

Primjena AG-nejednakosti u planimetriji

ILIJA ILIŠEVIĆ*

Sažetak. *Razmatraju se primjene AG-nejednakosti u planimetriji, koje su ilustrirane na nizu zanimljivih zadataka prilagođenih učenicima srednjih škola.*

Ključne riječi: *AG-nejednakost, planimetrija*

Applications of AG inequality in planimetry

Abstract. *Applications of AG-inequality in planimetry are considered. These applications are illustrated on a number of interesting tasks adapted for high school students.*

Key words: *AG-inequality, planimetry*

Neka je $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ n -torka nenegativnih realnih brojeva. Tada su aritmetička i geometrijska sredina n -torke a definirane redom s

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Vrijedi:

$$A_n(a) \geq G_n(a).$$

Pritom jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Nejednakost $A_n(a) \geq G_n(a)$ nazivamo aritmetičko-geometrijska ili kraće AG-nejednakost. Dokaz te nejednakosti može se primjerice vidjeti u [6].

Primijenit ćemo ovu nejednakost na nekoliko zadataka iz planimetrije.

Zadatak 1. *Dokažite da za pravokutni trokut vrijedi*

$$2r + c \geq 2\sqrt{ab},$$

gdje su a i b duljine kateta, c duljina hipotenuze, a r polumjer trokutu upisane kružnice.

Rješenje. Prema AG-nejednakosti je $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, a kako za pravokutni trokut vrijedi $2r + c = a + b$, to je $2r + c \geq 2\sqrt{ab}$. Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $a = b$, tj. ako je pravokutni trokut jednakokračan.

*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

Zadatak 2. Dokažite da za pravokutni trokut vrijedi

$$R + r \geq \sqrt{2P},$$

gdje je P površina trokuta, a R i r polumjeri trokutu opisane i upisane kružnice, redom.

Rješenje. Vrijedi

$$R + r = \frac{c}{2} + \frac{a + b - c}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Kako je prema AG-nejednakosti $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$, to je

$$R + r \geq \sqrt{ab} = \sqrt{2P}.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $a = b$, tj. ako je pravokutni trokut jednakokrtačan.

Zadatak 3. Dokažite da za pravokutni trokut vrijedi

$$\frac{c(a + b)}{P} \geq 4\sqrt{2}.$$

Rješenje. Redom imamo sljedeće ekvivalentne nejednakosti:

$$\begin{aligned} \frac{c(a + b)}{P} &\geq 4\sqrt{2}, \\ \frac{\sqrt{a^2 + b^2}(a + b)}{ab} &\geq 2\sqrt{2}, \\ \frac{(a^2 + b^2)(a^2 + 2ab + b^2)}{a^2b^2} &\geq 8, \\ \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)(a^2 + 2ab + b^2) &\geq 8, \\ 1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{2b}{a} + \frac{2a}{b} + \frac{b^2}{a^2} + 1 &\geq 8, \\ \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) &\geq 6. \end{aligned}$$

Posljednja nejednakost je točna jer je prema AG-nejednakosti

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 2 \quad \text{i} \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, odnosno $a = b$, tj. za jednakokrtačno pravokutni trokut.

Zadatak 4. *Odredite koji od pravokutnih trokuta s danom duljinom hipotenuze ima najveću površinu.*

Rješenje. Iz $P = \frac{ab}{2}$ i $c^2 = a^2 + b^2$ slijedi

$$P = \frac{\sqrt{a^2(c^2 - a^2)}}{2}.$$

Kako je prema AG-nejednakosti

$$\sqrt{a^2(c^2 - a^2)} \leq \frac{a^2 + (c^2 - a^2)}{2} = \frac{c^2}{2},$$

to je $P_{max} = \frac{c^2}{4}$ i dostiže se za $a^2 = c^2 - a^2$, tj. $a = \frac{c\sqrt{2}}{2} = b$.

Zadatak 5. *Od svih pravokutnih trokuta danog opsega $2s$, odredite onaj koji ima najveću površinu.*

Rješenje. Iz $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 2s$ slijedi

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 2s - (a + b).$$

Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo

$$\frac{ab}{2} = s^2 - sc,$$

odnosno

$$P = s^2 - sc.$$

Površina je maksimalna kada je c minimalno. Kako je prema AG-nejednakosti $a^2 + b^2 \geq 2ab$, to je

$$2(a^2 + b^2) \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2,$$

tj. $2c^2 \geq (a + b)^2$. Odatle slijedi

$$c \geq \frac{a + b}{\sqrt{2}} = \frac{2s - c}{\sqrt{2}},$$

pa je

$$c \geq \frac{2s}{\sqrt{2} + 1}.$$

Jednakost vrijedi za $a = b$ i tada je $c = \frac{2s}{\sqrt{2} + 1}$ minimalno, a

$$P_{max} = s^2 - \frac{2s^2}{\sqrt{2} + 1} = (3 - 2\sqrt{2})s^2.$$

Dakle, najveću površinu ima jednakokračno pravokutni trokut.

Zadatak 6. *Koji trokut danog opsega $2s$ ima najveću površinu?*

Rješenje. Neka su a, b, c duljine stranica trokuta kojemu je opseg $2s$. Kako je prema Heronovoj formuli

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s} \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)},$$

to je površina maksimalna kada je $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$ maksimalno. Prema AG-nejednakosti je

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3},$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned} \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)} &\leq \sqrt{\left(\frac{s-a+s-b+s-c}{3}\right)^3} \\ &= \sqrt{\left(\frac{s}{3}\right)^3} = \frac{s\sqrt{3s}}{9}. \end{aligned}$$

Maksimum se dostiže kada vrijedi jednakost, a to je onda i samo onda ako je

$$s-a = s-b = s-c, \quad \text{tj.} \quad a = b = c.$$

Dakle, najveću površinu ima jednakostranični trokut. Ta površina iznosi

$$P_{max} = \sqrt{s} \cdot \frac{s\sqrt{3s}}{9} = \frac{s^2\sqrt{3}}{9}.$$

Zadatak 7. *Dokažite da za svaki trokut vrijedi nejednakost*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4P\sqrt{3},$$

gdje su a, b, c duljine stranica, a P površina trokuta.

Rješenje. Heronovu formulu zapišemo u obliku

$$P = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

Kako je prema AG-nejednakosti

$$\begin{aligned} &(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \\ &\leq \left(\frac{(a+b-c) + (a+c-b) + (b+c-a)}{3}\right)^3 \\ &= \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3, \end{aligned}$$

to je

$$\begin{aligned} 4P &\leq \sqrt{(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} = \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{3(a^2+b^2+c^2) - ((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)}{3\sqrt{3}} \\ &\leq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{3\sqrt{3}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Odatle slijedi $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4P\sqrt{3}$. Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $a = b = c$, tj. za jednakostraničan trokut.

Zadatak 8. Kakav je trokut ABC ako je

$$R(b+c) = a\sqrt{bc},$$

gdje su a, b, c duljine stranica, a R polumjer trokutu opisane kružnice.

Rješenje. Iz danog uvjeta slijedi

$$\frac{a}{2R} = \frac{b+c}{2\sqrt{bc}}.$$

Kako je prema AG-nejednakosti $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, to je

$$\frac{b+c}{2\sqrt{bc}} \geq 1,$$

pa je

$$\frac{a}{2R} \geq 1.$$

Slijedi $a = 2R$, pa je trokut pravokutan s hipotenuzom a . No, tada je $b+c = 2\sqrt{bc}$, a to vrijedi onda i samo onda ako je $b = c$. Dakle, trokut ABC je jednakokrano pravokutni s pravim kutom u vrhu A .

Zadatak 9. Neka su a, b, c duljine stranica trokuta. Dokažite da vrijedi

$$\left| \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} \right| < \frac{1}{8}.$$

Rješenje. Danu nejednakost možemo zapisati, redom, u ekvivalentnom obliku

$$\frac{|ac^2 + b^2c + a^2b - bc^2 - a^2c - ab^2|}{(a+b)(b+c)(c+a)} < \frac{1}{8},$$

$$\frac{|(a-b)(b-c)(a-c)|}{(a+b)(b+c)(c+a)} < \frac{1}{8}.$$

Kako je prema AG-nejednakosti

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad b + c \geq 2\sqrt{bc}, \quad c + a \geq 2\sqrt{ac},$$

to je

$$\begin{aligned} \frac{|(a-b)(b-c)(a-c)|}{(a+b)(b+c)(c+a)} &\leq \frac{|(a-b)(b-c)(a-c)|}{8abc} \\ &= \frac{|a-b| \cdot |b-c| \cdot |c-a|}{8abc} \\ &< \frac{abc}{8abc} = \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

pri čemu zadnja nejednakost slijedi iz nejednakosti trokuta.

Zadatak 10. *Neka su a, b, c duljine stranica trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

Rješenje. Uvedimo zamjenu:

$$x = \frac{b+c-a}{2} > 0, \quad y = \frac{c+a-b}{2} > 0, \quad z = \frac{a+b-c}{2} > 0.$$

Tada je

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y,$$

pa nejednakost prelazi redom u ekvivalentne,

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geq 3,$$

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 6,$$

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \geq 6,$$

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \geq 6.$$

Ova nejednakost je točna, jer je prema AG-nejednakosti

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, \quad \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2, \quad \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2,$$

pa je točna i polazna nejednakost. Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $x = y = z$, a to je onda i samo onda ako je $a = b = c$, tj. za jednakostraničan trokut.

Zadatak 11. Neka su v_a, v_b, v_c duljine visina, a r polumjer trokutu upisane kružnice. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$v_a + v_b + v_c \geq 9r.$$

Rješenje. Vrijedi:

$$v_a = \frac{2P}{a}, \quad v_b = \frac{2P}{b}, \quad v_c = \frac{2P}{c}, \quad r = \frac{P}{s},$$

gdje je P površina, a s poluopseg trokuta. Tada nejednakost koju treba dokazati prelazi redom u ekvivalentne:

$$\begin{aligned} \frac{2P}{a} + \frac{2P}{b} + \frac{2P}{c} &\geq \frac{9P}{s}, \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &\geq \frac{9}{2s}, \\ (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) &\geq 9. \end{aligned}$$

Dokažimo posljednju nejednakost.

$$\begin{aligned} (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) &= 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 \\ &= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \\ &\geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9, \end{aligned}$$

jer je prema AG-nejednakosti

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \quad \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2, \quad \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, $\frac{a}{c} = \frac{c}{a}$, $\frac{b}{c} = \frac{c}{b}$, tj. za $a = b = c$, tj. za jednakostraničan trokut.

Zadatak 12. Dokažite da za trokut ABC vrijedi nejednakost

$$\sqrt[3]{\frac{R}{2P^2}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} \right),$$

gdje su v_a, v_b, v_c duljine visina, P površina trokuta, a R polumjer trokutu opisane kružnice.

Rješenje. Vrijedi:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2P} + \frac{b}{2P} + \frac{c}{2P} \right).$$

Kako je prema AG-nejednakosti

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2P} + \frac{b}{2P} + \frac{c}{2P} \right) &\geq \sqrt[3]{\frac{a}{2P} \cdot \frac{b}{2P} \cdot \frac{c}{2P}} = \sqrt[3]{\frac{abc}{8P^3}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{4RP}{8P^3}} = \sqrt[3]{\frac{R}{2P^2}}, \end{aligned}$$

to je

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} \right) \geq \sqrt[3]{\frac{R}{2P^2}}.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $a = b = c$, tj. za jednakostraničan trokut.

Zadatak 13. *Dokažite da za trokut ABC vrijedi nejednakost*

$$v_a \leq \sqrt{s(s-a)},$$

gdje je a duljina stranice, s poluopseg, a v_a duljina visine povučene na stranicu a .
Rješenje. Nejednakost koju treba dokazati redom prelazi u sljedeće ekvivalentne nejednakosti:

$$\begin{aligned} \frac{2P}{a} &\leq \sqrt{s(s-a)}, \\ \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a} &\leq \sqrt{s(s-a)}, \\ \frac{2\sqrt{(s-b)(s-c)}}{a} &\leq 1, \\ \sqrt{(s-b)(s-c)} &\leq \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Kako je prema AG-nejednakosti

$$\begin{aligned} \sqrt{(s-b)(s-c)} &\leq \frac{(s-b) + (s-c)}{2} = \frac{2s - (b+c)}{2} \\ &= \frac{2s - (2s-a)}{2} = \frac{a}{2}, \end{aligned}$$

to je točna i nejednakost koju je trebalo dokazati. Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $b = c$, tj. za jednakokračan trokut s osnovicom a .

Zadatak 14. *Dokažite da za trokut ABC vrijedi nejednakost*

$$t_a \geq \frac{1}{2} \sqrt{a(8s-9a)},$$

gdje je a duljina stranice, s poluopseg, a t_a duljina težišnice povučene na stranicu a .

Rješenje. Nejednakost koju treba dokazati redom prelazi u sljedeće ekvivalentne nejednakosti:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} &\geq \frac{1}{2}\sqrt{a(8s - 9a)}, \\
 \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} &\geq \sqrt{a(8s - 9a)}, \\
 2b^2 + 2c^2 - a^2 &\geq a(8s - 9a), \\
 2b^2 + 2c^2 - a^2 &\geq a(4(a + b + c) - 9a), \\
 2b^2 + 2c^2 - a^2 &\geq a(4b + 4c - 5a), \\
 2b^2 + 2c^2 - a^2 &\geq 4ab + 4ac - 5a^2, \\
 2b^2 + 2c^2 + 4a^2 &\geq 4ab + 4ac, \\
 b^2 + c^2 + 2a^2 &\geq 2ab + 2ac, \\
 (a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) &\geq 2ab + 2ac.
 \end{aligned}$$

Kako je prema AG-nejednakosti $a^2 + b^2 \geq 2ab$ i $a^2 + c^2 \geq 2ac$, to je posljednja nejednakost točna, pa je točna i nejednakost koju je trebalo dokazati. Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $a = b = c$, tj. za jednakostraničan trokut.

Zadatak 15. *Neka su t_a, t_b, t_c duljine težišnica povučene na stranice trokuta kojima su duljine a, b, c , redom. Dokazite da vrijedi nejednakost*

$$\frac{t_a^2}{a^2} + \frac{t_b^2}{b^2} + \frac{t_c^2}{c^2} \geq \frac{9}{4}.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
 &\frac{t_a^2}{a^2} + \frac{t_b^2}{b^2} + \frac{t_c^2}{c^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)}{a^2} + \frac{\frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)}{b^2} + \frac{\frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)}{c^2} \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{2b^2}{a^2} + \frac{2c^2}{a^2} - 1 + \frac{2a^2}{b^2} + \frac{2c^2}{b^2} - 1 + \frac{2a^2}{c^2} + \frac{2b^2}{c^2} - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(2 \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) + 2 \left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \right) + 2 \left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} \right) - 3 \right).
 \end{aligned}$$

Kako je prema AG-nejednakosti

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 2, \quad \frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2, \quad \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} \geq 2,$$

to je

$$\frac{t_a^2}{a^2} + \frac{t_b^2}{b^2} + \frac{t_c^2}{c^2} \geq \frac{1}{4}(2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 3) = \frac{9}{4}.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $a = b = c$, tj. za jednakostraničan trokut.

Zadatak 16. Opseg kružnog isječka je a . Koliki mora biti polumjer r da bi površina isječka bila maksimalna i kolika je ta površina?

Rješenje. Iz $l + 2r = a$ slijedi $l = a - 2r$, pa je površina isječka

$$P_{ki} = \frac{lr}{2} = \frac{(a - 2r)r}{2} = \frac{1}{4}(a - 2r)2r.$$

Kako je prema AG-nejednakosti

$$(a - 2r)2r \leq \left(\frac{(a - 2r) + 2r}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{4},$$

to je

$$P_{ki} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{16}.$$

Jednakost (a time i maksimum) vrijedi za $a - 2r = 2r$, tj. za $r = \frac{a}{4}$. Dakle, površina isječka je maksimalna za $r = \frac{a}{4}$ i iznosi $\frac{a^2}{16}$.

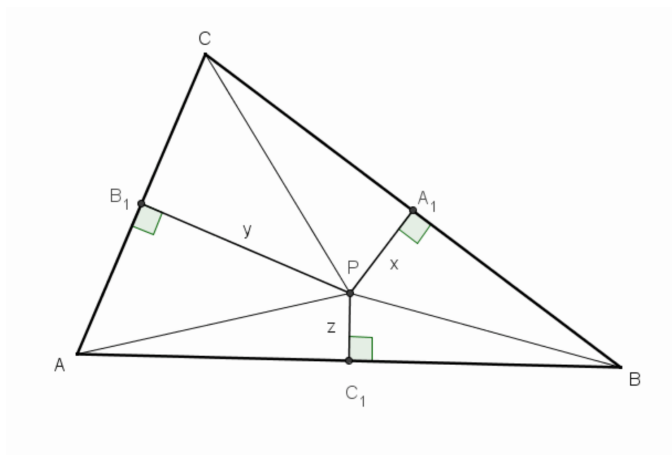
Zadatak 17. Iz točke P unutar trokuta ABC povučene su okomice PA_1 , PB_1 , PC_1 na pravce BC , CA , AB redom. Odredite položaj točke P tako da zbroj

$$S = \frac{a}{|PA_1|} + \frac{b}{|PB_1|} + \frac{c}{|PC_1|}$$

bude minimalan i odredite tu minimalnu vrijednost.

Rješenje. Označimo kao na Slici 1. $s = |PA_1|$, $y = |PB_1|$, $z = |PC_1|$. Tada je

$$S = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}.$$



Slika 1. Trokut ABC iz Zadatka 17.

Kako je

$$\begin{aligned} P(ABC) &= P(BCP) + P(CAP) + P(ABP) \\ &= \frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2} \\ &= \frac{1}{2}(ax + by + cz), \end{aligned}$$

to je

$$\begin{aligned} 2P(ABC) \cdot S &= \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) (ax + by + cz) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + ab \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + ac \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + bc \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right). \end{aligned}$$

Prema AG-nejednakosti je

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, \quad \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2, \quad \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2,$$

pa je

$$\begin{aligned} 2P(ABC) \cdot S &\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ &= (a + b + c)^2. \end{aligned}$$

Odatle slijedi

$$S \geq \frac{(a + b + c)^2}{2P(ABC)}.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $x = y = z$. Tada je P središte trokutu ABC upisane kružnice, a

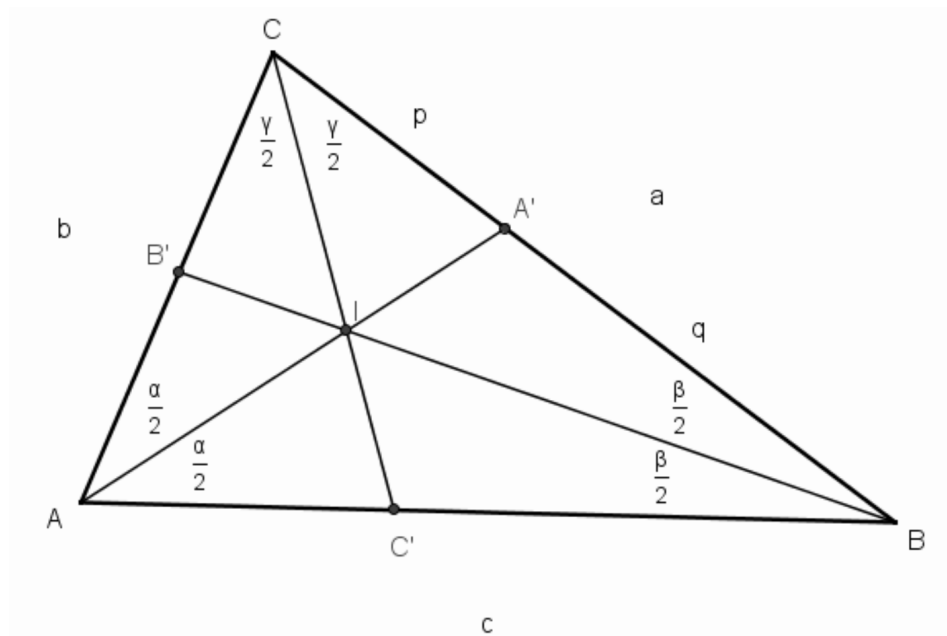
$$S_{min} = \frac{(a + b + c)^2}{2P(ABC)}.$$

Zadatak 18. Dan je trokut ABC . Neka su A' , B' , C' točke presjeka simetrala kutova CAB , ABC , BCA , redom sa stranicama \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AB} , a I je središte upisane mu kružnice. Dokažite da je

$$\frac{1}{4} < \frac{|AI| \cdot |BI| \cdot |CI|}{|AA'| \cdot |BB'| \cdot |CC'|} \leq \frac{8}{27}.$$

Rješenje. Neka je kao na Slici 2., $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$ te neka je $p = |CA'|$ i $q = |A'B|$. Prema poučku o simetrali kuta je $p : q = b : c$, a odatle prema pravilu o razmjeru slijedi $p : (p + q) = b : (b + c)$, tj.

$$p = \frac{ab}{b + c}.$$

Slika 1. Trokut ABC iz Zadatka 18.

Analogno dobivamo

$$q = \frac{ac}{b+c}.$$

Primjenjujući poučak o simetrali kuta na trokut $AA'C$ dobivamo

$$|AI| : |IA'| = b : p,$$

odakle je prema pravilu o razmjeru

$$|AI| : (|AI| + |IA'|) = b : (b + p),$$

tj.

$$\begin{aligned} \frac{|AI|}{|AI| + |IA'|} &= \frac{b}{b+p} = \frac{b}{b + \frac{ac}{b+c}} \\ &= \frac{b}{b(1 + \frac{a}{b+c})} = \frac{1}{1 + \frac{a}{b+c}} = \frac{b+c}{a+b+c}, \end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{|AI|}{|AA'|} = \frac{b+c}{a+b+c}.$$

Analogno,

$$\frac{|BI|}{|BB'|} = \frac{a+c}{a+b+c}, \quad \frac{|CI|}{|CC'|} = \frac{a+b}{a+b+c}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned} \frac{|AI| \cdot |BI| \cdot |CI|}{|AA'| \cdot |BB'| \cdot |CC'|} &= \frac{|AI|}{|AA'|} \cdot \frac{|BI|}{|BB'|} \cdot \frac{|CI|}{|CC'|} \\ &= \frac{b+c}{a+b+c} \cdot \frac{a+c}{a+b+c} \cdot \frac{a+b}{a+b+c} \\ &= \frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{(a+b+c)^3}. \end{aligned}$$

Dokažimo najprije desnu nejednakost. Kako je prema AG-nejednakosti

$$\begin{aligned} (a+b)(a+c)(b+c) &\leq \left(\frac{(a+b) + (a+c) + (b+c)}{3} \right)^3 \\ &= \left(\frac{2(a+b+c)}{3} \right)^3 = \frac{8}{27}(a+b+c)^3, \end{aligned}$$

to je

$$\frac{|AI| \cdot |BI| \cdot |CI|}{|AA'| \cdot |BB'| \cdot |CC'|} \leq \frac{8}{27}.$$

Sada dokažimo lijevu nejednakost. Imamo

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a+b+c} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2a+2b}{a+b+c} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(a+b+c) + (a+b-c)}{a+b+c} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a+b-c}{a+b+c} \right) \end{aligned}$$

i analogno

$$\begin{aligned} \frac{a+c}{a+b+c} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a+c-b}{a+b+c} \right), \\ \frac{b+c}{a+b+c} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b+c-a}{a+b+c} \right). \end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned} \frac{|AI| \cdot |BI| \cdot |CI|}{|AA'| \cdot |BB'| \cdot |CC'|} &= \frac{1}{8} \left(1 + \frac{a+b-c}{a+b+c} \right) \left(1 + \frac{a+c-b}{a+b+c} \right) \left(1 + \frac{b+c-a}{a+b+c} \right) \\ &> \frac{1}{8} \left(1 + \frac{a+b-c}{a+b+c} + \frac{a+c-b}{a+b+c} + \frac{b+c-a}{a+b+c} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(1 + \frac{a+b-c+a+c-b+b+c-a}{a+b+c} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(1 + \frac{a+b+c}{a+b+c} \right) = \frac{1}{8} \cdot (1+1) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{|AI| \cdot |BI| \cdot |CI|}{|AA'| \cdot |BB'| \cdot |CC'|} > \frac{1}{4}.$$

Literatura

- [1] D. BONIFERT, *Néhány tipikus problémaszituáció matematikából*, Mozaik, Szeged, 1994.
- [2] L. BŐRCSŐK, *Érettségi, felvételi feladatok*, Matematika, Szukits Könyvkiado, Szeged, 1999.
- [3] DR. L. GERŐCS, *Irány az egyetem 1993*, Nemzeti Tankönyvkiado, 1993.
- [4] Ž. HANJŠ, *Međunarodne matematičke olimpijade*, Element, Zagreb, 1997.
- [5] I. ILIŠEVIĆ, *Nejednakosti u pravokutnom trokutu*, Bilten seminara za nastavnike-mentore 7 (1998), 79–81.
- [6] B. PAVKOVIĆ, B. DAKIĆ, Ž. HANJŠ, P. MLADINIĆ, *Male teme iz matematike*, HMD i Element, Zagreb, 1994.
- [7] I.H. ŠIVANISKIJ, *Posobie po matematike dlja tehnikumov*, Visšaja škola, Moskva, 1970.