разгледаме низата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ определена со

$$x_{n+1}=x_n^2+\tfrac{1}{4},\ n\geq 0.$$

Со индукција лесно се докажува дека $0\leq x_n\leq\frac{1}{2}$, за секој $n$. Освен тоа

$$x_{n+1}-x_n=x_n^2-x_n+\tfrac{1}{4}=(x_n-\tfrac{1}{2})^2\geq 0,$$

што значи дека низата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ монотоно расте. Според тоа, низата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ моното расте и е ограничена, па затоа таа е конвергентна и нека $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Тогаш од $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n^2+\frac{1}{4}$ следува $a^2-a+\frac{1}{4}=0$, т.е. $a=\frac{1}{2}$. Понатаму, функцијата $f(x)$ е непрекината, па затоа $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(\frac{1}{2})$. Од друга страна $f(x_{n+1})=f(x_n^2+\frac{1}{4})=f(x_n)$, за секој $n$ и затоа $f(x_0)=f(\frac{1}{2})$.

Нека сега $x_0>\frac{1}{2}$ и да ја разгледаме низата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ определена со $x_{n+1}=\sqrt{x_n-\frac{1}{4}}$, $n\geq 0$. Аналогно се докажува дека $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$ и затоа $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(\frac{1}{2})$ и бидејќи

$$f(x_{n+1})=f(x_{n+1}^2+\tfrac{1}{4})=f(x_n),\ \text{за секој}\ n,$$

добиваме $f(x_0)=f(\frac{1}{2})$.

Но, функцијата $f(x)$ е парна и бидејќи е константна на интервалот $[0,+\infty)$ заклучуваме дека таа е константна на $\mathbf{R}$.

Обратно, јасно е дека сите константни функции ги задоволуваат условите на задачата.

141. Најди ги сите непрекинати функции $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ такви да $f(1)=1$ и

$$f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1,\ \text{за секои } x,y>0\,. \qquad (1)$$

**Решение.** За секој $n\in\mathbf{N}$ ставаме $x=n$ и $y=1$ и добиваме

$$f(n)+f(1)=f(n+1)-n-1,$$

т.е.

$$f(n+1)-f(n)=n+2\,. \qquad (2)$$

Ако во равенството (2) последователно ставиме $n=1,2,...,k-1$ и ги собереме добиените равенства наоѓаме

$$\begin{aligned} f(k)-f(1) &= \sum_{n=1}^{k-1}(n+2)=2(k-1)+\tfrac{k(k-1)}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}k^2+\tfrac{3}{2}k-2 \end{aligned}$$

и како $f(1)=1$ имаме

$$f(k)=\tfrac{1}{2}k^2+\tfrac{3}{2}k-1.$$

Ако $p,q\in\mathbf{N}$, тогаш

$$\begin{aligned} f(\tfrac{1}{q})+f(\tfrac{1}{q}) &= f(\tfrac{2}{q})-\tfrac{1}{q^2}-1 \\ f(\tfrac{2}{q})+f(\tfrac{1}{q}) &= f(\tfrac{3}{q})-\tfrac{2}{q^2}-1 \\ &\dots\dots\dots \\ f(\tfrac{p-1}{q})+f(\tfrac{1}{q}) &= f(\tfrac{p}{q})-\tfrac{p-1}{q^2}-1 \end{aligned} \qquad (3)$$

Ако ги собереме равенствата (3) добиваме

$$pf(\tfrac{1}{q})=f(\tfrac{p}{q})-(p-1)-\tfrac{p(p-1)}{2q^2}\,. \qquad (4)$$

Понатаму, во (4) ставаме $p=q$ и добиваме

$$qf(\tfrac{1}{q})=f(1)-(q-1)-\tfrac{q-1}{2q}\,,$$

односно

$$f(\tfrac{1}{q})=-1+\tfrac{3}{2q}+\tfrac{1}{2q^2}\,.$$

Ако од последното равенство замениме во (4) добиваме

$$f(\tfrac{p}{q})=-1+\tfrac{3}{2}\tfrac{p}{q}+\tfrac{1}{2}(\tfrac{p}{q})^2\,,$$

што значи дека

$$f(r)=\tfrac{1}{2}r^2+\tfrac{3}{2}r-1,\ \text{за секој } r\in\mathbf{Q}^+\,.$$

Конечно, ако $x\in(0,+\infty)$ тогаш постои низа $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbf{Q}$ таква да $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=x$ и како функцијата $f$ е непрекината добиваме

$$f(x)=f(\lim_{n\to\infty}r_n)=\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}(\tfrac{1}{2}r_n^2+\tfrac{3}{2}r_n-1)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} r_n^2+\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty} r_n-1=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-1.$$

142. Најди ги сите непрекинати функции $f$ на $A$, $A\subseteq\mathbf{R}$ кои го задоволуваат условот

$$yf(x+y)f(x)-(x^2+xy)[f(x+y)-f(x)]=0\,. \qquad (1)$$

за секои $x,y\in A$, такви што $x+y\in A$.

**Решение.** Ако во условот (1) ставиме $y=1-x$ и ако земеме $f(1)=c$, добиваме

$$(1-x)f(1)f(x)-x[f(1)-f(x)]=0$$

односно

$$[x(1-c)+c]f(x)=cx \qquad (2)$$

за секој $x\in A$. Можни се следните три случаи:

а) $c=0$, од што следува $xf(x)=0$, односно $f(x)=0$ за $x\neq 0$ и $f(x)=a$, $a\in\mathbf{R}$ за $x=0$. Според тоа, ако $A=\mathbf{R}$ или $A=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, тогаш од непрекинатоста на $f$ на $A$ следува $f(x)=0$.

б) $c=1$, од што добиваме $f(x)=x$ и $A=\mathbf{R}$.

в) $c\neq 0$ и $c\neq 1$ и во овој случај

$$f(x)=\frac{cx}{x(1-c)+c} \text{ и } A=(-\infty,\frac{c}{c-1})\cup(\frac{c}{c-1},+\infty)\,.$$

143. (Коши). Нека функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е непрекината и за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\,.$$

Докажи дека за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $f(x)=f(1)x$.

**Решение.** Од решението на за задача 126 следува $f(r)=rf(1)$ , за секој $r\in\mathbf{Q}$. Конечно, ако $x\in\mathbf{R}$, тогаш постои низа рационални броеви $\{r_n\}$ која конвергира кон $x$. Од непрекинатоста на функцијата $f$ и (4) следува:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(r_n)=\lim_{n\to\infty} r_n f(1)=xf(1)\,,$$

што и требаше да се докаже.

144. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ за кои е исполнето равенството

$$2f(\tfrac{x+y}{2})=f(x)+f(y) \qquad (1)$$

за секои $x,y\in\mathbf{R}$.

**Решение.** Ако во (1) ставиме $y=0$, добиваме $2f(\frac{x}{2})=f(x)+a$, каде што $a=f(0)$. Земаме $f(x)=g(x)+a$ и од (1) добиваме

$$g(x)+g(y)+2a=f(x)+f(y)=2f(\tfrac{x+y}{2})=f(x+y)+a=g(x+y)+2a\,,$$

односно $g(x)+g(y)=g(x+y)$. Но, $g$ е непрекината функција на $\mathbf{R}$ па од задачата 143 следува дека $g(x)=g(1)x$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Земаме $b=f(1)$ и добиваме дека $g(1)=b-a$, па затоа општото решение на (1) е:

$$f(x)=g(x)+a=g(1)x+a=(b-a)x+a \text{, за секој } x\in\mathbf{R}.$$

145. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ чиј график е централно симетричен во однос на секоја своја точка.

**Решение.** Нека $f$ е функција која и исполнува условите на задачата. Бидејќи $f$ има график кој е симетричен во однос на било која своја точка добиваме дека за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x). \qquad (1)$$

Ставаме $x+y=u, x-y=v$ и добиваме $x=\frac{u+v}{2}$. Заменуваме во (1) и ја добиваме функционалната равенка

$$f(u)+f(v)=2f(\tfrac{u+v}{2}). \qquad (2)$$

Според задача 144 решение на (2) се сите функции од видот $f(x)=ax+b,$ $a,b\in\mathbf{R}$, т.е. тоа се линеарните функции. Јасно, графикот на секоја линеарна функција е симетричен во однос на секоја своја точка.

146. Најди ги сите непрекинати функции $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ за кои е исполнето равенството

$$f(x)+f(y)+f(\tfrac{1}{xy})=0, \qquad (1)$$

за секои $x,y\in(0,+\infty)$.

**Решение.** Ставаме

$$g(x)=f(e^x) \qquad (2)$$

за секој $x\in\mathbf{R}$. Имаме $g(-x)=f(e^{-x})$, па затоа од (1) добиваме

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(e^{x+y})=f(e^x e^y)=f(\tfrac{1}{e^{-x}e^{-y}}) \\ &= -[f(e^{-x})+f(e^{-y})] \qquad (3) \\ &= -[g(-x)+g(-y)] \end{aligned}$$

за секои $x,y\in\mathbf{R}$. Ако во (3) ставиме $x=y=0$, добиваме $g(0)=-2g(0)$, од што следува $g(0)=0$. Понатаму, во (3) ставаме $y=-x$ и добиваме $g(-x)=-g(x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Сега со замена во (3) наоѓаме

$$g(x)+g(y)=g(x+y).$$

Но, $g$ е непрекината функција на $\mathbf{R}$ па од задачата 143 следува дека $g(x)=\alpha x$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Сега од (2) добиваме дека $f(e^x)=\alpha x$, за секој $x\in\mathbf{R}$ и ако ставиме $e^x=t$, добиваме $t=\ln x$, односно $f(t)=\alpha\ln t$, за секој $t\in(0,+\infty)$. Конечно, секоја функција $f$ непрекината на $(0,+\infty)$ за која е исполнет условот (1), е од обликот $f(t)=\alpha\ln t$, за секој $t\in(0,+\infty)$.

147. Најди ги сите функции непрекинати функции $f,g,h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви, што за секои $x,y\in\mathbf{R}$ е исполнето равенството

$$f(x+y)=g(x)+h(y). \qquad (1)$$

**Решение.** Ако во (1) ставиме $y=0$, добиваме $g(x)=f(x)+a$, каде што $a=-h(0)$. За $x=0$ добиваме $h(y)=f(y)+b$, каде $b=-g(0)$. Со замена во (1) добиваме

$$f(x+y)+a+b=[f(x)+a+b]+[f(y)+a+b]$$

и ако во последната равенка замениме $F(x)=f(x)+a+b$, ја добиваме равенката

$$F(x+y)=F(x)+F(y),$$

чие решение е $F(x)=\alpha x$, $\alpha\in\mathbf{R}$. Според тоа,

$$f(x)=\alpha x-a-b,\ g(x)=\alpha x-b \text{ и } h(x)=\alpha x-a,$$

за секој $x\in\mathbf{R}$, $\alpha,a,b\in\mathbf{R}$.

148. Најди ги сите непрекинати функции $f:(-1,1)\to\mathbf{R}$ за кои е исполнет условот

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)},\text{ за секои } x,y\in(-1,1). \qquad (1)$$

**Решение.** Функцијата $g:(-1,1)\to(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$, $g(x)=\operatorname{arctg}f(x)$ е непрекината. Од (1) следува дека

$$g(x+y)=\operatorname{arctg}f(x+y)=\operatorname{arctg}\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}g(x)+\operatorname{tg}g(y)}{1-\operatorname{tg}g(x)\cdot\operatorname{tg}g(y)}$$

$$=\operatorname{arctg}\operatorname{tg}[g(x)+g(y)]=g(x)+g(y)$$

Последното равенство е исполнето, бидејќи $g(x)+g(y)\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Според задачата 144 имаме $g(x)=\alpha x$, $\alpha\in\mathbf{R}$, па затоа $f(x)=\operatorname{tg}\alpha x$, $\alpha\in\mathbf{R}$.

149. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е непрекината функција и нека за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$f(x+y)=f(x)f(y). \qquad (1)$$

Докажи дека за секој $x\in\mathbf{R}$ важи или $f(x)=a^x$, $a>0$ или $f(x)=0$.

**Решение.** Ако во (1) ставиме $x=y=0$, добиваме $f(0)=[f(0)]^2$ од што следува или $f(0)=0$ или $f(0)=1$.

Ако $f(0)=0$, тогаш за секој $x\in\mathbf{R}$ важи

$$f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)=0.$$

Нека $f(0)=1$. Ако во (1) ставиме $y=-x$, добиваме $f(0)=f(x)f(-x)$, па затоа $f(x)\neq 0$ и $f(-x)=[f(x)]^{-1}$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Ако во (1) ставиме $x=y=\frac{t}{2}$, добиваме $f(t)=[f(\frac{t}{2})]^2\geq 0$, што заедно со претходно изнесеното значи дека $f(t)>0$, за секој $t\in\mathbf{R}$. Според тоа, функцијата $g(x)=\ln f(x)$ е добро дефинирана и таа е непрекината, како композиција од непрекинати функции. Притоа важи:

$$g(x+y)=\ln f(x+y)=\ln f(x)f(y)=\ln f(x)+\ln f(y)=g(x)+g(y).$$

Од задачата 143 следува дека $g(x)=\alpha x$, за секој $x\in\mathbf{R}$, па затоа

$$f(x)=e^{g(x)}=e^{\alpha x}=(e^{\alpha})^x=a^x,$$

за секој $x\in\mathbf{R}$, $a=e^{\alpha}$. Според тоа, кога $f(0)=1$ имаме $f(x)=a^{x}$, $a>0$.

150. Најди ги сите непрекинати функции $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви, што за секои $x,y\in\mathbf{R}$ се исполнети равенствата

$$\begin{aligned} f(x+y)&=f(x)g(y)+f(y)g(x),\\ g(x+y)&=g(x)g(y)+f(y)f(x), \end{aligned}\tag{1}$$

и за кои важи $f(0)=0$ и $g(0)=1$.

**Решение.** Земаме

$$\alpha(x)=f(x)+g(x) \text{ и } \beta(x)=g(x)-f(x), \tag{2}$$

за секој $x\in\mathbf{R}$. Со непосредна проверка наоѓаме дека за непрекинатите функции $\alpha,\beta:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ се исполнети равенствата

$$\alpha(x+y)=\alpha(x)\alpha(y),\ \beta(x+y)=\beta(x)\beta(y),\ \alpha(0)=\beta(0)=1. \tag{3}$$

Значи, $\alpha(x)=a^{x}$ и $\beta(x)=b^{x}$, за некои $a,b\in\mathbf{R}$. Сега од (2) добиваме дека

$$g(x)=\tfrac{a^{x}+b^{x}}{2} \text{ и } f(x)=\tfrac{a^{x}-b^{x}}{2}, \text{ за некои } a,b\in\mathbf{R}$$

се единствените функции кои го задоволуваат системот (1).

151. Најди ги сите непрекинати функции $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ за кои е исполнето равенството

$$f(xy)=f(x)+f(y) \tag{1}$$

за секои $x,y\in(0,+\infty)$.

**Решение.** Ставаме

$$g(x)=f(e^{x}) \tag{2}$$

за секој $x\in\mathbf{R}$ и добиваме

$$g(x+y)=f(e^{x+y})=f(e^{x}e^{y})=f(e^{x})+f(e^{y})=g(x)+g(y) \tag{3}$$

за секои $x,y\in\mathbf{R}$. Функцијата $g$ е непрекината, па од задача 143 следува дека $g(x)=\alpha x$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Сега од (2) добиваме дека $f(e^{x})=\alpha x$, за секој $x\in\mathbf{R}$ и ако ставиме $e^{x}=t$, добиваме $t=\ln x$, односно $f(t)=\alpha\ln t$, за секој $t\in(0,+\infty)$. Конечно, секоја непрекината функција $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, за која е исполнет условот (1) е од обликот $f(t)=\alpha\ln t$, за секој $t\in(0,+\infty)$.

152. Најди ги сите непрекинати функции $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ за кои е исполнето равенството

$$f(xy)=f(x)f(y) \tag{1}$$

за секои $x,y\in(0,+\infty)$.

**Решение.** Ако во (1) ставиме $x=y=1$, добиваме $f(1)=[f(1)]^{2}$, од што следува $f(1)=0$ или $f(1)=1$. Ако $f(1)=0$, тогаш од (1) следува:

$$f(x)=f(x\cdot 1)=f(x)f(1)=0, \text{ за секој } x\in(0,+\infty).$$

Нека $f(1)=1$. Ако во (1) ставиме $y=\frac{1}{x}$ добиваме

$$1=f(1)=f(x)f(\tfrac{1}{x}),$$

па затоа $f(\frac{1}{x})=\frac{1}{f(x)}$, за секој $x\in(0,+\infty)$. Понатаму, во (1) ставаме $x=y=\sqrt{t}$ и добиваме $f(t)=[f(\sqrt{t})]^2\geq 0$ и, бидејќи $f(t)\neq 0$, наоѓаме $f(t)>0$, за секој $t\in(0,+\infty)$. Според тоа, функцијата $g(t)=\ln f(t)$ е добро дефинирана и таа е непрекината како композиција на непрекинати функции. Притоа важи

$$g(xy)=\ln f(xy)=\ln[f(x)f(y)]=\ln f(x)+\ln f(y)=g(x)+g(y)$$

за секои $x,y\in(0,+\infty)$. Сега, од задача 151 следува дека $g(x)=\alpha\ln x$, за секој $x\in(0,+\infty)$. Според тоа, $f(x)=e^{g(x)}=e^{\alpha\ln x}=x^{\alpha}$, за секој $x\in(0,+\infty)$. Конечно, сите непрекинати на $(0,+\infty)$ функции $f$ кои го задоволуваат условот (1) се од обликот $f(x)=0$ или $f(x)=x^{\alpha}$, за секој $x\in(0,+\infty)$.

153. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ такви да

$$f(1)=2008,\ |f(x)|\leq x^2+1004^2 \text{ и}$$
$$f(x+y+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y})=f(x+\tfrac{1}{y})+f(y+\tfrac{1}{x}).$$

**Решение.** Подолу ќе докажеме дека

$$f(u+v)=f(u)+f(v),\qquad(1)$$

за секои $u,v>0$. Од вториот услов следува дека $f$ е ограничена функција, на пример, на интервалот $(0,1)$. Тогаш, како што е познато

$$f(x)=f(1)x=2008x,$$

за секој $x>0$ и оваа функција очигледно ги задоволува условите на задачата, бидејќи $|2008x|\leq x^2+1004^2 \Leftrightarrow (|x|-1004)^2\geq 0$.

Прво ќе го докажеме (1) при дополнителен услов $uv\geq 4$. За таа цел доволно е да најдеме $x,y>0$ такви да $u=x+\frac{1}{y}$ и $v=y+\frac{1}{x}$. Овој систем лесно се сведува на квадратна равенка, од каде наоѓаме

$$x=\frac{u\pm\sqrt{u^2-4\frac{u}{v}}}{2},\quad y=\frac{v\pm\sqrt{v^2-4\frac{v}{u}}}{2}.$$

Нека сега $u$ и $v$ се произволни позитивни броеви. Не е тешко да се види, дека можеме да избереме $w>0$ таков да $(u+v)w\geq 4$ и $u(v+w)\geq 4$. Тогаш $vw\geq 4$ и

$$f(u+v)+f(w)=f(u+v+w)=f(u)+f(v+w)=f(u)+f(v)+f(w),$$

Од каде следува (1).

154. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да

$$f(x+f(y))=f(x)+y,\text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}.\qquad(1)$$

**Решение.** Ако во (1) ставиме $x=0$ добиваме

$$f(f(y))=f(0)+y.\qquad(2)$$

Ако во (1) ги замениме местата на $x$ и $y$ и ставиме $x=0$ добиваме

$$f(y)=f(y+f(0)). \qquad (3)$$

Од (2) и (3) следува

$$f(y)=f(y+f(0))=f(f(y))=f(0)+f(y),$$

што значи $f(0)=0$ и според (2) имаме $f(f(x))=f(x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Понатаму,

$$f(x+y)=f(x+f(f(y))=f(x)+f(y), \qquad (4)$$

па од задача 143 следува дека решението на равенката (4) е $f(x)=f(1)x$. Ако ставиме $k=f(1)$, тогаш со замена во (1) добиваме

$k(x+ky)=kx+y$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$, односно $k^2y=y$, за секој $y\in\mathbf{R}$, од каде добиваме $k=\pm1$.

Конечно, единствени решенија на равенката (1) се функциите $f(x)=x$ и $f(x)-x$.

155. Најди ги сите непрекинати реални функции $f:\mathbf{R}\to[0,\infty)$ такви да

$$f(x^2+y^2)=f(x^2-y^2)+f(2xy), \text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

**Решение.** За $x=y=0$ наоѓаме $f(0)=0$. Понатаму, за $x=0$ имаме $f(y^2)=f(-y^2)$. Според тоа, функцијата $f$ е парна функција и затоа доволно е истата да ја определиме за позитивни броеви. Нека $a$ и $b$ се позитивни реални броеви. Тогаш системот

$$\begin{cases}x^2-y^2=a\\2xy=b\end{cases}$$

секогаш има решение. Ако $(x,y)$ е решение на овој систем, тогаш $x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$. Значи, за $a,b\geq0$ функцијата $f$ ја задоволува релацијата

$$f(a)+f(b)=f(\sqrt{a^2+b^2}).$$

Дефинираме функција $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$, со $g(a)=f(\sqrt{a})$. Тогаш

$$g(a^2)+g(b^2)=g(a^2+b^2), \text{ за секои } a,b\in\mathbf{R}.$$

За $x,y\geq0$ ставаме $a=\sqrt{x}, b=\sqrt{y}$ и добиваме

$$g(x+y)=g(x)+g(y), \text{ за секои } x,y\geq0.$$

Решение на последната равенка е $g(x)=kx$, па затоа решение на дадената равенка е $f(x)=kx^2$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

156. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да

$$f(xf(y))+y+f(x)=f(x+f(y))+yf(x), \qquad (1)$$

за секои $x,y\in\mathbf{R}$.

**Решение.** Ако во (1) ставиме $x=0$ добиваме

$$f(f(y))=y(1-f(0))+2f(0), \qquad (2)$$

од каде при $y=2$ имаме $f(f(2))=2$, т.е. $2\in\operatorname{Im}f$. Ако во (1) ставиме $y=1$ и $x$ го замениме со $x-f(1)$ добиваме $f(x-f(1))f(1)=f(x)-1$, што значи дека множеството $\operatorname{Im} f$ е затворено во однос на операцијата $x \to x-1$ и во случајов $0 \in \operatorname{Im} f$.

Нека $a \in \mathbf{R}$ е таков да $f(a)=0$. Во (1) ставаме $y=a$ и добиваме $f(0)+a=af(x)$. Ако $a \neq 0$, тогаш $f(x)=\frac{a+f(0)}{a}=b=\text{const}$ и од (1) добиваме дека $b+y=by$, за секој $y$, што не е можно. Според тоа, $a=0$, т.е. $f(0)=0$ и од (2) добиваме $f(f(y))=y$. Последното значи дека функцијата $f$ е сурјекција и инјекција. Сурјективноста е очигледна, а ако $f(a)=f(b)$, тогаш $a=f(f(a))=f(f(b))=b$, т.е. $f$ е инјекција.

Ако во (1) $y$ го замениме со $f(y)$ добиваме

$$f(xy)+f(x)+f(y)=f(x)f(y)+f(x+y). \qquad (3)$$

Во (3) ставаме $x=y=2$ и добиваме $2f(2)=[f(2)]^2$, од каде поради инјективноста на $f$ и фактот дека $f(0)=0$ добиваме $f(2)=2$. Нека $f(1)=c$. Тогаш $1=f(f(1))=f(c)$. Од последното равенство и од (3) при $x=y=1$ добиваме $3c=c^2+2$, па поради инјективноста на $f$ и фактот дека $f(2)=2$ добиваме $c=1$, т.е. $f(1)=1$.

Ако во (3) ставиме $y=1$ добиваме $f(x+1)=f(x)+1$. Оттука и ако во (3) $x$ го замениме со $x+1$ добиваме

$$f(xy+y)+f(x)+f(y)=f(x)f(y)+f(y)+f(x+y).$$

Ако од (3) го одземеме последното равенство добиваме

$$f(xy+y)=f(xy)+f(y).$$

Лесно се гледа, дека за произволни $a \neq 0$ и $b \neq 0$ постојат реални броеви $x$ и $y$ такви да $xy=a$ и $y=b$, од каде добиваме дека

$$f(a+b)=f(a)+f(b). \qquad (4)$$

Последното е точно и кога барем еден од броевите $a$ и $b$ е еднаков на нула, па затоа (4) важи за секои реални броеви $a$ и $b$. Од последното и од (3) следува дека $f(xy)=f(x)f(y)$, па ако ставиме $x=y$ добиваме $f(x^2)=[f(x)]^2$, т.е. $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, па затоа $f(x)=kx$ и како $f(1)=1$ добиваме дека $k=1$. Лесно се проверува дека функцијата $f(x)=x$ е решение на задачата.

157. Да се определат сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(x^3+y^3)=x^2f(x)+yf(y^2).$$

**Решение.** Бидејќи равенството е исполнето за секои $x$ и $y$, за $x=0,\ y\in\mathbf{R}$ добиваме

$$f(y^3)=f(0^3+y^3)=0^2f(0)+yf(y^2)=yf(y^2)$$

Аналогно, за $x\in\mathbf{R}, y=0$ добиваме дека

$$f(x^3)=f(x^3+0^3)=x^2f(x)+0f(0^2)=x^2f(x).$$

Ако $x^2f(x)$ и $yf(y^2)$ ги замениме во почетната равенка, добиваме дека

$$f(x^3+y^3)=f(x^3)+f(y^3).$$

Ако $u,v\in\mathbf{R}$ се произволно зададени реални броеви, тогаш постојат $x$ и $y$ така што $u=x^3, v=y^3$, па според тоа

$$f(u+v)=f(x^3+y^3)=f(x^3)+f(y^3)=f(u)+f(v),$$

односно функцијата $f$ е адитивна. Од равенството $f(u+v)=f(u)+f(v)$ добиваме дека $f(0)=0$. Од друга страна, за броевите $x,0$ и $0,x$ имаме

$$f(x^3)=f(x^3+0^3)=x^2f(x)+0f(0^2)=x^2f(x)$$

$$f(x^3)=f(0^3+x^3)=0^2f(0)+xf(x^2)=xf(x^2),$$

па според тоа точно е равенството

$$x^2f(x)=xf(x^2),$$

односно

$$f(x^2)=xf(x).$$

Користејќи ја адитивноста и последното равенство добиваме

$$\begin{aligned}f((x+1)^2)&=(x+1)f(x+1)=(x+1)[f(x)+f(1)]\\&=xf(x)+f(x)+xf(1)+f(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f((x+1)^2)&=f(x^2+2x+1)=f(x^2+x+x+1)=f(x^2)+2f(x)+f(1)\\&=xf(x)+2f(x)+f(1)\end{aligned}$$

Од последните две равенства имаме

$$xf(x)+f(x)+xf(1)+f(1)=xf(x)+2f(x)+f(1)$$

односно

$$f(x)=f(1)x.$$

Ако воведеме ознака $f(1)=k$, добиваме дека $f(x)=kx$, каде $k\in\mathbf{R}$. Лесно се проверува дека секоја функција од облик $f(x)=kx$ ја задоволува равенката.

158. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(x^3+y^3)=xf(x^2)+yf(y^2),\text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

**Решение.** Ако во равенката ставиме $y=0$ добиваме $f(x^3)=xf(x^2)$. Според тоа, дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$f(x^3+y^3)=f(x^3)+f(y^3). \tag{1}$$

Понатаму, функцијата $g(x)=x^3$ е биекција, па затоа за секои $x,y\in\mathbf{R}$ постојат $s,t\in\mathbf{R}$ такви да $x=t^3, y=s^3$. Сега, од (1) добиваме

$$f(x+y)=f(t^3+s^3)=f(t^3)+f(s^3)=f(x)+f(y),$$

што значи дека секое решение на (2) е решение и на равенката

$$f(x+y)=f(x)+f(y). \tag{2}$$

Понатаму, според задача 143 решенија на (2) се функциите од облик $f(x)=ax, a\in\mathbf{R}$. Лесно се гледа дека овие функции се решенија и на почетната равенка.

159. За кои реални броеви $\alpha$ постои функција $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ различна од константа таква што $f(\alpha(x+y))=f(x)+f(y)$?

**Решение.** Јасно, за $\alpha=1$ таква функција постои и тоа е функцијата $f(x)=x$. За $\alpha\neq 1$, за секој $x$ постои $y=\frac{\alpha x}{1-\alpha}$ таков што $y=\alpha(x+y)$. Тогаш од равенството $f(y)=f(x)+f(y)$ следува $f(x)=0$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Значи, единствен број со бараното својство е $\alpha=1$.

160. Најди ги сите функции непрекинати $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и такви да

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y),\text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}$$

**Решение.** Да ја разгледаме функцијата $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$. Тогаш имаме

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y)-\tfrac{1}{3}(x+y)^3 \\ &= f(x)+f(y)+xy(x+y)-\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{3}y^3-xy(x+y) \\ &= f(x)-\tfrac{1}{3}x^3+f(y)-\tfrac{1}{3}y^3 \\ &= g(x)+g(y). \end{aligned}$$

Функцијата $g$ е непрекината, па од задача ** следува $g(x)=ax$, $a\in\mathbf{R}$. Конечно, $f(x)=ax+\frac{1}{3}x^3$, $a\in\mathbf{R}$.

161. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да

$$f(ax+by+c)=af(x)+bf(y)+c,\ \ x,y\in\mathbf{R},\ \ a+b\neq 0{,}1.$$

**Решение.** За $x=y=\frac{as+bt}{a+b}=ps+qt,\ \ p+q=1$, добиваме

$$f(as+bt+c)=(a+b)f(ps+qt)+c.$$

Бидејќи $f(as+bt+c)=af(s)+bf(t)+c$, следува дека

$$f(ps+qt)=pf(s)+qf(t).$$

Нека $f(0)=\gamma$. Заменувајќи $s=\frac{u}{p}, t=0; s=0, t=\frac{v}{q};\ s=\frac{u}{p}, t=\frac{v}{q}$ последователно добиваме

$$f(u)=pf(\tfrac{u}{p})+q\gamma,$$

$$f(v)=p\gamma+qf(\tfrac{v}{q}),$$

$$f(u+v)=pf(\tfrac{u}{p})+qf(\tfrac{v}{q}),$$

од каде следува $f(u+v)=f(u)+f(v)-\gamma$. Решение на последната равенка е функцијата $f(x)=\alpha x+\gamma$.

162. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да

$$f(x)+f(y)+f(z)=0,\text{ ако } x+y+z=0.$$

**Решение.** За $x=y=z=0$ добиваме $f(0)=0$. Понатаму, за $y=-x, z=0$, користејќи $f(0)=0$, добиваме $f(-x)=-f(x)$ и конечно за $z=-x-y$ добиваме $f(x+y)=f(x)+f(y)$, што сред задача 143 значи дека решение се сите функции од облик $f(x)=ax,\ a\in\mathbf{R}$.

163. Најди ги сите непрекинати функции $f:(1,+\infty)\to\mathbf{R}$ такви да
$$f(xy)=xf(y)+yf(x), \text{ за секои } x,y\in(1,+\infty).$$

**Решение.** Да ја разгледаме функцијата $\varphi(t)=f(e^t)$. Од условот на задачата следува
$$\varphi(s+t)=f(e^{s+t})=f(e^s e^t)=e^s f(e^t)+e^t f(e^s)=e^s\varphi(t)+e^t\varphi(s),$$
т.е.
$$e^{-(s+t)}\varphi(s+t)=e^{-t}\varphi(t)+e^{-s}\varphi(s). \tag{1}$$
Ја воведуваме функцијата $g(t)=e^{-t}\varphi(t)$. Сега од (1) следува
$$g(s+t)=g(s)+g(t).$$
Функцијата $f$ е непрекината, добиваме дека и функциите $\varphi$ и $g$ се непрекинати. па од задача 143 добиваме $g(x)=ax$, за некој $a\in\mathbf{R}$. Според тоа, $\varphi(x)=e^x g(x)=axe^x$, за некој $a\in\mathbf{R}$. Конечно, со замена $x=e^t$ добиваме
$$f(x)=f(e^t)=\varphi(t)=ate^t=ax\ln x.$$
Лесно се проверува дека функцијата $f(x)=ax\ln x$ е решение на дадената функционална равенка.

164. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$ такви да
$$f(x+y)=f(x)^{\ln f(y)}, \text{ за секои } x,y\in(0,+\infty).$$
**Решение.** Од условот на задачата за $x=y$ добиваме
$$f(2x)=f(x)^{\ln f(x)}=e^{(\ln f(x))^2}.$$
Понатаму, со индукција лесно се докажува дека
$$f(nx)=e^{(\ln f(x))^n}.$$
Ако $f(1)=c$ и $\ln c=a$, тогаш $f(n)=e^{a^n}$ и
$$e^{a^m}=f(m)=f(n\cdot\tfrac{m}{n})=e^{(\ln f(\frac{m}{n}))^n}, \text{ т.е. } f(\tfrac{m}{n})=e^{a^{\frac{m}{n}}}.$$
Од непрекинатоста на функцијата $f$ следува дека $f(x)=e^{a^x}$, за $x\ge 0$. Ако во почетната равенка ставиме $y=0$, добиваме
$$f(x)=f(x)^{\ln f(0)},$$
па затоа или $f(x)=1$, за секој $x\in\mathbf{R}$ или $\ln f(0)=1$, т.е. $f(0)=e$. Слично, земајќи $y=-x$ имаме

$$e = f(0) = f(x)^{\ln f(-x)} = e^{a^x \ln(-x)}, \text{ т.е. } f(-x) = e^{a^{-x}}.$$

Конечно, сите решенија се дадени со $f(x) = e^{a^x}$, $a > 0$ и $f(x) = 1$.

165. Најди ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да

$$f(\sqrt{x^2+y^2}) = \sqrt{f^2(x)+f^2(y)}, \text{ за секои } x, y \in \mathbf{R}.$$

**Решение.** За $x = y = 0$ добиваме $f(0) = 0$. Понатаму, за $y = 0$ наоѓаме $f(|x|) = |f(x)|$. Според тоа, $f(x) \geq 0$, за $x \geq 0$. Потоа, со смените $x^2 = t$, $y^2 = u$ и квадрирање на дадената релација добиваме

$$(f(\sqrt{t+u}))^2 = (f(\sqrt{u}))^2 + (f(\sqrt{t}))^2, \ u, t \geq 0.$$

Според тоа, функцијата $g(t) = (f(\sqrt{t}))^2$, определена за $t \geq 0$, е непрекината и го задоволува условот $g(t+u) = g(t) + g(u), u, t \geq 0$, што значи $g(t) = at$, за некој $a \in \mathbf{R}$. Бидејќи $f(x) \geq 0$, за $x \geq 0$, следува $a \geq 0$. Значи, $f(x) = \sqrt{a}x$, за $x \geq 0$. Користејќи $f(|x|) = |f(x)|$, заклучуваме $f(x) = bx$ или $f(x) = b|x|$, $b = \sqrt{a} \geq 0$.

166. Најди ги сите функции $u:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ со својство: постои строго монотона и непрекината функција $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ таква да

$$f(x+y) = f(x)u(y) + f(y).$$

**Решение.** Од словот на задача имаме

$$f(x+y) = f(x)u(y) + f(y) \text{ и } f(y+x) = f(y)u(x) + f(x),$$

па затоа

$$f(x)(u(y)-1) = f(y)(u(x)-1). \tag{1}$$

Од $f(0+y) = f(0)u(y) + f(y)$ добиваме $f(0) = 0$ или $u(y) = 0$, за секој $y \in \mathbf{R}$. Меѓутоа, од $u(y) = 0$, за секој $y \in \mathbf{R}$ следува $f(x+y) = f(y)$, што противречи на строгата монотоност на $f$. Значи, $f(0) = 0$ и $f(x) \neq 0$, за $x \neq 0$. Од (1) следува

$$\frac{u(x)-1}{f(x)} = \frac{u(y)-1}{f(y)}, \text{ за секои } x, y \neq 0.$$

Значи, постои $c \in \mathbf{R}$ таков што $u(x) = 1 + cf(x)$, за секој $x \neq 0$. Од (1) исто така следува $0 = f(1)(u(0)-1)$, односно $u(0) = 1$, па затоа $u(x) = 1 + cf(x)$, за секој $x \in \mathbf{R}$. За $c = 0$ имаме $u \equiv 1$ и $f(x) = x$. За $c \neq 0$ од условот следува

$$f(x+y) = f(x)(1+cf(y)) + f(y)$$

или

$$1 + cf(x+y) = (cf(x)+1)(cf(y)+1).$$

Воведуваме функција $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$g(x)=cf(x)+1$$

и добиваме дека функцијата $g$ е монотона, непрекината и важи

$$g(x+y)=g(x)g(y).$$

Од задача 149 следува $g(x)=a^x$, за некој $a>0$. Сега лесно добиваме дека

$$f(x)=\frac{a^x-1}{c} \text{ и } u(x)=a^x \text{, за секој } x\in\mathbf{R}.$$

167. Нека функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ строго монотоно расте. За секој $x\in\mathbf{R}$ и за секој $t\in\mathbf{R}^+$ дефинираме

$$g(x,t)=\frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)-f(x-t)}.$$

Нека претпоставиме дека неравенствата $\frac{1}{2}<g(x,t)<2$ важат за $x=0$ и за секој $t\in\mathbf{R}^+$, а за $x\neq 0$ неравенствата важат за секој $t\leq|x|$. Докажи дека

$$\frac{1}{14}<g(x,t)<14 \text{, за секој } x\in\mathbf{R} \text{ и за секој } t\in\mathbf{R}^+.$$

**Решение.** Потребно е да го разгледаме само случајот $t>|x|$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x>0$. За да ја добиеме долната оценка ќе ги разгледаме разликите:

$$d_1=f(-\tfrac{x+t}{2})-f(-(x+t))$$

$$d_2=f(0)-f(-\tfrac{x+t}{2})$$

$$d_3=f(\tfrac{x+t}{2})-f(0)$$

$$d_4=f(x+t)-f(\tfrac{x+t}{2}).$$

Од условот на задачата следува $\frac{1}{2}<\frac{d_{j+1}}{d_j}<2$, за $j=1,2,3$. Освен тоа, бидејќи $x<\frac{x+t}{2}$ и $x-t>-(x+t)$ добиваме

$$f(x+t)-f(x)>f(x+t)-f(\tfrac{x+t}{2})=d_4$$

$$f(x)-f(x-t)<f(\tfrac{x+t}{2})-f(-(x+t))=d_1+d_2+d_3.$$

Затоа

$$g(x,t)=\frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)-f(x-t)}>\frac{d_4}{d_1+d_2+d_3}=\frac{\frac{d_3}{2}}{4d_3+2d_3+d_3}=\frac{1}{14}.$$

За да ја добиеме горната оценка ќе ги разгледаме разликите:

$$b_1=f(0)-f(-\tfrac{x+t}{3})$$

$$b_2=f(\tfrac{x+t}{3})-f(0)$$

$$b_3=f(\tfrac{2(x+t)}{3})-f(\tfrac{x+t}{3})$$

$$b_4=f(x+t)-f(\tfrac{2(x+t)}{3}).$$

Од условот на задачата следува

$$\tfrac{1}{2} < \frac{b_{j+1}}{b_j} < 2 \text{, за } j = 1,2,3 .$$

Освен тоа, бидејќи $x > 0$ имаме

$$f(x+t) - f(x) < f(x+t) - f(0) = b_1 + b_2 + b_3 .$$

За оценката $f(x) - f(x-t)$ разгледуваме два случаја: $0 < x < \frac{x+t}{3}$ и $\frac{x+t}{3} \le x < t$. Во првиот случај заради $x - t < -\frac{x+t}{3}$ и $x > 0$ добиваме

$$f(x) - f(x-t) > f(0) - f(-\tfrac{x+t}{3}) = b_1 ,$$

а во вториот случај од $x - t < 0$ и $x > \frac{x+t}{3}$ добиваме

$$f(x) - f(x-t) > f(\tfrac{x+t}{3}) - f(0) = b_2 .$$

Затоа

$$g(x,t) = \frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)-f(x-t)} < \frac{b_1+b_2+b_3}{\min\{b_1,b_2\}} < \frac{b_2+2b_2+4b_2}{\frac{b_2}{2}} = 14.$$

168. Нека на множеството парови рационални броеви различни од нула е дефинирана функција $f$ чии вредности се позитивни реални броеви. Ако за функцијата $f$ важи

$$f(ab,c) = f(a,c)f(b,c), \quad f(c,ab) = f(c,a)f(c,b) \tag{1}$$

$$f(a,a-1) = 1 \tag{2}$$

тогаш $f(a,a) = f(a,-a) = 1$ и $f(a,b)f(b,a) = 1$. Докажи!

**Решение.** Од условот (1) имаме $f(a,1)f(a,1) = f(a,1)$, од што следува $f(a,1) = 1$. Аналогно, $f(1,a) = 1$. Бидејќи

$$1 = f(a,1) = f(a,-1)f(a,-1)$$

и $f(x,y) > 0$ добиваме $f(a,-1) = 1$ и аналогно $f(-1,a) = 1$.

Од $f(a,a) = f(a,-a)f(a,-1)$ и $f(a,-1) = 1$ следува $f(a,-a) = f(a,a)$. Исто така, $f(a,b) = f(a,-b)f(a,-1)$, па затоа $f(a,b) = f(a,-b)$. Понатаму,

$$f(a^{-1},b)f(a,b) = f(1,b) = 1,$$

па затоа $f(a^{-1},b) = [f(a,b)]^{-1}$.

Од досега изнесеното следува

$$1 = f(a^{-1},1-a^{-1}) = [f(a,1-a^{-1})]^{-1},$$

па затоа $f(a,1-a^{-1}) = 1$. Сега од претходно изнесеното и од (2) следува

$$1 = f(a,1-a) = f(a,1-a) = f(a,a)f(a,1-a^{-1}) = f(a,a),$$

т.е. $f(a,a) = f(a,-a) = 1$.

Јасно, од претходните разгледувања имаме

$$1 = f(ab,ab) = f(a,ab)f(b,ab) = f(a,a)f(a,b)f(b,a)f(b,b) = f(a,b)f(b,a).$$

169. Најди ги сите функции $f:[0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ такви да за секои $x,y,z \in [0,1]$ важи

$$f(x,1)=x,$$
$$f(1,y)=y,$$
$$f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z)),$$
$$f(zx,zy)=z^k f(x,y), \text{ за некој } k>0 \text{ кој не зависи од } x,y,z.$$

**Решение.** За секој $z\in[0,1]$ важи $f(z\cdot 0,z\cdot 0)=z^k f(0,0)$, па затоа $f(0,0)=0$. Понатаму, за секои $x,y,\ 0\le x\le y$ и $y>0$ добиваме

$$f(x,y)=y^k f(\tfrac{x}{y},1)=xy^{k-1}.$$

Слично, за секои $x,y,\ 0\le y\le x$ и $x>0$ важи

$$f(x,y)=x^k f(1,\tfrac{y}{x})=yx^{k-1}.$$

Нека $0<x<y<z\le 1$ и $x$ е доволно мал така да $y^{k-1}x<z$ и $x<z^{k-1}y$. Тогаш

$$\begin{aligned}xy^{k-1}z^{k-1}&=f(xy^{k-1},z)=f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z))\\&=f(x,yz^{k-1})x(yz^{k-1})^{k-1}.\end{aligned}$$

Од тука следува

$$(k-1)(k-2)=0.$$

За $k=1$ имаме $f_1(x,y)=\min\{x,y\}$, а за $k=2$ имаме $f\ (x,y)=xy$ и тоа се единствените две функции кои ги задоволуваат условите на задачата.

170. Нека $a,b\in\mathbf{R}$ и функцијата $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ е зададена со

$$f(x,y)=(ax-by,bx+ay),$$

за секои $x,y\in\mathbf{R}$. Најди ги константите $a$ и $b$ така да $f\circ f\circ f=f$.

**Решение.** Од $f\circ f\circ f=f$ скедува дека за секој пар $(x,y)$ мора да важи $f(x,y)=0$, т.е. $a=b=0$ или дека постои $f^{-1}$, од што следува $f\circ f=I$. Во вториот слуќај имаме

$$\begin{aligned}(f\circ f)(x,y)&=f(ax-by,bx+ay)\\&=(a(ax-by)-b(bx+ay),b(ax-by)+a(bx+ay))\\&=((a^2-b^2)x-2aby,2abx+(a^2-b^2)y)\end{aligned}$$

од каде следува дека за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$\begin{cases}(a^2-b^2)x-2aby=x\\2abx+(a^2-b^2)y=y.\end{cases}$$

Специјално за $x=1,\ y=0$ го добиваме системот равенки

$$\begin{cases}a^2-b^2=1\\2ab=0\end{cases}$$

чие решение е $a=\pm1, b=0$.

171. Најди ги најмалата и најголемата вредност на функцијата

$$f(x,y,z,t)=\frac{ax^2+by^2}{ax+by}+\frac{az^2+bt^2}{az+bt},\ a>0, b>0,$$

при услов $x+z=y+t=1,\ x,y,z,t\geq 0$.

**Решение.** Од $0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$ следува $x^2\leq x, y^2\leq y$, па затоа $ax^2+by^2\leq ax+by$. Слично $az^2+bt^2\leq az+bt$, па затоа

$$f(x,y,z,t)=\frac{ax^2+by^2}{ax+by}+\frac{az^2+bt^2}{az+bt}\leq 1+1=2.$$

Бидејќи $f(1,0,0,1)=2$, добиваме дека 2 е најголемата вредност на функцијата $f$ при дадените услови.

Од $ab(x-y)^2\geq 0$ добиваме $(a+b)(ax^2+by^2)\geq(ax+by)^2$, односно

$$\frac{ax^2+by^2}{ax+by}\geq\frac{ax+by}{a+b}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}f(x,y,z,t)&=\frac{ax^2+by^2}{ax+by}+\frac{az^2+bt^2}{az+bt}\\&\geq\frac{ax+by}{a+b}+\frac{az+bt}{a+b}\\&=\frac{a(x+z)+b(y+t)}{a+b}\\&=\frac{a+b}{a+b}=1.\end{aligned}$$

Но, $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=1$, па затоа 1 е најмала вредност на функцијата при дадените услови.

172. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, за кои

$$xf(xy)+f(-y)=xf(x)$$

за произволни реални броеви $x$ и $y$.

**Решение.** Во дадената равенка ставаме $x=1$ и наоѓаме

$$f(-y)=f(1)-f(y).$$

За $y=-1$ добиваме

$$xf(-x)+f(1)=xf(x).$$

Во последното равенство заменуваме $f(-x)=f(1)-f(x)$ и добиваме

$$x(f(1)-f(x))+f(1)=xf(x).$$

Оттука $xf(1)+f(1)=2xf(x)$, т.е. $f(x)=c+\frac{c}{x}$, за константа $c=\frac{f(1)}{2}$. Проверуваме кога функција од дадениот вид ги задоволува условите. Левата страна на равенството од условот дава

$$xf(xy)+f(-y)\ =\ x(c+\frac{c}{xy})+c+\frac{c}{-y}=cx+c$$

а десната страна се трансформира во

$$xf(x)=x(c+\frac{c}{x})=cx+c.$$

Значи, секоја функција од видот $f(x)=c+\frac{c}{x}$ ги задоволува условите.

173. Функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е таква што за произволни *x* и *y*, за кои $x>y$ е исполнето неравенството $(f(x))^2\le f(y)$. Докажи, дека множеството вредности на функцијата се содржи во интервалот [0,1].

**Решение.** Од условот следува, дека $f(y)\ge(f(y+1))^2\ge 0$, за секој *y*, т.е. сите вредности на функцијата се ненегативни.

Нека претпоставиме дека $f(a)=b>1$, за некои *a* и *b*. Нека $c<b$ е произволен број и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е строго растечк низа, која конвергира кон *a*, и притоа важи $c<x_n<a$, за всяко *n* (на пример, $x_n=a-\frac{1}{tn}$, за некој доволно голем *t*). Тогаш

$$f(c)\ge(f(x_1))^2\ge(f(x_2))^4\ge...\ge(f(x_n))^{2^{n+1}}\ge(f(a))^{2^{n+2}}=b^{2^{n+2}},$$

за секој природен број *n,* што е противречност бидејќи левата страна е конечен број, а десната тежи кон бескрајност. Значи, $f(x)\le 1$, за секој *x*.

174. Дали постои реален позитивен број *a*, таков што

$$|\cos x|+|\cos ax|>\sin x+\sin ax, \text{ за секој } x\in\mathbf{R}\ ?$$

**Решение.** Нека претпоставиме дека $0<a\le 1$. Тогаш за $x=\pi/2$ левата страна е $|\cos(a\pi/2)|$, т.е. е помала или еднаква на 1, а десната страна е $1+\sin(a\pi/2)>1$.

Ако $a>1$, тогаш со замените $ax=t$ и $b=1/a$, даденото неравенство се сведува на неравенството $|\cos bt+|\cos t|>\sin bt+\sin t$, кое се сведува на претходниот случај. Значи, не постои реален број со саканото својство.

175. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, такви што

$$f(xy-1)+f(x)f(y)=2xy-1, \text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

**Решение.** Во даденото равенство ставаме $y=0$ и добиваме

$$f(-1)+f(x)f(0)=-1.$$

Ако $f(0)\ne 0$, тогаш $f(x)$ е константа, што противречи на равенството од условот. Следствено $f(0)=0$ и ако ставиме $x=y=1$ добиваме $f(1)^2=1$, т.е. $f(1)=1$ или $f(1)=-1$ .

*Случај* 1. Ако $f(1)=1$ ги заменуваме *x* и *y* со *xy* и 1, соодветно и го добиваме равенството

$$f(xy-1)+f(xy)=2xy-1.$$

Оттука и од условот следува

$$f(xy)=f(x)f(y). \qquad (1)$$

Заменувајќи прво $y=1$, а потоа $x$ со $x+1$ и $y=1$во равенството од условот добиваме

$$f(x-1)=2x-1-f(x) \text{ и } f(x+1)=2x+1-f(x). \qquad (2)$$

За $y=x$ од условот и равенствата (1) и (2) наоѓаме

$$\begin{aligned}2x^2-1= f(x^2-1)+f(x)^2 &= f(x-1)f(x+1)+f(x)\\ &=(2x-1-f(x))(2x+1-f(x))+f(x)\\ &=2f(x)^2-4xf(x)+4x^2-1\end{aligned}$$

од каде следува $2(f(x)-x)^2=0$, т.е. $f(x)=x$.

*Случај* 2. Ако $f(1)=-1$ со аналогни размислувања се добива

$$2x^2-1-2f(x)=4x^2-1\ ,$$

т.е. $f(x)=-x^2$.

Со непосредна проверка се покажува дека најдените функции навистина се решенија на задачата.

176. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, такви што

$$f(0)=0,\ f(1)=2013 \text{ и}$$

$$(x-y)(f(f^2(x))-f(f^2(y))) = (f(x)-f(y))(f^2(x)-f^2(y))$$

за секои $x,y\in\mathbf{R}$.

**Решение.** За $x\neq 0$ и $y=0$ наоѓаме $xf(f^2(x)) = f^3(x)$, од каде добиваме $f(f^2(x)) =\frac{f^3(x)}{x}$, за $x\neq 0$. Заменуваме во првобитното равенство при $xy\neq 0$ и добиваме

$$(x-y)(\frac{f^3(x)}{x}-\frac{f^3(y)}{y})=(f(x)-f(y))(f^2(x)-f^2(y))\,. \qquad (1)$$

Од (1) за $x<0$ и $y=1$ добиваме

$$(x-1)(\frac{f^3(x)}{x}-2013^3)=(f(x)-2013)(f^2(x)-2013^2)$$

т.е.

$$(f(x)-2013x)(f^2(x)-2013^2x)=0\,.$$

Но, за $x<0$ имаме $f^2(x)-2013^2x\neq 0$ и затоа $f(x)=2013x$, за $x<0$. Во случајов имаме $f(-1)=-2013$.

Сега, во (1) ставаме $x>0$ и $y=-1$ и добиваме

$$(f(x)-2013x)(f^2(x)+2013^2x)=0\,.$$

Следствено $f(x)=2013x$, за $x>0$. Бидејќи $f(0)=0$, важи $f(x)=2013x$, за секој $x$. Со непосредна проверка се покажува дека оваа функција ги задоволува условите на задачата.

177. Најди ги сите реални функции, такви што

$$f(x^2+2yf(x))+f(y^2)=f^2(x+y)\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}\ .$$

**Решение.** Ставаме $x=y=0$ и добиваме $2f(0)=f^2(0),$ од каде следува $f(0)=0$ или $f(0)=2$ .

Нека $f(0)=2$. За $x=0$ добиваме

$$f(4y)\ =\ f^2(y)-f(y^2)\,,$$

а за $y=0$ наоѓаме

$$f^2(x)-f(x^2)=2\,.$$

Од последните две равенства следува, дека $f(4y)=2$, т.е. $f(x)\equiv 2$.

Нека $f(0)=0$. За $y=0$ добиваме $f^2(x)=f(x^2)$, од каде следува $|f(x)|=|f(-x)|$ и $f(x)\geq 0$ кога $x\geq 0$.

Да претпоставиме дека постои $a>0$ таков што $f(a)=0$. Ставаме $x=y=a$ и наоѓаме

$$\begin{aligned}f^2(2a)&=f(a^2+2af(a))+f(a^2)\\&=2f(a^2)=2f^2(a)=0.\end{aligned}$$

Значи $f(2a)=0$. За секој $b,\ 0<b<a$ полагаме $x=a-b,\ y=b$ и добиваме

$$f(x^2+2yf(y))+f(b^2)=0\,.$$

Бидејќи $x^2+2yf(y)\geq 0$, важи $f(x^2+2yf(y))\geq 0$ и како $f(b^2)\geq 0$, добиваме дека $f(b^2)=0$, т.е. $f(b)=0$. Следствено $f(x)=0$, за $x\geq 0$ и значи $f(x)\equiv 0$.

Нека $f(x)\neq 0$, за $x\neq 0$. Ставаме $y=2f(x)-2x$ и добиваме

$$x^2+2yf(x)=x^2+y(y+2x)=(x+y)^2\,.$$

Значи,

$$f((x+y)^2)+f(y^2)=f^2(x+y),\ f(y^2)=0\,.$$

Тоа значи дека $y=2f(x)-2x=0$ , т.е. $f(x)=x$.

Се непосредна проверка се покажува дека секоја од најдените функции $f(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv 2$ и $f(x)=x$ го задоволува условот на задачата.

178. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$(x^2+y^2)f(xy)=f(x)f(y)f(x^2+y^2)\,,\text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}\,.$$

**Решение.** Нека $f(x)\not\equiv 0$. Ставаме $x=y=0$ и добиваме $f(0)=0$. За $y=1$ функционалната равенка го добива видот:

$$(x^2+1)f(x)=f(x)f(1)f(x^2+1) \tag{1}$$

Ако постои $b\neq 0$, таков што $f(b)=0$, земаме $y=b$ и добиваме $f(bx)=0$, за секој $x$, што е противречност цо $f(x)\not\equiv 0$. За $x>1$, во (1) го заменуваме $x$ со $\sqrt{x-1}$ и добиваме

$$f(x)f(1)=x\,. \tag{2}$$

Сега од (2) и од функционалната равенка од условот следува

$$f(xy)f(1)=f(x)f(y)\,,\text{ ако } x \text{ и } y \text{ се такви што } x^2+y^2>1\ . \tag{3}$$

Ако $0<x<1$ ставаме $y=\frac{1}{x}$ и како $x^2+y^2>2>1$ од (3) добиваме

$$f(x) = f(1)^3 x. \qquad (4)$$

Ако во равенката од условот ставиме $x = y \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, тогаш од (4) следува, дека

$x^2(2x)^2 f(1)^3 = (2x^2) f(x^2) = f(2x^2) f(x)^2 = (f(1)^3 2x^2)(f(1)^3 x)^2$,

од каде $f(1) = \pm 1$.

1. Нека $f(1) = 1$. Од (2) и (4) следува, дека

$$f(x) = x \text{ , за } x \geq 0. \qquad (5)$$

Бидејќи $x^2 + y^2 > 0$, од (5) и од функционалната равенка наоѓаме

$$f(xy) = f(x) f(y). \qquad (6)$$

Ако $f(x) = x$, за секој $x < 0$, тогаш $f(x) = x$, за секој *x*. Ако постои $a < 0$, таков што $f(a) \neq a$, тогаш за $x = y = a$ од (6) се добива $f(a^2) = a^2$. Сега од (5) следува

$f(a)^2 = a^2$, т.е. $f(a) = -a$. За $x < 0$ имаме $ax > 0$ и од (5) наоѓаме $f(ax) = ax$. За $x = a, y = x$ во (6) наоѓаме $ax = f(ax) = f(a) f(x) = -af(x)$, т.е. $f(x) = -x$. Следствено $f(x) = | x |$, за секој $x \in \mathbf{R}$.

2. Нека $f(1) = -1$. За $g(x) = -f(x)$ функцијата $g(x)$ ја задоволува истата функционална равенка како $f(x)$ и $g(1) = 1$. Како во претходниот случај наоѓаме $f(x) = -| x |$, за всяко $x \in \mathbf{R}$.

Со директна проверка на добиените функции се покажува дека решенија се:

$$f(x) \equiv 0,\ f(x) = x,\ f(x) = -x,\ f(x) = | x |,\ f(x) = -| x |.$$

179. Најди ги сите функции $f : \mathbf{R} \to [0, +\infty)$, такви, што равенството

$$f(a-b) + f(c-d) = f(a) + f(b+c) + f(d)$$

важи за секои реални броеви *a, b, c* и *d*, за кои важи равенството $ab + bc + cd = 0$.

**Решение.** Прво ќе докажеме, дека $f(p) + f(q) = f(r)$ за секои реални броеви *p*,

*q* и *r*, за кои $p^2 + q^2 = r^2$. Навистина, ако

$$2a = p - q + r,\ 2b = p - q - r,\ 2c = p + q = r \text{ и } d = q,$$

тогаш

$$2(ab + bc + cd) = p^2 + q^2 - r^2 = 0$$

и затоа

$$f(r) + f(\tfrac{p-q+r}{2}) = f(\tfrac{p-q+r}{2}) + f(p) + f(q),$$

од добиваме $f(p) + f(q) = f(r)$.

За $p = q = r = 0$ добиваме $f(0) = 0$, а потоа за $q = 0$ и $r = -p$ имаме $f(p) = f(-p)$, т.е.функцијата *f* е парна.

Да ја разгледаме функцијата $g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, дефинирана со равенството $g(t)=f(\sqrt{t})$. Тогаш од претходно докажаното за *f*, ако ставиме $p=\sqrt{a}$ и $q=\sqrt{b}$, добиваме $g(a)+g(b)=g(a+b)$. Оттука, ако $a\ge b\ge 0$, добиваме

$$g(a)=g(a-b)+g(b)\ge g(b),$$

т.е. функцијата $g$ е монотоно растечка. Од последното и од адитивноста на $g$ следува, дека $g(x)=g(1)x$. Тогава $f(x)=f(1)x^2$, за секој $x\ge 0$, што заедно со парноста на *f* дава $f(x)=f(1)x^2$, за секој *x*.

Лесно се покажува, дека секоја функција $f(x)=\alpha x^2, \alpha\ge 0$, ги задоволува условите на задачата.

180. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да $6f(x)\ge f^4(x+1)+f^2(x-1)+4$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

**Решение.** Да забележиме дека за $m=\inf f\ge\frac{2}{3}$ имаме

$$0\ge g(m)=m^4+m^2+4-6m=(m-1)^2(m^2+2m+4)\textbf{,}$$

од каде следува $m=1$. Со двострана индукција по $n\in\mathbf{Z}$ добиваме дека $\sqrt{6}f(x)>f(x+n)$. Нека претпоставиме дека $f^2(x+1)-f^2(x)=a_x$, за некој $x$. Тогаш

$$f^2(x)-f^2(x-1)=g(f(x))+2a_x f^2(x)+a_x^2$$

и по индукија добиваме

$$36f^2(x)-1>f^2(x-n+1)-f^2(x-n)>2^n a_x,$$

за секој $n$, што е ротиввречност. Значи, $f(x+1)\le f(x)$, за секој $x$, од каде добиваме

$6f(x)\ge f^4(x+1)+f^2(x+1)+4$.

Тогаш за $M_x=\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}(f(x+n)\le\sqrt{6}f(x)$, добиваме дека важи $0\ge g(M_x)$, т.е. $M_x=1$. Конечно, бидејќи $m=1$, следува дека $f(x)=1$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

181. Определи ги сите функции $f:(0,+\infty)\times(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ такви што за секои $x,y,z,k\in(0,+\infty)$ се исполнети условите:

а) $xf(x,y,z)=zf(z,y,x)$,

б) $f(x,ky,k^2z)=kf(x,y,z)$ и

в) $f(1,k,k+1)=k+1$.

**Решение.** Од б) и в) следува $f(1,tk,t^2(k+1))=tf(1,k,k+1)=t(k+1)$. Нека земеме $tk=a$ и $t^2(k+1)=b$. Јасно, $a$ и $b$ ги примаат сите вредности на $(0,+\infty)$. Тогаш $t=\frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ и

$$f(1,a,b)=a+t=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}.$$

Сега од а) следува $f(b,a,1)=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2b}$. Следствено,

$$f(b,a,c)=f(b,\tfrac{a}{\sqrt{c}}\sqrt{c},\sqrt{c^2}\cdot 1)=\sqrt{c}\,f(b,\tfrac{a}{\sqrt{c}},1)=\sqrt{c}\,\frac{\frac{a}{\sqrt{c}}+\sqrt{\frac{a^2}{c}+4b}}{2b}=\frac{a+\sqrt{a^2+4bc}}{2b},$$

каде $c$ е произволен број од $(0,+\infty)$. Со непосредна проверка се покажува дека функцијата $f(x,y,z)=\frac{y+\sqrt{y^2+4xz}}{2x}$ ги задоволува условите на задачата.

182. Определи ги сите функции $f:\mathbf{Q}^+\to\mathbf{R}$ такви што:

*i*) $f(x)f(y)\geq f(x,y)$, за секои $x,y\in\mathbf{Q}^+$,

*ii*) $f(x+y)\geq f(x)+f(y)$, за секои $x,y\in\mathbf{Q}^+$ и

в) постои рационален број $a>1$ таков што $f(a)=a$.

**Решение.** Ако во *i*) ставиме $x=1, y=a$ добиваме $f(1)\geq 1$. Од *ii*) по индукција следува дека

$$f(nx)\geq nf(x),\text{ за секој } n\in\mathbf{N}. \tag{1}$$

Во случајот имаме

$$f(n)\geq n\ . \tag{2}$$

Повторно од *i*) добиваме дека $f(\frac{n}{m})f(m)\geq f(n)$ , $m\in\mathbf{N}$ и значи $f>0$ на $\mathbf{Q}^+$. Сега од *ii*) следува дека $f$ е строго растечка функција. Тогаш од *ii*) добиваме дека $f(x)\geq f([x])\geq[x]>x-1$, за $x\geq 1$. Оттука и од *i*) со индукција добиваме дека $f(x)^n\geq f(x^n)\geq x^n-1$ и затоа $f(x)\geq\sqrt[n]{x^n-1}$, за $x\geq 1$. Ако сега во последното неравенство земеме $n\to\infty$ добиваме дека

$$f(x)\geq x\ ,\text{ за } x\geq 1. \tag{3}$$

Понатаму, од *i*) и (3) добиваме дека $a^n=f(a)^n\geq f(a^n)\geq a^n$, па затоа $f(a^n)=a^n$. За $x\geq 1$ наоѓаме $n$ таков што $a^n-x\geq 1$. Тогаш од *ii*) и (3) следува дека

$$\begin{aligned}a^n&=f(a)^n\geq f(x)+f(a^n-x)\\&\geq x+(a^n-x)=a^n\end{aligned},$$

од каде следува $f(x)=x$, кога $x\geq 1$. Конечно, од *i*) и (1) имаме

$$nf(x)=f(x)f(n)\geq f(nx)\geq nf(x),$$

па затоа $f(nx)=nf(x)$. Конечно, $f(\frac{m}{n})=\frac{f(m)}{n}=\frac{m}{n}$.

183. Определи ги сите функции $f:\mathbf{Q}^+\to\mathbf{R}^+$ такви што

$$f(xy)=f(x+y)(f(x)+f(y)),\text{ за секои } x,y\in\mathbf{Q}^+.$$

**Решение.** Ако ставиме $g(x)=\frac{1}{f(x)}$, тогаш $g:\mathbf{Q}^+\to\mathbf{R}^+$ и дадениот услов се трансформира во видот

$$g(x+y)g(x)g(y)=g(xy)(g(x)+g(y))\,. \qquad (1)$$

Нека $f(1)=c$, т.е. $g(1)=\frac{1}{c}$. Од (1) следува $g(x+1)=cg(x)+1$ и затоа

$g(2)=2,\ g(3)=2c+1,\ g(4)=2c^2+c+1,$

$g(5)=2c^3+c^2+c+1$ и $g(6)=2c^4+c^3+c^2+c+1$.

Од друга страна, ако во (1) ставиме $x=2, y=3$ добиваме

$$g(5)g(2)g(3)=g(6)(g(2)+g(3))\,,$$

па затоа

$$4c^5-3dc^3-c^2-c+1=0 \Leftrightarrow (c-1)(c+1)(2c-1)(2c^2+2c+1)=0\,.$$

Значи, $c=1$ или $c=\frac{1}{2}$.

Ако $c=1$, тогаш $g(x+1)=g(x)+1$. Оттука со индукција добиваме $g(n)=n$ за секој $n\in\mathbf{N}$ и $g(x+n)=g(x)+n$ за секои $x\in\mathbf{Q}^+$, $n\in\mathbf{N}$. Сега од (1) при $y=n$ добиваме

$$(g(x)+n)g(x)n=g(nx)(g(x)+n)\text{, т.е. } g(nx)=ng(x)\,.$$

Оттука, при $x=\frac{p}{q}$ и $n=q$, каде $p,q\in\mathbf{N}$ добиваме $g(x)=x$ за секој $x\in\mathbf{Q}^+$.

Според тоа, $f(x)=\frac{1}{x}$ за секој $x\in\mathbf{Q}^+$.

Ако $c=\frac{1}{2}$, тогаш $g(x+1)=\frac{1}{2}g(x)+1$. Оттука $g(n)=2$ и $g(x+n)-2=\frac{g(x)-2}{2^n}$ за секои $x\in\mathbf{Q}^+$, $n\in\mathbf{N}$. Сега од (1) при $y=n$ добиваме

$$2g(x+n)g(x)=g(nx)(g(x)+2)\,,$$

од каде следува дека $g(x)=2$, за секој $x\in\mathbf{Q}^+$, т.е. $f(x)=\frac{1}{2}$, за секој $x\in\mathbf{Q}^+$.

Конечно, бараните функции се $f(x)=\frac{1}{x}$ и $f(x)=\frac{1}{2}$.

184. Определи ги сите функции $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ за кои неравенствата

1) $f(x+y)\ge f(x)+y$

2) $f(f(x))\le x$

се исполнети за секои $x,y\in\mathbf{R}^+$.

**Решение.** Од 1) следува дека функцијата $f$ строго монотоно расте. Тогаш од 2) имаме

$$x+y\ge f(f(x+y))\,. \qquad (1)$$

Понатаму, од 1) и од тоа што $f$ строго монотоно расте следува дека $f(f(x+y))\ge f(f(x)+y)$, а ако во 1) замениме $x$ со $y$ и $y$ со $f(x)$

добиваме $f(f(x)+y)\geq f(x)+f(y)$. Понатаму, бидејќи функцијата монотоно расте имаме $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\inf\limits_{x>0} f(x)=m\geq 0$, а од 2) следува $\lim\limits_{x\to 0^+} f(f(x))=0$.

Да претпоставиме дека $m>0$. Бидејќи функцијата $f$ строго монотоно расте добиваме $f(f(x))>f(m)>0$, што противречи на $\lim\limits_{x\to 0^+} f(f(x))=0$. Значи, $m=0$ и $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$. Ако во 1) земеме $y\to 0^+$ добиваме $x\geq f(x)$ за секој $x\in\mathbf{R}^+$. Сега од 1) добиваме

$$x+y\geq f(x+y)\geq f(x)+y$$
$$x-f(x)\geq f(x+y)-f(x)-y\geq 0.$$

Ако го фиксираме $x+y$ и земеме $x\to 0^+$ добиваме дека $f(x+y)=x+y$, што значи дека $f(x)=x$, за секој $x\in\mathbf{R}^+$.

Очигледно функцијата $f(x)=x$ ги задоволува условите на задачата.

185. Дали постои функција $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ таква што

$$(x+y)f(2yf(x)+f(y))=x^3f(yf(x)) \qquad (1)$$

за секои $x,y\in\mathbf{R}^+$.

**Решение.** Нека претпоставиме дека таква функција постои. Нека $f(a)=f(b)$ за некои $a,b\in\mathbf{R}^+$. Тогаш ако во (1) ставиме $x=a$ добиваме

$$(a+y)f(2yf(a)+f(y))=a^3f(yf(a))$$

а ако ставиме $x=b$ и земеме предвид дека $f(a)=f(b)$ добиваме

$$(b+y)f(2yf(a)+f(y))=b^3f(yf(a)).$$

Според тоа, за секој $y\in\mathbf{R}^+$ важи $\frac{a+y}{b+y}=\frac{a^3}{b^3}$, од што следува $a=b$, т.е. $f$ е инјекција.

Нека $y=x^3-x>0$. Добиваме

$$x^3f(2(x^3-x)f(x)+f(x^3-x))=x^3f((x^3-x)f(x))$$

и како $f$ е инјекција следува дека

$$2(x^3-x)f(x)+f(x^3-x)=(x^3-x)f(x),$$

т.е.

$$(x^3-x)f(x)+f(x^3-x)=0,$$

што не е можно. Значи, не постои функција која ги задоволува условите на задачата.

186. Најди ги сите функции $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{R}$ такви што

1) $f(x+y)-yf(x)-xf(y)=g(x)f(y)-x-y+xy$, за секои $x,y\in\mathbf{Q}$,

2) $f(x)=2f(x+1)+2+x$, за секој $x\in\mathbf{Q}$ и

3) $f(-1)>1$.

**Решение.** Условот 1) го запишуваме во видот

$$f(x+y)+(x+y)=(f(x)+x)(f(y)+y)$$

и после замената $g(x)=f(x)+x$ ја добиваме равенката $g(x+y)=g(x)g(y)$ чии решенија се $g(x)=0$ и $g(x)=a^x, a>0$. Бидејќи $f(0)=2(f(1)+1)>0$ заклучуваме дека $g(x)\neq 0$ и тогаш $1=2(a-1+1)$, т.е. $a=\frac{1}{2}$. Според тоа, $f(x)=2^{-x}-x$.

## D) РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД ЧЕТВРТА ГЛАВА

1. Најди го збирот на коефициентите пред коефициентите со непарни степени на полиномот

a) $P(x)=(x^5+x-1)^{2013}$.

b) $P(x)=(x^2+2x+2)^{1994}+(x^2-3x-3)^{1994}$.

**Решение.** а) Нека е

$$P(x)=(x^5+x-1)^{2013}=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots.$$

Тогаш

$$P(1)=a_0+a_1+a_2+\dots$$
$$P(-1)=a_0-a_1+a_2-\dots$$

Бараниот збир е

$$\frac{P(1)-P(-1)}{2}=\frac{(1+1-1)^{2013}-(-1-1-1)^{2013}}{2}=\frac{3^{2013}+1}{2}.$$

b) Аналогно како во решението под а) добиваме дека бараниот збир е

$$\frac{P(1)-P(-1)}{2}=\frac{5^{1994}+(-5)^{1994}-1^{1994}-1^{1994}}{2}=5^{1994}-1.$$

2. Нека $f(x)=x^2-2ax-a^2-\frac{3}{4}$, $a\in\mathbf{R}$. Најди ги сите вредности на $a$ за кои неравенството $|f(x)|\le 1$ е исполнето за секој $x\in[0,1]$.

**Решение.** Нека $m$ и $M$ се најмалата и најголемата вредност на $f(x)$ на интервалот $[0,1]$. Тогаш условот е еквивалентен на $m\ge -1$ и $M\le 1$. Можни се три случаи.

1) $a\in[0,1]$. Тогаш

$m=f(a)=-2a^2-\frac{3}{4}$, а $M=f(0)=-a^2-\frac{3}{4}$ или $M=f(1)=-a^2-2a+\frac{1}{4}$.

Од $m\ge -1$ и $M\le 1$ имаме $a\in[-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}]$ и $a\in(-\infty,-\frac{3}{2}]\cup[\frac{1}{2},+\infty)$. Значи, во овој случај $a\in[0,\frac{\sqrt{2}}{4}]$.

2) $a<0$. Сега $m=f(0)$ и $M=f(1)$. Од $m\ge -1$ и $M\le 1$ добиваме $a\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, па затоа $a\in[0,\frac{1}{2}]$.

3) $a>1$. Сега $m=f(1)$ и $M=f(0)$. Од $m\ge -1$ и $M\le 1$ добиваме $a\in[-\frac{5}{2},\frac{1}{2}]$, што противречи на $a>1$.

3. Нека $P(x)=x^2+ax+b$, каде $a$ и $b$ се цели броеви. Ако $P(x)$ е полн квадрат за бесконечно многу цели броеви $x$, тогаш $a^2=4b$. Докажи!

**Решение.** Од условот на задачата следува дека постојат бесконечно многу парови $(x,n)$, каде $x\in\mathbf{Z}, n\in\mathbf{N}$, такви да $x^2+ax+b=n^2$, што значи дека за бесконечно многу природни броеви $n$ важи $\sqrt{a^2-4b+4n^2}\in\mathbf{N}$. Но, за доволно големи вредности на $n$ точни се неравенствата

$$(2n-1)^2 < a^2 - 4b + 4n^2 < (2n+1)^2,$$

па затоа $a^2 - 4b + 4n^2 = (2n)^2$, т.е. $a^2 = 4b$.

4. Полиномот $p(x) = ax^2 + bx + c$ е таков што од $|x| \le 1$ следува $|p(x)| \le 1$. Докажи дека во тој случај за полиномот $p_1(x) = cx^2 + bx + a$ од $|x| \le 1$ следува $|p_1(x)| \le 2$.

**Решение.** Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $a > 0$, бидејќи во спротивно го разгледуваме полиномот $-p(x) = -ax^2 - bx - c$. Аналогно можеме да сметаме дека $b \ge 0$, бидејќи во спротивно наместо полиномот $p(x)$ можеме да го разгледуваме полиномот $p(-x) = ax^2 - bx + c$.

Во неравенството $|p(x)| \le 1$ заменуваме $x = 0, x = 1, x = -1$ и добиваме

$$|a + b + c| \le 1, |c| \le 1 \text{ и } |a - b + c| \le 1,$$

т.е.

$$|a + b| \le 2, |c| \le 1 \text{ и } |a - b| \le 2.$$

Понатаму, при $c \ge 0$ добиваме $0 \le cx^2 \le c$, за $|x| \le 1$, а $-b \le bx \le b$, па затоа

$$p_1(x) = cx^2 + bx + a \le c + b + a \le 1 \text{ и}$$

$$p_1(x) = cx^2 + bx + a \ge 0 + (-b) + a = a - b \ge -2,$$

од што следува $|p_1(x)| \le 2$. Аналогно, при $c \le 0$ имаме $c \le cx^2 \le 0$ и $-b \le bx \le b$, па затоа

$$p_1(x) = cx^2 + bx + a \le 0 + b + a = a + b \le 2 \text{ и}$$

$$p_1(x) = cx^2 + bx + a \ge c + (-b) + a = a - b + c \ge -1,$$

од што следува $|p_1(x)| \le 2$.

5. За полиномот $f(x)$ со целобројни корфициенти важи $f(n^2) = 0$ за некој цел број $n \ne 0$. Докажи дека не постои рационален број $a \ne 0$ таков да $f(a^2) = 1$.

**Решение.** Тврдењето очигледно важи ако $f(x)$ е константен полином. Нека $\deg f = m \ge 1$. Тогаш $f(x) = g(x)(x - n^2)$, каде $g(x)$ е полином со целобројни коефициенти и $\deg g = m - 1$.

Нека претпоставиме, дека $f(a^2) = 1$ за некој рационален број $a = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ и $\text{NZD}(p, q) = 1$. Тогаш

$$\begin{aligned} 1 &= f(a^2) = g(a^2)(a^2 - n^2) \\ &= \tfrac{1}{q^{2m}}[q^{2m-2} g((\tfrac{p}{q})^2)](p^2 - q^2 n^2) \end{aligned},$$

од каде добиваме

$$q^{2m} = [q^{2m-2} g((\tfrac{p}{q})^2)](p - qn)(p + qn).$$

Очигледно бројот во средните загради е цел број, па $(p-qn)(p+qn)$ е делител на $q^{2m}$. Од друга страна, од $\mathrm{NZD}(p,q)=1$ лесно следува, дека ниту еден од броевите $p-qn$ и $p+qn$ не може да има заеднички делител со $q$. Но, тогаш $|p-qn|=|p+qn|=1$, што не е можно (провери!). Конечно, од добиената противречност следува дека не постои рационален број $a\neq 0$ таков да $f(a^2)=1$.

6. Нека $n\geq 2$ е природен број и

$$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+1$$

е полином со позитивни целобројни коефициенти, такви да $a_k=a_{n-k}$ за секој $k$, $k=1,2,...,n-1$. Докажи дека постојат бесконечно многу парови природни броеви $(x,y)$ такви да $x\,|\,P(y)$ и $y\,|\,P(x)$.

**Решение.** Забележуваме дека парот $(1,P(1))$ ги задоволува условите на задачата, бидејќи $1\,|\,P(P(1))$ и $P(1)\,|\,P(1)$. Да претпоставиме дека само конечно многу парови $(x,y)$ го задоволуваат условот на задачата. Да ги разгледаме паровите $(x,y)$, за кои $x\leq y$ и такви да $y$ има најголема вредност. Ќе докажеме дека парот $(y,\frac{P(y)}{x})$ ги задоволува условите на задачата. Од $x\,|\,P(y)$ следува дека бројот $\frac{P(y)}{x}$ е природен. Значи, $\frac{P(y)}{x}\,|\,P(y)$. Останува уште да докажеме дека $y\,|\,P(\frac{P(y)}{x})$. Од $y\,|\,P(x)$, т.е. $y\,|\,x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+1$ следува дека $x$ и $y$ се заемно прости броеви. Но, тоа значи дека конгруенцијата $xz\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,y)$ има решение $z$. Понатаму, од $P(y)\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,y)$ добиваме

$$P(\frac{P(y)}{x})\equiv P(zP(y))\equiv P(z)\,(\mathrm{mod}\,y).$$

Понатаму, од својствата на полиномот $P$ имаме $x^nP(\frac{1}{x})=P(x)$. Сега од $y\,|\,P(x)$ следува $x^nP(\frac{1}{x})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,y)$ и затоа $P(z)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,y)$. Значи, парот $(y,\frac{P(y)}{x})$ ги задоволува условите на задачата. Освен тоа,

$$P(y)\geq y^n+1>y^2\geq xy$$

и затоа $\frac{P(y)}{x}>y$, што противречи на максималноста на $y$ во парот $(x,y)$.

7. Низата на Фибоначи $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена со $a_1=a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ за $n\in\mathbf{N}$. Нека за полиномот $P(x)$, $\deg P=990$ важи $P(k)=a_k$, за $k=992, 993,...,1982$. Докажи дека $P(1983)=a_{1983}-1$.

**Решение.** Со индукција по $n$ ќе го докаќеме следново поопшто тврдење: ако полиномот $P(x)$, $\deg P=n$ важи

$$P(k)=a_k\text{, за } k=n+2,n+3,...,2n+2, \qquad (1)$$

тогаш $P(2n+3)=a_{2n+3}-1$.

За $n=1$ полиномот од прв степен со својства $P(3)=2, P(4)=3$ е $P(x)=x-1$ и затоа $P(5)=4=a_5-1$. Нека тврдењето важи за $n-1$ и нека $P(x)$ е полином таков да $\deg P=n$ и се исполнети условите (1). Нека

$$Q(x)=P(x+2)-P(x+1).$$

За полиномот $Q(x)$ важи $\deg Q\leq n-1$ и

$$Q(k)=P(k+2)-P(k+1)=a_{k+2}-a_{k+1}=a_k,$$

за секој $k=n+1,n+2,...,2n$. Од индуктивната претпоставка следува дека $Q(2n+1)=a_{2n+1}-1$, па затоа

$$P(2n+3)=P(2n+2)+Q(2n+1)=a_{2n+2}+a_{2n+1}-1=a_{2n+3}-1,$$

т.е. тврдењето важи и за $n$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој природен број.

8. Нека $M$ е множество полиноми од облик $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a,b,c,d\in\mathbf{R}$ такви што важи $|P(x)|\leq 1$, за $x\in[-1,1]$. Докажи дека постои $k\in\mathbf{R}$ таков да важи $|a|\leq k$, за секој полином $P(x)$ од множеството $M$. Најди ја најмалата можна вредност на $k$.

**Решение.** Полиномот $P_0(x)=4x^3-3x$ припаѓа на множеството $M$ бидејќи $P_0(1)=1$, $P_0(-1)=-1$ и во екстремалните точки на $P_0(x)$ важи $P_0(\frac{1}{2})=1$ и $P_0(-\frac{1}{2})=-1$. Значи, ако постои $k$, тогаш $k\geq 4$. Ќе докажеме дека за секој водечки коефициент на произволен полином $P(x)$ од множеството $M$ важи $|a|\leq 4$.

Нека претпоставиме дека постои полином $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $|a|>4$ таков да $|P(x)|\leq 1$, за $x\in[-1,1]$. Да го разгледаме ненултиот полином $Q(x)=P_0(x)-\frac{4}{a}P(x)$. Негодиот степен е е поголем од 2. Понатаму, бидејќи $|\frac{4}{a}P(x)|<1$, за $x\in[-1,1]$, добиваме $Q(-1)<0$, $Q(-\frac{1}{2})>0, Q(\frac{1}{2})<0, Q(1)>0$, па затоа полиномот $Q(x)$ има најмалку три нули, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека $k=4$.

9. За полиномот $P(x)$ постои $a\in\mathbf{R}$ таков да $P(x)=P(a-x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Докажи дека постои полином $Q(x)$ таков да $P(x)=Q((x-\frac{a}{2})^2)$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

**Решение.** Нека $y=x-\frac{a}{2}$. Тогаш $a-x=\frac{a}{2}-y$ и $x=\frac{a}{2}+y$. Од условот на задачата следува

$$P(\tfrac{a}{2}+y)=P(\tfrac{a}{2}-y)\text{, за секој } y\in\mathbf{R}. \qquad (1)$$

Ако

$$P(\tfrac{a}{2}+y)=b_ny^n+b_{n-1}y^{n-1}+...+b_2y^2+b_1y+b_0,$$

тогаш

$$P(\tfrac{a}{2}-y)=(-1)^nb_ny^n+(-1)^{n-1}b_{n-1}y^{n-1}+...+b_2y^2-b_1y+b_0,$$

па од (1) следува дека

$$b_{2k+1}y^{2k+1}+b_{2k-1}y^{2k-1}+...+b_3y^3+b_1y=0, \text{ за секој } y\in\mathbf{R},$$

каде $2k+1$ е најголемиот природен број помал или еднаков на $n$. Оттука следува дека $b_1=b_3=...=b_{2k+1}=0$. Според тоа,

$$P(\tfrac{a}{2}+y)=b_{2m}y^{2m}+b_{2m-2}y^{2m-2}+...+b_2y^2+b_0,$$

при што $2m$ е најголемиот парен број помал или еднаков на $n$. Според тоа $P(x)=P(\frac{a}{2}+y)$ е полином од $y^2=(x-\frac{a}{2})^2$, што значи дека постои полином $Q(x)$ таков да $P(x)=Q((x-\frac{a}{2})^2)$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

10. Да ги разгледаме полиномите

$$P_n(x)=\binom{n}{2}+\binom{n}{5}x+\binom{n}{8}x^2+...+\binom{n}{3k+2}x^k,$$

каде $n\geq 2$ е природен број и $k=[\frac{n-2}{3}]$. Докажи дека

$$P_{n+3}(x)=3P_{n+2}(x)-3P_{n+1}(x)+(x+1)P_n(x).$$

**Решение.** Ако ги изедначиме коефициентите пред $x^m$, $0\leq m\leq[\frac{n+1}{3}]$ добиваме дека треба да докажеме дека

$$\binom{n+3}{3m+2}=3\binom{n+2}{3m+2}-3\binom{n+1}{3m+2}+\binom{n}{3m+2}+\binom{n}{3m-1}.$$

Ако го искористиме идентитетот

$$\binom{k+1}{i}=\binom{k}{i}+\binom{k}{i-1},$$

добиваме дека

$$\begin{aligned}&\binom{n+3}{3m+2}-3\binom{n+2}{3m+2}+3\binom{n+1}{3m+2}-\binom{n}{3m+2}-\binom{n}{3m-1}=\\&=[\binom{n+3}{3m+2}-\binom{n+2}{3m+2}]-2[\binom{n+2}{3m+2}-\binom{n+1}{3m+2}]+[\binom{n+1}{3m+2}-\binom{n}{3m+2}]-\binom{n}{3m-1}\\&=\binom{n+2}{3m+1}-2\binom{n+1}{3m+1}+\binom{n}{3m+1}-\binom{n}{3m-1}\\&=[\binom{n+2}{3m+1}-\binom{n+1}{3m+1}]-[\binom{n+1}{3m+1}-\binom{n}{3m+1}]-\binom{n}{3m-1}\\&=\binom{n+1}{3m}-\binom{n}{3m}-\binom{n}{3m-1}=0.\end{aligned}$$

11. За кои природни броеви $n$ постојат полиноми $f$ и $g$ од $n$ променливи со целобројни коефициенти такви што

$$(x_1+x_2+...+x_n)f(x_1,x_2,...,x_n)=g(x_1^2,x_2^2,...,x_n^2). \tag{1}$$

**Решение.** Нека $p=p(x_1,x_2,...,x_n)$ е произволен полином со целобројни коефициенти. Овој полином може да се запише во облик

$$p=a_n+b_nx_n,$$

каде полиномите $a_n$ и $b_n$ со целобројни коефициенти содржат само парни степени на променливата $x_n$. Ако полиномот $p$ го помножиме со полиномот $q_n = a_n - b_n x_n$ го добиваме полиномот

$$pq_n = a_n^2 - b_n^2 x_n^2,$$

кој е со целобројни коефициенти и содржи само парни степени на променливата $x_n$.

Сега, да го претставиме полиномот $pq_n$ во облик

$$pq_n = a_{n-1} + b_{n-1} x_{n-1},$$

каде полиномите $a_{n-1}$ и $b_{n-1}$ со целобројни коефициенти содржат само парни степени на променливата $x_{n-1}$ и да го помножиме со

$$q_{n-1} = a_{n-1} - b_{n-1} x_{n-1}.$$

Продолжувајќи ја постапката добиваме полином

$$q = pq_n q_{n-1} ... q_1 \tag{2}$$

со целобројни коефициенти кои содржи само парни степени на секоја од променливите $x_i, i = 1, 2, ..., n$, т.е. за кој важи

$$q = q(x_1, x_2, ..., x_n) = g(x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2),$$

за некој полином $q$ со целобројни коефициенти.

Конечно, ако во (2) ставиме

$$p = x_1 + x_2 + ... + x_n \text{ и } f(x_1, x_2, ..., x_n) = q_n q_{n-1} ... q_1,$$

добиваме дека условот (1) може да биде исполнет за секој природен број $n$.

12. Нека $n \geq 2$. Најди го бројот на сите полиноми

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k, \quad a_i \in \{0,1,2,3\}, i = 0,1,2,...,k$$

за кои $P(2) = n$.

**Решение.** Нека

$$n = a_0 + 2a_1 + ... + 2^j a_j + ... + 2^k a_k, \quad a_i \in \{0,1,2,3\}, i = 0,1,2,...,k.$$

Ако земеме $b_j = [\frac{1}{2} a_j]$, тогаш за бројот

$$m = b_0 + 2b_1 + ... + 2^j b_j + ... + 2^k b_k, \tag{1}$$

важи $0 \leq m \leq \frac{n}{2}$ и со (1) е дадено неговото бинарно претставување. Ќе докажеме дека полиномите кои ги задоволуваат условите на задачата инјективно се пресликуваат во множеството $\{0,1,2,...,[\frac{n}{2}]\}$. Навистина, ако

$$n = a_0 + 2a_1 + ... + 2^k a_k = c_0 + 2c_1 + ... + 2^k c_k \text{ и } [\tfrac{1}{2} a_j] = [\tfrac{1}{2} c_j], \; j = 0,...,k,$$

тогаш $2 | (a_0 - c_0)$ и $[\frac{1}{2} a_0] = [\frac{1}{2} c_0]$, па затоа $a_0 = c_0$. Според тоа, $\frac{n-a_0}{2} = \frac{n-c_0}{2}$ и со индукција може да се докаже дека $a_j = c_j$, за $j = 0,...,k$. Ќе докажеме дека секој број $m, 0 \leq m \leq \frac{n}{2}$ може да се добие на овој начин. Го искористиме бинарниот запис на $m$. Имаме

$$m = c_0 + 2c_1 + 2^2 c_2 + \dots, \text{ каде } c_i \in \{0,1\}.$$

Дефинираме броеви $a_j$, $0 \le a_j \le 3$ кои ги задоволуваат условите $[\frac{1}{2} a_j] = c_j$ и $2^{j+1} \mid (n - a_0 - 2a_1 + \dots + 2^j a_j)$ и сега е јасно дека бројот $m, 0 \le m \le \frac{n}{2}$ може да се добие на опишаниот начин.

Конечно, бараниот број полиноми е еднаков на бројот на природните броеви $m, 0 \le m \le \frac{n}{2}$, т.е. тој е еднаков на $[\frac{n}{2}] + 1$.

13. Нека $Q(x)$ е ненулти полином, а $k$ е природен број. Докажи дека полиномот $P(x) = (x-1)^k Q(x)$ има барем $k+1$ ненулти коефициенти.

**Упатство.** Нека претпоставиме дека најмногу $k$ коефициенти на полиномот $P(x)$ се различни од нула. Тогаш $P(x)$ има облик

$$P(x) = (x-1)^k Q(x) = a_k x^{n_k} + a_{k-1} x^{n_{k-1}} + \dots + a_1 x^{n_1},$$

каде $n_k > n_{k-1} > \dots > n_1 \ge 0$ се природни броеви и $a_i \ne 0$, за $i = 1, 2, \dots, k$. Ако во последното равенство ставиме $x = y + 1$, добиваме

$$y^k Q(y+1) = a_k (y+1)^{n_k} + a_{k-1} (y+1)^{n_{k-1}} + \dots + a_1 (y+1)^{n_1}$$
$$= b_0 + b_1 y + \dots + b_{n_k} y^{n_k}.$$

Но, $b_0 + b_1 y + \dots + b_{n_k} y^{n_k}$ се дели со $y^k$, па затоа $b_0 = \dots = b_{k-1} = 0$, па од Њутновата биномна формула следува

$$\binom{n_1}{0} a_1 + \binom{n_2}{0} a_2 + \dots + \binom{n_k}{0} a_k = 0$$

$$\binom{n_1}{1} a_1 + \binom{n_2}{1} a_2 + \dots + \binom{n_k}{1} a_k = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\binom{n_1}{k-1} a_1 + \binom{n_2}{k-1} a_2 + \dots + \binom{n_k}{k-1} a_k = 0$$

од што следува дека $a_i, i = 1, 2, \dots, k$ се решенија на системот

$$\binom{n_1}{0} z_1 + \binom{n_2}{0} z_2 + \dots + \binom{n_k}{0} z_k = 0$$

$$\binom{n_1}{1} z_1 + \binom{n_2}{1} z_2 + \dots + \binom{n_k}{1} z_k = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\binom{n_1}{k-1} z_1 + \binom{n_2}{k-1} z_2 + \dots + \binom{n_k}{k-1} z_k = 0.$$

Ако докажеме дека последниот систем има единствено решение

$$z_1 = z_2 = \dots = z_k = 0,$$

тогаш ќе добиеме противречност со претпоставката, дека $Q(x)$ е ненулти полином и со тоа задачата ќе биде решена. Последното можеме да го докажеме со индукција по $k$.

14. Дадени се полиноми со комплексни коефициенти

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n,\text{ со нули } x_i,\, i=1,2,...,n,$$

$$Q(x)=x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+...+b_n,\text{ со нули } x_i^2,\, i=1,2,...,n.$$

Ако $a_1+a_3+a_5+...$ и $a_2+a_4+a_6+...$ се реални броеви, докажи дека и $b_1+b_2+b_3+...+b_n$ е реален број.

**Решение.** Бидејќи $P(1)=1+a_1+a_2+...+a_n$, $P(-1)=(-1)^n+(-1)^{n-1}a_1+...+a_n$ и $a_1+a_3+a_5+...$ и $a_2+a_4+a_6+...$ се реални броеви добиваме дека $P(1)$ и $P(-1)$ се реални броеви. Понатаму,

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)\text{ и } Q(x)=(x-x_1^2)(x-x_2^2)...(x-x_n^2)$$

па затоа

$$\begin{aligned}1+b_1+b_2+...+b_n&=Q(1)=(1-x_1^2)(1-x_2^2)...(1-x_n^2)\\&=(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n)(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)\\&=(-1)^nP(1)P(-1).\end{aligned}$$

Значи $Q(1)$ е реален број, па затоа $b_1+b_2+...+b_n=Q(1)-1$ е реален број.

15. За полиномот $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$, $a_i\in\mathbf{Z}, i=0,1,2,...,n$ со $w(P)$ го означуваме бројот на непарните коефициенти $a_j$. Нека за секој ненегативен цел број $i$ нека е $Q_i=(1+x)^i$. Докажи дека ако $i_1,i_2,...,i_n\in\mathbf{N}_0$ се такви што $0\le i_1<i_2<...<i_n$, тогаш

$$w(Q_{i_1}+Q_{i_2}+...+Q_{i_n})\ge w(Q_{i_1}).$$

**Решение.** За $m=2^s$ добиваме $Q_m=(1+x)^m=1+R(x)+x^m$ каде $R$ е полином со парни коефициенти. Затоа, ако полиномот $P(x)$ има степен помал од $m=2^s$, тогаш

$$w(PQ_m)=2w(P). \tag{1}$$

Непосредно се проверува дека неравенството што треба да се докаже важи за $i_n=0$, бидејќи $w(Q_0)\ge w(Q_0)$ и за $i_n=1$, бидејќи

$$w(Q_0+Q_1)=1\ge 1=w(Q_0).$$

Да претпоставиме дека тоа важи за секој $i_n<2^s$ $(s\ge 1)$ и да разгледаме низа $i_1,i_2,...,i_n$ за која $2^s\le i_n<2^{s+1}$. Разгледуваме два случаја:

$1^\circ$ $i_1\ge 2^s=k$. Тогаш прво од (1), а потоа од индуктивната претпоставка и од (1) следува

$$\begin{aligned}w(Q_{i_1}+Q_{i_2}+...+Q_{i_n})&=w(Q_kP)=2w(P)=2w(Q_{i_1-k}+...+Q_{i_n-k})\\&\ge 2w(Q_{i_1-k})=w(Q_{i_1-k}Q_k)=w(Q_{i_1}).\end{aligned}$$

$2^\circ$. $i_1<2^s=k$. Тогаш $i_n<2^{s+1}=2k$ и

$$Q_{i_1}(x)+Q_{i_2}(x)+...+Q_{i_n}(x)=(1+x)^{i_1}+(1+x)^{i_2}+...+(1+x)^{i_n}$$

$$=a_0+a_1x+...+a_{k-1}x^{k-1}+(1+x)^k(b_0+b_1x+...+b_{i_n-k}x^{i_n-k})$$
$$=\sum_{i=0}^{k-1}a_ix^i+\sum_{i=0}^{i_n-k}b_ix^i+x^k\sum_{i=0}^{i_n-k}b_ix^i+R(x),$$

каде $R$ е полином со парни коефициенти. Го пресметуваме бројот на непарни коефициенти на добиениот полином. Коефициентите $b_i$ се појавуваат по двапати, а степените во втората и третата сума се различни. Бројот на непарните коефициенти $b_i$ се придодава на бројот на непарните коефициенти $a_i$. Ако некој од коефициентите $b_i$ е непарен и истовремено и коефициентот $a_i$ е непарен, во збирот од првите две суми коефициентот $b_i+a_i$ ќе биде парен, па затоа во третата сума останува коефициентот $b_i$. Според тоа,

$$w(Q_{i_1}+Q_{i_2}+...+Q_{i_n})\geq w(\sum_{i=0}^{k-1}a_ix^i)\geq w(Q_{i_1}),$$

При што последното неравенство следува од индуктивната претпоставка. Со тоа доказот е завршен.

16. Дали постои полином $p(x)$ со целобројни коефициенти кој ги задоволува условите

a) $p(2)=4$ и $p(6)=6$.

b) $p(7)=11$ и $p(11)=13$.

**Решение.** а) За полином со целобројни коефициенти и различни цели броеви $a$ и $b$ важи $(a-b)\,|\,(p(a)-p(b))$. Ако бараниот полином постои, тогаш за $a=6$, $b=2$ имаме $a-b=4$, $p(a)-p(b)=2$, па треба 2 да се дели со 4, што не е можно. Значи, не постои полином со наведените својства.

b) Не постои. Заклучокот следува наполно аналогно како во решението под а).

17. Докажи дека не постои полином со целобројни коефициенти

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

таков да $P(0), P(1), P(2), ...$ се прости броеви.

**Решение.** Нека $N$ е произволен цел број и $P(N)=M$. Тогаш за секој цел број $k$ бројот

$$P(N+kM)-P(N)=a_n[(N+kM)^n-N^n]+a_{n-1}[(N+km)^{n-1}-N^{n-1}]+...$$
$$+a_1[(N+kM)-N]$$

се дели со $kM$, па значи и со $M$. Затоа $P(N+kM)$ се дели со $M$ за секој цел број $k$. Според тоа, ако докажеме дека меѓу вредностите $P(N+kM)$, $k=0,1,2,3,...$ постојат броеви различни од $\pm M$, ќе докажеме дека не се сите разгледувани броеви прости.

Да ги разгледаме броевите $P(N+kM)$, $k=0,1,...,2n$. Овие $2n+1$ броеви не се сите еднакви на $+M$ или $-M$, бидејќи во тој случај една од равенките $P(x)-M=0$ или $P(x)+M=0$ ќе има повеќе од $n$ корени, што не е можно.

Значи, меѓу броевите $P(N+kM)$, $k=0,1,...,2n$ има, во краен случај, еден различен од $\pm M$ , кој не е прост број, што и требаше да се докаже.

18. Нека $n\in\mathbf{N}$ и $P$ е полином со целобројни коефициенти таков што $0<|P(i)|<n$, за $i=1,2,\dots,n$. Докажи дека полиномот $P$ нема целобројна нула.

**Решение.** Од теоремата на Безу следува дека за цели броеви $m$ и $n$ и полином $P$ со целобројни коефициенти важи $(m-n)|(P(m)-P(n))$. Нека $l\in\mathbf{Z}$ е целобројна нула на полиномот $P$. Тогаш, постојат $k,r\in\mathbf{Z}$, така што $l=kn+r$, па $n|kn|(r-l)|(P(r)-P(l))=P(r)$, што не е можно, затоа што $0<|P(r)|<n$.

19. Нека $k\geq 4$ е цел број. Ако $F(x)$ е полином со целобројни коефициенти таков да $0\leq F(c)\leq k$ , за $c=0,1,2,...,k+1$ докажи дека

$$F(0)=F(1)=F(2)=...=F(k+1).$$

**Решение.** Доволно е да докажеме дека броевите $1,2,...,k+1$ се нули на полиномот $F(x)-F(0)$. Од теоремата на Безу следува дека $F(k+1)-F(0)$ се дели со $k+1$ и како $|F(k+1)-F(0)|\leq k$ заклучуваме дека $F(k+1)=F(0)$. Според тоа,

$$F(x)-F(0)=x(x-k-1)G(x),$$

за некој полином $G(x)$ со целобројни коефициенти. Затоа

$$k\geq|F(c)-F(0)|=c(k+1-c)|G(c)|,\text{ за } c=1,2,...,k.$$

Бидејќи за $1<c<k$, важи $(c-1)(k-c)>0$ добиваме дека $c(k+1-c)>k$ и $G(c)=0$. Според тоа, $2,3,...,k-1$ се корени на полиномот $G(x)$ и

$$F(x)-F(0)=x(x-2)(x-3)...(x-k+1)(x-k-1)H(x)$$

за некој полином $H(x)$ со целобројни коефициенти. За $c=1$ и $c=k$ имаме

$$k\geq|F(c)-F(0)|=k|G(c)|=(k-2)!k|H(c)|.$$

Бидејќи $(k-2)!>1$ за $k\geq 4$, мора да важи $H(c)=0$. Конечно,

$$F(c)-F(0)=0,\text{ за } c=1,2,3,...,k+1.$$

20. Нека $P(x)$ е полином со целобројни коефициенти таков да

$$P(19)=P(89)=1989.$$

Дали може $P(1989)$ да е петцифрен природен број?

**Решение.** За секој полином $P(x)$ со целобројни коефициенти и за секои $a,b\in\mathbf{Z}$ важи $(a-b)|(P(a)-P(b))$. СПоред тоа, за дадениот полином добиваме

$$1970=1989-19\,|\,P(1989)-P(19)=P(1989)-1989$$
$$1900=1989-89\,|\,P(1989)-P(89)=P(1989)-1989.$$

Значи, бројот $P(1989)-1989$ е делив со бројот

$$n = \text{NZS}(1970,1900) = 1900 \cdot 197,$$

т.е. $P(1989) = kn + 1989$. Конечно,

- за $k < 0$ имаме $P(1989) < 0$,
- за $k = 0$ имаме $P(1989) = 1989$,
- за $k > 0$ имаме $P(1989) \geq n + 1989 > n = 1900 \cdot 197 > 100000$.

Според тоа, $P(1989)$ не може да е петцифрен природен број.

21. Докажи дека не постои полином $P(x)$ со целобројни коефициенти таков што $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$, каде $a, b, c$ се различни цели броеви.

**Решение.** Нека

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0.$$

Забележуваме дека $\frac{P(a)-P(b)}{a-b}, \frac{P(b)-P(c)}{b-c}, \frac{P(c)-P(a)}{c-a} \in \mathbf{Z}$. Да претпоставиме дека за полиномот $P(x)$ важи $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$, каде $a, b, c$ се различни цели броеви. Според тоа, $\frac{b-c}{a-b}, \frac{c-a}{b-c}, \frac{a-b}{c-a} \in \mathbf{Z}$ и како

$$\frac{b-c}{a-b} \cdot \frac{c-a}{b-c} \cdot \frac{a-b}{c-a} = 1,$$

заклучуваме дека секој од множителите е еднаков на 1 или на $-1$. Ако $\frac{b-c}{a-b} = -1$, $b - c = -a + b$, т.е. $a = c$, што е противречност. Значи, $\frac{b-c}{a-b} = 1$ и од исти причини и останатите два множители се еднакив на 1, т.е.

$$\frac{b-c}{a-b} = \frac{c-a}{b-c} = \frac{a-b}{c-a} = 1,$$

па затоа $b - c = a - b$, $c - a = b - c$ и $a - b = c - a$. Ако од првото го изведиме ворото равенство добиваме $b = c$, што повторно е противречност.

Значи, не постои полином со бараните својства.

22. Нека $p(x)$ е полином со целобројни коефициенти кој за четири различни целобројни вредности на $x$ прима вредност 7. Докажи дека $p(x) \neq 14$, за секој $x \in \mathbf{Z}$.

**Решение.** Полиномот $p(x) - 7$ има најмалку четири целобројни нули, па затоа

$$q(x) = p(x) - 7 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4) q_1(x).$$

Ако е $p(x) = 14$, тогаш $q(x) = 7$, т.е.

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4) q_1(x) = 7,$$

што не е можно, бидејќи бројот 7 не може да се запише како производ на четири различни цели броеви.

23. Докажи дека не постои полином $P(x)$ со целобројни коефициенти таков што

1) $P(-x) = P(x)$, за секој $x \in \mathbf{R}$,
2) $P(1) = 64$ и
3) $P(63) = 2048$.

**Решение.** Нека претпоставиме дека постои таков полином

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0 .$$

Од условот 1) следува дека $a_{2k-1}=0, k=1,2,...$, т.е. полиномот содржи само парни степени на променливата $x$, па затоа

$$P(x)=b_nx^{2n}+b_{n-1}x^{2(n-1)}+...+b_1x^2+b_0 .$$

Сега имаме

$$1984=P(63)-P(1)=b_n(63^{2n}-1)+b_{n-1}(63^{2(n-1)}-1)+...+b_1(63^2-1) .$$

Но,

$$63^{2n}-1=(63^2)^k-1=(63^2-1)((63^2)^{k-1}+(63^2)^{k-2}+...+1) ,$$

па затоа $2\cdot 1984=63^2-1\,|\,P(63)-P(1)=1984$, што е противречност. Според тоа, полином со бараните својства не постои.

24. Нека $P(x)$ е полином од $n-$ти степен со реални коефициенти кој за $n+1$ рационална вредност на $x$ прима рационални вредности. Докажи дека $P(x)$ прима рационални вредности за секој рационален број.

**Решение.** *Прв начин*. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по $n$.

Ако $n=0$, тогаш $P(x)=c$, $c\in\mathbf{R}$ и како $P(x)$ прима рационална вредност за еден рационален број добиваме дека $c$ е рационален број. $P(x)$ прима рационални вредности за секој рационален број.

Да претпоставиме дека тврдењето важи за сите полиноми со степен $n=k$ и нека $P(x)$ е полином со степен $n=k+1$ таков што за $x_i\in\mathbf{Q},\ i=1,2,...,k+2$ важи $a_i=P(x_i)\in\mathbf{Q},\ i=1,2,...,k+2$. Од теоремата на Безу следува дека

$$P(x)=(x-x_{k+2})Q(x)+a_{k+2}, \tag{1}$$

каде $Q(x)$ е послином со степен $k$. Од (1) добиваме

$$Q(x_i)=\tfrac{a_i-a_{k+2}}{x_i-x_{k+2}}\in\mathbf{Q}\text{, за } i=1,2,...,k .$$

Од индуктивната претпоставка следува дека $Q(x)$ прима рационална вредност за секој рационален број. Сега од (1) добиваме дека $P(x)$ прима рационални вредности за секој рационален број. Конечно, тврдењето следува од принципот на математичка индукција.

*Втор начин*. Нека $P(x)$ за $x_i\in\mathbf{Q},\ i=1,2,...,n+1$ прима рационални вредности $a_i=P(x_i)\in\mathbf{Q},\ i=1,2,...,n+1$, соодветно. Дефинираме полином

$$Q(x)=a_1\tfrac{(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)...(x_1-x_{n+1})}+a_2\tfrac{(x-x_1)(x-x_3)...(x-x_{n+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)...(x_2-x_{n+1})}+...$$

$$+a_{n+1}\tfrac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)...(x_{n+1}-x_n)} .$$

Полиномот $Q(x)$ е со степен $n$ и бидејќи е со рационални коефициенти, тој прима рационални вредности за сите рационални броеви. Од друга страна, за $i=1,2,...,n+1$ важи $Q(x_i)=a_i=P(x_i)$. Според тоа, $P(x)$ и $Q(x)$ се полиноми со степен $n$ кои за $n+1$ реална вредност примаат исти вредности, па затоа $P(x)=Q(x)$. Според тоа, $P(x)$ прима рационални вредности за секој рационален број.

25. Нека $P, Q$ и $R$ се полиноми се реални коефициенти, при што еден од нив е од втор и еден од трет степен и важи

$$[P(x)]^2+[Q(x)]^2=[R(x)]^2. \qquad (1)$$

Докажи дека сите корени на еден полиномите од трет степен се реални.

**Решение.** Без ограничување на општоста можеме да земеме дека коефициентите пред највисоките степени на полиномите се позитивни.

Бидејќи еден полином е од трет степен, а еден од втор степен, добиваме дека $\deg R=3$. Навистина, ако претпоставиме дека $\deg R=2$, тогаш $\deg R^2=4$, а $\deg(P^2+Q^2)\geq 6$, што не е можно. Според тоа, $\deg R=3$, па од (1) следува дека $\deg(P^2+Q^2)=6$, што значи дека еден од полиномите $P$ и $Q$ е од трет, а според условот другиот е од трет степен. Без ограничување на општоста можеме да земеме $\deg P=2$ и $\deg Q=3$.

Од равенството

$$[P(x)]^2=(R(x)-Q(x))(R(x)+Q(x))$$

и фактот дека $\deg(R+Q)=3$ и $\deg P^2=4$ добиваме $\deg(R-Q)=1$, што значи дека

$$R(x)-Q(x)=r(x-a), a\in\mathbf{R}, r>0.$$

Според тоа, $(x-a)\,|\,P(x)$, па затоа $(x-a)^2\,|\,[P(x)]^2$, што значи дека $(x-a)\,|\,(R(x)+Q(x))$. Значи, $(x-a)\,|\,(R(x)+Q(x))$ и $(x-a)\,|\,(R(x)-Q(x))$, па затоа $(x-a)\,|\,R(x)$ и $(x-a)\,|\,Q(x)$, т.е.

$$R(x)=(x-a)R_1(x) \text{ и } Q(x)=(x-a)Q_1(x),$$

при што $Q_1(x)$ и $R_1(x)$ се полиноми од втор степен со позитивни водечки коефициенти.

Нека $P(x)=q(x-a)(x-b)$, каде $q>0$. Од равенството

$$q^2(x-b)^2=(R_1(x)+Q_1(x))(R_1(x)-Q_1(x))$$

и $\deg(R_1+Q_1)=2$ следува $R_1(x)-Q_1(x)=t$, за некој $t\in\mathbf{R}^+$. Според тоа, $R_1(x)=Q_1(x)+t$, па затоа $q^2(x-b)^2=t(2Q_1(x)+t)$, односно

$$Q_1(x)=\tfrac{1}{2t}[q^2(x-b)^2-t^2].$$

Конечно,

$$Q(x)=(x-a)Q_1(x)=\tfrac{1}{2t}(x-a)[q^2(x-b)^2-t^2]$$

е полином од трет степен со реални корени.

26. Нека $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ е полином со целобројни коефициенти. Докажи, ако $P(0)$ и $P(1)$ се непарни цели броеви, тогаш не постои цел број $x$ таков да $P(x)=0$.

**Решение.** Нека претпоставиме дека постои цел број $x$ таков да $P(x)=0$. Ако $x$ е парен број, тогаш и бројот

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x=-a_n$$

е парен број, што противречи на условот $P(0)=a_n$ е непарен број. Ако пак $x$ е непарен, тогаш за секој $k$ бројот $x^k-1$ е парен, па затоа и бројот

$$a_0(x^n-1)+a_1(x^{n-1}-1)+...+a_{n-1}(x-1)=-(a_0+a_1+...+a_n)$$

е парен, што противречи на условот $P(1)=a_0+a_1+...+a_n$ е непарен број.

27. Квадратниот трином $p(x)=ax^2+bx+c$ е таков што равенката $p(x)=x$ нема реални решенија. Докажи дека и равенката $p(p(x))=x$ исто така нема реални решенија.

**Решение.** Бидејќи равенката $ax^2+bx+c=x$ нема реални корени, квадратниот трином $p(x)-x=ax^2+(b-1)x+c$ за секој $x\in\mathbf{R}$ прима вредности со ист знак, да кажеме $p(x)-x>0$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Ставаме $y=p(x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$ и добиваме $p(y)-y>0$. Според тоа, $p(p(x))-p(x)>0$, за секој $x\in\mathbf{R}$, односно $p(p(x))>p(x)>x$, за секој $x\in\mathbf{R}$, што значи дека равенката $p(p(x))=x$ нема реални корени.

28. За $x=0,1,2,...,n-1$ полиномот $P(x)$ со целобројни коефициенти прима вредности различни од нула и по модул помали од $n$. Докажи дека полиномот нема целобројни корени.

**Решение.** Нека $t\in\mathbf{Z}$ е корен на полиномот

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0.$$

Да го запишеме $t$ во облик $t=nk+r$, каде $k\in\mathbf{Z}$ и $0\le r\le n-1$. Тогаш

$$\begin{aligned}P(r)&=P(r)-P(t)\\&=a_nr^n+...+a_1r-[a_n(nk+r)^n+...+a_1(nk+r)]\\&=a_n[r^n-(nk+r)^n]+a_{n-1}[r^{n-1}-(nk+r)^{n-1}]+...+a_1(nk+r-r)\\&=An,\end{aligned}$$

што противречи на $P(r)\ne 0$ и $|P(r)|<n$.

29. Нека $f(x)=x^4-4x^3+(3+m)x^2-12x+12$, каде $m$ е реален параметар.
   1) Најди ги сите цели броеви $m$, такви што равенката
   $$f(x)-f(1-x)+4x^3=0$$
   има најмалку едно целобројно решение.
   2) Најди ги сите вредности на $m$, такви да $f(x)\ge 0$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

**Решение.** 1) Равенката $f(x)-f(1-x)+4x^3=0$ е еквивалентна на равенката

$$6x^2-2(13-m)x+12-m=0$$

и за да истата има најмалку едно целобројно решение потребно е дискриминантата

$$D = 4(m^2 - 20m + 97) = 4[(m-10)^2 - 3]$$

да биде полн квадрат, а тоа е можно само ако $(m-10)^2 = 4$, т.е. $m = 12$ и $m = 8$. Ако $m = 8$, тогаш равенката е еквивалентна на равенката $6x^2 - 10x + 4 = 0$ и таа има целобројно решение $x = 1$. Ако $m = 12$, тогаш равенката е еквивалентна со равенката $6x^2 - 2x = 0$ и таа има целобројно решение $x = 0$.

2) Имаме

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + (3+m)x^2 - 12x + 12 = (x^2+3)(x-2)^2 + x^2(m-4) .$$

Ако $m < 4$, т.е. $m - 4 < 0$, тогаш $f(2) = 2^2(m-4) < 0$. Нека сега $m \geq 4$. Тогаш од $(x-2)^2 \geq 0, x^2 + 3 \geq 0, x^2 \geq 0$ имаме

$$f(x) = (x^2+3)(x-2)^2 + x^2(m-4) \geq 0 .$$

Значи, $f(x) \geq 0$, за секој $x \in \mathbf{R}$ ако и само ако $m \in [4, \infty)$.

30. Најди ги сите реални броеви $a$ за кои полиномот

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - (a^2+2)x - a^2 ,$$

има различни реални корени $x_1, x_2, x_3$ такви што $\sin\frac{2\pi x_1}{3}, \sin\frac{2\pi x_2}{3}$ и $\sin\frac{2\pi x_3}{3}$, во некој редослед се три последователни членови на аритметичка прогресија.

**Решение.** Имаме

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - (a^2+2)x - a^2 = (x-1)(x^2 - 2x + a^2) ,$$

па затоа полиномот има три различни реални корени ако $a^2 < 1$ и тие се $x_1 = 1, x_2 = 1 + \sqrt{1-a^2}, x_3 = 1 - \sqrt{1-a^2}$. Според тоа, $x_2 + x_3 = 2$, $1 < x_2 \leq 2$ и $0 \leq x_3 < 1$. Ќе разгледаме два случаја.

1) Средниот член на прогресијата е $\sin\frac{2\pi x_1}{3} = \sin\frac{2\pi}{3}$. Тогаш

$$\sin\frac{2\pi x_2}{3} + \sin\frac{2\pi x_3}{3} = 2\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$2\sin(\tfrac{2\pi}{3} \cdot \tfrac{x_2+x_3}{2})\cos(\tfrac{2\pi}{3} \cdot \tfrac{x_2-x_3}{2}) = 2\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\tfrac{\pi}{3}(x_2 - x_3) = 1.$$

Но, $\frac{\pi}{3}|x_2 - x_3| = \frac{2\pi}{3}\sqrt{1-a^2} \leq \frac{2\pi}{3}$ и затоа $\frac{\pi}{3}(x_2 - x_3) \in [-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$. Последното заедно со $\cos\frac{\pi}{3}(x_2 - x_3) = 1$ повлекува $x_2 = x_3$, што е противречност.

2) Првиот или третиот член на прогресијата е $\sin\frac{2\pi x_1}{3} = \sin\frac{2\pi}{3}$. Тогаш

$$\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi x_i}{3} = 2\sin\frac{2\pi}{3}(2 - x_i)$$

$$\sin\tfrac{2\pi}{3}+\sin\tfrac{2\pi x_i}{3}=2\sin\tfrac{4\pi}{3}\cos\tfrac{2\pi}{3}x_i-2\cos\tfrac{2\pi}{3}\sin\tfrac{2\pi}{3}x_i,,$$

за $i=2$ или 3, од што следува дека $\cos\tfrac{2\pi}{3}x_i=-\tfrac{1}{2}$. Тоа заедно со $1<x_2\le 2$ и $0\le x_3<1$ дава $x_2=2, x_3=0$ и $a=0$.

31. Нека $P(x)$ е полином со реални коефициенти, таков што $P(x)\ge 0$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Докажи дека постојат полиноми $Q(x)$ и $R(x)$ со реални коефициенти такви да

$$P(x)=[Q(x)]^2+[R(x)]^2, \text{ за секој } x\in\mathbf{R}.$$

**Решение.** Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се сите различни нули на полиномот $P(x)$, а $z_1,z_2,...,z_m$ се сите комплексни нули на полиномот $P(x)$ со позитивен имагинарен дел, при што секоја нула е запишана онолку пати колку што е нејзината кратност. Бидејќи $P(x)$ не го менува знакот на множеството реални броеви, добиваме дека кратноста на секоја реална нула е парен број. Затоа полиномот $P(x)$ можеме да го запишеме во обликот

$$\begin{aligned}P(x)&=[Q_1(x)]^2(x-z_1)(x-z_2)...(x-z_m)(x-\overline{z_1})(x-\overline{z_2})...(x-\overline{z_m})\\&=[Q_1(x)]^2[u(x)-iv(x)][u(x)+iv(x)]=[Q_1(x)]^2[(u(x))^2+(v(x))^2]\\&=[Q_1(x)u(x)]^2+[Q_1(x)v(x)]^2.\end{aligned}$$

32. Нека $n\in\mathbf{N}$ и за полиномот $P(x)$ важи $\deg P=2n$, $P(0)=1$ и $P(k)=2^{k-1}$, за $k=1,2,...,2n$. Докажи дека $2P(2n+1)-P(2n+2)=1$.

**Решение.** Ќе ја воведеме ознаката $\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)(x-2)...(x-k+1)}{k!}$, за секој $x\in\mathbf{R}$ и за секој $k\in\mathbf{N}$. Ќе го разгледаме полиномот

$$Q(x)=1+\binom{x}{2}+\binom{x}{4}+\binom{x}{6}+...+\binom{x}{2n}.$$

За секој природен број $m$ имаме $\binom{m}{0}+\binom{m}{2}+\binom{m}{4}+...=2^{m-1}$, па затоа $Q(0)=1$ и $Q(k)=2^{k-1}$, за $k=1,2,...,2n$. Според тоа, за полиномите $Q(x)$ и $P(x)$ важи $\deg P=2n=\deg Q$ и

$$Q(0)=1=P(0),\ Q(k)=2^{k-1}=P(k), \text{ за } ak(k-\alpha_3)...(k-\alpha_n)=-2$$

па затоа $P(x)=Q(x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$, т.е.

$$P(x)=1+\binom{x}{2}+\binom{x}{4}+\binom{x}{6}+...+\binom{x}{2n}. \qquad (1)$$

Сега од (1) следува

$$P(2n+1)=1+\binom{2n+1}{2}+\binom{2n+1}{4}+\binom{2n+1}{6}+...+\binom{2n+1}{2n}=2^{2n+1-1}=2^{2n} \text{ и}$$

$$P(2n+2)=1+\binom{2n+2}{2}+\binom{2n+2}{4}+...+\binom{2n+2}{2n}=2^{2n+2-1}-1=2^{2n+1}-1,$$

па затоа

$$2P(2n+1)-P(2n+2)=2\cdot 2^{2n}-(2^{2n+1}-1)=1.$$

33. Нека $a \neq 0$. Ако за полиномот $P(x)$ важи $P(x)=P(x+a)$, за секој $x\in \mathbf{R}$, тогаш $P(x)$ е константен полином. Докажи!

**Решение.** Со индукција по $n$ лесно се докажува дека $P(na)=P(0)$, за секој $n\in \mathbf{N}$. Според тоа, полиномот $P(x)-P(0)$ има бесконечно многу корени, од што следува дека $P(x)-P(0)=0$. Значи, $P(x)$ е константен полином.

34. Нека $P(x)$ и $Q(x)$ се полиноми со реални коефициенти такви што секој од нив има најмалку еден реален корен и за секој $x\in \mathbf{R}$ важи

$$P(1+x+Q(x)^2)=Q(1+x+P(x)^2)\,. \tag{1}$$

Докажи дека $P(x)\equiv Q(x)$.

**Решение.** Прво ќе докажеме дека постои реален број $a$ таков што $P(a)^2=Q(a)^2$. Навистина, ако таков број не постои, тогаш заради непрекинатоста на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ не постојат реални броеви $d$ и $b$ такви што $P(d)>Q(d)$ и $P(b)<Q(b)$, па затоа или $P(x)^2>Q(x)^2$, за секој $x\in \mathbf{R}$ или $Q(x)^2>P(x)^2$, за секој $x\in \mathbf{R}$. Во првиот случај нека $x=x_0$ каде $x_0$ е реалниот корен на $P(x)$. Имаме, $0=P(x_0)^2>Q(x_0)^2$, што е противречност. Во вториот случај ако $x=y_0$ е реалниот корен на $Q(x)$, тогаш $0=Q(y_0)^2>P(y_0)^2$, што повторно е противречност.

Значи, постои $a\in \mathbf{R}$ таков што $P(a)^2=Q(a)^2$. Нека $x_1=1+a+Q(a)^2$. Од (1) следува $P(x_1)=Q(x_1)$, па затоа $P(x_1)^2=Q(x_1)^2$. Понатаму, за

$$x_2=1+x_1+Q(x_1)^2$$

важи $x_2>x_1$ и повторно од (1) добиваме $P(x_2)=Q(x_2)$. Продолжувајќи ја постапката конструираме бесконечно многу реални броеви $x_1,x_2,x_3,...$ такви што $x_1<x_2<x_3<...$ и $P(x_i)=Q(x_i),\ i=1,2,...$. Значи, полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ се совпаѓаат во бесконечно многу точки, па затоа $P(x)\equiv Q(x)$.

35. За полиномот $P(x)$ важи:

$$(P(x))^2=P(x^2)-2P(x) \tag{1}$$

$$P(x)+P(-x)=-2\,. \tag{2}$$

a) Одреди го степенот на полиномот $P(x)$.

b) Дали овој полином има реални нули?

**Решение.** а) Од $P(x)+P(-x)=-2$ следува дека слободниот член на полиномот $P(x)$ е $-1$. Релацијата (1) ќе ја запишеме во облик

$$(P(x)+1)^2=P(x^2)+1\,.$$

Лесно се гледа дека полиномот $P(x)$ е или константата $-1$ или пак бином од облик $x^{2k+1}-1$. Имено, ако полиномот $P(x)$ содржи член од облик

$a_{2m+1}x^{2m+1}$, каде $a_{2m+1}$ е коефициент пред највисокиот степен за кој $k \ge 2m+1$, тогаш

$$(P(x)+1)^2 = x^{4k+2} + 2a_{2m+1}x^{2k+2m+1} + ...$$
$$P(x^2)+1 = x^{4k+2} + a_{2m+1}x^{4m+2} + ...$$

што не е можно. Значи, $P(x) = x^{2k+1} - 1$ или $P(x) = -1$.

b) Ако $P(x) = x^{2k+1} - 1$, тогаш полиномот има една реална нула, а ако $P(x) = -1$, тогаш полиномот нема реални нули.

36. Нека $P(x)$ е полином од $n-$ти степен со својство $P(m) = \frac{m}{m+1}$, за $m = 0,1,2,...,n$. Пресметај $P(n+1)$.

**Решение.** Да го разгледаме полиномот $Q(x) = (x+1)P(x) - x$. Од условот на задачата следува дека овој полином има нули $0,1,2,...,n$. Според тоа,

$$Q(x) = cx(x-1)(x-2)...(x-n),$$

каде $c$ е константа која треба да ја определиме. Од

$$Q(-1) = c(-1)^{n+1}(n+1)! \text{ и } Q(-1) = (-1+1)P(-1) + 1$$

следува $c = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. Според тоа, $P(x) = \frac{Q(x)+x}{x+1}$, па затоа

$$P(n+1) = \frac{Q(n+1)+n+1}{n+2} = \frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}.$$

37. Нека $n \in \mathbf{N}$. Докажи дека полиномот $P(z) = z^{n+1} - z^n - 1$ има корен $w$ таков да $|w| = 1$ ако и само ако $6 | (n+2)$.

**Решение.** Нека $|w| = 1$ и $w^{n+1} - w^n - 1 = 0$. Тогаш $w^n(w-1) = 1$ и бидејќи $|w| = 1$, добиваме $|w-1| = 1$. Според тоа, $w$ е еден од пресеците на кружниците $|z| = 1$ и $|z-1| = 1$, па значи $w = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}$. Освен тоа

$$w - 1 = \cos\frac{2\pi}{3} \pm i\sin\frac{2\pi}{3} = w^2.$$

Конечно,

$$1 = w^n(w-1) = w^n w^2 = w^{n+2} = \cos\frac{(n+2)\pi}{3} \pm i\sin\frac{(n+2)\pi}{3},$$

што значи $\frac{(n+2)\pi}{3} = 2k\pi$, за секој $k \in \mathbf{N}$, па затоа $n+2 = 6k$, $k \in \mathbf{N}$, т.е. $6 | (n+2)$.

Обратно, ако $n+2 = 6k$, за некој $k \in \mathbf{N}$, тогаш за $w = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}$ важи $|w| = 1$, $w - 1 = w^2$ и $w^{n+2} = 1$, па затоа

$$w^{n+1} - w^n - 1 = w^n(w-1) = w^n w^2 = w^{n+2} = 1.$$

38. Нека $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ се реални броеви такви да $0 < a_0 < a_1 < ... < a_{n-1} \le 1$ и $\lambda$ е комплексен корен на полиномот

$$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0,$$

таков да $|\lambda|\geq 1$. Докажи дека $\lambda^{n+1}=1$.

**Решение.** Имаме

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0=0.$$

Ако помножиме со $\lambda-1$ добиваме

$$\lambda^{n+1}=(1-a_{n-1})\lambda^n+(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1}+...+(a_1-a_0)\lambda+a_0. \qquad (1)$$

Бидејќи сите коефициенти на десната страна се ненегативни добиваме

$$\begin{aligned}|\lambda|^{n+1}&\leq(1-a_{n-1})|\lambda|^n+(a_{n-1}-a_{n-2})|\lambda|^{n-1}+...+(a_1-a_0)|\lambda|+a_0\\&\leq|\lambda|^n[(1-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+...+(a_1-a_0)+a_0]=|\lambda|^n\end{aligned}$$

од што следува $|\lambda|\leq 1$. Но, по претпоставка имаме $|\lambda|\geq 1$, па затоа $|\lambda|=1$, т.е. $|\lambda|^{n+1}=1$. Од досега изнесеното следува

$$\begin{aligned}|\lambda^{n+1}|=|\lambda|^{n+1}=1=(1-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+...+(a_1-a_0)+a_0\\=|(1-a_{n-1})\lambda^n|+|(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1}|+...+|(a_1-a_0)\lambda|+|a_0|.\end{aligned} \qquad (2)$$

Равенствата (1) и (2) може истовремено да се исполнети ако и само ако броевите

$$\lambda^{n+1},(1-a_{n-1})\lambda^n,(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1},...,(a_1-a_0)\lambda,a_0$$

се реални и се со ист знак. Но, $a_0>0$, па затоа секој од броевите

$$\lambda^{n+1},(1-a_{n-1})\lambda^n,(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1},...,(a_1-a_0)\lambda$$

е ненегативен. Конечно,

$$\begin{aligned}\lambda^{n+1}&=(1-a_{n-1})\lambda^n+(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1}+...+(a_1-a_0)\lambda+a_0\\&=|(1-a_{n-1})\lambda^n|+|(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1}|+...+|(a_1-a_0)\lambda|+|a_0|\\&=|\lambda^{n+1}|=|\lambda|^{n+1}=1.\end{aligned}$$

39. Најди ги сите природни броеви $n$ за кои полиномот

$$P(x)=x^n+(2+x)^n+(2-x)^n$$

има барем една целобројна нула.

**Решение.** За $n=2k$ полиномот е позитивен за секој $x\in\mathbf{R}$ и нема реални нули. Исто така, за $x\geq 0$ важи $P(x)>0$, па затоа ако полиномот има реални нули, тогаш тие се помали од 0.

За $n=1$ имаме $P(x)=x+4$ има точно една целобројна нула и тоа е бројот $-4$. Ќе докажеме дека за непарен број $n>1$ полиномот нема целобројни нули. Навистина, слободниот член на дадениот полином е $2^{n+1}$ и како тоа е полином со целобројни коефициенти неговите целобројни нули се делители на $2^{n+1}$ и како тие се негативни броеви истите мора да бидат од облик $-2^k$, $k=0,2,...,n+1$. Да ги испитаме сите можности.

- Ако $k=0$, имаме $x=-1$ и $P(-1)=(-1)^n+1^n+3^n=3^n\neq 0$.

- Ако $k=1$, имаме $x=-2$ и $P(-2)=(-2)^n+0^n+4^n=(-2)^n+4^n>0$.
- Нека $k\geq 2$. Ставаме $k=p+1$ и добиваме

$$\begin{aligned}P(-2^k)&=2^n[-2^{pn}+(1-2^p)^n+(1+2^p)^n]\\&=2^n[-2^{pn}+(2+\tbinom{n}{2})2^{2p}+\tbinom{n}{4}2^{4p}+...)],\end{aligned}$$

што повторно доведува до противречност ако се разгледува деливост со 4.

40. Нека $P(x)$ е полином со реални коефициенти кој има барем два различни корени при што полиномот $P(P(x))$ нема ниту еден реален корен. Докажи дека сите реални корени на $P(x)$ имаат ист знак.

**Решение.** Јасно, 0 не е корен на полнимот $P(x)$, бидејќи во тој случај 0 би бил корен и на полиномот $P(P(x))$.

Да претпоставиме дека $a<0$ и $b>0$ се два реални корени на полиномот $P(x)$. Но, графикот на $P(x)$ ја сече барем една од правите $y=a$ и $y=b$, па затоа постои $c\in\mathbf{R}$ таков да $P(c)=a$ или $P(c)=b$. Но, тоа значи дека постои $c\in\mathbf{R}$ таков да $P(P(c))=P(a)=0$ или $P(P(c))=P(b)=0$, односно $c$ е корен на $P(P(x))$, што противречи на условот на задачата. Конечно, од добиената противречност следува дека сите реални корени на $P(x)$ имаат ист знак.

41. Нека $P(x)$ е полином таков што $n=\deg P\geq 5$, $P$ е со целобројни коефициенти и $n$ различни целобројни корени $\alpha_i, i=1,2,...,n$, каде $\alpha_1=0$. Најди ги целобројните корени на полиномот $P(P(x))$.

**Решение.** Од условот на задачата следува

$$P(x)=ax(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)...(x-\alpha_n),\quad \alpha_i\neq\alpha_j, \text{за } i\neq j.$$

Нека претпоставиме дека $P(k)=\alpha_2$, за некој $k\in\mathbf{Z}$. Тогаш

$$ak(k-\alpha_2)(k-\alpha_3)...(k-\alpha_n)=\alpha_2.$$

Од $k\,|\,\alpha_2$ следува $\alpha_2=kt, t\in\mathbf{Z}$, па затоа

$$ak(1-t)(k-\alpha_3)...(k-\alpha_n)=t,$$

што значи $(1-t)\,|\,t$, од што следува $t\in\{0,2\}$. За $t=0$ добиваме $\alpha_2=0=\alpha_1$, што е противречност. За $t=2$ добиваме

$$ak(k-\alpha_3)...(k-\alpha_n)=-2.$$

Но, $k-\alpha_3,k-\alpha_4,...,k-\alpha_n$, $n\geq 5$ се различни цели броеви и ова е можно само за $n=5$ и притоа тоа се некои од броевите $1,-1,2$ или $-2$. Во овој случај $|a|=|k|=1$. За $k=1$ или $k=-1$ добиваме дека постои $i\neq 1$ таков да $\alpha_i=0=\alpha_1$, што повторно е противречност. Според тоа, за секој $i\geq 2$ важи $P(k)\neq\alpha_i$, за секој $k\in\mathbf{Z}$.

Од досега изнесеното следува дека полиномот $P(P(x))$ не може да има различни целобројни корени од полиномот $P(x)$. Конечно, од $P(P(\alpha_i))=P(0)=0$, за

$i=1,2,...,n$ добиваме дека полиномите $P(x)$ и $P(P(x))$ имаат исти целобројни корени $\alpha_1=0$, $\alpha_i, i=2,...,n$.

42. Нека $P(x)$ е полином со целобројни коефициенти. Докажи дека множествата целобројни решенија на равенките $P(P(P(x)))=x$ и $P(x)=x$ се еднакви.

**Решение.** Нека $A$ и $B$ се множествата целобројни решенија на равенките $P(P(P(x)))=x$ и $P(x)=x$, соодветно. Јасно, $B\subseteq A$. Нека претпоставиме дека $a\in A\setminus B\neq\varnothing$. Нека $P(a)=b, P(b)=c$, каде $b,c\in\mathbf{Z}$. Тогаш $P(c)=a$, па како $a\in A\setminus B$ добиваме дека $b\neq a$ и $c\neq a$, а оттука $P(b)\neq P(c)$, па затоа $b\neq c$. Значи, целите броеви $a,b,c$ се меѓусебно различни. Можеме да претпоставиме, на пример дека $b$ е меѓу $a$ и $c$. Тогаш од $c-a\,|\,P(c)-P(a)$ следува $c-a\,|\,a-b$, што е противречност со $|c-a|>|a-b|>0$. Конечно, од добиената противречност следува $A\setminus B=\varnothing$ и како $B\subseteq A$ добиваме $A=B$.

43. Нека $P_1(x)=x^2-2$, $P_k(x)=P_1(P_{k-1}(x))$, за $k=2,3,...$ Докажи дека за секој $n\in\mathbf{N}$ сите корени на равенката $P_n(x)=x$ се реални и меѓусебно различни.

**Решение.** *Прв начин.* Полиномот $P_1(x)$ има степен $2=2^1$. Нека претпоставиме дека за некој $k\geq 1$ полиномот $P_k(x)$ има степен $2^k$. Тогаш, за $n=k+1$ имаме $P_{k+1}(x)=P_1(P_k(x))=[P_k(x)-2]^2$, од што следува дека степенот на полиномот $P_{k+1}(x)$ е $2^{k+1}$. Сега, од принципот на математичка индукција следува дека за секој $n\in\mathbf{N}$ степенот на полиномот $P_n(x)$ е $2^n$.

Равенката $P_n(x)=x$ е од $2^n$ степен, па ако најдеме $2^n$ различни реални броеви кои ја задоволуваат оваа равенка задачата ќе биде решена.
Ја воведуваме смената $x=2\cos\alpha$ и последователно добиваме

$$P_1(x)=x^2-2=4\cos^2\alpha-2=2\cos 2\alpha$$

$$P_2(x)=P_1(P_1(x))=4\cos^2 2\alpha-2=2\cos 2^2\alpha$$

......................................................

$$P_n(x)=P_1(P_{n-1}(x))=2\cos 2^n\alpha,$$

и равенката $P_n(x)=x$ го добива обликот $\cos 2^n\alpha=\cos\alpha$, т.е. обликот

$$\sin\tfrac{2^n+1}{2}\alpha\sin\tfrac{2^n-1}{2}\alpha=0.$$

Решенијата на последната равенка се

$$\alpha_k^{'}=\tfrac{2k\pi}{2^n+1}, k\in\mathbf{Z} \text{ и } \alpha_p^{''}=\tfrac{2p\pi}{2^n-1}, p\in\mathbf{Z}.$$

Ако замениме во $x=2\cos\alpha$ и ги искористиме својствата на функцијата $\cos t$ добиваме дека броевите

$$x_k^{'}=2\cos\alpha_k^{'}=2\cos\tfrac{2k\pi}{2^n+1}, k=1,2,3,...,2^{n-1} \text{ и}$$

$$x_p^{''} = 2\cos\alpha_p^{''} = 2\cos\frac{2p\pi}{2^n-1},\ p = 0,1,2,...,2^{n-1}-1$$

се решенија на равенката $P_n(x) = x$, при што за $k = p = 0$ се добива исто решение $x_0^{''} = x_0^{'} = 2$. Затоа ќе земеме $k = 1,2,...,2^{n-1}$ и $p = 0,1,2,...,2^{n-1}-1$. Ова се вкупно $2^{n-1}+2^{n-1} = 2^n$ реални вредности на $x$ кои се решенија на равенката $P_n(x) = x$. Останува уште да докажеме дека овие $2^n$ броеви се меѓусебно различни. Но,

$$\frac{2k\pi}{2^n+1} \in [0,\pi), \text{ за } k = 0,1,2,3,...,2^{n-1} \text{ и } \frac{2p\pi}{2^n-1} \in [0,\pi), \text{ за } p = 0,1,2,...,2^{n-1}-1$$

и како на интервалот $[0,\pi)$ функцијата $\cos t$ монотоно опаѓа добиваме дека $x_{k_i}^{'} \neq x_{k_j}^{'}$, за $i \neq j$ и $x_{p_i}^{''} \neq x_{p_j}^{''}$, за $i \neq j$. Нека претпоставиме дека за некои $k$ и $p$ важи $x_k^{'} = x_p^{''}$, т.е. $\cos\frac{2k\pi}{2^n+1} = \cos\frac{2p\pi}{2^n-1}$. Но, $\frac{2k\pi}{2^n+1}, \frac{2p\pi}{2^n-1} \in [0,\pi)$, па затоа од последното равенство следува дека $\frac{2k\pi}{2^n+1} = \frac{2p\pi}{2^n-1}$, т.е. $p(2^n+1) = k(2^n-1)$. Броевите $2^n+1$ и $2^n-1$ се заемно прости, па затоа последното равенство е можно ако и само ако $p = q(2^n-1)$ и $k = q(2^n+1)$, за некој $q \geq 1$, што противречи на фактот дека $k \in \{1,2,3,...,2^{n-1}\}$ и $p \in \{0,1,2,...,2^{n-1}-1\}$. Конечно, од добиената противречност следува дека $x_k^{'} \neq x_p^{''}$, за секои $k$ и $p$.

Значи, наведените $2^n$ решенија на равенката $P_n(x) = x$ се различни и со тоа задачата е решена.

*Втор начин.* Аналогно како и во претходно заклучуваме дека степенот на полиномот $P_n(x)$ е $2^n$, што значи дека равенката $P_n(x) = x$ има $2^n$.

Прво, со индукција по $k$, ќе докажеме дека за секој природен број $k$ постојат броеви $a_0, a_1, ..., a_{2^k-1}, a_{2^k}$ такви да

$$-2 = a_0 < a_1 < ... < a_{2^k-1} < a_{2^k} = 2 \tag{1}$$

и $P_k(a_i) = (-1)^i \cdot 2$, за $i = 0,1,2,...,2^k$.

За $k = 1$ непосредно се проверува дека броевите $-2, 0, 2$ го задоволуваат горното тврдење. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за $k = n$, т.е. дека постојат броеви $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{2^n-1}, \alpha_{2^n}$ такви да

$$-2 = \alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_{2^n-1} < \alpha_{2^n} = 2 \tag{2}$$

и $P_n(\alpha_i) = (-1)^i \cdot 2$, за $i = 0,1,2,...,2^n$. Бидејќи $P_n(\alpha_i)$ и $P_n(\alpha_{i+1})$, за $i = 0,1,2,...,2^n-1$ се различни по знак, меѓу секои два члена на низата (2) $P_n$ има по еден корен, вкупно $2^n$ корени. Членовите на низата (2) и корените на полиномот $P_n$ формираат нова низа

$$-2 = \beta_0 < \beta_1 < ... < \beta_{2^{n+1}-1} < \beta_{2^{n+1}} = 2$$

таква што $P_n(\beta_i)=0$, за $i$ непарен број и $|P_n(\beta_i)|=2$, за $i$ парен број. Тогаш имаме

$$P_{n+1}(\beta_i)=P_1(P_n(\beta_i))=P_1(0)=-2\text{, за } i \text{ непарен број и}$$

$$P_{n+1}(\beta_i)=P_1(P_n(\beta_i))=P_1(\pm 2)=2\text{, за } i \text{ парен број.}$$

Според тоа, тврдењето важи за $k=n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број $k$.

Од докажаното тврдење следува дека полиномот $P_k(x)-x$ за $x=a_0,a_2,...,a_{2^{k-1}}$ има позитивна вредност, а за $x=a_1,a_2,...,a_{2^k-1}$ иам енгативна вредност, што значи дека меѓу секои два члена на низата (1) равенката $P_k(x)=x$ има по едно реално решение, освен меѓу $a_{2^k-1}$ и $a_{2^k}$.

Значи, равенката чиј степен е $2^k$ има $2^k-1$ реални решенија, па мора да има $2^k$ реални решенија. Имено, ако $2^k$-тото решение е комплексен број, тогаш и коњугираниот на него број ќе биде решение на равенката, па таа би имала решение, $2^k+1$ што не е можно.

44. Докажи дека полиномот $P(z)$ со комплексни коефициенти е парна функција на множеството комплексни броеви $\mathbf{C}$, т.е. $P(-z)=P(z)$, за секој $z\in\mathbf{C}$ ако и само ако постои полином $Q(z)$ таков да

$$P(z)=Q(z)Q(-z)\text{, за секој } z\in\mathbf{C}. \qquad (1)$$

**Решение.** Нека постои полином $Q(z)$ таков да важи (1). Тогаш

$$P(-z)=Q(-z)Q(z)=P(z),$$

за секој $z\in\mathbf{C}$ што значи дека полиномот $P(z)$ е парна функција.

Обратно, нека претпоставиме дека полиномот $P(z)$ е парна функција и дека не е нулти полином. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по бројот $m$ на нулите на полиномот $P(z)$ кои се различни од нула.

Ако $m=0$, тогаш полиномот $P(z)$ има облик $P(x)=az^n$, при што $a\neq 0$. Но, $P(z)$ е пана функција, па затоа $n=2k$, за некој $k\in\mathbf{N}$. Земаме $b$ таков што $b^2=(-1)^k a$ и ставаме $Q(z)=bz^k$. Тогаш

$$Q(z)Q(-z)=b^2z^k(-1)^kz^k=az^{2k}=P(z),$$

т.е. тврдењето важи за $m=0$.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за сите полиноми за такви што $m<l$. Ќе докажеме дека тоа важи за $m=l$. Ако $c\neq 0$ е нула на полиномот $P$, тогаш $P(c)=0$ и бидејќи функцијата $P(z)$ е парна добиваме $P(-c)=0$. Затоа постои полином $R(z)$ таков да $P(z)=(z-c)(z+c)R(z)$. Имаме

$$(z^2-c^2)R(-z)=[(-z)^2-c^2]R(-z)=P(-z)=P(z)=(z^2-c^2)R(z),$$

што значи дека $R(z)$ е парна функција, па од индуктивната претпоставка следува дека постои полином $S(z)$ таков што

$$R(z)=S(z)S(-z).$$

Нека $Q(z)=i(z-c)S(z)$. Имаме

$$Q(z)Q(-z)=i(z-c)S(z)i(-z-c)S(-z)=(z^2-c^2)R(z)=P(z),$$

т.е. тврдењето важи за $m=l$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број $m$.

45. За полиномите $P,Q,R,S$ е исполнето равенството

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)\,. \qquad (1)$$

Докажи дека полиномот $P(x)$ се дели со полиномот $x-1$.

**Решение.** Нека $S(x)=s_nx^n+s_{n-1}x^{n-1}+...+s_1x+s_0$. Ако двете страни на равенството (1) ги помножиме со $x-1$ добиваме

$$(x-1)[P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)]=(x^5-1)S(x)\,. \qquad (2)$$

Полиномот $S(x)$ го запичуваме во облик

$$S(x)=S_1(x)+S_2(x)\,, \qquad (3)$$

каде

$$S_1(x)=s_{5m}x^{5m}+s_{5(m-1)}x^{5(m-1)}+...+s_{10}x^{10}+s_5x^5+s_0\,,\ m=[\tfrac{n}{5}]$$

и $S_2(x)=S(x)-S_1(x)$. Тогаш равенството (2) можеме да го запишеме во обликот

$$P(x^5)+(x^5-1)S_1(x)=-(x^5-1)S_2(x)+xP(x^5)+(x^2-x)Q(x^5)+(x^3-x^2)R(x^5)$$

На левата страна во последното равенство имаме полином чии степени се деливи со 5, а на десната страна полином чии степени не се деливи со 5. Затоа и двата полиноми мора да бидат идентични на нултиот полином. Според тоа, $P(x^5)=-(x^5-1)S_1(x)$ и како $P(1)=0$ добиваме дека $P(x)$ се дели со полиномот $x-1$.

46. Докажи дека за секој природен број $n$ постои полином $P(x)$ со коефициенти 0, 1 или $-1$ и степен помал или еднаков на $2^n$, кој без остаток се дели со $(x-1)^n$.

**Решение.** За секој природен број $n$ индуктивно ќе конструираме полином $P_n(x)$ со степен $2^n-1$ и коефициенти 0, 1 или $-1$ кој без остаток се дели со $(x-1)^n$.

За $n=1$ тоа е полиномот $x-1$.

Нека претпоставиме дека е конструиран полином $P_n(x)$ со бараните својства и да го разгледаме полиномот $P_n(x^2)$. Овој полином се дели со $(x^2-1)^n=(x-1)^n(x+1)^n$ и неговиот степен е $2(2^n-1)=2^{n+1}-2$.

Нека $P_{n+1}(x)=(x-1)P_n(x^2)$. Јасно, степенот на полиномот $P_{n+1}(x)$ е $2^{n+1}-1$ и тој без остаток се дели со $(x-1)^{n+1}$. Понатаму, бидејќи $P_n(x^2)$ содржи само парни степени на $x$ со коефициенти 0, 1 или $-1$, добиваме дека

$xP_n(x^2)$ ќе содржи само непарни степени со коефициенти 0, 1 или $-1$, па затоа $P_{n+1}(x)=(x-1)P_n(x^2)=xP_n(x^2)-P_n(x^2)$ ќе содржи само коефициенти 0, 1 или $-1$.

47. Нека $p\in\mathbf{R}$. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со

$$a_1=1,\ a_2=p,\ a_{n+1}=pa_n-a_{n-1},\ n>1.$$

Докажи дека за секој $n>1$ полиномот $x^n-a_nx+a_{n-1}$ се дели со полиномот $x^2-px+1$. Користејќи го овој резултат реши ја равенката

$$x^4-56x+15=0. \qquad (1)$$

**Решение.** Нека $P_n(x)=x^n-a_nx+a_{n-1}$, $n>1$. Од $P_2(x)=x^2-px+1$ следува

$$\begin{aligned}P_{n+1}(x)&=x^{n+1}-a_{n+1}x+a_n\\&=x(x^n-a_nx+a_{n-1})+a_nx^2-(a_{n+1}+a_{n-1})x+a_n\\&=xP_n(a)+a_nx^2-pa_nx+a_n\\&=xP_n(a)+a_n(x^2-px+1).\end{aligned}$$

Сега тврдењето непосредно следува од принципот на математичка индукција.

За $p=4$ имаме $a_3=15, a_4=56$, па од претхосно изнесенот следува дека полиномот $P_4(x)=x^4-56x+15$ се дели со полиномот $x^2-4x+1$ и притоа важи

$$P_4(x)=x^4-56x+15=(x^2-4x+1)(x^2+4x+15).$$

Според тоа, решенија на равенката (1) се

$$x_{1/2}=2\pm\sqrt{3},\ x_{3/4}=-2\pm i\sqrt{11}.$$

48. Нека

$$f(x)=1+x+x^2+...+x^{m-1},\ g(x)=x^{a_1}+x^{a_2}+...+x^{a_n},$$

каде $0<a_1<a_2<...<a_n$ се цели броеви. Со $n_k=0,1,2,...,m-1$ да го означиме бројот на елементите $i$ такви што при делење на $a_i$ со $m$ се добива остаток $k$. Докажи дека $g(x)$ се дели со $f(x)$ ако и само ако

$$n_0=n_1=...=n_{m-1}.$$

**Решение.** Имаме $a_i=q_im+r_i$, каде $0\le r_i<m$. Имаме $x^m-1=(x-1)f(x)$. Понатаму,

$$x^{a_i}=x^{q_im+r_i}=x^{r_i}(x^{q_im}-1)+x^{r_i}.$$

Но, $x^m=(x-1)f(x)+1$, па затоа

$$x^{q_im}=A_i(x)f(x)+1,$$

каде $A_i(x)$ е некој полином од $x$ и можеме да запишеме

$$g(x)=G(x)f(x)+x^{r_1}+x^{r_2}+...+x^{r_n}.$$

Според тоа, $g(x)$ се дели со $f(x)$ ако и само ако $f(x)$ е делител на $h(x)=x^{r_1}+x^{r_2}+...+x^{r_n}$. Но, како што можеме да забележиме

$$h(x)=n_0+n_1x+...+n_{m-1}x^{m-1}$$

Но, степенот на $h(x)$ не го надминува степенот на $f9x)$, па затоа $h(x)=cf(x)$, каде $c\in\mathbf{R}$, што значи дека $n_0=n_1=...=n_{m-1}$.

49. Нека $f_1(x),\ f_2(x),...,\ f_{n-1}(x)$ и $g(x)$ се полиноми за кои важи релацијата

$$f_1(x^n)+xf_2(x^n)+...+x^{n-2}\ f_{n-1}(x^n)=(1+x+x^2+...+x^{n-1})g(x). \qquad (1)$$

Докажи дека секој од полиномите $f_1(x),\ f_2(x),...,\ f_{n-1}(x)$ се дели со полиномот $x-1$.

**Решение.** Да ги означиме сите вердности на $n-$от корен на бројот 1, кои се различни од 1, со $w_1,w_2,...,w_{n-1}$. Тогаш $w_k^n=1$, за секој $k=1,2,...,n-1$. Ако во (1) замениме $x=w_1,\ x=w_2,...,\ x=w_{n-1}$ и здемеме предвид дека за секој $k=1,2,...,n-1$ важи

$$1+w_k+w_k^2+...+w_k^{n-1}=\frac{1-w_k^n}{1-w_k}=0,$$

го добиваме системот равенки

$$f_1(1)+w_1f_2(1)+...+w_1^{n-2}\ f_{n-1}(1)=0$$

$$f_1(1)+w_2f_2(1)+...+w_2^{n-2}\ f_{n-1}(1)=0$$

..............................................................

$$f_1(1)+w_{n-1}f_2(1)+...+w_{n-1}^{n-2}\ f_{n-1}(1)=0.$$

Детерминантата на овој систем е познатата детерминанта на Вандермонд

$$\begin{vmatrix} 1 & w_1 & ... & w_1^{n-1} \\ 1 & w_2 & ... & w_2^{n-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & w_{n-1} & ... & w_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1<k<n}(w_k-w_j)\neq 0,$$

бидејќи сите вредности на $n-$от корен на бројот 1 се меѓусебно различни. Значи, овој хомоген систем има само тривијално решение

$$f_1(1)=f_2(1)=...=f_{n-1}(1)=0,$$

па затоа секој од полиномите $f_1(x),\ f_2(x),...,\ f_{n-1}(x)$ се дели со полиномот $x-1$.

50. Докажи дека за секои $n\in\mathbf{N}\setminus\{1\}$ и $\alpha\in\mathbf{R}$, $\sin\alpha\neq 0$, полиномот

$$P(x)=x^n\sin\alpha-x\sin\alpha n+\sin(n-1)\alpha$$

се дели со полиномот $Q(x)=x^2-2x\cos\alpha+1$.

**Решение.** Да означиме $z(\varepsilon)=\cos\alpha+\varepsilon i\sin\alpha=\cos\varepsilon\alpha+i\sin\varepsilon\alpha$, каде $\varepsilon=\pm1$. Важи

$$\begin{aligned}(x-z(1))(x-z(-1))&=(x-\cos\alpha-i\sin\alpha)(x-\cos\alpha+i\sin\alpha)\\&=x^2-2x\cos\alpha+1=Q(x).\end{aligned}$$

Од Моавровата формула имаме

$$[z(\varepsilon)]^n=(\cos\varepsilon\alpha+i\sin\varepsilon\alpha)^n=\cos n\varepsilon\alpha+i\sin n\varepsilon\alpha=\cos n\alpha+\varepsilon i\sin n\alpha\ .$$

Значи,

$$\begin{aligned}P(z(\varepsilon))&=[z(\varepsilon)]^n\sin\alpha-z(\varepsilon)\sin\alpha n+\sin(n-1)\alpha\\&=(\cos n\alpha+\varepsilon i\sin n\alpha)\sin\alpha-(\cos\alpha+\varepsilon i\sin\alpha)\sin\alpha n+\sin(n-1)\alpha\\&=\cos n\alpha\sin\alpha-\cos\alpha\sin\alpha n+\sin(n-1)\alpha\\&=-\sin(n-1)\alpha+\sin(n-1)\alpha=0.\end{aligned}$$

Според тоа, $z(1)$ и $z(-1)$ се нули на полиномот $P(x)$, при што од $\sin\alpha\neq0$ следува дека $z(1)\neq z(-1)$, па затоа $P(x)$ се дели со производот

$$(x-z(1))(x-z(-1))=x^2-2x\cos\alpha+1=Q(x).$$

51. Низата полиноми $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ е дефинирана со $p_0(x)=1,\ p_1(x)=x$ и

$$p_{n+1}(x)=xp_n(x)-p_{n-1}(x)\text{, за } n\geq2\,.$$

Докажи дека за секој $n\in\mathbf{N}_0$ и за секој $\alpha\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$ важи

$$p_n(2\cos\alpha)=\tfrac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}\,.$$

**Решение.** Тврдењето ќе го докажеме со индукција по $n$. За $n=0$ и $n=1$ тврдењето е точно, бидејќи

$$p_0(2\cos\alpha)=1=\tfrac{\sin(0+1)\alpha}{\sin\alpha}\ \text{ и }\ p_n(2\cos\alpha)=2\cos\alpha=\tfrac{\sin2\alpha}{\sin\alpha}=\tfrac{\sin(1+1)\alpha}{\sin\alpha}\,.$$

Нека претпоставиме дека тврдењто важи за $n=k-1$ и $n=k$. Тогаш, за $n=k+1$ имаме

$$\begin{aligned}p_{k+1}(2\cos\alpha)&=2\cos\alpha\cdot p_k(2\cos\alpha)-p_{k-1}(2\cos\alpha)\\&=2\cos\alpha\tfrac{\sin(k+1)\alpha}{\sin\alpha}-\tfrac{\sin k\alpha}{\sin\alpha}\\&=\tfrac{\sin(k+2)\alpha+\sin k\alpha}{\sin\alpha}-\tfrac{\sin k\alpha}{\sin\alpha}=\tfrac{\sin(k+2)\alpha}{\sin\alpha},\end{aligned}$$

па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n\in\mathbf{N}_0$ и за секој $\alpha\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

52. Дали постои полином $p(x)$ со еални коефициенти, таков да за секој $x$ важи $P(\cos x)=\sin x$?

**Решение.** *Прв начин.* Нека претпоставиме дека таков полином постои и да означиме $t=\cos x$. Тогаш за $t\in[-1,1]$ важи $P^2(t)=1-t^2$, па затоа $p(t)=at+b$, што значи $a^2t^2+2abt+b^2=1-t^2$, каде $a\neq0$. Добиваме $a^2\neq-1$, што не е можно, бидејќи $a$ е реален број. Значи, не постои полином со бараните својства.

*Втор начин.* За $x=\frac{\pi}{2}$ добиваме $P(\cos\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}$, т.е. $P(0)=1$, а за $x=\frac{3\pi}{2}$ добиваме $P(\cos\frac{3\pi}{2})=\sin\frac{3\pi}{2}$, т.е. $P(0)=-1$, што не е можно.

53. Дали постои полином $P(x)$ со реални коефициенти таков да за секој $x$ од некој интервал $(\alpha,\beta),\ \alpha<\beta$ важи $P(\sin x)=\sin 2x$?

**Решение.** Нека претпоставиме дека $P(\sin x)=\sin 2x$, за секој $x\in(\alpha,\beta)$. Да ставиме $y=\sin x$. Тогаш од

$$\sin 2x=2\sin x\cos x=\pm 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}\ ,$$

на некој интервал $(\gamma,\delta)$ важи

$$P(y)=\pm 2y\sqrt{1-y^2}\ ,$$

односно

$$P^2(y)=4y^2-4y^4\ .$$

Од последното равенство последователно следува дека

$$P(y)=ay^2+by,\ a,b\in\mathbf{R}$$
$$P^2(y)=a^2y^4+2aby^3+b^2y^2$$
$$a^2y^4+2aby^3+b^2y^2=4y^2-4y^4,\ \text{за секој}\ y\in(\gamma,\delta)$$

54. Нека $P$ е полином со реални коефициенти, таков да за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $P(\cos x)=P(\sin x)$. Докажи дека постои полином $Q$ таков да $P(t)=Q(t^4-t^2)$, за секој $t\in\mathbf{R}$.

**Решение.** Нека $P(t)=(t^4-t^2)Q_1(t)+at^3+bt^2+ct+d$. Од последното равенство и од условот на задачата следува дека за секој $x\in\mathbf{R}$ важи

$$\begin{aligned}0=\sin^2 x\cos^2 x[Q_1(\cos x)-Q_1(\sin x)]+\\+(\sin x-\cos x)[a\sin x\cos x+b(\sin x+\cos x)+a+c].\end{aligned}\qquad(1)$$

Од равенството (1) за $x=0$ добиваме $a+b+c=0$, а за $x=\pi$ добиваме $a-b+c=0$, од што следува дека $a+c=0$ и $b=0$. Според тоа, равенството (1) можеме да го запишеме во облик

$$\sin^2 x\cos^2 x[Q_1(\sin x)-Q_1(\cos x)]=a(\sin x-\cos x)\sin x\cos x\ .\qquad(2)$$

Бидејќи равенството (2) важи за секој $x\in\mathbf{R}$, а функциите $\sin x$, $\cos x$ и $Q_1(t)$ се непрекинати, добиваме дека и равенството

$$\sin x\cos x[Q_1(\sin x)-Q_1(\cos x)]=a(\sin x-\cos x)\qquad(3)$$

важи за секој $x\in\mathbf{R}$. Од (3) за $x=0$ добиваме $a=0$, па како $a+c=0$ имаме $c=0$. Според тоа,

$$P(t)=(t^4-t^2)Q_1(t)+d\ ,$$

и од (3) следува дека за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $Q_1(\sin x)=Q_1(\cos x)$. Сега тврдењето на задачата лесно се докажува со индукција по степените на полиномот $P$.

55. Нека $x_1$ и $x_2$ се решенија на равенката $x^2+ax+b=0$, каде $a$ и $b$ се цели броеви и $f(x)$ е произволен полином со целобројни коефициенти. Докажи дека $f(x_1)+f(x_2)$ е цел број.

**Решение.** Имаме $f(x)=(x^2+ax+b)Q(x)+cx+d$, каде $Q(x)$ е полином со целобројни коефициенти и $c$ и $d$ се цели броеви. Тогаш, од (1) и од Виетовите формули следува

$$f(x_1)+f(x_2)=cx_1+d+cx_2+d=c(x_1+x_2)+2d=-ac+2d,$$

што значи дека $f(x_1)+f(x_2)$ е цел број.

56. Ако за реалните броеви $a,b,c$ важи

$$a+b+c>0,\ ab+bc+ca>0,\ abc>0,$$

докажи дека тие броеви се различни.

**Решение.** Нека $f(x)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$. Нулите на полиномот $f(x)$ се броевите $a,b,c$. Доволно е да забележиме дека од дадените услови следува дека за секој $x\le 0$ важи $f(x)<0$.

57. Докажи дека равенката $ax^3+bx^2-1=0$, $a,b\in\mathbf{R}$, $a>0$ има точно едно позитивно решение.

**Решение.** Ако сите три решенија се реални, тогаш според Виетовите правила имаме $x_1x_2x_3=\frac{1}{a}>0$, па само едно решение е позитивно, затоа што според Виетовите формули имаме и $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0$, односно не можат сите три да се позитивни. Ако само едно решение е реално (на пример $x_1$), тогаш за другите две решенија важи $x_2=\overline{x_3}$, па $x_1x_2x_3=x_1|x_2|^2=\frac{1}{a}>0$, па повторно е $x_1>0$.

58. Нека $a_i, i=0,1,2,3$ се реални броеви, при што $a_0\ne 0$. Ако сите корени на полиномот $P(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ се реални броеви, тогаш за $k\in\{1,2\}$ важи $a_k^2\ge a_{k-1}a_{k+1}$. Докажи!

**Решение.** Со $x_1,x_2,x_3$ да ги означиме корените на полиномот $P(x)$. Од Виетовите формули следува

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{a_2}{a_0}$$

$$x_1x_2x_3=-\frac{a_3}{a_0}.$$

Да забележиме дека се точни следниве неравенства

$$(x_1+x_2+x_3)^2\ge x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1, \qquad (1)$$

$$(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^2\ge x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3), \qquad (2)$$

кои соодветно се еквивалентни со неравенствата

$$(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_1)^2\ge 0\,,$$

$$(x_1x_2+x_2x_3)^2+(x_2x_3+x_3x_1)^2+(x_3x_1+x_1x_2)^2\ge 0\,.$$

Ако во (1) замениме од Виетовите формули добиваме $(\frac{a_1}{a_0})^2\ge\frac{a_2}{a_0}$, од каде следува $a_1^2\ge a_0a_2$. Ако во (2) замениме од Виетовите формули добиваме $(\frac{a_2}{a_0})^2\ge\frac{a_1}{a_0}\frac{a_3}{a_0}$, од каде следува $a_2^2\ge a_1a_3$.

59. Дадени се броевите $\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n}$. Нека $S_i$ е збир на сите производи по $i$ од дадените броеви. Докажи дека $S_1+S_2+...+S_{n-1}=\frac{n-1}{2}$.

**Решение.** Нека

$$P(x)=(x+\tfrac{1}{2})(x+\tfrac{1}{3})...(x+\tfrac{1}{n})\,.$$

Од Виетовите формули следува дека полиномот $P(x)$ може да се запише во облик

$$P(x)=x^{n-1}+S_1x^{n-2}+S_2x^{n-3}+...+S_{n-1}\,.$$

Ставајќи во овие изрази за $P(x)$, $x=1$ добиваме

$$P(x)=(1+\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})...(1+\tfrac{1}{n})=\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{5}{4}\cdot...\cdot\tfrac{n+1}{n}=\tfrac{n+1}{2}$$

$$P(x)=1+S_1+S_2+...+S_{n-1}\,,$$

па затоа

$$S_1+S_2+...+S_{n-1}=\tfrac{n+1}{2}+1=\tfrac{n-1}{2}\,.$$

60. Нека $a$ и $b$ се реални броеви такви да полиномот

$$P(x)=x^3+\sqrt{3}(a-1)x^2-6ax+b$$

има три реални нули. Докажи дека $|b|\le|a+1|^3$.

**Решение.** Нека $x_1,x_2,x_3$ се нулите на полиномот $P(x)$. Од Виетовите врски имаме

$$x_1+x_2+x_3=\sqrt{3}(1-a)\,,\;x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-6a\,,\;x_1x_2x_3=-b\,.$$

Сега, од претходните равенства и од неравенството меѓу квадратната и геометриската средина следува неравенството

$$\sqrt[3]{|b|}=\sqrt[3]{|x_1|\cdot|x_2|\cdot|x_3|}\le\sqrt{\frac{|x_1|^2+|x_2|^2+|x_3|^2}{3}}=\sqrt{\frac{(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)}{3}}$$

$$=\sqrt{\frac{3(1-a)^2+12a}{3}}=|a+1|,$$

кое е еквивалентно на бараното неравенство.

61. Полиномот $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+1$ со ненегативни коефициенти $a_1,a_2,...,a_{n-1}$ има $n$ реални нули. Докажи дека $P(2)\ge 3^n$.

**Решение.** Од $a_i \geq 0,$ за $i = 1, 2, ..., n-1$ следува $P(x) > 0$, за $x \geq 0$. Според тоа, полиномот $P(x)$ не може да има позитивни нули. Но, нулите на полиномот се реални, па затоа за неговите нули важи $x_i < 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Да ставиме $b = -x_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Јасно, $b_i > 0$ и притоа важи

$$P(x) = (x + b_1)(x + b_2)...(x + b_n).$$

Ако го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$2 + b_i = 1 + 1 + b_i \geq 3\sqrt[3]{b_i},\ \ i = 1, 2, ..., n. \tag{1}$$

Понатаму, од Виетовите формули следува $b_1 b_2 ... b_n = 1$ и ако ги помножиме неравенствата (1) добиваме

$$P(2) = (2 + b_1)(2 + b_2)...(2 + b_n) \geq 3^n \sqrt[n]{b_1 b_2 ... b_n} = 3^n.$$

62. Нека $a, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, b$ се реални броеви такви што $ab \neq 0$ и сите корени на полиномот

$$ax^n + ax^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-2} x^2 - n^2 bx + b$$

се реални и позитивни. Докажи дека сите корени на полиномот се еднакви меѓу себе.

**Решение.** Од Виетовите формули имаме

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} = n^2.$$

Од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина и од горните равенства следува

$$n^2 \leq (x_1 + x_2 + ... + x_n)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}) = n^2,$$

што значи дека во неравенството меѓу аритемтичката и хармониската средина важи знак за равенство, а тоа е можно ако и само ако

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{1}{n}.$$

63. Нека се $a_i, i = 1, 2, ..., n$ реални броеви такви да полиномот

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$$

има $n$ различни реални корени. Ако $a_k = (-1)^k \binom{n}{k} b_k^k$, за $k \in \{n, n-1\}$, докажи дека $b_n < b_{n-1}$.

**Решение.** Од Виетовите формули имаме

$$a_n = (-1)^n x_1 x_2 ... x_n$$

$$a_{n-1} = (-1)^n (x_1 x_2 ... x_{n-1} + x_1 x_3 ... x_n + ... + x_2 x_3 ... x_n)$$

па затоа

$$b_n^n = x_1 x_2 ... x_n$$

$$b_{n-1}^{n-1} = \frac{1}{n}(x_1 x_2 ... x_{n-1} + x_1 x_3 ... x_n + ... + x_2 x_3 ... x_n).$$

Броевите $x_i, i=1,2,...,n$ се позитивни и различни, па од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$b_n^{n-1}=\sqrt[n]{(x_1x_2...x_n)^{n-1}}=\sqrt[n]{(x_1x_2...x_{n-1})(x_1x_3...x_n)...(x_2x_3...x_n)}$$
$$\le \frac{x_1x_2...x_{n-1}+x_1x_3...x_n+...+x_2x_3...x_n}{n}=b_{n-1}^{n-1}$$

што значи $b_n<b_{n-1}$.

64. Најди ги сите полиноми од облик $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, каде $a_i\in\{-1,1\}$, $i=0,1,2,...,n$ и кои имаат само реални нули.

**Решение.** Да ги најдеме полиномите со наведеното својство за кои $a_n=1$. Останатите полиноми ги добиваме ако најдените ги помножиме со $-1$.
За $n=1$ такви полиноми се $x-1$ и $x+1$.
Нека претпоставиме дека $n\ge 2$ и $x_i, i=1,2,...,n$ се реалните нули на бараниот полином. Од Виетовите формули следува

$$(x_1x_2...x_n)^2=a_0^2=1$$

и

$$0\le\sum_{i=1}^n x_i^2=(\sum_{i=1}^n x_i)^2-2\sum_{i\ne k}x_ix_k=a_{n-1}^2-2a_{n-2}=1-2a_{n-2}.$$

Но, $a_{n-2}\in\{1,-1\}$, па затоа $a_{n-2}=-1$ и $\sum_{i=1}^n x_i^2=3$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{3}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2\ge(x_1^2x_2^2...x_n^2)^{1/n}=1,$$

па затоа $n\le 3$. Лесно се добива дека за $n=2$ бараните полиноми се

$$\pm(x^2+x-1) \text{ и } \pm(x^2-x-1).$$

За $n=3$ само полиномите

$$\pm(x^3+x^2-x-1) \text{ и } \pm(x^3-x^2-x+1)$$

маат реални нули, а додека другите полиноми од бараниот вид имаат комплексни нули.
Конечно, бараните полиноми се:

$$x-1,\ x+1,\ \pm(x^2+x-1),\ \pm(x^2-x-1),$$
$$\pm(x^3+x^2-x-1) \text{ и } \pm(x^3-x^2-x+1).$$

65. Полиномот $P(x)=x^3+x^2-1$ има корени $a,b$ и $c$. Докажи дека полиномот $Q(x)=x^3+x^2-4x-5$ има корен $ab+c$.

**Решение.** Од Виетовите формули следува $abc=1$. Понатаму,

$$ab+c=\frac{c(ab+c)}{c}=\frac{abc+c^2}{c}=\frac{1+c^2}{c}.$$

Бидејќи $c$ е нула на полиномот $P(x)$ добиваме

$$0 = c^3 + c^2 - 1,\ \text{т.е.}\ c^3 + c^2 = 1,$$

па затоа

$$ab + c = \tfrac{c^3+2c^2}{c} = c^2 + 2c = c(c+2),$$

а исто така и $c^4 + c^3 = c$ и $c^5 + c^4 = c^2$. Сега имаме

$$\begin{aligned} Q(ab+c) &= (ab+c)^3 + (ab+c)^2 - 4(ab+c) - 5 \\ &= c^3(c+2)^3 + c^2(c+2)^2 - 4c(c+2) - 5 \\ &= c^3(c^3 + 6c^2 + 12c + 8) + c^2(c^2 + 4c + 4) - 4c^2 - 8c - 5 \\ &= c^3[(c^3 + c^2) + 5c^2 + 13c + 12] - 8c - 5 \\ &= c^3(1 + 5c^2 + 13c + 12) - 8c - 5 \\ &= 5(c^5 + c^4) + 8(c^4 + c^3) + 5(c^3 + c^2) - 5c^2 - 8c - 5 \\ &= 5c^2 + 8c + 5 - 5c^2 - 8c - 5 = 0, \end{aligned}$$

што значи дека $ab + c = c(c+2)$ е нула на полиномот $Q(x)$.

**Забелешка.** Од претходно изнесеното, поради симетрија добиваме дека $bc + a = a(a+2)$ и $ca + b = b(b+2)$ се нули на полиномот $Q(x)$.

66. За реалните броеви $a, b, c, d$ важи

$$a = \sqrt{4 - \sqrt{5-a}}\ ,\ b = \sqrt{4 + \sqrt{5-b}}\ ,\ c = \sqrt{4 - \sqrt{5+c}}\ \text{ и }\ d = \sqrt{4 + \sqrt{5+d}}\ .$$

Пресметај го производот $abcd$.

**Решение.** Броевите $a, b, c, d$ се различни и се позитивни. Освен тоа, лесно се проверува дека $a$ и $b$ се корени на полиномот

$$P(x) = x^4 - 8x^2 + x + 11,$$

а броевите $c$ и $d$ се корени на полинимот $x^4 - 8x^2 - x + 11$. Но, тоа значи дека броевите $-c$ и $-d$ се корени на полиномот $P(x)$. Значи, $a, b, -c, -d$ се четири различни корени на полиномот $P(x)$, па од Виетовите формули добиваме $abcd = ab(-c)(-d) = 11$.

67. Дали постои конечно множество $H$ од ненулти реални броеви, такво што за секој природен број $n$ постои полином со степен поголем или еднаков на $n$ и коефициенти од множеството $H$, таков што сите негови корени се реални и исто така припаѓаат на $H$.

**Решение.** Нека претпоставиме дека множеството $H = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ ги задоволува условите на задачата. Нека

$$m = \min\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|\},\ M = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|\}.$$

Јасно, $M \ge m > 0$.

Да ги разгледаме сите полиноми $P(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + ... + b_0$ такви да нивните коефициенти $b_0, b_1, ..., b_{k-1}, b_k$ и корени $x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k$ припаѓаат на $H$. Од Виетовите формули имаме

$$x_1+x_2+...+x_{k-1}+x_k=-\frac{b_{k-1}}{b_k}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+...+x_1x_k+x_2x_3+...+x_{k-1}x_k=\frac{b_{k-2}}{b_k}.$$

Значи

$$x_1^2+x_2^2+...+x_k^2=(-\frac{b_{k-1}}{b_k})^2-2\frac{b_{k-2}}{b_k}\ .$$

Според тоа,

$$km^2\le x_1^2+x_2^2+...+x_k^2=\frac{b_{k-1}^2}{b_k^2}-\frac{2b_{k-2}}{b_k}\le\frac{M^2}{m^2}+\frac{2M}{m}\ ,$$

односно $k\le\frac{M^2}{m^4}+\frac{2M}{m^3}=A$. Според тоа, степените на полиномите не може да бидат $A$, па затоа множество $H$ кое ги задоволува условите на задачата не постои.

68. Најди ги сите ненегативни цели броеви $n$ за кои постои полином од $n-$ти степен $P_n(x)$ со целобројни коефициенти таков што во $n$ различни целобројни точки е еднаков на $n$, а во нулата е еднаков на нула.

**Решение.** Полиномот $Q_n(x)=n-P_n(x)$ исто така е од $n-$ти степен, но таков што во $n$ различни целобројни точки е еднаков на нула, а во нулата е еднаков на $n$. Според тоа,

$$Q_n(x)=a(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)\ ,$$

каде $x_1,x_2,...,x_n$ се нулите на полиномот $Q_n(x)$. Од Виетовите формули следува

$$n=Q_n(0)=(-1)^n ax_1x_2...x_n \tag{1}$$

и како меѓу корените $x_1,x_2,...,x_n$ најмногу два се еднакви на 1 или $-1$ од равенството (1) следува

$$|(-1)^n ax_1x_2...x_n|\ge 2^{n-2}\ . \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме $n\ge 2^{n-2}$. Последното неравенство е исполнето за $n\le 4$ (со индукција може да се докаже дека за $n>4$ важи $2^{n-2}>n$). Значи, за $n=0,1,2,3,4$ може да постојат бараните полиноми. На пример, тоа се полиномите

$$Q_0(x)=0=P_0(x),$$

$$Q_1(x)=x+1,\ \ P_1(x)=-x$$

$$Q_2(x)=(x-1)(x-2),\ \ P_2(x)=3x-x^2$$

$$Q_3(x)=(x-1)(x+1)(x-3),\ \ P_3(x)=x+3x^2-x^3$$

$$Q_4(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2),\ \ P_4(x)=5x^2-x^4.$$

69. Ако сите нули на полиномот

$$P(x)=x^n+nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}+a_3x^{n-3}+...+a_n\ ,\ n>2$$

се цели броеви, тогаш $a_k=\binom{n}{k}$, за $k=3,4,...,n$.

**Решение.** Нека целите броеви $x_i, i=1,2,...,n$ се нули на полиномот $P(x)$. Од Виетовите формули следува

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -n \text{ и } \sum_{i<j} x_i x_j = \frac{n(n-1)}{2},$$

па затоа

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - 2\sum_{i<j} x_i x_j = n^2 - 2\frac{n(n-1)}{2} = n.$$

Оттука следува дека

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i+1) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i = n-n=0,$$

и од $x_i(x_i+1)\geq 0$, за секој $i\in\{1,2,...,n\}$, добиваме дека $x_i(x_i+1)=0$, за секој $i\in\{1,2,...,n\}$, т.е. $x_i\in\{-1,0\}$, за $i\in\{1,2,...,n\}$. Но, $\sum_{i=1}^{n} x_i = -n$, па затоа $x_i=-1$, за $i\in\{1,2,...,n\}$. Според тоа, $P(x)=(x+1)^n$, па од Њутновата биномна формула следува дека $a_k = \binom{n}{k}$, за $k=3,4,...,n$.

**Забелешка.** Тврдењето важи и при послаба претпоставка, т.е. при претпоставка дека нулите на полиномот се реални броеви. Навистина, во тој случај од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина и од условот на задачата следува

$$1=(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \leq (\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|)^2 \leq \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1.$$

Но, во неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина знак за равенство важи ако и само ако сите $x_i, i=1,2,...,n$ се меѓусебно еднакви и со ист знак. Конечно, од $\sum_{i=1}^{n} x_i = -n$ следува $x_i=-1$, за $i\in\{1,2,...,n\}$.

70. Со $M_m(N)$ да го означиме бројот на полиномите со целобројни коефициенти од облик

$$P(x)=x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

за кои сите корени се реални и по модул не поголеми од $N$. Докажи дека $M_m(N)$ е конечен број.

**Решение.** Полиномот $P(x)$ да го запишеме во обликот

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_m).$$

Согласно Виетовите формули коефициентите $a_{m-1},...,a_1,a_0$ можеме да ги изразиме како функции од нулите $x_i, i=1,2,...,m$ на полиномот $P(x)$ и притоа имаме

$$a_{m-i} = (-1)^i \sum_{\substack{j_1<j_2<...<j_i \\ j_1,j_2,...j_i\in\{1,2,...,m\}}} x_{j_1}x_{j_2}...x_{j_i}.$$

Бројот на собирците во последниот збир не надминува $m^m$ и секој собирок не надминува $N^m$. Затоа

$$|a_{m-i}| \leq m^m N^m \text{, за } i=1,2,...,m.$$

При овие ограничувања бројот на полиномите од дадениот вид не надминува $(2m^m N^m+1)^m$, па затоа $M_m(N) \leq (2m^m N^m+1)^m$.

71. Нека $p$ е непарен цел број. Ако $u$ и $v$ се корени на полиномот $P(x)=x^2+px-1$, тогаш $u^n+v^n$ и $u^{n+1}+v^{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$ се цели заемно прости броеви. Докажи!

**Решение.** Од Виетовите формули имаме

$$u+v=-p \text{ и } uv=-1. \tag{1}$$

Од

$$u^2+v^2=(u+v)^2-2uv=p^2+2, \tag{2}$$

следува

$$u^3+v^3=(u+v)^3-3uv(u+v)=p^3-3p=-p(p^2+2)-p=-p(u^2+v^2)+(u+v).$$

Нека претпоставиме дека за $n=k$ важи

$$u^{k+2}+v^{k+2}=-p(u^{k+1}+v^{k+1})+(u^k+v^k).$$

Тогаш, за $n=k+1$, од (1) и од индуктивната претпоставка имаме

$$\begin{aligned}u^{k+3}+v^{k+3}&=u^{k+3}+vu^{k+2}+v^{k+3}+uv^{k+2}-uv^{k+2}-vu^{k+2}\\&=(u+v)(u^{k+2}+v^{k+2})-uv(u^{k+1}+v^{k+1})\\&=-p(u^{k+2}+v^{k+2})+(u^{k+1}+v^{k+1}),\end{aligned}$$

па од принципот на математичка индукција следува дека

$$u^{n+2}+v^{n+2}=-p(u^{n+1}+v^{n+1})+(u^n+v^n), \text{ за секој } n \in \mathbf{N}. \tag{3}$$

Да се вратиме на задачата. Од (1), (2) и (3) следува дека $u^n+v^n$, за секој $n \in \mathbf{N}$ е цел број. Јасно, два последователни непарни броја се заемно прости, па затоа

$$\text{NZD}(u^2+v^2,u+v)=\text{NZD}(p^2+2,p)=\text{NZD}(p^2+2,p^2)=1.$$

Нека претпоставиме дека $\text{NZD}(u^{k+1}+v^{k+1},u^k+v^k)=1$. Сега, од (3) следува дека $\text{NZD}(u^{k+2}+v^{k+2},u^{k+1}+v^{k+1})=1$, па од принципот на математичка индукција следува дека $u^n+v^n$ и $u^{n+1}+v^{n+1}$ се заемно прости за секој $n \in \mathbf{N}$.

72. Ако полиномот $P(x)=x^3+qx+r, r \neq 0$ има реални корени, тогаш корените на полиномот $Q(x)=r^2x^3+q^3x+q^3$ не припаѓаат на интервалот $(-1,3)$. Докажи!

**Решение.** Нека $u_1,v_1$ и $w_1$ се корени на полиномот $Q(x)$. Од Виетовите формули следува

$$\begin{cases} u_1 + v_1 + w_1 = 0, \\ u_1v_1 + v_1w_1 + w_1u_1 = \frac{q^3}{r^2} \\ u_1v_1w_1 = -\frac{q^3}{r^2}. \end{cases} \tag{1}$$

Нека $q \neq 0$ . Ставаме $u = \frac{u_1 r}{q}$, $v = \frac{v_1 r}{q}$, $w = \frac{w_1 r}{q}$ . Од (1) следува

$$\begin{cases} u + v + w = 0, \\ uv + vw + wu = q \\ uvw = -r, \end{cases} \tag{2}$$

т.е. $u, v, w$ се корени на полиномот $P(x)$ . Од досега изнесеното следува

$$u_1 = \frac{uq}{r} = u\frac{uv+vw+wu}{-uvw} = -\frac{u(v+w)}{vw} - 1 = \frac{u^2}{vw} - 1,\ v_1 = \frac{v^2}{wu} - 1,\ w_1 = \frac{w^2}{uv-1}.$$

Ако $q = 0$, до истиот резултат се доаѓа тривијално, Сега имаме

$$|u_1 - 1| = \left|\frac{u^2 - 2vw}{vw}\right| = \left|\frac{(v+w)^2 - 2vw}{vw}\right| = \left|\frac{v}{w} + \frac{w}{v}\right| \geq 2,$$

што значи дека $u_1 \notin (-1,3)$ . Аналогно се добива дека $v_1, w_1 \notin (-1,3)$ .

73. Нека $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, $n \geq 3$ е полином со реални коефициенти за кои $\frac{a_{n-1}}{a_n} > n+1$ и $n$ реални корени. Докажи дека, ако $a_{n-2} = 0$, тогаш барем еден од корените на $f(x)$ припаѓа на интервалот $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1})$.

**Решение.** Нека $\alpha_i, i = 1,2,...,n$ се корените на $f$ . Ако некои од корените се еднакви на нула, тогаш задачата е решена. Ако $\alpha_i \neq 0,$ за секој $i = 1,2,...,n$, тогаш ставаме $\beta_i = \frac{1}{\alpha_i}$, за $i = 1,2,...,n$. Од Виетовите формули и од условот на задачата следува

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_i \beta_j = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{\alpha_i \alpha_j} = \frac{a_{n-2}}{a_n} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} < -(n+1).$$

Сега решението на задачата следува од тврдењето: ако $x_i, i = 1,2,...,n$, $n \geq 3$ се реални броеви различни од нула, за кои важи

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{n} x_i = S < 0,$$

тогаш најмалиот од броевите $x_i, i = 1,2,...,n$ е помал или еднаков на $\frac{2S}{n}$, чиј доказ го оставаме на читателот за вежба.

Да се вратиме на задачата. Ако претходното тврдење го примениме на броевите $\beta_i = \frac{1}{\alpha_i}$, $i = 1,2,...,n$, добиваме дека за секој $i = 1,2,...,n$ се исполнети неравенствата $\beta_i \le \frac{2S}{n} < -\frac{2(n+1)}{n} < 0$, па затоа $0 > \alpha_i > \frac{1}{\beta_i} > -\frac{n}{2(n+1)} > -\frac{1}{2}$, со што задачата е решена. Уште повеќе, докажавме дека разгледуваниот полином има корен во интервалот $(-\frac{n}{2(n+1)}, 0)$.

74. Најди ги сите вредности на параметрите $a$ и $b$ за кои полиномот

$$x^4 + (2a+1)x^3 + (a-1)^2 x^2 + bx + 4$$

може да се запише како производ на два полинома од втор степен $\psi(x)$ и $\varphi(x)$, со коефициенти пред највисокиот степен 1, такви да равенката $\psi(x) = 0$ има две решенија $\alpha$ и $\beta$ такви да $\varphi(\alpha) = \beta$ и $\varphi(\beta) = \alpha$.

**Решение.** Ако полиномите $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ го задоволуваат условот на задачата и $\varphi(x) = x^2 + px + q$, тогаш $\alpha^2 + p\alpha + q = \beta$ и $\beta^2 + p\beta + q = \alpha$. Ако ги одземеме и собереме последните две равенства имаме

$$\alpha + \beta = -p - 1 \text{ и } \alpha^2 + \beta^2 + (\alpha+\beta)p + 2q = \alpha + \beta,$$

од што следува $\alpha\beta = p + q + 1$, па затоа

$$\psi(x) = x^2 + (p+1)x + (p+q+1).$$

Ако ги изедначиме коефициентите пред степените на $x$ во разложувањето

$$x^4 + (2a+1)x^3 + (a-1)^2 x^2 + bx + 4 = (x^2 + px + q)(x^2 + (p+1)x + (p+q+1))$$

за $a, b, p, q$ го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} 2p + 1 = 2a + 1 \\ p(p+1) + q + p + p + 1 = (a-1)^2 \\ p(p+q+1) + (p+1)q = b \\ q(p+q+1) = 4 \end{cases}$$

од каде добиваме $a = -1, b = -2$ или $a = 2, b = -14$.

75. Да се докаже дека ако $p$ е прост број, $m \in \mathbf{Z}$, $p > |m| + 2$ и $n \in \mathbf{N}$, тогаш полиномот $P(x) = x^n + mx + p$ не може да се разложи над $\mathbf{Z}$.

**Решение.** Ќе докажеме дека ако $z$ е корен на $P$, тогаш $|z| > 1$. Нека $z$ е корен на $P$ таков што $|z| \le 1$. Тогаш

$$\begin{aligned} p &= |z^n + mz| = |z| \cdot |z^{n-1} + m| \le |z^{n-1} + m| \le |z^{n-1}| + |m| \\ &= |z|^{n-1} + |m| \le 1 + |m| < 2 + |m|, \end{aligned}$$

што противречи на условот на задачата.

Нека претпоставиме дека $P$ може да се разложи над $\mathbf{Z}$, т.е. $P$ може да се претстави во облик $P(x) = Q(x)R(x)$, каде $Q(x)$ и $R(x)$ се полиноми со целобројни коефициенти. Јасно е дека најстарите коефициенти на полиномите

$Q(x)$ и $R(x)$ се еднакви на 1. Понатаму, $p = P(0) = Q(0)R(0)$ е прост број, па затоа $|P(0)|=1$ или $|Q(0)|=1$. Без ограничување на општоста ќе претпоставиме дека $|Q(0)|=1$. Корените $z_1, z_2, ..., z_k$ на полиномот $Q(x)$, $\deg Q = k$ се нули и на полиномот $P(x)$, па затоа $|z_i|>1$ за $i=1,2,...,k$. Но, тогаш од Виетовите формули следува

$$1=|Q(0)|=|z_1 z_2 ... z_k|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot...\cdot|z_k|>1,$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека $P(x)$ не може да се разложи над $\mathbf{Z}$.

76. Најди $a,b,m,n \in \mathbf{Z}$ такви да $m > n \geq 2$ и полиномот $P(x) = x^n + ax + b$ е делител на полиномот $Q(x) = x^m + ax + b$.

**Решение.** Со $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ ќе ги означиме мултимножествата од нули на полиномите $P$ и $Q$ соодветно (корените на полиномите запишани заедно со нивната кратност). Јасно, $P\,|\,Q$ ако и само ако $\tilde{P} \subseteq \tilde{Q}$.

Ќе разгледаме неколку случаи.

*Случај* 1. $a=b=0$. Очигледно е дека решение е $(a,b,m,n)=(0,0,m,n)$ за било кои природни броеви $m,n \in \mathbf{N}$, $m>n\geq 2$.

*Случај* 2. $a=0, b\neq 0$. Во овој случај полиномите ги добиваат облиците $P(x)=x^n+b$, $Q(x)=x^m+b$. Модулите на нивните корени се еднакви на $|b|^{\frac{1}{n}}$ и $|b|^{\frac{1}{m}}$ соодветно. Заради неравенството $m>n$ равенството $|b|^{\frac{1}{n}}=|b|^{\frac{1}{m}}$ важи ако и само ако $|b|=1$, односно $b=1$ или $b=-1$.

Последните два случаи ќе ги разгледаме одделно.

а) Ако $b=-1$, тогаш полиномите ги имаат облиците $P(x)=x^n-1$ и $Q(x)=x^m-1$. Нивните множества на нули се

$$\tilde{P}=\{e^{\frac{2j\pi}{n}i}\,|\,j=0,1,2,...,n-1\} \text{ и } \tilde{Q}=\{e^{\frac{2j\pi}{m}i}\,|\,j=0,1,2,...,m-1\}.$$

Од условот $\tilde{P}\subseteq\tilde{Q}$, следува дека постои $j\in\{0,1,2,...,m-1\}$ таков што $\frac{2j\pi}{m}=\frac{2\pi}{n}$ од каде добиваме $m=jn$. Значи, $n\,|\,m$. Не е тешко да се провери дека за $n\,|\,m$, се добива дека $P\,|\,Q$.

Во овој случај решенија се $(a,b,m,n)=(0,-1,jn,n)$, $n\in\mathbf{N}$.

б) Ако $b=1$, тогаш полиномите ги имаат облиците $P(x)=x^n+1$ и $Q(x)=x^m+1$. Нивните множества на нули се

$$\tilde{P}=\{e^{\frac{\pi+2j\pi}{n}i}\,|\,j=0,1,2,...,n-1\} \text{ и } \tilde{Q}=\{e^{\frac{\pi+2j\pi}{m}i}\,|\,j=0,1,2,...,m-1\}.$$

Заради условот $\tilde{P}\subseteq\tilde{Q}$, следува дека постои $j\in\{0,1,2,...,m-1\}$ таков што $\frac{2j\pi+\pi}{m}=\frac{\pi}{n}$, од каде добиваме дека $m=(2j+1)n$. Не е тешко да се провери и обратното, односно ако $m=(2j+1)n$ тогаш $P\,|\,Q$. Во овој случај решенија се $(0,1,(2j+1)n,n)$, $n\in\mathbf{N}$.

*Случај* 3. $a,b\neq 0$. Во овој случај $P(x)\,|\,Q(x)-P(x)=x^n(x^{m-n}-1)$. Бидејќи $P(x)\nmid x^n$, добиваме дека $P(x)\,|\,(x^{m-n}-1)$. Значи, нулите на полиномот $P$ се по модул еднакви на $1$.

Бидејќи $P$ е полином со реални коефициенти, добиваме дека ако $z\in P$ тогаш и $\overline{z}\in P$. Бидејќи нивните модули се еднакви на 1, добиваме дека $z\in P$ ако и само ако $\frac{1}{z}=\overline{z}\in P$. Сега од Виетовите правила добиваме дека

$$a=(-1)^{n-1}\prod_P z\sum_P \frac{1}{z}=(-1)^{n-1}(-1)^n b\sum_P \overline{z}.$$

Ако $n>2$, тогаш според Виетовите правила имаме $\sum\limits_P \overline{z}=0$, па затоа $a=0$, што противречи на претпоставката. Затоа $n=2$ и во овој случај $a=b\overline{a}=ba$, од каде добиваме $b=1$.

Од друга страна, ако $z\in P$, тогаш

$$|a|=|az|=|1+z^2|\leq 1+|z|^2=2,$$

што значи дека постојат четири можности: $a=\pm1,\pm2$.

а) При $a=\pm2$, добиваме дека полиномот $P$ има двоен корен $\mp1$ соодветно, а со тоа и $Q$ има двоен корен соодветно, што не е можно.

б) За $a=1$ се добива $3\,|\,(m-2)$ и решенија во овој случај се $(1,1,3k+2,2)$.

в) За $a=-1$ се добиваат решенијата $(-1,1,6k+2,2)$.

77. Да се најдат сите природни броеви $n$, за кои што полиномот $P(x)=x^n+64$ може да се разложи над $\mathbf{Z}$, т.е. да се претстави како производ на два неконстантни полиноми со целобројни коефициенти.

**Решение.** Да забележиме дека сите корени на полиномот $P(x)$ имаат модул еднаков на $|2|^{\frac{6}{n}}$.

Нека претпоставиме дека полиномот $P(x)$ може да се разложи на производ на два неконстантни полиноми со целобројни коефициенти, т.е. $P(x)=Q(x)R(x)$, каде што $Q(x),R(x)\in\mathbf{Z}[x]$. Унијата на множествата нули $Q$ и $R$ на полиномите $Q$ и $R$ соодветно, е еднаква на множеството нули $P$ на полиномот $P$. Јасно, најстарите коефициенти на полиномите $Q(x)$ и $R(x)$ се еднакви на единица. Притоа, ако $q,r\in\mathbf{N}$ се степени на $Q(x)$ и $R(x)$ соодветно, добиваме дека $q+r=n$.

Од претходната дискусија, според Виетовите формули и од тоа што полиномите $Q(x)$ и $R(x)$ се со целобројни коефициенти, добиваме дека слободниот член на $Q(x)$ е цел број и еднаков на $|2|^{\frac{6q}{n}}$ и аналогно слободниот член на полиномот $R(x)$ е цел број и е еднаков на $|2|^{\frac{6r}{n}}$. Оттука следува дека $n|6r$ и $n|6q$. Ако $3|n$, тогаш тој има облик $n=3m$, за некој природен број $m\in\mathbf{N}$, од каде што добиваме дека полиномот $P(x)$ може да се разложи во облик

$$P(x)=(x^m)^3+4^3=(x^m+4)(x^{2m}-4x^m+16).$$

Ако $3\nmid n$, тогаш $n|2r$ и $n|2q$, при што $2q<2n$, $2r<2n$ и $q+r=n$. Ако $n$ не е парен број, тогаш добиваме дека $n|q$ и $n|r$ што не е можно заради претходните две неравенства . Значи $n$ е парен број. Бидејќи $n$ е парен број, тој е од облик $n=2s$, и полиномот $P(x)$ нема реални корени. Според тоа, и полиномите $Q(x)$ и $R(x)$ немаат реални корени. Значи, $r$ и $q$ се парни броеви. Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека тие се непарни. Но, полином со реални коефициенти кој има непарен степен има барем една реална нула, па затоа полиномите $Q(x)$ и $R(x)$ би имале по една реална нула. Значи, $P(x)$ би имал реална нула, што не е можно, бидејќи за секој реален број $x$ важи $P(x)=x^{2s}+64\geq 64$.

Значи, $r=2r_1$ и $q=2q_1$ за некои природни броеви $q_1$ и $r_1$. Но, тогаш $2|s$ и конечно $n=4k$, за некој $k\in\mathbf{N}$. Но, тогаш

$$\begin{aligned}P(x)&=x^{4k}+64=(x^{2k})^2+2\cdot 8\cdot x^{2k}+64-16x^{2k}=(x^{2k}+8)^2-(4x^k)^2\\&=(x^{2k}-4x^k+8)(x^{2k}+4x^k+8).\end{aligned}$$

Конечно, од претходно изнесеното следува дека множеството на природни броеви за кои $P(x)$ може да се разложи над $\mathbf{Z}$ е $\{n|\ n=3k\vee n=4k, k\in\mathbf{N}\}$.

78. Ако $p$ е прост број и $a\in\mathbf{Z}$, тогаш $P(x)=x^p-a$ е разложлив над $\mathbf{Z}$ ако и само ако $a$ е $p$-ти степен на некој цел број. Докажи!

**Решение.** Ако $a=b^p$ за некој $b\in\mathbf{Z}$, тогаш

$$P(x)=x^p-a=x^p-b^p=(x-b)\sum_{i=0}^{p-1}x^ib^{p-1-i}.$$

Значи, полиномот $P(x)$ може да се разложи над $\mathbf{Z}$.

Нека претпоставиме дека $P(x)$ може да се претстави во облик

$$P(x)=Q(x)R(x),$$

каде $Q(x),R(x)\in\mathbf{Z}[x]$. Нека $\text{NZD}(2,p)=1$ е $p$-ти примитивен корен на единицата. Тогаш

$$\omega=e^{\frac{2i\pi}{p}}=\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}.$$

Ако $\alpha$ е корен на $Q(x)$, тогаш сите корени на $Q(x)$ се некои од броевите $\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,...,\alpha\omega^{p-1}$ и нека тоа се $\alpha\omega^{j_1},\alpha\omega^{j_2},...,\alpha\omega^{j_r}$. Притоа

$$0<r=\deg Q<p=\deg P.$$

За слободниот член $c \in \mathbf{Z}$ на полиномот $Q$, според Виетовите правила важи $c = (-1)^r \alpha^r \omega^{j_1+j_2+...+j_r}$, од каде што добиваме

$$\begin{aligned} c^p &= (-1)^{pr} \alpha^{pr} \omega^{p(j_1+j_2+...+j_r)} = (-1)^{pr} (\alpha^p)^r (\omega^p)^{j_1+j_2+...+j_r} \\ &= (-1)^{pr} a^r 1^{j_1+j_2+...+j_r} = (-1)^{pr} a^r . \end{aligned}$$

Бидејќи $p$ е прост број и $1 \le r < p$, добиваме дека $\text{NZD}(p,r) = 1$. Затоа постојат $u, v \in \mathbf{Z}$ такви што $ur + vp = 1$. Од последното равенство имаме

$$a = a^{ur+vp} = (a^r)^u (a^v)^p = ((-1)^{pr} c^p)^u (a^v)^p = ((-1)^r c^u a^v)^p = b^p .$$

79. Ако $n \in \mathbf{N}$ и $p$ е прост број, тогаш $P(x) = x^{p^n} - x + p^n$ не е разложлив над $\mathbf{Z}$. Докажи!

**Решение.** На почеток ќе докажеме дека ако $z$ е комплексен корен на полиномот $x^k - x + k$, $k \ge 2$, тогаш $|z| < k^{\frac{1}{k-1}}$. Нека претпоставиме дека за комплексниот корен $z$ на полиномот $x^k - x + k$, $k \ge 2$ важи

$$|z| \ge k^{\frac{1}{k-1}} . \qquad (1)$$

Тогаш

$$|z| + k \ge |z - k| = |z^k| = |z|^{k-1} |z| \ge (k^{\frac{1}{k-1}})^{k-1} |z| = k|z| ,$$

од каде добиваме $|z| \le \frac{k}{k-1}$. Од последното неравенство и од неравенството (1) добиваме

$$k = (k^{\frac{1}{k-1}})^{k-1} \le |z|^{k-1} \le (\tfrac{k}{k-1})^{k-1} = (1 + \tfrac{1}{k-1})^{k-1} < e < 3 .$$

Но, $k \ge 2$ и $k \in \mathbf{Z}$, па затоа $k = 2$. Според тоа, полиномот го добива обликот

$$P(x) = x^2 - x + 2 ,$$

а негови корени се $x_{1/2} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ и за истите важи

$$|x_{1/2}| = |\tfrac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}| = \sqrt{2} < 2^{\frac{1}{2-1}} ,$$

што противречи на (1). Според тоа, ако $z$ е комплексен корен на полиномот $x^k - x + k$, $k \ge 2$, тогаш $|z| < k^{\frac{1}{k-1}}$.

Нека претпоставиме дека $P(x) = Q(x)R(x)$, каде што $Q(x), R(x) \in \mathbf{Z}[x]$ се неконстантни полиноми. Јасно, нивните најстари коефициенти се еднакви на 1. Нека

$$Q(x) = q_0 + q_1 x + ... \text{ и } R(x) = r_0 + r_1 x + ... .$$

Ќе разгледаме два случаи:

а) $q_0 = p^n$ или $r_0 = p^n$. Без ограничување на општоста ќе претпоставиме дека $q_0 = p^n$. За производот на корени на $Q(x)$ според Виетовите правила и оценката за корените на $P(x)$ добиваме

$$p^n = q_0 = \prod_{i=1}^{\deg Q} \alpha_i < ((p^n)^{\frac{1}{p^n-1}})^{\deg Q} = p^{\frac{n\deg Q}{p^n-1}},$$

Според тоа

$$\frac{n\deg Q}{p^n-1} > n,\ \deg Q > p^n - 1.$$

Но, $R(x)$ е неконстантен полином, па затоа неравенството $\deg Q \geq p^n = \deg P$ не е можно.

б) $q_0 \neq p^n$ и $r_0 \neq p^n$. Бидејќи $q_0 r_0 = p^n$, имаме $p \mid r_0$ и $p \mid q_0$. Коефициентот пред $x$ во $P(x)$, т.е. $q_0 r_1 + r_0 q_1 = -1$ е делив со $p$, што е противречност бидејќи $p$ е прост број.

Конечно, од досега изнесеното следува дека полиномот $P(x)$ не е разложлив над $\mathbf{Z}$.

80. Нека $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, каде $n > 1$ е природен број. Докажи дека $f(x)$ не може да се претстави како производ на два полиноми со целобројни коефициенти со степен поголем или еднаков на 1.

**Решение.** Да претпоставиме дека $f(x) = g(x)h(x)$, каде $g(x)$ и $h(x)$ се полиноми со ненулти степени и со целобројни коефициенти. Од $f(0) = 3$ следува дека еден од броевите $|g(0)|$, $|h(0)|$ е еднаков на 1. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$$|g(0)| = 1 \text{ и } g(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + ... + a_k.$$

Ќе докажеме дека $k > 1$. Навистина, ако $k = 1$, тогаш $g(x) = x + a$ и како $|g(0)| = 1$, имаме $a = \pm 1$, $g(x) = x \pm 1$. Но полиномот $f(x)$ не се дели ниту со $x - 1$ ниту со $x + 1$, бидејќи $f(1) = 9 \neq 0$ и $f(-1) = 7 \neq 0$ или $f(-1) = -1 \neq 0$, во зависност од парноста на $n$. Од добиената противречност следува $k > 1$.

Нека $\alpha_i$, $i = 1, 2, ..., k$ се корените на полиномот $g(x)$. Тогаш,

$$g(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_k)$$

и $|g(0)| = |\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k| = 1$. Во равенката $f(x) = 0$ ставаме $x = \alpha_i$ и добиваме

$$\alpha_i^{n-1}(\alpha_i + 5) = -3, \text{ за } i = 1,, ..., k.$$

Ако ги помножиме овие равенства добиваме

$$|(\alpha_1 + 5)(\alpha_2 + 5)...(\alpha_k + 5)| = 3^k \qquad (1)$$

Од равенствата

$$|g(-5)| = |\alpha_1 + 5| \cdot |\alpha_2 + 5| \cdot ... \cdot | \cdot \alpha_k + 5| \text{ и } 3 = f(-5) = g(-5)h(-5),$$

бидејќи коефициентите на $g(x)$ и $h(x)$ се целобројни добиваме

$$|(\alpha_1 + 5)(\alpha_2 + 5)...(\alpha_k + 5)| = 3 \text{ или } 1.$$

Но, ова противречи на (1), бидејќи $k > 1$, па затоа $f(x)$ не може да се запише во облик $g(x)h(x)$.

81. Докажи дека полиномот $p(x)=x^5-x+a$, $a\in\mathbf{Z}$ и $a$ не се дели со 5, не може да се запише како производ на два полинома со целобројни коефициенти од понизок степен.

**Решение.** Ќе докажеме дека $5\,|\,(n^5-n)$, за секој $n\in\mathbf{Z}$. Навистина, секој цел број може да се запише во видот $5k, 5k\pm1, 5k\pm2$ и како

$$n^5-n=n(n-1)(n+1)(n^2+1),$$

добиваме дека за $n=5k, 5k\pm1$ еден од првите три множители се дели со 5, а за $n=5k\pm2$ четвртиот множител се дели со 5, па затоа $5\,|\,(n^5-n)$, за секој $n\in\mathbf{Z}$.

Да допуштиме дека дадениот полином може да се разложи како производ на два полинома со целобројни коефициенти и да го разгледаме случајот кога еден од полиномите во разложувањето е од прв степен, т.е.

$$x^5-x+a=(a_0x+a_1)(b_0x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4). \qquad (1)$$

Ако ја помножиме левата страна на (1) и ги изедначиме коефициентите пред соодветните степени добиваме $a_0b_0=1$, од што следува $a_0=b_0$ и без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a_0=b_0=1$. Ако во (1) ставиме $x=a_1$ добиваме $a_1^5-a_1-a=0$, што не е можно бидејќи $a_1^5-a_1$ се дели со 5, а $a$ не се дели со 5.

Сега да го разгледаме случајот кога едниоѕ од множителите е од втор, а другиот од трет степен. Тогаш

$$x^5-x+a=(x^2-mx+q)(x^3+b_1x^2+b_2x+b_3), \qquad (2)$$

каде $m,q,b_1,b_2,b_3$ се цели броеви. Со $x_1$ и $x_2$ да ги означиме корените на полиномот $x^2-mx+q$ и во (2) последователно да замениме $x_1$ и $x_2$. Добиваме

$$x_1^5-x_1+a=0 \text{ и } x_2^5-x_2+a=0,$$

и ако ги собереме последните две равенства наоѓаме

$$x_1^5+x_2^5-(x_1+x_2)+2a=0. \qquad (3)$$

Од $x_1+x_2=m$ и

$$m^5=(x_1+x_2)^5=x_1^5+x_2^5+5x_1x_2(x_1^3+x_2^3)+10x_1^2x_2^2(x_1+x_2)$$

заклучуваме дека разликата $m^5-(x_1^5+x_2^5)$ се дели со 5. Но, тогаш од (3) ќе следува дека $m^5-m+2a$ се дели со 4, што не е можно бидејќи $m^5-m$ се дели со 5, а $2a$ не се дели со 5.

82. Ако полиномот $P(x)$, $\deg P=7$ е со целобројни коефициенти и за седум различни цели броја прима вредности 1 или $-1$, тогаш $P(x)$ не може да се запише како производ на два полинома со целобројни коефициенти од понизок степен. Докажи!

**Решение.** Нека $P(x)=p(x)q(x)$ и $p(x)$ и $q(x)$ се полиноми со целобројни коефициенти. Тогаш $\deg p\le3$ или $\deg q\le3$. Нека $\deg p\le3$. Но, $P(x)$ за седум различни цели броја прима вредности 1 или $-1$, па од $P(x)=p(x)q(x)$ следува дека и $p(x)$ за истите тие броеви прима вредности 1 или $-1$. Меѓу овие седум броја поатојт четири за кои $p(x)$ е еднаков на 1 или постојат четири за кои $p(x)$ е еднаков на $-1$. Во првиот случај $p(x)-1$ се анулира за четири различни вредности на $x$, а во вториот $p(x)+1$ се анулира за четири различни вредности на $x$, што противречи на фактот дека $\deg[p(x)\pm 1]\le 3$.

83. За кои по парови различни цели броеви $a_i, i=1,2,...,n$ полиномот

$$(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)-1, \qquad (1)$$

може да се запише како производ на два полинома со цели коефициенти и степени поголеми или еднакви на 1.

**Решение.** Нека

$$(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)-1=p(x)q(x), \qquad (2)$$

каде $p(x)$ и $q(x)$ се полиноми со целобројни коефициенти, $\deg p\ge 1$, $\deg q\ge 1$ и $\deg p+\deg q=n$. Притоа и за двата полинома можеме да сметаме дека коефициентот пред највисокиот степен е еднаков на 1. Ако во (2) последователно замениме $x=a_1, x=a_2, ..., x=a_n$ и земеме предвид дека $-1$ на единствен начин може да се запише како производ на два целобројни множители: $-1=(-1)\cdot 1$, добиваме $p(x)=1$ и $q(x)=-1$, или обратно, за секој $x\in\{a_1,a_2,...,a_n\}$. Според тоа, $p(x)+q(x)=0$, за $x=a_1, x=a_2, ..., x=a_n$, што значи дека полиномот $r(x)=p(x)+q(x)$ има $n$ по парови различни целобројни корени, што не е можно бидејќи $\deg p+\deg q\le n-1$.

Конечно, од добиената противечност следува дека не постојат цели броеви $a_i, i=1,2,...,n$ за кои полиномот (1) може да се запише во облик (2).

84. За кои по парови различни цели броеви $[a,+\infty)$ полиномот

$$(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)+1, \qquad (1)$$

може да се запише како производ на два полинома со цели коефициенти и степени поголеми или еднакви на 1.

**Решение.** Да претпоставиме дека

$$(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)+1=p(x)q(x), \qquad (2)$$

каде $p(x)$ и $q(x)$ се полиноми со целобројни коефициенти, $\deg p\ge 1$, $\deg q\ge 1$ и $\deg p+\deg q=n$. Притоа и за двата полинома можеме да сметаме дека коефициентот пред највисокиот степен е еднаков на 1. Ако во (2) последователно замениме $x=a_1, x=a_2,...,x=a_n$ добиваме $p(x)=1, q(x)=1$ или $p(x)=-1, q(x)=-1$. Според тоа полиномот $p(x)-q(x)$ се анулира за $n$ различни вредности на $x$ и како $\deg[p(x)-q(x)]\le n-1$ добиваме дека $p(x)-q(x)\equiv 0$, т.е. $p(x)\equiv q(x)$, па затоа $\deg p=\deg q$, што значи $n=2k$, па затоа $\deg p=\deg q=k$. Според тоа, (2) го добива обликот

$$(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_{2k})=[p(x)-1][p(x)+1]. \qquad (3)$$

Значи, производот на два полинома $p(x)-1$ и $p(x)+1$ е еднаков на нула при $x=a_1, x=a_2,...,x=a_n$. Според тоа, при секоја од разгледуваните вредности на $x$ само еден од множителите е еднаков на 0, а тоа значи, дека или $p(x)+1$ или $p(x)-1$ се дели со $x-a_1$; или $p(x)+1$ или $p(x)-1$ се дели со $x-a_2$ итн. Понатаму, полином од $k-$ти степен не може да има повеќе од $k$ линерани множители, а како коефициентот пред највисокиот степен е 1, добиваме дека полиномот $p(x)+1$ е производ на точно $k$ множители на левата страна на (3), а полиномот $p(x)-1$ е производ на останатите $k$ множители.

Нека претпоставиме, на пример, дека

$$p(x)+1=(x-a_1)(x-a_3)...(x-a_{2k-1})$$

$$p(x)-1=(x-a_2)(x-a_4)...(x-a_{2k}).$$

Ако од првото равенство го одземеме второто добиваме

$$2=(x-a_1)(x-a_3)...(x-a_{2k-1})-(x-a_2)(x-a_4)...(x-a_{2k}).$$

Сега, на пример, за $x=a_2$, добиваме разложување на бројот 2 на $k$ различни цели множители

$$2=(a_2-a_1)(a_2-a_3)...(a_2-a_{2k-1}),$$

од што следува $k\le 3$. Случајот $k=3$ не е можен од следниве причини. Бројот 2 може на единствен начин да се запише како производ на три броја: $2=1\cdot(-1)\cdot(-2)$. Ако $k=3$, тогаш без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a_1<a_3<a_5$, па затоа $2=(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_5)$, што значи $a_2-a_1>a_2-a_3>a_2-a_5$, од што следува $a_2-a_1=1, a_2-a_3=-1,$ $a_2-a_5=-2$. Сега, ако во

$$2=(x-a_1)(x-a_3)(x-a_5)-(x-a_2)(x-a_4)(x-a_6)$$

ставиме $x=a_4$, добиваме друго разложување на бројот 2 на три различни множители

$$2=(a_4-a_1)(a_4-a_3)(a_4-a_5),$$

од каде добиваме $a_4-a_1>a_4-a_3>a_4-a_5$, па затоа

$$a_4-a_1=1, a_4-a_3=-1, a_4-a_5=-2.$$

Според тоа,

$$a_4-a_1=a_2-a_1, \text{ т.е. } a_4=a_2,$$

што противречи на условот на задачата. Од добиената противречност следува $k<3$, т.е. $k=1$ или $k=2$.

Ако $k=1$, тогаш $2=x-a_1-(x-a_2)$, па затоа $a_2=a_1+2$. Ако ставиме $a_1=a$ добиваме

$$(x-a_1)(x-a_2)+1=(x-a)(x-a-2)+1=(x-a-1)^2.$$

Ако $k=2$, тогаш

$$2=(x-a_1)(x-a_3)-(x-a_2)(x-a_4)$$

и можеме да сметаме дека $a_1<a_3, a_2<a_4$. Ако во последното равенство ставиме $x=a_2$ и $x=a_4$ добиваме

$$2=(a_2-a_1)(a_2-a_3),\ \ a_2-a_1>a_2-a_3,$$
$$2=(a_4-a_1)(a_4-a_3),\ \ a_4-a_1>a_4-a_3.$$

Бидејќи 2 може да се разложи на два множители, кои опаѓаат само на два начина $2=2\cdot 1$ и $2=(-1)\cdot(-2)$ и како $a_2-a_1<a_4-a_1$ добиваме

$$a_2-a_1=-1, a_2-a_3=-2, a_4-a_1=2, a_4-a_3=1.$$

Од последните равенства при $a_1=a$ наоѓаме $a_2=a-1, a_3=a+1, a_4=a+2$ и

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)+1=[x^2-(2a-1)x+a^2+a-1]^2.$$

85. Докажи дека не постојат по парови различни цели броеви $a_i, i=1,2, \ \ ...,n$ така да полиномот

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2...(x-a_n)^2+1, \qquad (1)$$

може да се запише како производ на два полинома со цели коефициенти и степени поголеми или еднакви на 1.

**Решение.** Аналогно како во решението на претходната задача од равенството

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2...(x-a_n)^2+1=p(x)q(x), \qquad (2)$$

каде $p(x)$ и $q(x)$ се полиноми со целобројни коефициенти, такви да $\deg p+\deg q=n$ и коефициенти пред највисоките степени еднакви на 1 добиваме дека $p(x)=1, q(x)=1$ или $p(x)=-1, q(x)=-1$ при секоја од вредностите $x=a_1, x=a_2,...,x=a_n$. Ќе докажеме дека при секоја од вредностите $x=a_1, x=a_2,...,x=a_n$ полиномот $p(x)$ (соодветно полиномот $q(x)$) или е еднаков на 1 или е еднаков на $-1$.

Навистина, ако на пример полиномот $p(x)$ за некој $a_i$ прима вредност 1, а за $a_j\neq a_i$ прима вредност $-1$, тогаш при секоја вредност на $x$ меѓу $a_i$ и $a_j$ тој ќе биде еднаков на нула (полином е непрекината функција на множеството реални броеви, па затоа и на секое негово подмножество), што не е можно, бидејќи левата страна на (2) секогаш е позитивен број, поголем или еднаков на 1.

Да претпоставиме дека како $p(x)$, така и $q(x)$ при $x=a_1, x=a_2,..., \ \ x=a_n$ прима вредност 1. Во тој случја бидејќи $p(x)-1$ и $q(x)-1$ се еднакви на нула при $x=a_1, x=a_2,...,x=a_n$ добиваме дека $p(x)-1$ и $q(x)-1$ се делат со $(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$. Понатаму, бидејќи збирот на степените на $p(x)$ и $q(x)$ е еднаков на степенот на полиномот $(x-a_1)^2(x-a_2)^2...(x-a_n)^2$, т.е. на $2n$, добиваме дека

$$\begin{aligned}(x-a_1)^2(x-a_2)^2...(x-a_n)^2+1&=p(x)q(x)\\&=[(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)+1]^2\\&=(x-a_1)^2(x-a_2)^2...(x-a_n)^2+2(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)+1\end{aligned}$$

од што следува

$$(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)=0,$$

што е противречност. Аналогно можеме да докажеме дека полиномите $p(x)$ и $q(x)$ не можат да примат вредност $-1$ при $x=a_1, x=a_2,...,x=a_n$.

Конечно, добиваме дека полиномот $(x-a_1)^2(x-a_2)^2...(x-a_n)^2+1$ не може да се запише како производ на два полинома со целобројни коефициенти и степени поголеми или еднакви на 1.

86. Најди ги сите квадратни полиноми $P(x)=ax^2+bx+c$ за кои се исполнети условите:

$$|P(x)|\leq 1, x\in[-1,1], \tag{1}$$

$$a^2+b^2+c^2=5. \tag{2}$$

**Решение.** Ставаме $P(-1)=p, P(1)=q$ и го добиваме системот

$$\begin{cases} a-b+c=p \\ a+b+c=q \end{cases}$$

од каде наоѓаме $a=\frac{p+q-2c}{2}, b=\frac{q-p}{2}$. Според тоа,

$$a^2+b^2+c^2=(\frac{p+q-2c}{2})^2+(\frac{q-p}{2})^2+c^2=\frac{p^2+q^2+4c^2-2c(p+q)}{2}.$$

Од (1) следува дека $p^2\leq 1, q^2\leq 1, c^2\leq 1$, па затоа

$$-2c(p+q)\leq|2c(p+q)|\leq 2|c|\cdot(|p|+|q|)\leq 4.$$

Тогаш,

$$5=a^2+b^2+c^2=\frac{p^2+q^2+4c^2-2c(p+q)}{2}\leq\frac{1+1+4+4}{2}=5,$$

па затоа во горните неравенства важат знаци за равенства, односно

$$|c|=1, |p|=1, |q|=1 \text{ и } -2c(p+q)=4, \text{ т.е. } c(p+q)=-2.$$

Сега лесно добиваме дека $a=2, b=0, c=-1$ или $a=-2, b=0, c=1$.

87. Најди ги сите полиноми $f(x)$ со целобројни коефициенти такви да $a+b$ е делител на $f(a)+f(b)$ за бесконечно многу заемно прости броеви.

**Решение.** Нека $g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ и $h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$. Јасно е дека првиот полином содржи само мономи со непарни степени, а вториот само парни степени. Бидејќи $a+b$ е делител $a^{2n-1}+b^{2n-1}$ за секој $n\in\mathbf{N}$, добиваме дека $a+b$ е делител на $f(a)+f(b)$ точно кога е делител на $h(a)+h(b)$. Бидејќи

$$a^{2n}+b^{2n}=a(a^{2n-1}+b^{2n-1})-b^{2n-1}(a+b)+2b^{2n},$$

последното значи дека $a+b$ е делител на $2h(b)$. Ќе претпоставиме дека $h\not\equiv 0$. Тогаш ги имаме следниве два случаја.

*Случај* 1. $h(x)=cx^{2n}, c\neq 0$. Ако $\text{NZD}(a,b)=1$, тогаш

$$\text{NZD}(a+b,b^{2n})=1,$$

па затоа $a+b$ е делител на $2h(b)=2cb^{2n}$ само кога е делител на $2c$. Тоа е можно само за конечен број броеви $a$ и $b$.

*Случај* 2. $h(x)=cx^{2n}+t(x), c\neq 0$, а $t(x)$ е збир на мономи со парни степени, поголеми до $2n$. Нека $b\in\mathbf{N}$, $\text{NZD}(b,c)=1$ и $a=|c+\frac{t(b)}{b^{2n}}|-b$. Тогаш $a\in\mathbf{Z}$, $\text{NZD}(a,b)=1$, $a+b$ е делител на $2|f(b)|=2(a+b)b^{2n}$ и $a\to\infty$ кога $b\to\infty$. Конечно, решение се сите полиноми со целобројни коефициентибез оние кои содржат точно еден моном со парен степен.

88. Најди ги сите полиноми $P(x)$ такви да

$$xP(x-1)=(x-3)P(x)\text{, за секој } x\in\mathbf{R}.$$

**Решение.** Ако во давената равенка ставиме последователно $x=0,\ \ x=1,$ $x=2$ добиваме $P(0)=P(1)=P(2)=0$. Според тоа,

$$P(x)=x(x-1)(x-2)Q(x).$$

Со замена во дадената равенка добиваме

$$x(x-1)(x-2)(x-3)Q(x-1)=(x-3)x(x-1)(x-2)Q(x),$$

т.е. $Q(x)=Q(x-1)$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Последната равенка значи дека полиномот $Q(x)$ има еднакви вредности во бесконечно многу точки $x, x-1, x-2,$ $x-3,...$ и единствен полином за кој тоа е можно е полиномот $Q(x)=c$, каде $c$ е произволна константа. Според тоа,

$$P(x)=cx(x-1)(x-2), c\in\mathbf{R}.$$

89. Најди ги сите полиноми со целобројни коефициенти од облик

$$P_n(x)=n!x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+(-1)^n n(n+1),$$

за чии корени $x_1,x_2,...,x_n$ важи $x_k\in[k,k+1]$, за $k=1,2,...,n$.

**Решение.** За $n=1$ единствен полином од бараниот облик е $P_1(x)=x-2$ и тој ги задоволува условите на задачата.

За $n=2$ треба да најдеме цел број $a_1$ таков да

$$P_2(x)=2x^2+a_1x+6$$

ги задоволува условите на задачата. Тогаш за корените на овој полином важи

$$1\leq x_1\leq 2\leq x_2\leq 3,\quad x_1+x_2=-\frac{a_1}{2},\ x_1x_2=3.$$

Од овие неравенства добиваме $0\leq x_2-x_1\leq 2$, па затоа

$$0\leq(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{1}{4}a_1^2-12\leq 4\text{, т.е. } 48\leq a_1^2\leq 64$$

и исто така и $a_1<0$. Но, $a_1$ е цел број, па од последните неравенства следува $a_1=-7$ или $a_1=-8$. Лесно се проверува дека за најдените вредности на $a_1$ условите на задачата се исполнети.

Ќе докажеме дека за $n\geq 3$ не постои полином за кој се исполнети условите на задачата. Нека е

$$\begin{aligned}P_n(x)&=n!x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+(-1)^n n(n+1)\\&=n!(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n).\end{aligned}$$

Тогаш

$(-1)^n n(n+1) = n!(-1)^n x_1 x_2 ... x_n$,

па од $x_k \in [k, k+1]$, за $k = 1, 2, ..., n$ следува

$$n! \le x_1 x_2 ... x_n = \frac{(n+1)!}{(n-1)!} \le \frac{n+1}{2} < n < n!,$$

што е противречност.

Значи, бараните полиноми се $x-2$, $2x^2-7x+6$ и $2x^2-8x+6$.

90. Најди ги сите полиноми $P(x)$ со реални коефициенти такви да

$$2 + 2P(x) = P(x-1) + P(x+1). \qquad (1)$$

**Решение.** Јасно, ниту еден константен полином не е решение на равенката (1), а истото важи и за линераните полиноми.

Понатаму, полином од видот $P(x) = ax^2 + bx + c$ е решение на (1) ако и само ако $a = 1$. Според тоа сите квадратни полиноми од видот $P(x) = x^2 + bx + c$ се решенија на (1). Ќе докажеме дека равенката (1) нема други решенија.

Нека $P(x)$ е решение на (1). Дефинираме $Q(x) = P(x) - x^2$. Ако замениме во (1) добиваме

$$Q(x) - Q(x-1) = Q(x+1) - Q(x).$$

Нека

$$R(x) = Q(x) - Q(x-1).$$

За полиномот $R(x)$ важи $R(x) = R(x+1)$, па од задача 45 следува дека $R(x)$ е константен полином. Нека $R(x) = b$, од што следува $Q(x) = Q(x-1) + b$. Дефинираме полином $S(x) = Q(x) - bx$. За полиномот $S(x)$ важи $S(x) = S(x-1)$, па значи $S(x)$ е константен полином. Нека $S(x) = c$. Конечно, добиваме

$$P(x) = x^2 + Q(x) = x^2 + bx + S(x) = x^2 + bx + c.$$

91. Најди ги сите полиноми $f(x) = x^2 - ax + b$ со целобројни коефициенти такви да

$$| f(m) |=| f(n) |=| f(p) |= 7,$$

за некои различни цели броеви $m, n, p \in [0,9]$.

**Решение.** Од принципот на Дирихле следува дека два од броевите $f(m), f(n)$ и $f(p)$ се едкави на 7 (или $-7$), а третиот е еднаков на $-7$ (или 7). Ќе рагледаме два случаја.

1) Нека $f(m) = f(n) = 7$ и $f(p) = -7$. Без ограничување на општоста може-ме да претпоставиме дека $m > n$ и како $m, n$ се корени на $f(x)$ добиваме дека $m + n = a, b = mn + 7$. Освен тоа,

$$14 = f(m) - f(p) = (m-p)(p-n).$$

Бидејќи $m > n$ и $m, n, p \in [0,9]$, од последното равенство следува дека $m - p > 0, p - n > 0$ и ниту еден од броевите $m-p$ и $p-n$ не е еднаков на 14. Затоа можни се следниве случаи $m - p = 2$, $p - n = 7$ или

$m-p=7,\ \ p-n=2$, т.е. $m=p+2,\ p=n+7$ или $m=p+7,\ p=n+2$ и во овој случај најмалку еден од природните броеви е надвор од интервалот $[0,9]$.

2) Нека $f(m)=f(n)=-7$ и $f(p)=7$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $|m-p|<|p-n|$. Како и во случајот 1) имаме $m+n=a, b=mn-7$ и $14=f(m)-f(p)=(m-p)(p-n)$, од што следува дека $m-p=2, p-n=-7$ или $m-p=-2, p-n=7$. Според тоа, $m=p+2, n=p+7$ или $m=p-2$, $n=p-7$, од што добиваме дека $(m,n,p)\in\{(3,8,1),(4,9,2),(6,1,8),(7,2,9\}$. Во случајов ги добиваме функциите

$$f(x)=x^2-11x+17,\ f(x)=x^2-7x-1,$$
$$f(x)=x^2-13x+29,\ f(x)=x^2-9x+7.$$

92. Најди ги сите полиноми

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0,\ \ a_0\neq 0,$$

со целобројни коефициенти и корени $a_i, i=0,1,2,...,n-1$.

**Решение.** Јасно $n>1$. Од

$$f(x)=(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_{n-1})$$

следува $a_0=f(0)=(-1)^n a_0a_1...a_{n-1}$, па затоа $|a_i|=1, i=1,2,...,n-1$. Ќе разгледаме два случаја.

1) $|a_0|=1$. Имаме $f(x)=(x-1)^p(x+1)^q, p+q=n>1$. Од друга страна $(x-1)^p(x+1)^q=(x^p-x^{p-1}+...)(x^q+x^{q-1}+...)$ и споредувајќи ги коефициентите пред $x^{n-1}$ и $x^{n-2}$ добиваме

$$\begin{cases} q-p=a_{n-1}=\pm 1\\ \frac{q(q-1)}{2}+\frac{p(p-1)}{2}-pq=a_{n-2}=\pm 1.\end{cases}$$

Од последниот систем равенки лесно се добива дека $p+q=3$, од каде следува $p=1, q=2$ или $p=2, q=1$. Во првиот случај го добиваме полиномот $f(x)=x^3+x^2-x-1$, кој е решение, а во вториот случај го добиваме полиномот $f(x)=x^3-x^2-x+1$, кој не е решение.

2) $|a_0|\geq 2$. Сега

$$\begin{aligned}0=f(a_0)&=|a_0^n+a_{n-1}a_0^{n-1}+...+a_1a_0+a_0|\\ &\geq |a_0|^n-|a_0|^{n-1}-...-|a_0|^2-2|a_0|=\tfrac{|a_0|(|a_0|-2)(|a_0|^{n-1}-1)}{|a_0|-1}\geq 0,\end{aligned}$$

од каде следува $|a_0|=2$. Меѓутоа знаците на $a_{n-1}a_0^{n-1},...,a_1a_0$ и $a_0$ се спротивни од знакот на $a_0^n$, од што заклучуваме дека $a_0-2$, $n$ е парен број и $a_i=(-1)^{i+1}, i=1,2,...,n-1$. Ако $n>2$, тогаш $a_2=-1$ и

$$0=f(-1)=(-1)^n+(-1)^n(-1)^{n-1}+...+(-1)^2(-1)-2=-n-2\neq 0\,,$$

што е противречност. Значи $n=2$ и $f(x)=x^2+x-2$.

Конечно, бараните полиноми се

$$f(x)=x^3+x^2-x-1 \text{ и } f(x)=x^2+x-2\,.$$

93. Најди ги сите реални полиноми $P$ и $Q$ такви да за секој реален број $a$, $P(a)$ е решение на равенката

$$x^2+Q(a)x^2+(a^4+1)x+a^3+a=0\,.$$

**Решение.** Од условот на задачата следува

$$P^3(a)+Q(a)P^2(a)+(a^4+1)P(a)+a^3+a=0$$

$$Q(a)=-P(a)-\tfrac{(a^4+1)P(a)+a(a^2+1)}{P^2(a)}\,.$$

Бидејќи $Q(a)$ е полином, важи $P^2(a)\,|\,[(a^4+1)P(a)+a(a^2+1)]$, од каде следува $P(a)\,|\,[(a^4+1)P(a)+a(a^2+1)]$, односно $P(a)\,|\,a(a^2+1)$. Ќе ги разгледаме следниве четири можности:

1) $P(a)=ca(a^2+1)$, $c\neq 0$. Тогаш

$$Q(a)=-ca(a^2+1)-\tfrac{a^4+1+\frac{1}{c}}{ca(a^2+1)}\,,$$

па $Q(a)$ не е полином бидејќи $ca(a^2+1)$ не е делител на $a^4+1+\frac{1}{c}$.

2) $P(a)=c(a^2+1)$, $c\neq 0$. Тогаш

$$Q(a)=-c(a^2+1)-\tfrac{a^4+1+\frac{a}{c}}{c(a^2+1)}\,,$$

па $Q(a)$ не е полином бидејќи $c(a^2+1)$ не е делител на $a^4+1+\frac{a}{c}$.

3) $P(a)=ca$, $c\neq 0$. Тогаш

$$Q(a)=-ca-\tfrac{c(a^4+1)+a^2+1}{c^2a}=-ca-\tfrac{a^3}{c}-\tfrac{a}{c^2}-\tfrac{c+1}{c^2a}\,.$$

За $c=-1$ имаме $Q(a)=a^3$ и $P(a)=-a$, а во спротивно $Q(a)$ не е полином.

4) $P(a)=c$, $c\neq 0$. Тогаш

$$Q(a)=-c-\tfrac{(a^4+1)c+a(a^2+1)}{c^2}=-\tfrac{a^4}{c}-\tfrac{a^3}{c^2}-\tfrac{a}{c^2}-\tfrac{c+1}{c^2}\,.$$

Конечно, постојат две решенија:

$$Q(a)=a^3,\ P(a)=-a \text{ и } P(a)=c,\ Q(a-\tfrac{a^4}{c}-\tfrac{a^3}{c^2}-\tfrac{a}{c^2}-\tfrac{c+1}{c^2},\ c\neq 0\,.$$

94. Најди ги сите полиноми $p(x)$, со целобројни коефициенти, такви што

$$16p(x^2)=[p(x)]^2, \text{ за секој } x\in\mathbf{R}\,.$$

**Решение.** Нека $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, $a_n \neq 0$ е бараниот полином. Ако во даденото равенство ставиме $x=0$ добиваме $16a_0 = a_0^2$, од што следува $a_0 = 0$ или $a_0 = 16$. Од друга страна, ако ги изедначиме коефициентите пред $x^{2n}$ во даденото равенство, тогаш ја добиваме равенката $16a_n = 2^{2n}a_n^2$ и како $a_n \neq 0$, добиваме $a_n = \frac{16}{4^n}$. Но, $a_n$ е цел број, па затоа $n=0$ или $n=1$ или $n=2$.

За $n=0$ полиномите се $p(x)=0$ и $p(x)=16$.

За $n=1$ можни полиноми се $p(x)=4x$ и $p(x)=4x+16$. Притоа, само $p(x)=4x$ ги задоволува условите на задачата.

За $n=2$ можни полиноми се $p(x)=x^2+a_1x$ и $p(x)=x^2+a_1x+16$. Со непосредна проверка добиваме $a_1=0$ и само $p(x)=x^2$ ги задоволува условите на задачата.

95. Најди ги сите полиноми $p(x)$ такви да $p(x^2-2x)=[p(x-2)]^2$, за секој $x\in \mathbf{R}$.

**Решение.** Очигледно ако $\deg p = 0$, тогаш единствени полиноми кои го задоволуваат условот на задачата се константите 0 и 1.

Нека $p(x)$ е бараниот полином и $\deg p = n \geq 1$. Ставаме $x-1=y$ и добиваме $p(y^2-1)=[p(y-1)]^2$. Со $q(y)$ да го означиме полиномот $p(y-1)$. Тогаш $q(y^2)=[q(y)]^2$. Ќе докажеме дека $q(y)=y^n$. Нека

$$q(y)=a_0y^n+a_1y^{n-1}+...+a_{n-1}y+a_n,\ a_0\neq 0.$$

Нека претпоставиме дека $a_n \neq 0$ и со $k$ да го означиме најголемиот природен број, за кој $k<n$ и $a_k \neq 0$. Добиваме

$$q(y^2)=a_0y^{2n}+a_1y^{2n-2}+...+a_{n-1}y^2+a_n,$$
$$[q(y)]^2=a_0^2y^{2n}+...+2a_na_ky^{n-k}+a_n^2,$$

што значи дека не е можно $q(y^2)=[q(y)]^2$, бидејќи при $k<n$ имаме $2(n-k)>n-k$. Значи, $a_n=0$ и

$$q(y)=a_0y^n+a_1y^{n-1}+...+a_ky^{n-k},\ a_k\neq 0.$$

Ако $k>0$, тогаш $q(y)=y^kr(y)$, каде $r(y)$ е полином со ненулти степен и ненулти слободен член кој ја задоволува равенката $r(y^2)=[r(y)]^2$, што не е можно. Значи, $q(y)=a_0y^n$ и ако замениме во $q(y^2)=[q(y)]^2$ добиваме $a_0=1$, т.е. $q(y)=y^n$.

Конечно, $p(x)=q(x+1)=(x+1)^n, n\in\mathbf{N}$ се полиномите кои го задоволуваат условот на задачата.

96. Најди полином од трет степен $P(x)$, кој ја задоволува релацијата

$$P(x)-P(x-1)=x^2,$$

а потоа користејќи го истиот најди го збирот на квадратите на првите $n$ природни броеви.

**Решение.** Нека $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Тогаш

$$P(x)-P(x-1)=3ax^2-(2b-3a)x+a-b+c$$

и како $P(x)-P(x-1)=x^2$ добиваме

$$3ax^2-(2b-3a)x+a-b+c=x^2.$$

Со изедначување на коефициентите пред степените на $x$ добиваме $a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{6}$. Значи, $P(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+d$. За $k=0,1,2,...,n$ добиваме

$$P(1)-P(0)=1^2$$

$$P(2)-P(1)=2^2$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$P(n)-P(n-1)=n^2.$$

Ако ги собереме горните равенства добиваме

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=P(n)-P(0)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

97. Најди ги сите неконстантни полиноми $p(x)$ кои ја задоволуваат равенката $p(x^3+1)=[p(x+1)]^3$.

**Решение.** Нека полиномот $p(x)$ е решение на задачата и нека $p(x+1)=f(x)$. Тогаш

$$f(x^3)=p(x^3+1)=[p(x+1)]^3=[f(x)]^3.$$

Нека $f(x)=x^k f_1(x)$, каде $k\geq 0$ и $f_1(0)\neq 0$. Тогаш од

$$x^{3k}f_1(x^3)=x^{3k}[f_1(x)]^3.$$

добиваме $f_1(x^3)=[f_1(x)]^3$. Ќе докажеме дека $f_1(x)$ е константен полином. Навистина, ако

$$f_1(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n,\ a_0\neq 0,\ n>1,$$

тогаш постои коефициент $a_{n-s}\neq 0,\ a_{n-s+1}=a_{n-s+2}=...=a_{n-1}=0$, за некој $s\geq 1$. Во равенството $f_1(x^3)=[f_1(x)]^3$ ги изедначуваме коефициентите пред $x^s$. На десната страна тој коефициент е $3a_{n-s}a_n^2$, а на левата тој е нула, што е противречност. Значи, $f_1(x)$ е константен полином и очигледно $f_1(x)=\pm 1$. Според тоа, $f(x)=\pm x^k$ и $p(x)=\pm(x-1)^k$, . Со непосредна проверка се уверуваме дека овие полиноми се решенија на задачата.

98. Нека $f(n)=1!+2!+3!+...+n!$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Најди полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ такви што

$$f(n+2)=P(n)f(n+1)+Q(n)f(n)\text{, за секој } n\in\mathbf{N}.$$

**Решение.** Имаме

$$f(n+2)-f(n+1)=(n+2)!=(n+2)\cdot(n+1)!=(n+2)(f(n+1)-f(n)),$$

па затоа

$$f(n+2)=(n+3)f(n+1)-(n+2)f(n)\text{, за секој } n\in\mathbf{N}.$$

Според тоа, $P(n)=n+3$ и $Q(n)=-(n+2)$, за секој $n\in\mathbf{N}$, па затоа $P(x)=x+3$ и $Q(x)=-(x+2)$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

99. Нека $x_n, n=1,2,3,4,...$ се позитивни реални броеви такви да

$$x_n^n=\sum_{j=0}^{n-1}x_n^j\text{, за } n=1,2,3,....$$

Докажи дека $2-\frac{1}{2^{n-1}}\le x_n\le 2-\frac{1}{2^n}$, за $n=1,2,3,...$.

**Решение.** За $n=1$ имаме $x_1=x_1^1=x_1^0=1$ и јасно $2-\frac{1}{2^0}\le x_1=1\le 2-\frac{1}{2^1}$. Да претпоставиме дека $n\ge 2$ и нека $f(x)=x^n-\sum_{j=0}^{n-1}x^j$. Бидејќи $f(1)=1-n<0$ и $0<1=f(2)$ постои $x_n\in(1,2)$ таков да $f(x_n)=0$. Да го разгледаме полиномот $g(x)=(x-1)f(x)=x^{n+1}-2x^n+1$. Имаме $g(1)=g(x_n)=0$. Според тоа, полиномот $g(x)$ има најмногу два позитивни корени, па затоа $x_n$ е единствен позитивен корен на полиномот $f(x)$. Понатаму, за секој $n$ важи:

$$(1-2^{-n})^n\ge(1-2^{-n})^{2n-2}=(1-2\cdot2^{-n}+2^{-2n})^{n-1}>(1-2^{-(n-1)})^{n-1},$$

па затоа $(1-2^{-n})^n>(1-2^{-1})=\frac{1}{2}$.

Од $g(x)=(x-2)x^n+1$ следува

$$g(2-2^{-n})=-2^{-n}(2-2^{-n})^n+1=1-(1-2^{-(n+1)})^n>0$$

и

$$g(2-2^{-(n-1)})=-2^{-(n-1)}(2-2^{-(n-1)})^n+1<0,$$

па затоа

$$f(2-2^{1-n})<0<f(2-2^{-n}),$$

што значи дека единствениот корен $x_n$ на $f(x)$ се наоѓа меѓу броевите $2-2^{1-n}$ и $2-2^{-n}$, т.е. $2-\frac{1}{2^{n-1}}\le x_n\le 2-\frac{1}{2^n}$, за $n=1,2,3,...$.

100. Нека $a,b,c$ се реални броеви такви да $9a+11b+29c=0$. Докажи дека еден корен на полиномот $P(x)=ax^3+bx+c$ лежи во интервалот $[0,2]$.

**Решение.** Имаме $P(0)=c$ и $P(2)=8a+2b+c$. Тогаш

$$\begin{aligned}0&=9a+11b+29c=P(0)+P(2)+a+9b+27c\\&=P(0)+P(2)+\tfrac{1}{27}(\tfrac{a}{27}+\tfrac{b}{3}+c)\\&=P(0)+P(2)+\tfrac{1}{27}P(\tfrac{1}{3}),\end{aligned}$$

т.е.

$$P(0)+P(2)+\tfrac{1}{27}P(\tfrac{1}{3})=0\,. \qquad (1)$$

Ако еден од броевите $P(0), P(2)$ или $P(\frac{1}{3})$ е еднаков на 0, тогаш јасно $P(x)$ има корен во $[0,2]$. Ако овие броеви се различни од 0, тогаш од (1) следува дека два од овие броја се различни по знак. Но полином е непрекината функција, па затоа равенката $P(x)=0$ во еден од интервалите $[0,\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3},2]$ или $[0,2]$ има барем едно решение, т.е. полиномот $P(x)$ има барем еден корен во интервалот $[0,2]$.

101. Дали постои полином $f(x,y)$ со реални коефициенти таков да се точни равенствата

$$f(y^2-4y+6,y)=y^2+y+2$$
$$f(3x,x^2)=x^4+3x?$$

**Решение.** Нека претпоставиме дека таков полином постои. Лесно се проверува дека за $\lambda=\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$ парот $x=\lambda, y=\lambda^2$ е решение на системот равенки

$$\begin{cases}y^2-4y+6=3x,\\ y=x^2,\end{cases}$$

па затоа за парот $(x,y)$ треба да важи $f(y^2-4y+6,y)=f(3x,x^2)$. Но,

$$f(\lambda^4-4\lambda^2+6,\lambda^2)=\lambda^4+\lambda^2+2\neq\lambda^4+3\lambda=f(3\lambda,\lambda^2),$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека бараниот полином не постои.

102. Докажи дека полиномот $x^{200}y^{200}+1$ не може да се претстави како производ $f(x)g(y)$ на два полиноми: од една променлива $x$ и од една променлива $y$.

**Решение.** Нека полиномите $f(x)$ и $g(y)$ имаат слободни членови $a_0$ и $b_0$, соодветно. Во равенството

$$x^{200}y^{200}+1=f(x)g(y)$$

ставаме $x=0$ и добиваме

$$1=f(0)g(y),\text{ т.е. } g(y)=\tfrac{1}{f(0)}=\tfrac{1}{a_0}\,.$$

Слично, при $y=0$ имаме $f(x)=\frac{1}{g(0)}=\frac{1}{b_0}$, па затоа

$$x^{200}y^{200}+1\neq\tfrac{1}{a_0b_0}=f(x)g(y)\,,$$

што значи дека бараното претставување не е можно.

103. Најди ги сите хомогени полиноми од две променливи, со $n$-ти степен такви што:

$1^\circ$ За секои три реални броеви $a,b$ и $c$ е исполнето

$$P(a+b,c)+P(b+c,a)+P(c+a,b)=0$$

$2^\circ$ $P(1,0)=1$.

*Забелешка.* Полином $P$ е *хомоген* полином од $n$-ти степен ако за секои реални броеви $t,x,y$ е исполнето $P(tx,ty)=t^nP(x,y)$, каде $n\in\mathbf{N}$.

**Решение.** *Прв начин.* Ставаме $a=2x$, $b=c=-x$ и од условот $1^\circ$ и дефиницијата на хомоген полином добиваме

$$2P_n(x,-x)+(-2)^nP_n(-x,x)=0 \tag{1}$$

Ставаме $a=x$, $b=-x$, $c=0$ и од $P_n(0,0)=0$ добиваме

$$P_n(x,-x)+P_n(-x,x)=0. \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме

$$P_n(x,-x)=P_n(-x,x)=0.$$

Значи, $P_n(x,y)=0$ за $y=-x$, па затоа $P_n(x,y)$ се дели со $x+y$, т.е.

$$P_n(x,y)=(x+y)Q_{n-1}(x,y). \tag{3}$$

Го заменуваме $(3)$ во условот $1^\circ$ и добиваме

$$(a+b+c)[Q(a+b,c)+Q(b+c,a)+Q(c+a,b)]=0,$$

односно

$$Q(a+b,c)+Q(b+c,a)+Q(c+a,b)=0.$$

Според тоа, полиномот $Q_{n-1}(x,y)$ го има својството $1^\circ$, па затоа и овој полином се дели со $x+y$. Постапката ја продолжуваме се додека не добиеме полином од прв степен. Значи,

$$P_n(x,y)=(x+y)^{n-1}R_1(x,y). \tag{4}$$

Ако во условот $1^\circ$ ставиме $a=b=c=y$, добиваме $P(2y,y)=0$, па според тоа $P(x,y)$ е делив со $x-2y$, односно $R_1(x,y)=k(x-2y)$. Сега од (4) добиваме

$$P_n(x,y)=k(x-2y)(x+y)^{n-1}.$$

Бидејќи $P(1,0)=1$, добиваме $k=1$, што значи

$$P_n(x,y)=(x-2y)(x+y)^{n-1}.$$

Од доказот е јасно дека тоа е единствен полином од $n$-ти степен кој ги задоволува условите на задачата.

*Втор начин.* Да го разгледаме полиномот $Q(t)$ определен со

$$Q(t)=P(\tfrac{2+t}{3},\tfrac{1-t}{3}).$$

Полиномот $Q$ го задоволува равенството

$$Q(-2t)=-2Q(t). \tag{5}$$

Навистина, ако во $1^\circ$ ставиме $a=b=\frac{1-t}{3}$ и $c=\frac{1+2t}{3}$ добиваме

$$P(\tfrac{2-2t}{3},\tfrac{1+2t}{3})+P(\tfrac{2+t}{3},\tfrac{1-t}{3})+P(\tfrac{2+t}{3},\tfrac{1-t}{3})=0\,,$$

односно точна е релацијата (5).

Ако ја искористиме релацијата (5) и условот $Q(1)=P(1,0)=1$ со математичка индукција можеме да докажеме дека

$$Q((-2)^n)=(-2)^n\text{, за } n=0,1,2,3,...\,.$$

Според тоа, полиномите $Q(t)$ и $t$ се еднакви за бесконечно многу вредности на $t$, па затоа $Q(t)=t$. За $t=\frac{x-2y}{x+y}$ добиваме

$$Q(\tfrac{x-2y}{x+y})=\tfrac{x-2y}{x+y}\text{, т.е. } P(\tfrac{x}{x+y},\tfrac{y}{x+y})=\tfrac{x-2y}{x+y}\,,$$

па $P(x,y)=(x-2y)(x+y)^{n-1}$.

104. Полиномите $P_n(x,y), n\geq 1$ се дефинирани со

$$P_1(x,y)=1,\ P_{n+1}(x,y)=(x+y-1)(y+1)P_n(x,y+2)+(y-y^2)P_n(x,y)\,.$$

Докажи дека $P_n(x,y)=P_n(y,x)$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$ и за секој $n\in\mathbf{N}$, т.е. дека полиномите $P_n(x,y), n\geq 1$ се *симетрични.*

**Решение.** Имаме

$$P_1(x,y)=1=P_1(y,x)\text{ и } P_2(x,y)=xy+x+y-1=P_2(y,x)\,,$$

т.е. тврдењето важи за $n=1$ и 2. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n-1$ и $n$, т.е. полиномите $P_{n-1}(x,y)$ и $P_n(x,y)$ се симетрични. Тогаш

$$\begin{aligned}P_{n+1}(x,y)&=(x+y-1)(y+1)P_n(x,y+2)+(y-y^2)P_n(x,y)\\&=(x+y-1)(y+1)P_n(y+2,x)+(y-y^2)P_n(y,x)\\&=(x+y-1)(y+1)[(x+y+1)(x+1)P_{n-1}(y+2,x+2)+(x-x^2)P_{n-1}(y+2,x)]\\&\quad+(y-y^2)[(y+x-1)(x+1)P_{n-1}(y,x+2)+(x-x^2)P_{n-1}(y,x)]\\&=(x+y-1)(x+y+1)(y+1)(x+1)P_{n-1}(y+2,x+2)+\\&\quad+(x+y-1)(y+1)(x-x^2)P_{n-1}(y+2,x)+\\&\quad+(y-y^2)(y+x-1)(x+1)P_{n-1}(y,x+2)+\\&\quad+(y-y^2)(x-x^2)P_{n-1}(y,x)=P_{n+1}(y,x),\end{aligned}$$

па од принципот на математичка индукција следува дека полиномите $P_n(x,y), n\geq 1$ се симетрични.

105. За бројот $m=p_1^{t_1}p_2^{t_2}...p_s^{t_s}$ ќе велиме дека има $t_1+t_2+...+t_s$ прости делители. Нека $p(x)$ е неконстантен полином со целобројни коефициенти и нека $n$ и $k$ се фиксирани природни броеви. Докажи дека постојат $n$ последователни природни броеви $a,a+1,a+2,...,a+n-k+1$ за кои броевите $p(a),p(a+1),$ $p(a+2),...,p(a+n-1)$ имаат најмалку $k$ прости делители.

**Решение.** Прво да забележиме дека ако

$$h(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_{n-1}x+b_n$$

е полином со реални коефициенти и $b_0>0$, тогаш постои $u\in\mathbf{R}$ таков да $h(x)$ строго монотоно расте на интервалот $[u,+\infty)$.

Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека коефциентот пред највисокиот степен на $p(x)$ е позитивен, бидејќи во спротивно ќе го разгледуваме полиномот $-p(x)$. Задача ќе биде решена ако го докажеме следново тврдење:

Постои природен број $a$, таков да $p(x)$ строго монотоно расте на интервалот $[a,+\infty)$, $p(a)>0$ и секој од броевите $p(a), p(a+1), p(a+2),...$ $p(a+n-1)$ има најмалку $k$ прости делители.

Доказот на последното тврдење ќе го спроведеме со индукција по $k$.

Јасно, за $k=1$ тврдењето важи. Имено, доволно е да избереме таков природен број $a$, да за $x\geq a$ важи $p(x)>1$ и $p(x)$ строго монотоно расте на интервалот $[a,+\infty)$, што е можно заради претходно направената забелешка и фактот дека $\lim\limits_{n\to\infty}p(x)=+\infty$.

Нека $k\geq 1$. Да претпоставиме дека постои природен број $a$ за кој $p(x)$ строго монотоно расте на $[a,+\infty)$, $p(a)>0$ и секој од броевите $m_i=p(a+i)$, $i=0,1,2,...,n-1$ има барем $k$ прости делители. Ставаме $M=m_0m_1...m_{n-1}$ и $a'=a+M$. Ќе докажеме дека секој од броевите $p(a'+i)$, $i=0,1,2,...,n-1$ има барем $k+1$ прост делител. За таа цел да забележиме дека за произволни $x$ и $y$ важи равенството

$$p(x+y)=p(x)+yg(x,y), \tag{1}$$

каде $g(x,y)$ е полином со целобројни коефициенти. Тогаш за секој $i=0,1,2,...,n-1$ имаме

$$\begin{aligned}p(a'+i)&=p(a+M+i)=p(a+i)+Mg(a+i,M)\\&=m_i+Mg(a+i,M)\\&=m_i[1+m_0m_1...m_{i-1}m_{i+1}...m_{n-1}g(a+i,M)].\end{aligned}$$

Според претпоставката $m_i$ има барем $k$ прости делители, па затоа доволно е да докажеме дека бројот

$$1+m_0m_1...m_{i-1}m_{i+1}...m_{n-1}g(a+i,M)$$

има барем еден прост множител. Бидејќи $p(a'+i)>p(a)>0$, последното тврдење ќе следува ако докажеме дека $g(a+i,M)\neq 0$. Да го претпоставиме спротивното. Тогаш од (1) ќе следува дека

$$p(a+i+M)=p(a+i),$$

што противречи на претпостаката дека $p(x)$ строго монотоно расте на интервалот $[a,+\infty)$. Од друга страна $p(a')=p(a+M)>p(a)>0$ и $p(x)$ е строго монотоно расте на интервалот $[a',+\infty)$, со што доказот е завршен.

106. Нека $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ и за полиномот $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ важи $f(2)+f(5)<7<f(3)+f(4)$. Докажи дека постојат $u,v \in \mathbf{R}$ такви да $u+v=7$ и $f(u)+f(v)=7$.

**Решение.** Нека $g(x)=f(x)+f(7-x)-7$. Јасно $g(x)$ е полином чиј степен е поголем од 2. Бидејќи $g(2)=f(2)+f(5)-7<0$ и $g(3)=f(3)+f(4)-7>0$ и $g$ е полином заклучуваме дека постои $c$ таков што $g(c)=0$, т.е.

$$f(c)+f(7-c)=7 .$$

Ставаме $c=u$, $7-c=v$ и добиваме $u+v=7$ и $f(u)+f(v)=7$, што и требаше да се докаже.

107. Дали постои полином $P(x)$ таков што $P(1)=1, P(2)=2$ и $P(n)$ е ирационален број за секој цел број $n$ различен од 1 и 2?

**Решение.** Да го разгледаме полиномот

$$P(x)=\sqrt{2}(x-1)(x-2)+x .$$

Јасно,

$$P(1)=1, P(2)=2 \text{ и } P(n)=\sqrt{2}(n-1)(n-2)+n$$

е ирационален број за секој цел број $n$ различен од 1 и 2, како збир на ирационален и рационален број.

108. Нека $P(x)$ е квадратен трином со ненегативни коефициенти. Докажи дека за секои $x,y \in \mathbf{R}$ важи неравенството

$$[P(xy)]^2 \le P(x^2)P(y^2) .$$

**Решение.** Нека $P(x)=ax^2+bx+c,\ a,b,c \ge 0, a \ne 0$. Тогаш

$$[P(xy)]^2-P(x^2)P(y^2)=(ax^2y^2+bxy+c)^2-(ax^4+bx^2+c)(ay^4+by^2+c)$$
$$=-ab(x^2y^2(x-y)^2-ac(x^2-y^2)^2-bc(x-y)^2 \le 0$$

бидејќи $a,b,c \ge 0$ и $t^2 \ge 0$, за секој $t \in \mathbf{R}$.

109. Дали постојат реални броеви $b$ и $c$ такви што секој од полиномите $P(x)=x^2+bx+c$ и $Q(x)=2x^2+(b+1)x+c+1$ има по два целобројни корени.

**Решение.** Нека претпоставиме дека постојат реални броеви $b$ и $c$ со саканото својство. Тогаш, ако $k$ и $l$ се корени на $P(x)$, а $m$ и $n$ се корени на $Q(x)$ од Виетовите формули следува

$$k+l=-b, \quad (1)$$
$$kl=c, \quad (2)$$
$$2(m+n)=-b-1, \quad (3)$$
$$2mn=c+1 . \quad (4)$$

Од (4) следува дека $c$ е цел непарен број, па затоа од (2) добиваме дека $k$ и $l$ се непарни броеви. Но, тоа според (1) значи дека $b$ е парен број, што противречи на (3). Конечно, од добиената противречност следува дека не постојат реални броеви $b$ и $c$ со саканото својство.

110. Дали постојат полиноми $P(x)=ax^2+bx+c$ и $Q(x)=(a+1)x^2+(b+1)x+c+1$ со целобројни коефициенти, секој од кои има по два целобројни корени?

**Решение.** Ако за полиномот $kx^2+lx+m$ се целобројни коефициенти двата корени $x_1$ и $x_2$ се целобројни, тогаш од $x_1x_2=\frac{m}{k}$ и $x_1+x_2=-\frac{l}{k}$ следува дека $m$ и $l$ се делат со $k$. Понатаму, од броевите $a$ и $a+1$ едниот е парен и без ограничување на општоста можеме даземеме дека $a$ е парен број. Според тоа, броевите $b$ и $c$ се парни, што значи дека $b+1$ и $c+1$ се непарни. Нека $y_1$ и $y_2$ се целобројни корени на полиномот $Q(x)$. Тогаш $y_1y_2=\frac{c+1}{a+1}$ и $y_1+y_2=-\frac{b+1}{a+1}$ се непарни броеви, што е противречност бидејќи збирот и рпоизводот на два цели броја не можат истовремено да се непарни броеви. Конечно, од добиената противречност следува дека не постојат полиноми со саканото својство.

111. Да ги разгледаме сите квадратни полиноми од видот $x^2+px+q$, каде $p,q\in\mathbf{Z}$, $1\le p\le 1997$ и $1\le q\le 1997$. Меѓу овие поилиноми кои се повеќе: оние кои имаат целобројни корени или оние кои немаат реални корени?

**Решение.** Нека $m\le n$ се целобројни корени на полиномот $P(x)=x^2+ax+b$. Тогаш $m+n=-a, mn=b$, па затоа $m,n<0$, $0<mn\le 1997$, $|n|\le|m|\le 1997$.

Да го разгледаме полиномот $Q(x)=x^2-nx+mn$. Неговите коефициенти се цели броеви од 1 до 1997, т.е. полиномот $Q(x)$ припаѓа на разгледуваното множество полиноми, но тој нема реални корени бидејќи неговата дискриминанта е $D=n^2-4mn=n(n-4m)<0$. Така, на полином кој иа целобројни корени му соодветствува единствен полином кој нема реални корени. Освен тоа, полиномот $R(x)=x^2+cx+d$, каде $c$ е парен, $d$ е непарен и $D<0$ не може да се запише во облик $x^2-nx+mn$. Според тоа, полиномите кои немаат реални корени се повеќе.

112. Најди ги сите полиноми $p(x)$ такви да

$$(x-16)p(2x)=16(x-1)p(x), \tag{1}$$

за секој $x\in\mathbf{R}$.

**Решение.** Нека $p(x)$ е ненулти полином кој ја задоволува равенката (1). Тогаш $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$, каде $a_n\ne 0$ и $\deg p=n$. Имаме,

$$p(2x)=2^na_nx^n+2^{n-1}a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$$

и ако замениме во (1) добиваме $2^na_nx^{n+1}+...=16a_nx^{n+1}+...$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Според тоа, $2^na_n=16a_n$ и како $a_n\ne 0$ од последното раенство следува

$n=4$, т.е. $\deg p=4$. Јасно, $p(2)=0$ и $p(2x)=0$ ако $p(x)=0$, па затоа $0=p(2)=p(4)=p(8)=p(16)$, т.е. 2, 4, 8 и 16 се нули на полиномот $p$. Според тоа,

$$p(x)=c(x-2)(x-4)(x-8)(x-16)\,,\ c\in\mathbf{R}$$

се решенијата на равенката (1).

113. Најди ги сите полиноми $f$ со релани коефициенти такви што за секој $x\in\mathbf{R}$ важи

$$xf(x)f(1-x)+x^3+100\geq 0\,.$$

**Решение.** Јасно, $f\not\equiv 0$. Нека $n=\deg f$, т.е. $f(x)=ax^n+g(x)$, каде $g(x)$ е полином таков што $\deg g\leq n-1$ или $g(x)\equiv 0$. Водечкиот член на полиномот $xf(x)f(1-x)$ е еднаков на $(-1)^n a^2 x^{2n+1}$, т.е. левата страна на даденото неравенство е полином со највисок непарен степен. Затоа $2n+1=3$ и $(-1)^n a^2=-1$. Според тоа, $n=1$ и $a=\pm 1$, што значи дека $f(x)=x+b$ или $f(x)=-x+b$, каде $b\in\mathbf{R}$.

За $f(x)=x+b$ од неравенството добиваме $x^2+(b^2+b)x+100\geq 0$, што е можно ако и само ако $|b^2+b|\leq 20$, што значи $b\in[-5,4]$.

За $f(x)=-x+b$ од неравенството добиваме $x^2+(b^2-b)x+100\geq 0$, што е можно ако и само ако $|b^2-b|\leq 20$, што значи $b\in[-4,5]$.

114. Најди ги сите полиноми

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\,,\ n\geq 2$$

со реални коефициенти, такви што

$$P(x)-P_1(x)P_2(x)...P_{n-1}(x)\,,$$

каде

$$P_1(x)=a_1x+a_0\,,\ P_2(x)=a_2x^2+a_1x+a_0\,,\ P_{n-1}(x)=a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\,,$$

е константен полином.

**Решение.** Бидејќи $P(x)-P_1(x)P_2(x)...P_{n-1}(x)$ е константен полином имаме $\deg P=\deg(P_1P_2...P_{n-1})$. Но, $a_k\neq 0$, за $k=1,2,...,n-1$, па затоа

$$\begin{aligned} n=\deg P&=\deg(P_1P_2...P_{n-1})\\ &=\deg P_1+\deg P_2+...+\deg P_{n-1}\\ &=1+2+...+n-1=\tfrac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

и како $n\geq 2$ имаме $n=3$. Значи, бараните полиноми се од облик

$$P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

и важи

$$P(x)-P_1(x)P_2(x)=k\,,\ k\in\mathbf{R}\,. \tag{1}$$

Од (1) следува

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1a_2 \\ a_2 &= a_1^2 + a_0a_2 \\ a_1 &= 2a_0a_1 \\ a_0 &= a_0^2 + k \end{aligned} \qquad (2)$$

Од (2) имаме $a_1(1-2a_0)=0$ и како $a_1 \neq 0$ добиваме $a_0 = \frac{1}{2}$, што значи $k = \frac{1}{4}$. Нека $a_1 = a \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$. Тогаш $a_2 = a^2 + \frac{1}{2}a_2$ и затоа $a_2 = 2a^2$, па затоа $a_3 = 2a^3$. Конечно,

$$P(x) = 2a^3x^3 + 2a^2x^2 + ax + \tfrac{1}{2},\ a \in \mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

115. Дадени се интервалите $[a,b] \subset (0,1)$ и $[c,d]$. Докажи дека постои полином со целобројни коефициенти таков што $f([a,b]) \subset [c,d]$.

**Решение.** Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $[c,d] \subset (0,1)$. Избираме доволно голем прост број $p$ таков што $(1-a)^p < \frac{d-c}{2}$ и $p > \frac{2}{d-c}$. Освен тоа избираме природен број $k$ таков што $d > \frac{k}{p} > \frac{c+d}{2}$. Сега полиномот $f(x) = \frac{k}{p}(1-(1-x)^p)$ го има саканото својство.

116. За секој природен број $n \geq 2$ да го разгледаме полиномот

$$P_n(x) = \tbinom{n}{2} + \tbinom{n}{5}x + \tbinom{n}{8}x^2 + \ldots + \tbinom{n}{3k+2}x^k,$$

каде $k = [\frac{n-2}{3}]$.

а) Докажи дека $P_{n+3}(x) = 3P_{n+2}(x) - 3P_{n+1}(x) + (x+1)P_n(x)$.

б) Најди ги сите цели броеви $a$ такви што $3^{[\frac{n-1}{2}]}$ е делител на $P_n(a^3)$, за секој $n \geq 3$.

**Решение.** а) Споредувајќи ги коефициентите пред $x^m$, $0 \leq m \leq [\frac{n+1}{3}]$ добиваме дека треба да докажеме дека

$$\tbinom{n+3}{3m+2} = 3\tbinom{n+2}{3m+2} - 3\tbinom{n+1}{3m+2} + \tbinom{n}{3m+2} + \tbinom{n}{3m+1}.$$

Последното равенство следува од добро познатото равенство за биномните коефициенти $\binom{a+1}{b} = \binom{a}{b} + \binom{a}{b-1}$.

б) Нека $a$ го има саканото својство. Тогаш $P_5(a^3) = 10 + a^3$ се дели со 9, т.е. $a \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3)$. Обратно, нека $a \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3)$. Тогаш $a^3 + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 9)$. Бидејќи $P_2(a^3) = 1, P_3(a^3) = 3$ и $P_4(a^3) = 6$, по индукција од а) следува дека $3^{[\frac{n-1}{2}]}$ е делител на $P_n(a^3)$ за секој $n \geq 3$.

Значи, $a \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3)$.

117. Нека $p(x)$ е полином и

$$P_n(x)=\underbrace{p(p(...p}_{n}(x)...)) .$$

Докажи дека полиномот $P_{2003}(x)-2P_{2002}(x)+P_{2001}(x)$ е делив со полиномот $p(x)-x$.

**Решение.** Ќе докажеме дека за секои полиноми $s(x),q(x)$ и $r(x)$ важи $q(x)-r(x)\,|\,s(q(x))-s(r(x))$. Навистина, ако $s(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix^i$ , тогаш

$$s(q(x))-s(r(x))=\sum_{i=1}^{n}a_i(q(x))^i-\sum_{i=1}^{n}a_i(r(x))^i=\sum_{i=1}^{n}a_i((q(x))^i-(r(x))^i)$$

$$=(q(x)-r(x))\sum_{i=1}^{n}(a_i\sum_{k=1}^{i}(q(x))^{i-k}(r(x))^{k-1}).$$

Понатаму, ако земеме $s(x)=P_n(x)$, $q(x)=p(x)$ и $r(x)=x$ добиваме дека за секој $n\in\mathbf{N}_0$ важи $p(x)-x\,|\,P_n(p(x))-P_n(x)=P_{n+1}(x)-P_n(x)$. Конечно, $p(x)-x\,|\,P_{2003}(x)-P_{2002}(x)$ и $p(x)-x\,|\,P_{2002}(x)-P_{2001}(x)$, па затоа $p(x)-x\,|\,P_{2003}(x)-P_{2002}(x)-(P_{2002}(x)-P_{2001}(x))=P_{2003}(x)-2P_{2002}(x)+P_{2001}(x)$.

118. Нека $P(x)$ е полином од $n-$ти степен чии корени се $i-1,i-2,...,i-n$ и нека се $R(x)$ и $S(x)$ полиноми со реални коефициенти такви да

$$P(x)=R(x)+iS(x) .$$

Докажи дека полиномот $R(x)$ има $n$ реални нули.

**Решение.** Ќе докажеме поопшто тврдење:

Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се произволни реални броеви и $R(x)$ и $S(x)$ се реални полиноми такви да

$$P_n(x)=\prod_{j=1}^{n}(x+a_j-i)=R_n(x)+iS_n(x) .$$

Тогаш полиномот $R_n(x)$ има $n$ реални нули $\alpha_{n,1}<\alpha_{n,2}<...<\alpha_{n,n}$. Притоа, за $n\geq 2$ важи

$$\alpha_{n,1}<\alpha_{n-1,1}<\alpha_{n,2}<\alpha_{n-1,2}<...<\alpha_{n-1,n-1}<\alpha_{n,n} . \qquad (1)$$

Последното тврдење ќе го докажеме со индукција по $n$. За $n=1$ имаме $R_1(x)=x+a_1$ и овој полином има еден реален корен $\alpha_{1,1}=-a_1$. За $n=2$ имаме

$$R_2(x)=x^2+(a_1+a_2)x+a_1a_2-1,$$

па како $R_2(-a_1)=-1$ добиваме дека има два реални корени $\alpha_{2,1}$ и $\alpha_{2,2}$ и притоа важи $\alpha_{2,1}<-a_1=\alpha_{1,1}<\alpha_{2,2}$.

Бидејќи

$$P_{n+1}(x)=P_n(x)(x+a_{n+1}-i)\text{, за } n\geq 1$$

следува дека

$$P_{n+1}(x)=(x+a_{n+1})R_n(x)+S_n(x)+i[(x+a_{n+1})S_n(x)-R_n(x)],$$

па за $n\geq 2$ важи

$$R_{n+1}(x)=R_n(x)[(x+a_{n+1})+(x+a_n)]-R_{n-1}(x)[(x+a_n)^2+1].$$

Нека тврдењето е точно за $n\geq 2$, односно $R_{n-1}(x)$ и $R_n(x)$ имаат нули $\{\alpha_{n-1,j}\}_{j=1}^{n-1}$ и $\{\alpha_{n,j}\}_{j=1}^{n}$ за кои важи (1). Следува дека

$$\operatorname{sgn}R_{n+1}(\alpha_{n,j})=-\operatorname{sgn}R_{n-1}(\alpha_{n,j})=(-1)^{n-j+1},\text{ за } 1\leq j\leq n.$$

Исто така

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{sgn}R_{n+1}(x)=1 \text{ и } \lim_{x\to-\infty}\operatorname{sgn}R_{n+1}(x)=(-1)^{n+1},$$

па како полиномот е непрекината функција и прима вредности со различен знак на интервалите $(-\infty,\alpha_{1,n}),(\alpha_{j,n},\alpha_{j+1,n}),1\leq j\leq n-1$ и $(\alpha_{n,n},\infty)$, на секој од овие интервали $R_{n+1}(x)$ има реална нула. Но, полином од $n+1$ степен може да има најмногу $n+1$ нула, па затоа за неговите нули $\alpha_{n+1,1}<\alpha_{n+1,1}<...<\alpha_{n+1,n+1}$ важи

$$\alpha_{n+1,1}<\alpha_{n,1}<\alpha_{n+1,2}<\alpha_{n,2}<...<\alpha_{n+1,n}<\alpha_{n,n}<\alpha_{n+1,n+1},$$

со што тврдењето е докажано.

119. Најди ги сите полиноми $p$ со реални коефициенти за кои важи $p(0)=0$ и

$$f(f(n))+n=4f(n),\text{ за секој } n\in\mathbf{N},$$

каде $f(n)=[p(n)]$.

**Решение.** Ако $\deg p(x)=m>1$ и коефициентот пред $x^m$ е еднаков на $a_m\neq 0$, тогаш постои $M>1$ таков да

$$|p(x)|\geq\tfrac{|a_m x^m|}{2}>M+1,\text{ за } |x|>M.$$

Бидејќи $p(x)\geq[p(x)]>p(x)-1$, добиваме дека за $|x|>M$ важи $|[p(x)]|>M$, па е

$$p([p(x)])>\tfrac{|a_m|}{2}|p(x)|^m\geq\tfrac{|a_m|^{m+1}}{2^{m+1}}|x|^{m^2}.$$

Слично, постои $N>0$ таков да за $|x|>N$ важи

$$|[p(x)]|\leq|p(x)|+1\leq\tfrac{3}{2}|a_m|\cdot|x|^m,$$

па ако е $f(f(n))=4f(n)-n$, добиваме дека за $n>M,N$ важи

$$\tfrac{|a_m|^{m+1}}{2^{m+1}}n^{m^2}-1\leq n+6|a_m|n^m,$$

т.е. важи

$$\begin{aligned}L(n)&=\tfrac{|a_m|^{m+1}}{2^{m+1}}n^{m^2-m}-n^{-m}\\&\leq n^{1-m}+6|a_m|=D(n)\end{aligned},$$

што не е можно бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}L(n)=\infty \text{ и } \lim_{n\to\infty}D(n)=6|a_m|.$$

Според тоа, $\deg p(x)\le 1$, т.е. $p(x)=cx+d$, за некои $c,d\in\mathbf{R}$. Од $p(0)=0$ следува $d=0$, па затоа треба да ги најдеме сите $c\in\mathbf{R}$ за кои важи $[c[cn]]+n=4[cn]$. Следува

$$n+c^2n>4(cn-1) \text{ и } c(cn-1)-1+n<4cn,$$

од каде добиваме

$$1+c^2-\tfrac{c+1}{n}<4c<1+c^2+\tfrac{4}{n},$$

па ако земеме $n\to\infty$ добиваме $c^2+1=4c$, односно $c\in\{2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\}$. За $c=2-\sqrt{3}$ и $n=1$ важи

$$[c[cn]]=0\ne 1=n+4[cn],$$

па затоа $c\ne 2-\sqrt{3}$. Нека $c=2+\sqrt{3}$ и $n\in\mathbf{N}$. Бидејќи $c=4-\frac{1}{c}$ следува дека

$$\begin{aligned}
4[cn]&=4[(4-\tfrac{1}{c})n]=4[4n-\tfrac{n}{c}]=4(4n-[\tfrac{n}{c}]-1) \text{ и}\\
n+[c[cn]]&=[n+c[4n-\tfrac{n}{c}]]=[n+c(4n-[\tfrac{n}{c}]-1)]\\
&=[c(4n-1+\tfrac{n}{c}-[\tfrac{n}{c}])]=[(4-\tfrac{1}{c})(4n-1+\{\tfrac{n}{c}\})]\\
&=[4(4n-1)+4\{\tfrac{n}{c}\}-4\tfrac{n}{c}+\tfrac{1-\{\frac{n}{c}\}}{c})]\\
&=[4(4n-1)-4[\tfrac{n}{c}]+\tfrac{1-\{\frac{n}{c}\}}{c}]\\
&=4(4n-[\tfrac{n}{c}]-1)+[\tfrac{1-\{\frac{n}{c}\}}{c}]=4(4n-[\tfrac{n}{c}]-1)
\end{aligned}$$

па е $[c[cn]]+n=4[cn]$. Според тоа, $p(x)=(2+\sqrt{3})x$ е единствениот полином кој ги исполнува условите на задачата.

120. Најди ги сите полиноми со реални коефициенти, такви да за секој реален број $x$ важи $P(x^2+1)=P(x)^2+1$.

**Решение.** Бидејќи $P(x^2+1)=P(x)^2+1$, за секој $x\in\mathbf{R}$, добиваме дека $P(x^2+1)=P(-x)^2+1$, па затоа $(P(x)+P(-x))(P(x)-P(-x))=0$. Но, $P$ е полином, па од последното равенство следува $P(x)=-P(-x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$ или $P(x)=P(-x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

*i)* Нека $P(x)=-P(-x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$ . Дефинираме низа $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ со $a_0=0$ и $a_{n+1}=a_n^2+1$, за $n\ge 0$. За $x=0$ добиваме $P(a_0)=P(0)=0=a_0$. Ако $P(a_n)=a_n$, за некој $n\ge 0$, тогаш

$$P(a_{n+1})=P(a_n^2+1)=P(a_n)^2+1=a_n^2+1=a_{n+1},$$

па со индукција добиваме дека полиномот $P(x)-x$ има бесконечно многу нули (навистина, $a_{n+1}=a_n^2+1>a_n$, што значи дека низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ строго расте), што значи дека $P(x)=x$. Јасно, овој полином ги задоволува условите на задачата.

*ii)* Нека $P(x)=P(-x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Тогаш

$$P(x) = P_{2n}(x) = b_n x^{2n} + b_{n-1}x^{2n-2} + ... + b_2 x^2 + b_0$$
$$= a_n (x^2 + 1)^n + ... + a_1(x^2 + 1) + a_0.$$

Нека $Q_n(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$. Ако $t = x^2 + 1$, бидејќи $P_{2n}(x)$ ги задоволува условите на задачата, следува дека

$$Q_n(t^2 + 1) = P_{2n}(t) = P_{2n}(x^2 + 1) = P_n(x)^2 + 1 = Q_n(t)^2 + 1, \text{ за секој } t \geq 1,$$

па како $Q_n(t)$ е полином добиваме дека $Q_n(t^2 + 1) = Q_n(t)^2 + 1$, за секој $t \in \mathbf{R}$. Според тоа, ако постои полином со степен $2n$ кој ги задоволува условите на задачата, тогаш постои и таков полином со степен $n$, па продолжувајќи ја постапката добиваме полином со непарен степен кој ги задоволува условите на задачата. Според *i*) единствен таков полином е $P_1(x) = x$.

Според тоа, единствени можни решенија се членовите на низата $\{P_{2^n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, определени со $P_1(x) = x$ и $P_{2^{n+1}}(x) = (P_{2^n}(x))^2 + 1$, за $n \geq 0$. Лесно се проверува дека овие полиноми се решенија на задачата.

121. Татјана замислила ненулти полином $P(x)$, чии коефициенти се од множеството $\mathbf{N}_0$. Даница сака да го определи тој полином. Таа во еден чекот изговара цел број $k$, а Татјана ја соопштува вредноста $P(k)$. Со колку најмалку чекори Даница може да го открие полиномот кој го замислила Татјана?

**Решение.** Даница може да го открие полиномот во два чекори. На пример, во првиот чекор бара од Татјана да и соопшти колку е $P(1)$ (со ова прашање треба да се оцени големината на коефициентитете на полиномот $P(x)$; бидејќи $P(x)$ е полином со коефициенти од $\mathbf{N}_0$, секој коефициент не е поголем од $a$), а потоа да е каже колку е $P(10^a)$, каде $a = P(1) \neq 0$. Нека $b = P(10^a)$. Секој природен број има единствено претставување во систем со основа $10^a$, па како $10^a > a$, коефициентите на полиномот $P(x)$ се “цифрите” во претставувањето на бројот $b$ во системот со основа $10^a$, т.е. коефициентот пред $x^k$ е остатокот при делењето на бројот $[\frac{b}{10^{ak}}]$ со $10^a$, за $0 \leq k \leq \frac{[\log_{10} b]}{a}$.

122. Да се определат сите полиноми $P(x)$ за кои важи

$$2P(2x^2 - 1) = P^2(x) - 2, \text{ за секој } x \in \mathbf{R}. \qquad (1)$$

**Решение.** За $x = 1$ имаме $P^2(1) - 2P(1) - 2 = 0$, од каде заклучуваме дека $P(1) = 1 + \sqrt{3}$ или $P(1) = 1 - \sqrt{3}$. Нека $P(1) = 1 + \sqrt{3}$. Тогаш $P(x)$ може да се претстави во облик $P(x)=(x-1)Q_1(x)+1+\sqrt{3}$ , при соодветен избор на полиномот $Q_1(x)$ и (1) го добива обликот

$$4(x^2-1)Q_1(2x^2-1)+2+2\sqrt{3}=(x-1)^2Q_1^2(x)+(x-1)(2+2\sqrt{3})Q_1(x)+2+2\sqrt{3}$$

или

$$(x-1)[4(x+1)Q_1(2x^2-1)-(x-1)Q_1^2(x)-(2+2\sqrt{3})Q_1(x)]=0\,.$$

Последното равенство важи за секој $x\in\mathbf{R}$ и значи

$$4(x+1)Q_1(2x^2-1)=(x-1)Q_1^2(x)-(2+2\sqrt{3})Q_1(x)\,.$$

Ако ставиме $x=1$, добиваме $Q_1(1)=0$, т.е. $Q_1(x)=(x-1)Q_2(x)$. За $Q_2(x)$ важи равенството

$$8(x-1)(x+1)^2Q_2(2x^2-1)=(x-1)^3Q_2^2(x)+(2+2\sqrt{3})Q_2(x)(x-1)$$

од каде

$$8(x+1)^2Q_2(2x^2-1)=(x-1)^2Q_2^2(x)+(2+2\sqrt{3})Q_2(x),$$

за секој $x\in\mathbf{R}$. Со индукција се покажува дека $Q_1(x)=(x-1)^nQ_{n+1}(x)$, каде

$$2^{n+2}(x+1)^{n+1}Q_{n+1}(2x^2-1)=(x-1)^{n+1}Q_{n+1}^2(x)+(2+2\sqrt{3})Q_{n+1}(x)\,.$$

Бидејќи $Q_1(x)$ се дели со произволен степен на $x-1$, заклучуваме дека $Q_1(x)$ е нулти полином и значи $P(x)=1+\sqrt{3}$. Во случајот $P(1)=1-\sqrt{3}$ заклучуваме дека $P(x)=1-\sqrt{3}$ .

Директно се проверува дека овие два константни полиноми го задоволуваат условот на задачата.

123. Да се определат сите неконстантни полиноми со реални (комплексни) коефициенти за кои

$$f(x)[f(x^2)-x^2]=f(x^3)\,. \qquad (1)$$

**Решение.** Ќе разгледаме два случаи: $n=1$ и $n\geq 2$, каде $n$ е степенот на полиномот $f(x)$.

Ако $n=1$, тогаш $f(x)=a_1x+a_0$ и со замена во равенката после средувањето добиваме $a_1(a_1-2)x^3+a_0(a_1-1)x^2+a_0a_1x+a_0(a_0-1)=0$ што значи

$$\begin{cases} a_1(a_1-2)=0 \\ a_0(a_1-1)=0 \\ a_0a_1=0 \\ a_0(a_0-1)=0 \end{cases}$$

Од првата равенка следува $a_1=0$ или $a_1=2$. Ако $a_1=0$ тогаш со замена во втората равенка добиваме $a_0=0$, па е $f(x)\equiv 0$, што противречи на условот на задачата. Ако $a_1=2$ тогаш од втората равенка следува $a_0=0$ и за овие вредности се задоволени третата и четвртата равенка. Значи $f(x)=2x$ е решение на равенката (1), во што можеме да се увериме со непосредна проверка.

Ако $n \geq 2$ и $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ....... + a_1x + a_0$, тогаш со замена во (1) и после средувањето добиваме:

$$a_n^2x^{3n} + a_na_{n-1}x^{3n-1} + a_na_{n-1}x^{3n-2} + ..... + a_0^2 = a_nx^{3n} + a_{n-1}x^{3n-3} + a_{n-2}x^{3n-6} + .... + a_0$$

од што следува $a_n^2 = a_n$ т.е. $a_n = 0$ што не е можно или $a_n = 1$. Според тоа ако $f(x)$ го исполнува условот на задачата и степенот на $f(x)$ е $n \geq 2$, тогаш коефициентот пред највисокиот степен е еднаков на 1. Нека

$$f(x) = x^n + a_kx^k + ....... + a_1x + a_0,$$

каде $n \geq 2$ и $k < n$ е најголемиот број со својство $a_k \neq 0$. За секој $x \in \mathbf{R}$ важи

$$(x^n + a_kx^k + ....... + a_1x + a_0)(x^{2n} + a_kx^{2k} + ....... + (a_1 - 1)x^2 + a_0) = x^{3n} + a_kx^{3k} + .... + a_0$$

Ако $k \geq 1$, тогаш левата страна на горното равенство е полином од облик

$$x^{3n} + a_kx^{2n+k} + ...$$

бидејќи од $k < n$ следува $n + 2k < 2n + k$. Ако $k = 0$, тогаш

$$(x^n + a_0)(x^{2n} - x^2 + a_0) = x^{3n} + a_0,$$

од каде

$$a_0x^{2n} - x^{n+2} + a_0x^n - a_0x^2 + a_0^2 - a_0 = 0,$$

за секој $x \in \mathbf{R}$. Последното равенство е можно ако и само ако $n = 2,\ a_0 = 1$,

т.е. $f(x) = x^2 + 1$.

Значи, единствени решенија на задачата се $f(x) = x^2 + 1$ и $f(x) = 2x$.

124. Да се најдат сите полиноми со две променливи $P(x, y)$ за кои важи

$$P(a,b)P(c,d) = P(ac + bd, ad + bc),\ \text{за секои}\ a,b,c,d \in \mathbf{R}.$$

**Решение.** Ќе го докажеме следното тврдење:

Ако $f(x, y)$ е полином со две променливи и $f(x, x) = 0$ за секој $x$, тогаш $f(x, y) = (x - y)g(x, y)$, каде $g(x, y)$ е полином со две променливи.

Да го запишеме $f(x, y)$ во обликот

$$f(x, y) = a_0(y)x^n + a_1(y)x^{n-1} + ........ + a_n(y)$$

каде $a_i(y),\ i = 1,2,....,n$ се полиноми од $y$ и да ги формираме полиномите

$$b_0(y) = a_0(y)$$
$$b_1(y) = yb_0(y) + a_1(y)$$
$$....................................$$
$$b_{n-1}(y) = yb_{n-2}(y) + a_{n-1}(y)$$

Да го помножиме првото од горенаведените равенства со $y^n$, второто со $y^{n-1}$ и.т.н. последното со $y$. Сега да ги собереме равенствата и да ги извршиме соодветните скратувања. Добиваме

$$yb_{n-1}(y) = a_0(y)y^n + a_1(y)y^{n-1} + ... + ya_{n-1}(y) = f(y, y) - a_n(y).$$

Од условот следува дека $yb_{n-1}(y) = -a_n(y)$. Нека понатаму

$$g(x,y)=b_0(y)x^{n-1}+b_1(y)x^{n-2}+...+b_{n-1}(y)\,.$$

Тогаш,

$$(x-y)g(x,y)=b_0(y)+[b_1(y)-yb_0(y)]x^{n-1}+...+[b_{n-1}(y)-yb_{n-2}(y)]x-yb_{n-1}(y)$$
$$=f(x,y).$$

Аналогно се докажува тврдењето : Ако $f(x,y)$ е полином со две променливи и $f(x,-x)=0$ за секој $x$, тогаш $f(x,y)=(x+y)g(x,y)$ каде $g(x,y)$ е полином со две променливи.

Сега да преминеме кон решавање на задачата. Од условот на задачата следува дека $P(x,0)P(y,0)=P(xy,0),$ за секои $x,y\in\mathbf{R}$. Ставаме $Q(x)=P(x,0)$. Тогаш, полиномот $Q(x)$ го задоволува мултипликативното својство $Q(x)Q(y)=Q(x,y),$ за секои $x,y\in\mathbf{R}$.

При $y=0$ добиваме $Q(x)Q(0)=Q(0),$ за секој $x\in\mathbf{R}$ . Можни се два случаи:

*i)* $Q(x)$ е идентички еднаков на нула

*ii)* $Q(x)$ не е идентички еднаков на нула

Во случајот *i*) од условот на задачата имаме

$$0=Q(t)P(x,y)=P(t,0)P(x,y)=P(tx,ty),\ \text{за секои}\ t,x,y\in\mathbf{R}\,,$$

т.е. $P(tx,ty)=0$ и значи $P(x,y)=0,$ за секои $x,y\in\mathbf{R}$ (доволно е да се земе $t=1$)

Во случајот *ii*) ако $Q(0)\neq 0$, од горниот услов следува дека $Q(x)=1,$ за секој $x\in\mathbf{R}$, т.е. $Q(x)=x^0,$ за секој $x\in\mathbf{R}$. Ако $Q(0)=0$, тогаш $Q(x)=x^pS(x)$ каде $S(x)$ е полином со една променлива, $S(0)\neq 0$ и $p$ е природен број. Но, од равенствата

$$x^pS(x)y^pS(y)=Q(x)Q(y)=Q(xy)=(xy)^p\,S(xy)$$

заклучуваме дека $S(x)$ исто така го задоволува мултипликативното својство и како $S(0)\neq 0$ добиваме $S(x)=1,$ за секој $x\in\mathbf{R}$, т.е. $Q(x)=x^p$ . Конечно во случајот *ii*) имаме $Q(x)=x^p$ каде $p$ е цел ненегативен број.

Сега,

$$P(x,y)P(1,1)=P(x+y,x+y)=P(x+y,0)P(1,1)$$
$$=Q(x+y)P(1,1)=(x+y)^p\,P(1,1)$$

и

$$P(x,y)P(1,-1)=P(x-y,y-x)=P(x-y,0)P(1,-1)$$
$$=Q(x-y)P(1,-1)=(x-y)^p\,P(1,-1).$$

Ако $P(1,1)\neq 0$ и $P(1,-1)=0$, тогаш $P(x,y)=(x+y)^p,\ x,y\in\mathbf{R}$. Ако $P(1,1)=0$ и $P(1,-1)\neq 0$, тогаш $P(x,y)=(x-y)^p,\ x,y\in\mathbf{R}$. Ако $P(1,1)\neq 0$ и $P(1,-1)\neq 0$, тогаш $P(x,y)=(x+y)^p=(x-y)^p,\ x,y\in\mathbf{R}$ што е можно ако и само ако $p=0$, т.е. $P(x,y)=1,\ x,y\in\mathbb{R}$. Ако $P(1,1)=P(1,-1)=0$, тогаш

$$0=P(x,y)P(1,1)=P(x+y,x+y)\ \text{и}\ 0=P(x,y)P(1,-1)=P(x-y,y-x)\,.$$

Со помош на претходно докажаните тврдења добиваме дека

$$P(x,y)=(x+y)^m(x-y)^n K(x,y)$$

каде $K(x,y)$ е полином со две променливи за кој важи $K(1,1)\neq 0$ и $K(1,-1)\neq 0$. Бидејќи $P(1,1)=P)(1,-1)=0$ заклучуваме дека $m$ и $n$ се позитивни. Од условот на задачата имаме

$$\begin{aligned}&(a+b)^m(a-b)^n K(a,b)(c+d)^m(c-d)^n K(c,d)=P(a,b)P(c,d)\\&=P(ac+bd,ad+bc)\\&=(ac+bd+ad+bc)^m(ac+bd-ad-bc)^n K(ac+bd,ad+bc).\end{aligned}$$

Оттука $K(a,b)K(c,d)=K(ac+bd,ad+bc)$, т.е. $K(x,y)$ го задоволува истиот услов како и $P(x,y)$. Ако ја повториме постапката од $K(1,1)\neq 0$ и $K(1,-1)\neq 0$ заклучуваме дека $K(x,y)=1$ за секои $x,y\in\mathbf{R}$. Значи,

$$P(x,y)=(x+y)^m(x-y)^n\ ,$$

каде $m$ и $n$ се позитивни цели броеви.

Конечно, или $P(x,y)\equiv 0$ или $P(x,y)=(x+y)^m(x-y)^n$ за произволни цели ненегативни броеви $m$ и $n$.

125. Нека полиномот $P(x)$ е дефиниран со

$$P(x)\equiv a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+.......+a_{2n}x^{2n}=(1\cdot x+2x^2+.......+nx^n)^2$$

Докажи дека

$$a_{n+1}+a_{n+2}+.......+a_{2n}=\frac{n(n+1)(5n^2+5n+2)}{24}.$$

**Решение.** Ќе ги користиме познатите равенства

$$S_1=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2=1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3=1^3+2^3+........+n^3=[\tfrac{n(n+1)}{2}]^2=S_1^2$$

каде $n=1,2,3,...$ имаме

$$P(1)=a_0+a_1+........+a_{2n}=(1+2+......+n)^2=S_1^2.$$

Нека $k=0,1,2,...$ е фиксирано. Од принципот на сравнување на коефициентите следува дека

$$\begin{aligned}a_k&=\sum_{i+j=k} ij=\sum_{i=0}^{k} i(k-i)=k\sum_{i=0}^{k} i-\sum_{i=0}^{k} i^2\ .\\&=k\frac{k(k+1)}{2}-\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{1}{6}(k^3-k)\end{aligned}$$

Значи

$$\begin{aligned}a_0+a_1+...+a_n&=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n}(k^3-k)=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n}k^3-\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n}k\ ,\\&=\frac{1}{6}S_3-\frac{1}{6}S_1=\frac{1}{6}(S_1^2-S_1)\end{aligned}$$

па бараниот збир е

$$a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{2n}=\sum_{i=0}^{2n}a_i-\sum_{i=0}^{n}a_i=S_1^2-\tfrac{1}{6}(S_1^2-S_1)$$
$$=\tfrac{5}{6}S_1^2+\tfrac{1}{6}S_1=\tfrac{n(n+1)(5n^2+5n+2)}{24}.$$

126. Нека

$$\overline{a_na_{n-1}........a_1a_0}=10^na_n+10^{n-1}a_{n-1}+.......+10a_1+a_0$$

е десетичен запис за прост број каде $n>1$ и $a_n>1$ . Да се докаже дека полиномот

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.........+a_1x+a_0$$

е неразложлив, т.е. не може да се претстави како производ на два полиноми со позитивни степени и цели коефициенти.

**Решение.** Ќе докажеме дека ако $x_0$ е корен (може и комплексен) на $P(x)=0$ тогаш $|x_0|<9$. Да допуштиме дека $|x_0|\geq 9$. Тогаш

$$|P(x_0)|=|a_nx_0^n+...+a_0|\geq|a_nx_0^n|-|a_{n-1}x_0^{n-1}+...+a_0|$$
$$\geq|a_nx_0^n|-|a_{n-1}x_0^{n-1}|-...-|a_0|\geq a_n|x_0|^n-9(|x_0|^{n-1}+...+1).$$

Од друга страна $a_n\geq 2$ и затоа

$$|P(x_0)|\geq 2|x_0|^n-9(|x_0|^{n-1}+...+1)\,.$$

Понатаму

$$2|x_0|^n-9(|x_0|^{n-1}+...+1)=2|x_0|^n-9\tfrac{|x_0|^n-1}{|x_0|-1}=\tfrac{2|x_0|^{n+1}-11|x_0|^n+9}{|x_0|-1}$$
$$=\tfrac{|x_0|^n(2|x_0|-11)+2}{|x_0|-1}>0.$$

Значи, добивме $|P(x_0)|>0$, што противречи на $P(x_0)=0$

Нека сега $P(x)=Q(x)R(x)$, каде $Q(x)$ и $R(x)$ се полиноми со позитивни степени и цели коефициенти. Според условот $P(10)$ е прост број, па затоа $Q(10)R(10)$ е прост број што е можно ако и само ако $Q(10)=1$ или $R(10)=1$. Ќе докажеме дека $Q(10),R(10)>1$.

Нека $Q(x)=b(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_m)$, каде $x_1,x_2,...,x_m$ се корените на равенката $Q(x)=0$. Но корените на равенката $Q(x)=0$ се корени и на равенката $P(x)=0$. Од првиот дел на доказот имаме $|x_k|<9$, за $k=1,2,...,m$, па затоа

$$|10-x_k|\geq 10-|x_k|>10-9=1,\text{ т.е. } |10-x_k|>1 \text{ за } k=1,2,....,m.$$

Тогаш

$$Q(10)=|b|\cdot|10-x_1|\cdot|10-x_2|\cdot...\cdot|10-x_m|>1.$$

Аналогно се докажува дека $|R(10)|>1$. Значи, разложувањето $P(x)=Q(x)R(x)$ не е можно.

127. За полиномот

$$P(x)=x^n-a_{n-1}x^{n-1}-...-a_1x-a_0,$$

важи $a_i \geq 0, i = 0,1,2,...,n-1$ и $\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i > 0$. Докажи дека $P(x)$ има единствена позитивна нула.

**Решение.** Од $0 < x_1 < x_2$ следува

$$0 < \frac{1}{x_1^k} < \frac{1}{x_2^k}, \text{ за } k = 1,2,...,n-1$$

и како $a_i \geq 0, i = 0,1,2,...,n-1$ добиваме

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{x_1^k} < \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{x_2^k},$$

што значи дека функцијата $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{x^k}$ строго монотоно опаѓа на интервалот $(0,+\infty)$. Но,

$$\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty, \ \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 \text{ и } g(x)$$

е непрекината на интервалот $(0,+\infty)$, па затоа постои $c$ таков да $g(c) = 1$. Ќе докажеме дека $c$ е норен на полиномот $P(x)$. Имаме

$$P(c) = c^n - a_{n-1}c^{n-1} - ... - a_1c - a_0 = c^n(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{c^k}) = c^n[1 - g(c)] = 0.$$

Ако $b$ е друг позитивен корен на полиномот $P(x)$, тогаш

$$0 = P(b) = b^n - a_{n-1}b^{n-1} - ... - a_1b - a_0 = b^n(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{b^k}) = b^n[1 - g(b)],$$

и како $b^n \neq 0$ од последното равенство следува $g(b) = 1$, што противречи на фактот дека функцијата $g(x)$ строго монотоно опаѓа на интервалот $(0,+\infty)$.

128. За полиномот од три променливи $P$ ќе велиме дека е цикличен, ако $P(x,y,z) = P(y,z,x)$. Да се докаже, дека постојат циклични полиноми од три променливи $P_1, P_2, P_3$ и $P_4$, такви што за секој цикличен полином од три променливи $P$ постои полином од четири променливи $Q$ таков што

$$P(x,y,z) = Q(P_1(x,y,z), P_2(x,y,z), P_3(x,y,z), P_4(x,y,z)).$$

**Решение.** Нека

$$S(x,y,z) = P(x,y,z) + P(y,x,z) \text{ и } T(x,y,z) = P(x,y,z) - P(y,x,z).$$

Лесно се проверува, дека полиномите $S$ и $T$ се соодветно симетричен и антисиметричен. Бидејќи $T(x,x,z) = 0$, полиномът $T$ се дели со $x - y$. Аналогно се покажува дека $T$ се дели со $y - z$ и со $z - x$, т.е.

$$T(x,y,z) = (x-y)(y-z)(z-x)R(x,y,z),$$

при што од ова равенство и од антисиметричността на $T$ следва, дека $R$ е симетричен полином.

Добивме

$$P = \frac{S+T}{2} = \frac{Q(x,y,z)}{2} + \frac{(x-y)(y-z)(z-x)R(x,y,z)}{2}.$$

Бидејќи секој симетричен полином од три променливи се претставува како полином од елементарни симетрични полиноми (кои се и циклични): $P_1 = x+y+z,\ P_2 = xy+yz+zx$ и $P_3 = xyz$, останува да земеме

$$P_4 = (x-y)(y-z)(z-x),$$

кој исто така е цикличен.

129. Полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ се од десетти степен и имат водечки коефициенти еднакви на 1. Равенката $P(x) = Q(x)$ нема реални корени. Да се докаже, дека равенката $P(x+1) = Q(x-1)$ има барем еден реален корен.

**Решение.** Нека $P(x) = x^{10} + p_9 x^9 + ... + p_0$ и $Q(x) = x^{10} + q_9 x^9 + ... + q_0$. Тогаш полиномот $P(x) - Q(x) = (p_9 - q_9)x^9 + ... + (p_0 - q_0)$ нема реални корени, но ако $p_9 \neq q_9$, тогаш степенот на овој полином е непарен и значи тој има барем еден реален корен. Значи, $p_9 = q_9$. Да забележиме, дека

$$P(x+1) = x^{10} + (p_9 + 10)x^9 + ... \text{ и } Q(x-1) = x^{10} + (q_9 - 10)x^9 + ...,$$

од каде заклучаваме, дека полиномот $P(x+1) - Q(x-1) = 20x^9 + ...$ е од деветти степен, т.е. има барем еден реален корен.

130. Најди ги сите полиноми $p(x)$ со водечки коефициент 1, такви што

1) $p(x)$ не е константа и сите корени му се реални и различни;

2) ако $a$ и $b$ се корени на $p(x)$, тогаш $a+b+ab$ е исто така корен на $p(x)$.

**Решение.** Ако $a$ е корен на $p(x)$, тогаш од 2) следува дека $a^2 + 2a$ исто така е корен на $p(x)$.

1. Ако $a > 0$, то $0 < a < a^2 + 2a < (a^2 + 2a)^2 + 2(a^2 + 2a) < ...$ и добиваме бесконечна растечка низа од корени на $p(x)$.

2. Ако $-1 < a < 0$, тогаш $0 > a > a^2 + 2a > -1$. Бидејќи $f(x) = x^2 + 2x$ е строго рестечка во интервалот $(-1,0)$, одново добиваме бесконечна опаѓачка низа од корени на $p(x)$, која припаѓа на интервалот $(-1,0)$.

3. Ако $-2 < a < -1$, тогаш $-1 < f(a) < 0$ и од претходните случаи добиваме бесконечно многу корени на полиномот $p(x)$.

4. Ако $a < -2$, тогаш $f(a) > 0$ и повторно го имаме првиот случај.

Од претходните разгледувања следува, дека ако $a \notin \{-2,-1,0\}$, тогаш полиномот $p(x)$ има бесконечно многу корени, што не е можно. Со директна проверка се добива, дека за $a \in \{-2,-1,0\}$ можните полиноми се:

$$x,\ x+1,\ x(x+1),\ x(x+2),\ x(x+1)(x+2).$$

131. Даден е полином со реални коефициенти

$$p(x) = x^{2013} + a_{2012}x^{2012} + ... + a_1 x + a_0.$$

Нека корените на $p(x)$ се $-b_{1006},-b_{1005},...,-b_1,0,b_1,...,b_{1005},b_{1006}$, каде $b_1,...,b_{1005},b_{1006}$ се позитивни реални броеви со производ 1. Да се докаже, дека $a_3a_{2011} \geq 1012036$.

**Решение.** Од условот следува, дека $p(x)=x(x^2-b_1^2)...(x^2-b_{2006}^2)$, од каде добиваме

$$x^{2012}+a_{2012}x^{2011}+...+a_1=(x^2-b_1^2)...(x^2-b_{2006}^2).$$

Полиномот на десната страна на горното равенство е полином од $x^2$, што значи, дека $a_2=a_4=...=a_{2012}=0$, т.е.

$$x^{2012}+a_{2011}x^{2010}+...+a_2x^2+a_1=(x^2-b_1^2)...(x^2-b_{2006}^2).$$

Од Виетовите формули следува $\sum\limits_{i=1}^{1006} b_i^2=-a_{2011}$ и

$$\sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_{1005}\leq 1006} b_{i_1}^2b_{i_2}^2...b_{i_{1005}}^2=(-1)^{1005}a_3=-a_3.$$

Тогаш

$$a_3a_{2011}=(-\sum_{i=1}^{1006} b_i^2)(-\sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_{1005}\leq 1006} b_{i_1}^2b_{i_2}^2...b_{i_{1005}}^2)=(\sum_{i=1}^{1006} b_i^2)(\sum_{i=1}^{1006}\frac{1}{b_i^2})(\prod_{i=1}^{1006} b_i^2)$$

$$=(\sum_{i=1}^{1006} b_i^2)(\sum_{i=1}^{1006}\frac{1}{b_i^2})\geq 1006^2=1012036,$$

каде последното неравенство следува од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц.

132. Нека $a$ е реален број и $P(x)$ е неконстантен полином со реални коефициенти таков, што $P(x^2+a)=(P(x))^2$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Докажи дека $a=0$.

**Решение.** Од $P^2(-x)=P^2(x)$ следува дека $P$ е или парна или непарна функција.

Ако $P$ е парна функција, тогаш $P(x)=Q(x^2)$. Затоа $Q((x^2+a)^2)=Q^2(x^2)$, од што следува $Q((x+a)^2)=Q^2(x)$, за секој $x$. Оттука $Q(x^2)=Q^2(x-a)$, т.е. полиномот $Q(x-a)$ исто така го исполнува условот на задачата. Продолжувајќи ја постапката, ќе дојдеме до полином со непарен степе, кој го задоволува дадениот услов. Јасно, тој не може да е парна функција.

Останува да го разгледаме случајот кога $P$ е непарна функција. Тогаш $P(x)=xR(x^2)$ и следствено $(x^2+a)R((x^2+a)^2)=x^2R^2(x^2)$. Оттука следува $(x+a)R((x+a)^2)=xR^2(x)$, т.е. $P(x)=(x-a)R^2(x-a)$, за секој $x$. Нека $R(x-a)=x^kS(x)$, каде $S(0)\neq 0$. Лесно се гледа дека

$$(x-a)R^2(x-a)=x^{2k+1}T(x)-aS(0)x^{2k}.$$

Бидејќи $P$ е непарна функција следува дека $a=0$.

133. Нека $Q(x)$ е квадратен полином таков што функцијата $P(x)=x^2Q(x)$ е монотоно растечка на интервалот $(0,+\infty)$. Докажи дека

$$P(x)+P(y)+P(z)>0 \text{ за } x+y+z>0 \text{ и } xyz>0 .$$

**Решение.** Ако $x,y,z>0$, неравенството е очигледно, бидејќи $P(t)>P(0)=0$, кога $t>0$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x,y<0$ и $z>0$. Тогаш $P(z)>P(-x-y)$ и доволно е да докажеме дека

$$P(x+y)+P(-x)+P(-y)>0 \text{, за секои } x,y>0 .$$

Нека $Q(x)=ax^2+bx+c$. Бидејќи $P(x)$ е растечка функција на интервалот $(0,+\infty)$, лесно се гледа дека $a>0$ и $c\geq 0$ (докажи!). Од

$$P(x+y)+P(-x)+P(-y)=2a(x^4+y^4-x^2y^2)+2c(x^2+y^2)$$
$$+xy[4a(x+y)^2+3b(x+y)+2c]$$

и бидејќи $x^4+y^4-x^2y^2>0$, $x^2+y^2>0$ и $xy>0$, доволно е да докажеме дека

$$4a(x+y)^2+3b(x+y)+2c>0 \text{, за } x,y>0 .$$

Последното следува од фактот дека функцијата е моното растечка на $(0,+\infty)$, што значи дека

$$4a(x+y)^3+3b(x+y)^2+2c(x+y)=P'(x+y)>0 ,$$

и фактот дека $x+y>0$.

134. Определи ги сите полиноми $f(x)$ со целобројни коефициенти, кои го имаат следново својство: постои константа $c>0$ таква што за секој цел број $n>c$, бројот $f(n)$ е различен од нула и е делител на $n!$.

**Решение.** Јасно е дека целите ненулти константи се решенија на задачата. Полиномот $f(x)$ да го претставиме во видот

$$f(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}...(x-a_k)^{\alpha_k}g(x) ,$$

каде $0\leq a_1<a_2<...<a_k$ се ненегативни цели броеви, $\alpha_i$ се природни броеви, а полиномот $g(x)$ нема ненегативни целобројни корени. Да претпоставиме дека $g(x)$ не е константен полином. Бидејќи простите делители на вредностите на $g(x)$ во целите броеви се бесконечно многу (лема на Шур), можеме да избереме доволно голем прост број $p$, за кој постои $N$ таков што $p$ е делител на $g(N)$ и нека $r$ е остатокот при делењето на $N$ со $p$. Можеме да сметаме дека $r\neq a_i, i=1,2,...,k$ и $r>c$.

Јасно е дека $p$ е делител на $g(r)$, од каде следува дека $p$ е делител и на $f(r)$, т.е. $p$ е делител на $r!$ што противречи на $0<r<p$. Значи, $g(x)$ е константен полином, т.е.

$$f(x)=c(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}...(x-a_k)^{\alpha_k} ,$$

каде $c$ е константа. Ако претпоставиме дека за некој $i$ важи $\alpha_i \geq 2$, тогаш ставајќи $x = p + a_i$ за доволно голем прост број $p$, ќе добиеме дека $p^2$ е делител на $(p+a_i)!$, што при $a_i < p$ не е можно. Значи,

$$f(x) = c(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_k) .$$

Лесно се покажува дека полиномите од овој вид ги задоволуваат условите на задачата.

135. Докажи дека секој полином од трет степен со реални коефициенти може да се претстави како збир на кубови на три неконстантни полиноми со реални коефициенти.

**Решение.** Секој полином од трет степен има барем една реална нула. Ако таа нула е трикратна, тогаш тврдењето е очигледно. Нека $P$ има еднократна реална нула $\alpha$. Тогаш

$$P(x+\alpha) = a(x^3 + 3bx^2 + 3cx) ,\ ac \neq 0$$

и треба тврдењето да го докажеме за полиномот $x^3 + 3bx^2 + 3cx$, за што е доволно да најдеме реални броеви $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ такви што

$$x^3 + 3bx^2 + 3cx = \lambda_1(x+\alpha_1)^3 + \lambda_2(x+\alpha_2)^3 + \lambda_3 x^3 .$$

Од последната равенка следува $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$, каде $\lambda_1, \lambda_2$ се решенија на преопределениот систем линеарни равенки

$$\begin{cases} \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 = b \\ \alpha_1^2\lambda_1 + \alpha_2^2\lambda_2 = c \\ \alpha_1^3\lambda_1 + \alpha_2^3\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

За $0 \neq \alpha_1 \neq \alpha_2 \neq 0$ системот составен од првите две равенки има единствено решение. Ако првата равенка ја помножиме со $\alpha_1\alpha_2$ и ја извадиме втората равенка помножена со $\alpha_1 + \alpha_2$, ќе ја добиеме третата равенка при услов дека важи $b\alpha_1\alpha_2 = c(\alpha_1 + \alpha_2)$. Бидејќи $c \neq 0$, можеме да најдеме различни ненулти реални броеви $\beta_1$ и $\beta_2$ такви што $\beta_1 + \beta_2 = \frac{b}{c}$. Останува да ставиме $\alpha_1 = \frac{1}{\beta_1}$ и $\alpha_2 = \frac{1}{\beta_2}$.

136. Дадена е низата полиноми $f_1, f_2, f_3, ...$ за која важи

$$f_1(x) = x^3 - 3x \text{ и } f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)) \text{, за } n \geq 1.$$

Најди го бројот на реалните корени на равенката:

а) $f_{2013}(x) = 2$, б) $f_{2013}(x) = 3$.

**Решение.** Ако $x \in [-2, 2]$, тогаш $x$ еднозначо може да се запише во видот $x = 2\cos\alpha$, каде $\alpha \in [0, \pi]$. Ако $x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$, тогаш постои единствен реален број $t < -1$ или $t > 1$, таков што $x = t + \frac{1}{t}$. Со индукција лесно се докажува дека во првиот случај

$$f_n(x) = 2\cos 3^n \alpha ,$$

а во вториот случај

$$f_n(x) = t^{3^n} + \frac{1}{t^{3^n}} .$$

а) Јасно е дека корените на равенката $f_{2013}(x) = 2$ се во интервалот $[-2,2]$. Имаме

$$2\cos 3^{2013}\alpha = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{2013}\alpha = 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{2k\pi}{3^{2013}} .$$

Од условот $\alpha \in [0,\pi]$ следува $k = 0,1,2,....,\frac{3^{2013}-1}{2}$, што значи дека во случајов имаме $\frac{3^{2013}+1}{2}$ корени.

б) Јасно е дека $x \in (2,+\infty)$. За $x = t + \frac{1}{t}$, $t > 1$ имаме $t^{3^n} + \frac{1}{t^{3^n}} = 3$. Равенката $z + \frac{1}{z} = 3$ има единствен корен кој е поголем од 1 и тој корен е $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Значи, равенката $f_{2013}(x) = 3$ има единствен корен $x = \sqrt[3^{2013}]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3^{2013}]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ .

137. Определи ги реалните броеви $p,q$ и $r$, ако $p,-\frac{q}{2}$ и $r$ формираат аритметичка прогресија и равенката $x^3 + px^2 + qx + r - 1 = 0$ има три корени, кои се природни броеви и формираат аритметичка прогресија со разлика 2013.

**Решение.** Од условот $p + r = -q$ следува дека дадената равенка има корен $x_1 = 1$. Тогаш равенката го има видот

$$(x-1)(x^2 + (p+1)x + p + q + 1) = 0 ,$$

при што корените на квадратната равенка $x^2 + (p+1)x + p + q + 1 = 0$ се $x = 2014$ и $x_2 = 4027$. Од Виетовите формули добиваме

$p = -x_1 - x_2 - 1 = -6042$ и

$q = x_1x_2 - p - 1 = x_1x_2 + x_1 + x_2 = (x_1+1)(x_2+1) - 1 = 2015 \cdot 4028 - 1 = 8116419$ .

Јасно, $r = -q - p = 6042 - 8116419 = 8110377$.

138. Определи ги реалните параметри $a$ и $b$, за кои полиномот

$$f(x) = x^3 - bx^2 + (3-a)x + 3b$$

е таков што $f(a-1) = f(a+1)$ и при делење со полиномот $x - b$ се добива остатаок $-2a$.

**Решение.** Условот $f(a-1) = f(a+1)$ е еквивалентен на условот $2ab = a^2 + 4$, од $f(b) = -2a$ добиваме $a + 3b = a^2 b$ . Од овие две равенства следува $b = \frac{a^2+4}{2a} = \frac{a}{a^2-3}$. Јасно, $a \neq 0$ и $a^2 \neq 3$. Од последната равенка добиваме $a^4 - a^2 - 12 = 0$, па затоа $a = \pm 2$. Сега, $b = \pm 2$ и решение на задачата е

$$(a,b)\in\{(2,2),(-2,-2)\}.$$

139. Нека $P$ е полином од 2013 степен со реални коефициенти таков што за произволни реални броеви $x,y$ и $z$ за кои важи $P(x)+P(y)+P(z)=0$, следува дека $P(x^3)+P(y^3)+P(z^3)=3P(x)P(y)P(z)$. Докажи дека

а) $P(x)\neq 0$ за $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,0,1\}$,

б) $P$ е непарна функција.

**Решение.** а) Нека $P(a)=0$ , за некој $a\in\mathbf{R}$. Тогаш $3P(a^3)=3P^3(a)=0$ и по индукција следува дека $P(a^{3^n})=0$ за секој $n\in\mathbf{N}$. Бидејќи $P$ има најмногу 2013 нули, добиваме дека $a=0$ или $|a|=1$, т.е. $a=\pm1$.

б) Бидејќи $P$ е со непарен степен, важи $P(a)=0$ за некој $a\in\mathbf{R}$. Од а) следува дека $a\in\{-1,0,1\}$, па затоа $a^3=a$. За секој $x\in\mathbf{R}$ можеме да избереме $y\in\mathbf{R}$ таков да $P(x)=-P(y)$. Ако земеме $z=a$, тогаш од условот следува дека $P(x^3)=-P(y^3)$. Повторно со индукција добиваме $P(x^{3^n})=-P(y^{3^n})$. Кога $x>1$ имаме $\lim\limits_{n\to\infty} x^{3^n}=\infty$. Во случајов имаме $|y|>1$. Бидејќи $\lim\limits_{|t|\to\infty}\frac{P(t)}{t^3}\neq 0$, добиваме $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x}{y})^{3^n}=-1$. Значи, $x=-y$, т.е. $P(x)=x^{2n-1}$ или $P(x)=-x^{2n-1}$.

140. Полиномот $f(x)$ ги има следниве својства:

1) коефициентите на $f(x)$ се природни броеви,

2) равенката $f(x)=0$ има барем еден рационален корен, и

3) ако $k=\deg f$, тогаш вредностите на $f(x)$ во $k+1$ различни природни броеви се прости броеви.

Докажи дека $f(x)=ax+b$ за некои два заемно прости природни броја $a$ и $b$ .

**Решение.** Бидејќи коефициентите на $f(x)$ се природни броеви, добиваме дека рационалниот корен на $f(x)$ е негативен број. Од 2) следува дека $f(x)=(qx+p)R(x)$, каде без ограничување на општоста можеме да земеме дека $p,q>0$ се природни броеви, а $R(x)$ е полином со целобројни коефициенти таков што $\deg R=k-1$. Нека $x_i, i=1,2,...,k+1$ се такви различни природни броеви што $f(x_i)=r_i$ и $r_i$ се прости броеви. Бидејќи $qx_i+p>1$ е делител на $f(x_i)=r_i$, добиваме дека $qx_i+p=r_i$. Тогаш $f(x_i)-(qx_i+p)=0$ за секој $i=1,2,...,k+1$. Според тоа, $f(x)-qx-p$ е полином од $k-$ ти степен со $k+1$ нула, па затоа $f(x)=qx+p$. Јасно, броевите $q$ и $p$ се заемно прости, бидејќи во спротивно $f(x_i)$ нема да биде прост број.

141. Полиномот $P(x)=x^8+x+1$ претстави го како производ на неразложиви полиноми во $\mathbf{Z}$.

**Решение.** Имаме

$$P(x)=x^8+x+1=x^8-x^2+x^2+x+1=x^2(x^6-1)+x^2+x+1$$
$$=x^2(x^3-1)(x^3+1)+x^2+x+1=[x^2(x-1)(x^3+1)+1](x^2+x+1).$$

Според тоа, $x^8+x+1$ е производ на полиномите $R(x)=x^2+x+1$ и $Q(x)=x^2(x-1)(x^3+1)+1$, при што полиномот $P(x)$ е неразложлив во $\mathbf{Z}$. Нека претпоставиме дека полиномот $Q(x)$ е разложлив во $\mathbf{Z}$. Бидејќи полиномот $P(x)$ нема реални корени, добивае дека полином од видот $x^2+ax\pm1$ е делител на полиномот $Q(x)$. Значи, за секој комплексен корен $\alpha$ на полиномот $Q(x)$ бројот $\frac{1}{\alpha}$ или $-\frac{1}{\alpha}$ е корен на $Q(x)$. Во првиот случај имаме

$$0=Q(\alpha)-\alpha^6Q(\tfrac{1}{\alpha})=\alpha(\alpha-1)(\alpha^3+1),$$

од каде следува дека

$$Q(\alpha)=\alpha^2(\alpha-1)(\alpha^3+1)+1=1,$$

што е противречност. Во вториот случај имаме

$$0=Q(\alpha)-\alpha^6Q(-\tfrac{1}{\alpha})=\alpha(1-\alpha^2)(\alpha^2+\alpha-1).$$

Но, $\alpha\neq0,\pm1$, па затоа од последното равенство следува $\alpha^2+\alpha-1=0$. Тогаш

$$0=Q(\alpha)=(\alpha^4-\alpha^3+\alpha^2-\alpha+2)(\alpha^2+\alpha-1)-4\alpha+3=3-4\alpha,$$

што одново е противречност. Според тоа, полиномот $Q(x)$ е неразложлив во $\mathbf{Z}$, со што задачата е решена.

142. Определи ги сите полиноми $f$ од видот

$$f(x)=x^{2n}+a_1x^{2n-1}+...+a_{n-1}x^{n+1}+a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+1,$$

за кои $|a_n|\leq2$ и кои имаат $2n$ реални нули.

**Решение.** Бидејќи за полиномот важи $f(x)=x^{2n}f(\frac{1}{x})$, добиваме дека ако $a$ е нула на $f(x)$, тогаш и $\frac{1}{a}$ е нула на $f(x)$. Според тоа, $f(x)=g(x)h(x)$ каде

$$g(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) \text{ и } h(x)=(x-\tfrac{1}{x_1})(x-\tfrac{1}{x_2})...(x-\tfrac{1}{x_n}).$$

Тогаш од Виетовите формули следува

$$g(x)=x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n \text{ и } h(x)=x^n+\tfrac{b_{n-1}}{b_n}x^{n-1}+...+\tfrac{1}{b_n}.$$

Имаме

$$|a_n|=|b_n+\tfrac{1}{b_n}+\tfrac{b_1^2+b_2^2+...+b_{n-1}^2}{b_n}|\leq2,$$

од каде следува дека $b_{n-1}=b_{n-2}=...=b_1=0$ и $b_n=\pm1$.

Нека $b_n = -1$. Од полиномите $(x^n - 1)^2$ само $(x-1)^2$ и $(x^2-1)^2$ имаат $2n$ реални корени, бидејќи $x^n - 1$ ја менува монотоноста најмногу во една точка и ја сече апцисата најмногу двапати. Аналогно за $b_n = 1$ единствено решение е $(x+1)^2$.

143. Докажи дека полиномот $x^4 - 1994x^3 + (1993+m)x^2 - 11x + m$, каде $m \in \mathbf{Z}$ има најмногу еден целоброен корен.

**Решение.** Нека претпоставиме дека полиномот има барем два цели корени. Тогаш

$$x^4 - 1994x^3 + (1993+m)x^2 - 11x + m = (x^2 - ax + b)(x^2 - cx + d),$$

каде $a$ и $b$ се цели броеви. Со срамнување на коефициентите добиваме дека

$$a + c = 1994 \qquad (1)$$

$$ac + b + d = 1993 + m \qquad (2)$$

$$ad + bc = 11 \qquad (3)$$

$$bd = m. \qquad (4)$$

Јасно, од (1) следува дека $c$ е цел број, а од (2) следува дека $d$ е цел број. Понатаму, од (1) следува дека $a$ и $c$ се со иста парност, а од (3) следува дека тие не може да се истовремено парни. Според тоа, $a$ и $c$ се непарни и од (3) заклучуваме дека $b$ и $d$ се со различна парност. Од последното и од (4) следува дека $m$ е парен број. Но, сега левата страна на (2) е парна, а десната непарна, што е противречност.

# ЛИТЕРАТУРА

1. Aczél, J.: Lectures on Functional Equations and Their Applications, New York, Birkhäuser, 1966
2. Aczél, J.; Dhombres, J.: Functional Equations Containing Several Variables. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1985
3. Alexanderson, G. L.; Klosinski, L. F.; Larson, L. C.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1938–1964. Mathematical Association of America,Washington, DC, 1985
4. Andreescu, T.; Feng, Z.: USA and International Mathematical Ulympiads 2003, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
5. Arslanagić, Š.; Zejnulahi, F.; Govedarica, V.: Zbirka zadataka sa republičkih takmičenja u Bosni i Hercegovini 1981-1991, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
6. Ašić, M. i dr.: Međunarodne matematičke olimpijade, DMS, Beograd, 1986
7. Ašić, M. i dr.: Republička i savezna takmičenja srednjoškolaca (1970-1983), DMS, Beograd, 1984
8. Boyvalenkov, P.; Kolev, E.; Musharov, O.; Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006, GIL Publishing House, Zalău, 2007
9. Đurković, R.: Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990, DMS, Beograd, 1991
10. Feng, Z.; Zhao, Y.: USA and International Mathematical Ulympiads 2006-2007, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
11. Gleason, A. M.; Greenwood, R. E.; Kelly, L. M.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1965–1984. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984
12. Govedarica, V.: Matematička takmičenja u Republici Srpskoj, ZUNS, Sarajevo, 2007
13. Grozdev, S.; Kolev, E.; Mushkarov, O.; Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002
14. Kadelburg, Z.; Mladenović, P.: Savezna takmičenja iz matematika 1960-1989, DMS, Beograd, 1990
15. Kuczma, M. E.; Mientka, W. E.: Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition, The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994
16. Kuczma, M.; Choczewski, B.; Ger, R.: Iterative Functional Equations. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1990
17. Manfrino, R. B.; Ortega, J. A. G.; Delgado, R. V.: Inequalities, Birkhäuser, Basel – Boston – Berlin, 2000
18. Mitrinović, D. S.; Barnes, E. S.; Marsh, D. C. B.; Radok, J. R. M.: Elementary Inequalities, P. Noordhoff, Groningen, 1964
19. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjoh škola, DMS, Beograd, 1991
20. Nardy, G. H.; Littlewood, J. E.; Pólya, G.: Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1951
21. Small, C. G.: Functional Equations and How to Solve Them, Springer, New York, 2007
22. Vrećica, S.: Konveksna analiza, BS Procesor, Matematički fakultet, Beograd, 1993
23. Xiong, B.; Lee Peng, Y.: Mathematical Olympiad in China – Problems and Solutions, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltgt., Singapore , 2007

24. Арсеновић, М.; Драговић, В.: Функционалне једначине, ДМС, Београд, 1999
25. Бойваленков, П.; Колев, Е.; Мушкаров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
26. Бойваленков, П.; Колев, Е.; Мушкаров, О.; Николов, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-2006, УНИМАТ СМБ, София, 2007
27. Бойваленков, П.; Колев, Е.; Мушкаров, О.; Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
28. Бойваленков, П.; Колев, Е.; Мушкаров, О.; Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
29. Бойваленков, П.; Колев, Е.; Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
30. Бойваленков, П.; Колев, Е.; Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2010, УНИМАТ СМБ, София, 2011
31. Бойваленков, П.; Колев, Е.; Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
32. Бойваленков, П.; Колев, Е.; Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
33. Бойваленков, П.; Колев, Е.; Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2013, УНИМАТ СМБ, София, 2014
34. Бойваленков, П.; Колев, Е.; Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2014, УНИМАТ СМБ, София, 2015
35. Бойваленков, П.; Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
36. Давидов, И. Љ.: Функционални уравнения, Народна Просвета, София, 1977
37. Димовски, Д.; Тренчевски, К.; Малчески, Р.; Јосифовски, Б.: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
38. Ивановски, Н.: Задачи од анализа, Алби, Скопје, 2000
39. Избраные задачи из журнала American Mathematical monthly, Мир, Москва, 1977
40. Јанковић, З.; Каделбург, З.; Младеновић, П.: Међунаодне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1995
41. Кендеров, П.; Табов, Й.: Български олимпиади по математика, Народна просвета, София, 1990
42. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2012 године, ДМ Србије, 2012
43. Кючуков, М.; Недевски, П.: Функционални и диференциални уравнения, Проф. Марин Дринов, София, 1995
44. Лихтарников, Л. М.: Элементарное введение в функциональные уравнения, Лань, Санкт-Петербург, 1997
45. Малчески, А.; Манова – Ераковиќ, В.; Малчески, Р.: Сигмина ризница (конкурсни задачи 1-144), СММ, Скопје, 2011
46. Малчески, А.; Манова – Ераковиќ, В.; Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1006-1200), СММ, Скопје, 2011
47. Малчески, А.; Манова – Ераковиќ, В.; Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 506-1005), СММ, Скопје, 2011
48. Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика '94, СММ, Скопје, 1995
49. Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
50. Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997

51. Малчески, Р.: Елементарно испитување и скицирање графикот на кубната функција, Сигма 26, 1993
52. Малчески, Р.: За рационалните нули на полином од *n*-ти степен со целобројни коефициенти, Сигма 25, 1999
53. Малчески, Р.: Математичка анализа I, Природно-математички факултет, Скопје, 2002
54. Малчески, Р.: Основи на математичка анализа, Уни. Св. Кирил и Методиј, Скопје, 2001
55. Малчески, Р.; Димовски, Д; Малчески, А.; Манова – Ераковиќ, В.: Меѓународни математички олимпијади, СММ, Скопје, 2000
56. Малчески, Р.; Малческа, В.: Математика 3 - калкулус (прв дел), ФОН универзитет, Скопје, 2011
57. Малчески, Р.; Малчески, А.: Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1994
58. Малчески, Р.; Манова – Ераковиќ, В.; Марковски, Ѓ.; Малчески, А.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1-505), СММ, Скопје, 2008
59. Математика и естествознание (сост. С. И. Шварцбург), Просвещение, Москва, 1969
60. Морозова, Е. А.; Петраков, А. С.; Скворцов, В. А.: Международные математические олимпиады, Просвещение, Москва, 1976
61. Страшевич, С.; Боровкин, Е.: Польские математические олимпиады, Мир, Москва, 1978
62. Тренчевски, К.; Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика, Природно – математички факултет, Скопје, 2000
63. Школярски, Д. О.; Ченцов, Н. Н.; Яаглом, И. М.: Избраные задачи и теоремы по елементарной математике, Наука, Москва, 1976
64. Штерјов, З.: Функционални равенки во множеството реални броеви, НУ Гоце Делчев, Штип, 2011