Сојузен натпревар 1961

III година

1. Ако x_1 и x_2 се решенија на равенката $x^2+kx+1=0$, определи ги оние вредности на k за кои е точно неравенството

$$(\tfrac{x_1}{x_2})^2+(\tfrac{x_2}{x_1})^2>2\,. \qquad (1)$$

Решение. Од Виетовите формули следува $x_1+x_2=-k,\ x_1x_2=1$. Понатаму:

$$(\tfrac{x_1}{x_2})^2+(\tfrac{x_2}{x_1})^2=\tfrac{x_1^4+x_2^4}{(x_1x_2)^2}=((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)^2-2x_1^2x_1^2$$
$$=(k^2-2)^2-2=k^2(k^2-4)+2.$$

Од претходните равенства следува дека неравенството (1) важи ако и само ако $k^2>4$,т.е. ако и само ако $k(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

2. Определи ја најголемата вредност на изразот

$$\log_2^4 x+12\log_2^2 x\cdot\log_2(\tfrac{8}{x})\,,$$

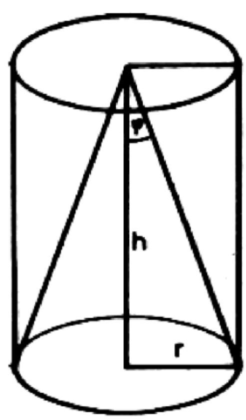
ако променливата x се менува на интервaот $[1,64]$.

Решение. Нека $\log_2 x=1$. Забележуваме дека t расте од 0 до 6 кога x расте од 1 до 64. Понатаму,

$$\log_2^4 x+12\log_2^2 x\cdot\log_2(\tfrac{8}{x})=\log_2^4 x+12\log_2^2 x\cdot(3-\log_2 x)$$
$$=t^4-12t^3+36t^2=(t(t-6))^2.$$

Функцијата $f(t)=t(t-6)$ прима негативни вредности за $0<t<6$ и достигнува минимум во точката $t=3$. Затоа максимумот на дадениот израз е еднаков на $(f(3))^2=81$.

3. Прав цилиндар и конус имаат заедничка основа, а врвот на конусот се наоѓа во средината на другата основа на цилиндарот. Определи го аголот меѓу изводницата на конусот и оската на цилиндарот ако односот на плоштините на цилиндарот и конусот е 7:4.



Решение. Нека r и h се соодветно радиусот на основата на цилиндарот и неговата висина. Тогаш плоштините на цилиндарот и конусот соодветно се:

$$P_1=2\pi rh+2r^2\pi,\quad P_2=r\pi\sqrt{r^2+h^2}+r^2\pi\,.$$

Од условот $\frac{P_1}{P_2}=\frac{7}{4}$ последователно добиваме:

$$8h+8r=7\sqrt{r^2+h^2}+7r,$$
$$48r^2-16rh-15h^2=0,$$
$$48(\tfrac{r}{h})^2-16\tfrac{r}{h}-15=0$$

и конечно $\frac{r}{h}=\frac{3}{4}$. Ако со φ го означиме бараниот агол (види цртеж), тогаш $\operatorname{tg}\varphi=\frac{r}{h}=\frac{3}{4}$, па затоа $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

4. Страните на триаголникот ABC се a,b и c, при што $a<b<c$. Над нив се конструирани слични правоаголници, така што плоштината на правоаголникот над страната c е поголема од збирот на плоштините на другите два правоаголници за плоштина на квадратот чија страна е m. Определи ги вторите страни на конструираните правоаголници.

Решение. Нека kc е висината на правоаголникот конструиран над страната со должина c, при што $k>0$. Постојат следниве четири можности за висините на правоаголниците кои се конструирани соодветно над страните со должини a и b:

$$1)\ ka,kb;\ \ 2)\ ka,\tfrac{b}{k};\ \ 3)\ \tfrac{a}{k},kb;\ \ 4)\ \tfrac{a}{k},\tfrac{b}{k}.$$

Доволно е во секој од овие случаи да се определи вредноста на коефициентот k. Условот на задачата во наведените случаи го добива видот:

1) $kc^2=ka^2+kb^2+m^2$,

2) $kc^2=ka^2+\frac{b^2}{k}+m^2$,

3) $kc^2=\frac{a^2}{k}+kb^2+m^2$,

4) $kc^2=\frac{a^2}{k}+\frac{b^2}{k}+m^2$.

Ако $c^2>a^2+b^2$, тогаш во случајот 1) го добиваме решението $k=\frac{m^2}{c^2-a^2-b^2}$. Во случаите 2), 3) и 4) k е позитивно решение на следниве равенки:

$$(c^2-a^2)k^2-m^2k-b^2=0,$$
$$(c^2-b^2)k^2-m^2k-a^2=0,$$
$$c^2k^2-m^2k-a^2-b^2=0.$$

Според тоа, ако $c^2>a^2+b^2$,тогаш постојат четири решенија, а ако $c^2\le a^2+b^2$, тогаш постојат три решенија.

IV година

1. Дадена е низата $a_n=\frac{c^2+n-2}{2}, n\in\mathbb{N}$.

а) Определи го збирот S_n на првите n членови.

б) Докажи дека броителот на збирот S_c е делив со 25 ако $c=10k+1$, каде k е природен број.

Решение. а) Имаме:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\tfrac{c^2+k-2}{2}=n\tfrac{c^2-2}{2}+\tfrac{1}{2}(1+2+...+n)=\tfrac{n}{4}(2c^2+n-3).$$

б) Ако $c=10k+1$, тогаш броителот на S_c е еднаков на

$$(10k+1)(2(10k+1)^2+10k+1-3)=25k(10k+1)(8k+2).$$

2. Докажи дека збирот на квадратите на растојанијата од произволна точка на кружницата до сите темиња на рамностраниот триаголник впишан во таа кружница е константен.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека опишаната кружница k е кружница со радиус r и центар во координатниот почеток, а темињата на рамностраниот триаголник се точките A,B,C со координати, соодветно: $(\tfrac{r}{2},\tfrac{r\sqrt{3}}{2}),(-r,0),(\tfrac{r}{2},-\tfrac{r\sqrt{3}}{2})$. Произволна точка X на кружницата k има координати (rx,ry), каде $x^2+y^2=1$. Тогаш:

$$\begin{aligned}XA^2+XB^2+XC^2&=(rx-\tfrac{r}{2})^2+(ry-\tfrac{r\sqrt{3}}{2})^2+(rx+r)^2+r^2y^2+(rx-\tfrac{r}{2})^2+(ry+\tfrac{r\sqrt{3}}{2})^2\\&=3(x^2+y^2)r^2+3r^2=6r^2.\end{aligned}$$

3. Определи го параметарот λ така што растојанието од центарот на кружницата

$$x^2+y^2+4x-4y-17=0$$

до правата $x-(\lambda+2)y-\lambda-4=0$ е еднакво на $\frac{5}{\sqrt{2}}$. Тангентите кои го допираат кружницата во пресечните точки со дадената права и самата права формираат триаголник. Определи ја плоштината на пресекот на опишаниот круг околу тој триаголник и дадениот круг. (За λ земи го целобројното решение.)

Решение. Равенката на кружницата k можеме да ја запишеме во видот

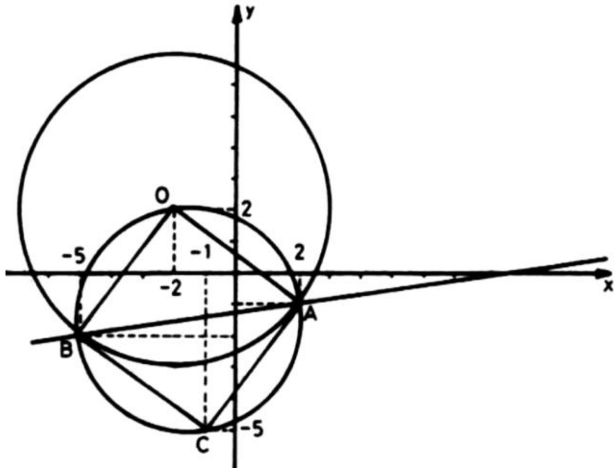
$$(x+2)^2+(y-2)^2=25.$$

Центарот на кружницата е тоќката $O(-2,2)$. Равенката

$$\tfrac{|-2-2(\lambda+2)-\lambda-4|}{\sqrt{1+(\lambda+2)^2}}=\tfrac{5}{\sqrt{2}}$$

има две решенија $\lambda_1=5$ и $\lambda_2=-\frac{15}{7}$. Правата $x-7y-9=0$ ја сече кружницата k во точките $A(2,-1)$ и $B(-5,-2)$, види цртеж. Равенките на тангентите на кружницата k во точките A и B, соодветно се:

$$y+1=\tfrac{4}{3}(x-2) \text{ и } y+2=-\tfrac{3}{4}(x+5).$$



Пресечната точка на овие тангенти е $C(-1,-5)$. Да забележиме дека четириаголникот $AOBC$ е квадрат со страна 5. Бараната плоштна е еднаква на

$$\tfrac{5^2\pi}{4}+\tfrac{1}{2}(\tfrac{50}{4}\pi-25)=\tfrac{25}{2}(\pi-1).$$

4. Докажи дека позитивните реални броеви a,b и c може да се должини на страни на триаголник ако и само ако неравенството $a^2p+b^2q>c^2pq$ важи за секои парови позитивни реални броеви p и q чиј збир е еднаков на 1.

Решение. Прво да забележиме дека позитивните броеви a,b,c може да се должини на страни на триаголник ако и само ако

$$a+b>c,\ b+c>a,\ c+a>b.$$

Да означиме

$$p=x,\ q=1-x,\ a^2p+b^2q-c^2pq=f(x)=c^2x^2+(a^2-b^2-c^2)x+b^2.$$

Дискриминантата на триномот $f(x)$ е:

$$D=(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2=-(a+b+c)(a+b-c)(a+b-c)(b+c-a).$$

Неравенството $f(x)>0$ важи за секој рален број x ако и само ако $D<0$,т.е.ако и само ако важи

$$(a+b-c)(a+b-c)(b+c-a)>0. \qquad (1)$$

Лесно се гледа дека за позитивни броеви a,b,c може да биде негативен најмногу еден од броевите $a+b-c, b+c-a, c+a-b$. Неравенството (1) важи ако и само ако

$$a+b>c,\ b+c>a,\ c+a>b.$$