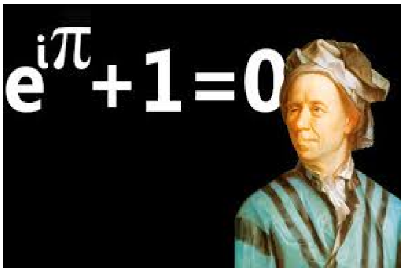
МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 3 (2018), 55 – 66
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-3.html

ПРОСТОР НА КОНФИГУРАЦИИ НА ТОПОЛОШКИ ПРОСТОР И НЕГОВА ПРИМЕНА ВО РОБОТИКАТА

Ерблина Зеќири [1]

1. ТОПОЛОГИЈАТА КАКО МАТЕМАТИЧКА ДИСЦИПЛИНА

Топологијата (грчки τόπος *tópos*-место и λόγος *logos*-наука) како математичка дисциплина се појавила во почетокот на дваесетиот век. Голем број математичари и научници, за раѓање на топологијата го смеатаат времето на познатиот математичар Леонард Ојлер (Leonhard Euler).



Слика 1. Leonhard Euler 1707–1783.

Решението на проблемот на Седумте мостови на Кенигсберг (Seven Bridges of Königsberg) се смета за прва практична примена на топологијата во историјата на математиката. Вреди да се спомне и формулата на Ојлер за полиедар $V - E + F = 2$, каде што V е број на темиња на полиедарот, E е број на рабови на полиедарот, F е број на ѕидови на полиедарот. На пример, ако ја примениме Ојлеровата форула на коцка, тогаш добивме:

$$V = 8,\ E = 12,\ F = 6 \Rightarrow V - E + F = 8 - 12 + 6 = 2.$$

Топологијата ги изучува особините на просторите кои се инваријантни во однос на непрекинати деформации, како што се истегнување и свиткување, но не и кинење или лепење. Две тела се нарекуваат *тополошки еквивлентни* ако од едното може да се добие другото без кинење или лепење. На пример, кружница и сфера се тополошки еквивалентни, а исто такви се и топка и елипсоид, додека сфера и торус не се тополошки еквивалентни.

Ќе наведеме неколку дефиниции во врска со поимите топологија и тополошки простор.

Нека X е дадено множество и τ е фамилија од подмножества од множеството X. За фамилијата τ велиме дека е *топологија* ако се исполнети следните услови:

(1) $\varnothing, X \in \tau$,

(2) Ако $U,V \in \tau$ тогаш $U \cap V \in \tau$,

(3) Ако $U_a \in \tau, a \in A$ тогаш $\bigcup_{a \in A} U_a \in \tau$.

Множеството X со топологијата τ се нарекува *тополошки простор* и се означува со (X,τ).

Ако U е подмножество од X коешто припаѓа во τ, тогаш U се нарекува *отворено множество*. Множеството C чијшто комплемент C^C припаѓа во τ се нарекува *затворено множество*.

Да забележиме дека користејќи ги Де Моргановите закони поимот топологија може да се дефинира и со помош на затворени множества. Имено, за фамилијата τ велиме дека е *топологија* ако се исполнети следните услови:

(1) $\varnothing, X \in \tau$,

(2) Ако $F,G \in \tau$ тогаш $F \cup G \in \tau$,

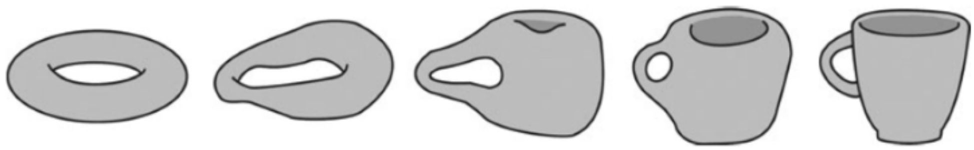
(3) Ако $F_a \in \tau, a \in A$ тогаш $\bigcap_{a \in A} F_a \in \tau$.

Претходно спомнавме дека сферата и торусот не се тополошки еквивалентни простори. Но, всушност што значи два тополошки простори да се тополошки еквивалентни? За прецизно да го дефинираме овој поим ќе дефинираме што е *хомеоморфизам* меѓу два простори.

Хомеоморфизам (или *тополошки изоморфизам*) е непрекинато биективно пресликување меѓу два тополошки простори чиешто инверзно пресликување е исто така непрекинато.

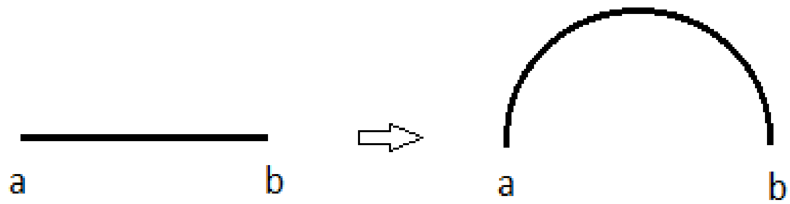
За два тополошки простори велиме дека се *тополошки еквивалентни* ако постои хомеоморфизам од едниот простор во другиот, [5].

На пример, торусот и филџанот за кафе се тополошки еквивалентни, бидејќи од едниот може да се добие другиот со непрекинати трансформации (Слика 2).



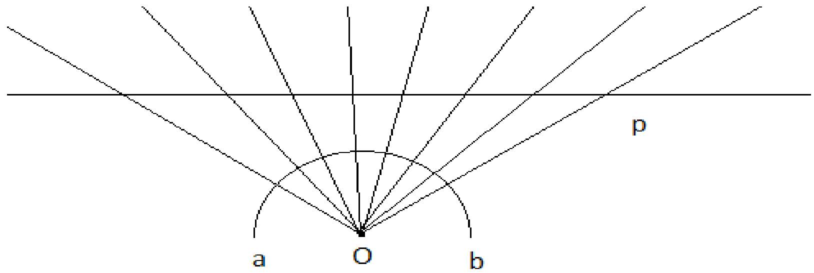
Слика 2. Торусот и филџанот за кафе се тополошки еквивалентни.

Ќе покажеме дека еден отворен интервал и една права се тополошки еквивалентни. Навистина, отворениот интервал (a,b) може да се деформира во една полукружница, [4].



Слика 3. Отворениот интервал се трансформира во полукружница.

Оваа полукружница може да се трансформира во права со следното пресликување. Прво го наоѓаме центарот на полукружницата O, а потоа повлекуваме прави низ тој центар коишто ја сечат полукружницата и правата p како на Сликата 4.



Слика 4. Полукружницата се трансформира во права.

Ова покажува дека на секоја точка од полукружницата ѝ одговара единствена точка од правата p и обратно, т.е. еден отворен интервал (a,b) може хомеоморфно да се трансформира во права. Според тоа, еден отворен интервал и една права се тополошки еквивалентни.

2. ПРОСТОР НА КОНФИГУРАЦИИ НА ТОПОЛОШКИ ПРОСТОР X И РОБОТИКА

Дефинираме *n-ти простор на конфигурации* на еден тополошки простор X, со ознака $\mathrm{Conf}_n(X)$, на следниот начин:

$$\mathrm{Conf}_n(X) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \neq x_j, i \neq j\}.$$

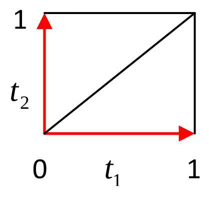
Често пати овој простор се нарекува и *подреден простор на конфигурации* на тополошкиот простор X.

Симетрична група на едно конечно множество X е групата чиишто елементи се сите биекции од X во X (т.е. пермутации на X), со операцијата композиција на прелискувања. Се означува со S_n. Ако S_n е симетричната група којашто ги подредува индексите на n-ките, тогаш фактор-просторот $\mathrm{Conf}_n(X)/S_n$ се вика *неподреден простор на конфигурации*.

Нека I е отворениот интервал $I = (0,1)$. Ќе го разгледуваме просторот $\mathrm{Conf}_n(X)/S_n$. Множеството од сите n-ки $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, каде што $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < 1$, се нарекува *отворен n-димензионален симплекс*.

За $n = 1$, 1-димензионален симплекс е интервалот $I = (0,1)$.

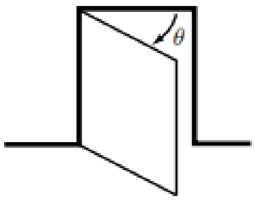
За $n = 2$, 2-димензионален симплекс е отворен триаголник.



Два простори од конфигурации на различни простори X и Y се поврзани меѓусебе ако Y е добиен од X со отстранување на конечен број точки.

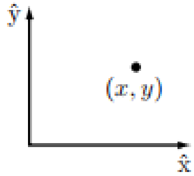
Ќе разгледаме неколку примери каде што се гледа претставувањето на конфигурацијата на некои објекти од секојдневниот живот.

а) Конфигурација на врата којашто се опишува со еден агол θ. (Аголот θ е единствен параметар во оваа конфигурација.)



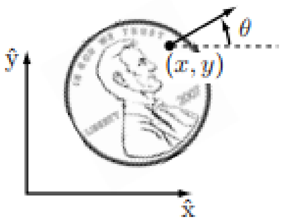
Слика 5 а.) Врата

б) Конфигурација на една точка во рамнината којашто се опишува со 2 координати (x, y). (Една точка во рамнината е потполно определена со 2 координати.)



Слика 5 б.) Точка во рамнина

в) Конфигурација на монета на маса којашто се опишува со 3 координати (x, y, θ). (Координатите x и y ја определуваат положбата на монетата во рамнина, а θ ја означува насоката каде што гледа човекот на монетата, т.е. монетата може да се движи во xOy рамнината како точка и таа ротира околу себе, па затоа нејзината положба се определува со 3 координати.)

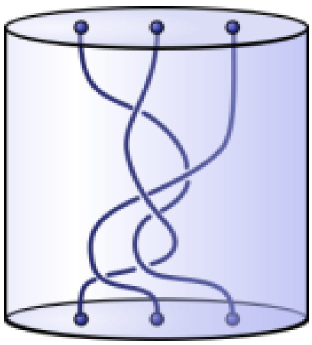


Слика 5 в). Монета

Пат во еден тополошки простор X е секое непрекинато пресликување $k: I=[0,1] \to X$. Ако X е тополошки простор, а $x_0 \in X$ е фиксирана точка од X и ако $k: I \to X$ е пат кој го задоволува условот $k(0)=k(1)=x_0$, тогаш велиме дека k е *котелец* во x_0.

На сличен начин се дефинира котелец и во просторот на конфигурации. Еден пат во просторот на конфигурации $\mathrm{Conf}_n(X)$, се состои од n-ки на патишта од различни точки во X. Овој пат претставува котелец во просторот на конфигурации, ако почнува и завршува во иста конфигурација. На Сликата 6 е прикажан како изгледа еден котелец.

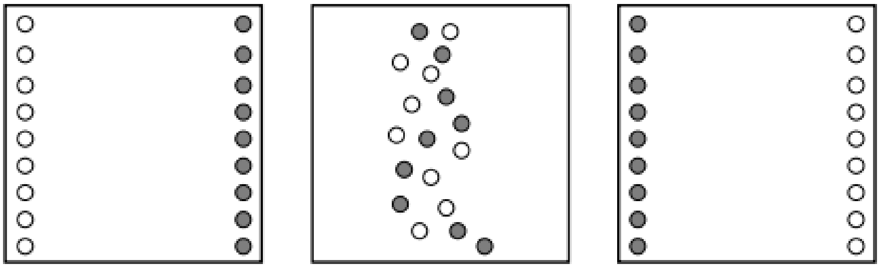
Примената на котелците во роботиката е следнава: ако во една фабрика има работници и одреден број роботи кои носат материјали од едно место во друго, тогаш како може тие да се движат, но да не дојде до судир меѓу нив? Одговорот на ова прашање е даден во примерот подолу.



Слика 6. Патишта во простор кои не се сечат меѓу себе.

3. ДВИЖЕЊЕ НА ГРУПА РОБОТИ

Можеби звучи чудно како во една фабрика во која работат автоматизирани роботи (АР) може да се најдат тополошки својства. Да претпоставиме дека во една фабрика работат роботи кои носат материјали од едно место во друго место. Целта е да се ставаат неколку роботи (на пример N) кои се програмирани на тој начин што ќе носат одредени материјали од местото А до местото Б. Проблемот се појавува во тоа што при движење на тие роботи може да се случи некои од нив да се судрат меѓу себе или со пречките коишто се наоѓаат во таа просторија. Значи, нашата задача е како да се програмира роботот така што да може да се движи од местото А до местото Б без да се сретне со другите роботи или со пречките. Планирањето на координирано движење во општ случај не е лесен проблем за решавање, бидејќи една мала грешка може да доведе до голема материјална штета за фирмата. Конкретно, може да се спомне на пример ориентирањето на авионите при слетување на аеродром. Доволна е една мала грешка и да настане катастрофа. На Сликата 7 е прикажана една можна комбинација на движењето на 18 роботи, 9 од едната страна и 9 од другата страна без да се сретнат меѓу себе.



Слика 7. Една можна комбинација на движењето на 18 роботи.

За решавањето на проблемите од оваа природа се користат особини и својства од топологијата, поточно од просторите на конфигурации на тополошките простори. Со други зборови, може да се конструира простор од сите можни подредувања на роботите и потоа да се елиминираат сите тие подредувања што се блиску до судир.

Патиштата во ваквиот простор даваат сигурно координирано движење. Формалната конструкција на еден ваков простор го дава точно просторот на конфигурации на N различни точки во рамнината $\mathbb{R}^2$. Ги разгледуваме сите подредени N-ки од точки во $\mathbb{R}^2$ со својството секои 2 точки од нив да се различни меѓусебе. Секоја таква N-ка претставува една точка во просторот на конфигурации. Во овој случај просторот на конфигурации формално изгледа

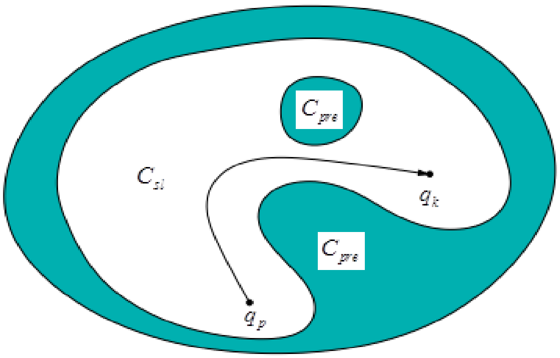
$$\mathrm{Conf}_N(R^2) := R^2 \times R^2 \times \ldots \times R^2 \setminus \Delta,$$

каде што $\Delta = \{(x_1, x_2, ..., x_N) \in (R^2)^N \mid x_i = x_j, i \neq j\}$ ([2]).

Да претпоставиме дека $W = \mathbb{R}^2$ е рамнината каде што треба да се движи роботот и нека таа содржи неколку пречки кои ја формираат околината од пречки $O \subset W$. Нека $A \subset W$ е роботот, кој е програмиран да се движи во таа рамнина, со конфигурација $q = (x, y, \theta)$ (одговара на конфигурацијата на монетата во примерот погоре на Слика 5 в.) опишан со 3 параметри и $C \subset W$ е просторот на сите конфигурации на роботот. Нека $C_{pre} \subseteq C$ е конфигурација на околината на пречки дефинирана со

$$C_{pre} = \{q \in C \mid A(q) \cap O \neq \varnothing\}$$

т.е. множество од сите конфигурации q, во кои $A(q)$ има пресек со околината од пречки O. Притоа, $A(q)$ е трансформираниот робот, т.е. неговата конфигурација. Бидејќи O и C_{pre} се затворени множества во рамнината следува дека и C_{pre} е затворено множество во C. Останатиот дел од рамнината се вика слободен простор, каде што роботот може да се движи слободно без да има никаков судир со пречките и се означува со $C_{sl} = C \setminus C_{pre}$. Бидејќи C е тополошки простор и е затворено множество, следува дека C_{sl} ќе биде отворено множество. Оваа значи дека роботот може да се движи произволно блиску до пречките без да ги допира ако се движи во C_{sl}.



Слика 8. Движење на роботот од местото $q_p \in C_{sl}$ во $q_k \in C_{sl}$ без да ги допира пречките во C_{pre}.

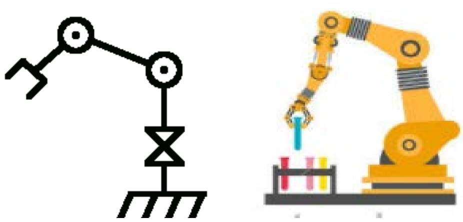
Овој проблем може да се опише на следниот начин познат како проблем на поместување на пијано (Piano Mover's Problem), [3]:

1. Се определува рамнината $W = \mathbb{R}^2$.
2. Се дефинира околината од пречки $O \subset W$.
3. Нека А е роботот со конфигурација $q = (x, y, \theta)$.
4. Се наоѓа просторот од конфигурации C определен со сите можни трансформации на роботот.
5. Една конфигурација $q_p \in C_{sl}$, позната како почетна конфигурација на роботот.
6. Една конфигурација $q_k \in C_{sl}$, позната како крајна конфигурација на роботот. Почетната и крајната конфигурација заедно се наречени бараниот пар и се означуваат со (q_p, q_k).
7. Со помош на одреден алгоритам се наоѓа пат $k : I = [0,1] \to C_{sl}$ таков што $k(0) = q_p$ и $k(1) = q_k$.
8. Или се покажува дека ваков пат не постои, односно дека не е можно слободно движење на роботот во одредениот дел од рамнината.

3. ДВИЖЕЊЕ И ОДНЕСУВАЊЕ НА РОБОТ

Ќе видиме како просторот на конфигурации се применува и при движењето и однесувањето на роботите. Се разбира за изучување на однесувањето на еден робот потребно е доволно знаење од роботиката и не може да се опфати во целост само со еден пример.

Во примерот погоре видовме дека конфигурацијата на врата се опишува со 1 параметар, точка во рамнина се опишува со 2 параметри, монета со 3 параметри итн.



Слика 9. Скелетот на еден едноставен робот

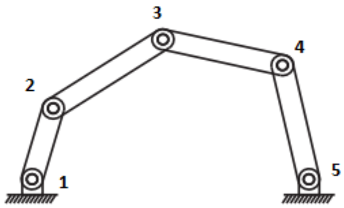
Конструкција на еден робот е определување и означување на положбата на секоја битна точка од роботот. Минималниот број n од реално вредносни координати потребни за репрезентација на конфигурацијата се вика степен на слобода со ознака dof (анг. degree of freedom). Како се пресметува степенот на слобода на еден робот?

Степенот на слободата на даден робот се пресметува со формулата на Гриблер (Grübler)

$$dof = m(N-1-j) + \sum_{i=1}^{j} f_i \ ,$$

m е степен на слобода на тврдо тело (во рамнина m=3), N - број на алки, j - број на зглобови, f_i - степен на слобода на секоја алка (зависи од формата на алката, обично ќе разгледаме роботи со кружни алки кај кои $f_i = 1$), [4].

Сето ова конкретно може да се види во наредниот пример каде што се бара колку е степенот на слобода на раката на роботот на дадената Слика 9.



Слика 10. Рака на робот.

Степенот на слободата се пресметува со формулата на Гриблер

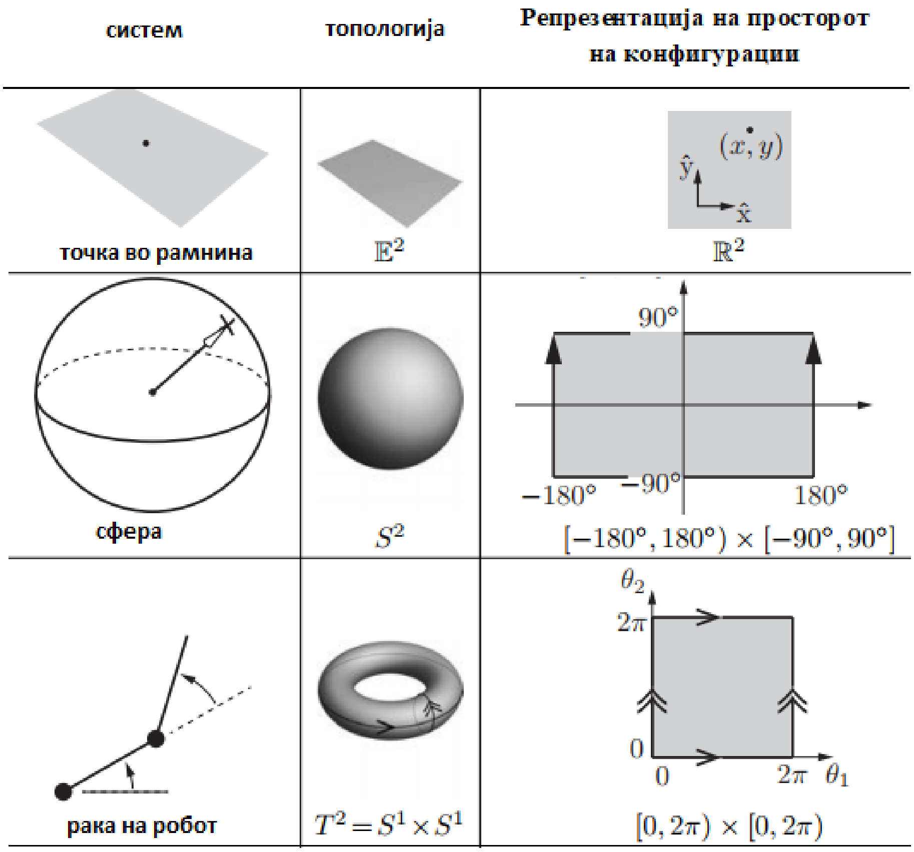
$$dof = m(N-1-j) + \sum_{i=1}^{j} f_i \ , \text{ за}$$

$$m = 3,\ N = 5,\ j = 5,\ f_i = 1,\ i = 1,2,3,4,5 \text{, па}$$

$$dof = m(N-1-j) + \sum_{i=1}^{j} f_i = 3(5-1-5) + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = -3 + 5 = 2 \ .$$

Значи степенот на слобода на овој робот е 2, [1]. Тоа значи дека роботот може да се движи само во две насоки. Или само напред-назад, нагоре-надолу или лево-десно. Ако степенот на слободата е 3, едно можно движење на роботот е лево-десно-напред.

На следната слика се прикажани неколку примери на репрезентациите на просторите на конфигурации заедно со нивната топологија.



Слика 11. Репрезентации на просторите на конфигурации заедно со нивната топологија на неколку системи.

4. ЗАКЛУЧОК

Примената на просторите на конфигурации во роботиката е многу голема, различни идеи се изучувани од страна на познати научници, инженери и математичари од 1960 година. Со напредувањето на технологијата местото на човекот во индустријата го зафаќаат роботите и автоматизираните машини, што повлекува дека потребата за нивното усовршување се зголемува секој ден.

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Choset, *Robotic Motion Planning: Configuration Space*, Robotics Institute, https://www.cs.cmu.edu/~motionplanning/lecture/Chap3-Config-Space_howie.pdf

[2] R. Grhist, *Configuration Spaces, Braids and Robotics*, National University of Singapore, 2007. https://www.math.upenn.edu/~ghrist/preprints/singaporetutorial.pdf

[3] S. M. LaValle, *The configuration space*, University of Illinois, 2006. http://planning.cs.uiuc.edu/ch4.pdf

[4] E. M. Patterson, *Topology*, Edinburgh and London, 1963.

[5] Н. Шекутковски, *Топологија*, Природно-математички факултет, Универзитет "Кирил и Методиј", Скопје, 2002.

[1] Универзитет "Св. Кирил и Методиј", Скопје
Природно-математички факултет,
Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Македонија
e-mail: erblina_zeqiri@hotmail.com

Примен: 12. 02. 2018
Поправен: 21. 05. 2018
Одобрен: 06. 06. 2018

Објавен на интернет: 28.08.2018