XXVIII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

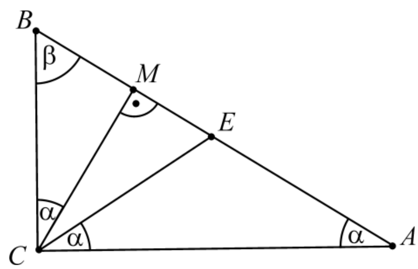
VI одделение

1. За три броја a,b и c важат равенствата
$$a+b=332, a+c=408 \text{ и } b+c=466.$$
Определи ги броевите a,b и c.

Решение. Ги собираме трите равенки и добиваме
$$2(a+b+c)=1206, \text{ т.е. } a+b+c=603.$$
Ако во последната равенка последователно замениме $a+b=332$, $a+c=408$ и $b+c=466$, добиваме
$$332+c=603, 408+b=603 \text{ и } a+466=603,$$
од каде наоѓаме $c=271$, $b=195$ и $a=137$.

2. Во правоаголен триаголник ABC со прав агол кај темето C, точката M е подножје на висината спуштена кон хипотенузата, а точката E е средина на хипотенузата. Докажете дека
$$\measuredangle ACM=\measuredangle BCE.$$

Решение. Ако е $\measuredangle CAE=\alpha$, тогаш и $\measuredangle ECA=\alpha$, бидејќи $AE=BE=CE$. Тогаш
$$\measuredangle ACM=\measuredangle ACE+\measuredangle ECM$$
$$=\alpha+\measuredangle ECM$$



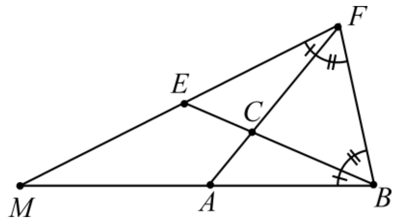
Од триаголникот ABC добиваме $\measuredangle ABC=90^\circ-\alpha$, па од правоаголниот триаголник BCM имаме $\measuredangle BCM=\alpha$, а
$$\measuredangle BCE=\measuredangle BCM+\measuredangle MCE=\alpha+\measuredangle ECM.$$
Значи, $\measuredangle ACM=\measuredangle BCE$.

3. Во триаголникот ABC, каде $\overline{BC}=10cm, \overline{AC}=5cm$, страната BC се продолжува низ C до точката E, а страната AC се продолжува низ C до точката F така што $\overline{BE}=\frac{3}{2}\overline{BC}, \overline{CF}=2\overline{AC}$. Ако $M=AB\cap EF$, докажи дека $\overline{MB}=\overline{MF}$.

Решение. Од условот имаме дека

$$\overline{CE}=\overline{BE}-\overline{BC}=\tfrac{3}{2}\overline{BC}-\overline{BC}=\tfrac{1}{2}\overline{BC}=5cm \text{ и } \overline{CF}=2\overline{AC}=10cm.$$

Тогаш, $\triangle ACB\cong\triangle ECF$ (САС) од каде следува дека



$$\angle EFC=\angle ABC \qquad (1)$$

Од рамнокракиот $\triangle BFC$ следува дека

$$\measuredangle BFC=\measuredangle FBC \qquad (2)$$

Од (1) и (2) се добива

$$\measuredangle MFB=\measuredangle MFA+\measuredangle AFB=\measuredangle MBE+\measuredangle EBF=\measuredangle MBF,$$

од каде следува дека триаголникот BFM е рамнокрак, па $\overline{MB}=\overline{MF}$.

4. Во едно основно училиште меѓу учениците кои завршиле 6-то одд. има 58% момчиња. Од сите шестоодделенци 13 девојчиња и 12 момчиња го завршиле одделението со одличен успех. Меѓу учениците кои не завршиле со одличен успех има 60% момчиња. Колку момчиња, а колку девојчиња не завршиле со одличен успех?

Решение. Ако е x бројот на сите шестоодделенци, тогаш $(x-25)$ шестоодделенци не завршиле со одличен успех. Од условот на задачата следува дека:

$$60\%(x-25)=58\%x-12$$

од каде

$$\frac{60}{100}(x-25)=\frac{58}{100}x-12$$

т.е.

$$60x-1500=58x-1200,$$

од каде се добива дека $x=150$. Значи, со одличен успех не завршиле $150-25=125$ шестоодделенци, од кои $\frac{60}{100}125=75$ момчиња и $125-75=50$ девојчиња.

VII одделение

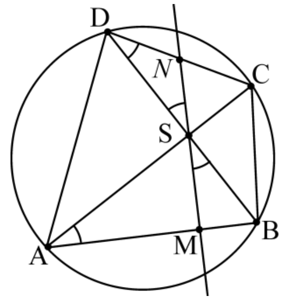
1. Одреди ги цифрите a,b и c така што да важи $\overline{ab}^a=\overline{bcb}$.

Решение, За $a=1$ бројот $\overline{ab}^a$ е двоцифрен, па $a=1$ не го исполнува условот на задачата. За $a\geq 3$ бројот $\overline{ab}^a\geq 1000$, што значи дека повторно не е исполнет условот на задачата. За $a=2$ следува дека

$\overline{2b}^2 = (2\cdot 10+b)^2$, т.е. $400+40b+b^2 = \overline{bcb}$. Бидејќи $b \in \{1,2,...,9\}$ и последната цифра на b^2 треба да биде иста со b, мора $b=1$ и $b=6$. Ако $b=1$ тогаш $21^2 \neq \overline{1c1}$, што значи $b=6$, т.е. $26^2 = 676$.

2. Во кружница е впишан четириаголник $ABCD$ чии дијагонали AC и BD се сечат во точката S под прав агол. Докажи дека правата која минува низ S и е нормална на AB ја преполовува страната CD.

Решение. Нека правата повлечена низ точката S и е нормална на страната AB ги сече AB и CD во точки M и N, соодветно. Имаме $\measuredangle CDB = \measuredangle CAB$ како периферни над лакот CB, а $\measuredangle CAB = \measuredangle BSM$ како агли со нормални краци. Аглите $\measuredangle BSM = \measuredangle DSN$ како накрсни агли, па $\measuredangle CDB = \measuredangle DSN$ од каде следува дека $\overline{DN} = \overline{SN}$. Слично $\measuredangle ACD = \measuredangle ABD = \measuredangle ASM = \measuredangle CSN$, па $\overline{CN} = \overline{SN}$. Значи $\overline{DN} = \overline{CN}$.



3. Одреди ги сите четирицифрени броеви a на кои сите цифри им се различни, ако се знае дека броевите $5860, 1674, 9432$ и 3017 содржат точно по две цифри од бројот a така што тие цифри во бројот a не се наоѓаат на иста позиција како во дадените броеви.

Решение: Броевите 5860 и 9432 имаат осум различни цифри, па, a не ги содржи цифрите 1 и 7. Значи, a ги содржи цифрите $0,3,4,6$ (од броевите 3017 и 5860). 0 не е на првото, второто и четвртото место, па значи е на третото место. 4 не е на второто, третото и четвртото место, па мора да е на првото место. 6 не е на првото, второто и третото место, па мора да е на четвртото место. Значи бараниот број е $a=4306$.

4. Нека ABC е триаголник во кој $\overline{BC} \leq \overline{AC} \leq \overline{AB}$ и нека M е точка во внатрешноста на $\triangle ABC$ која се наоѓа на растојание x, y и z од страните AB, BC и CA соодветно. Ако h_a и h_c се висини во $\triangle ABC$ кон страните BC и AB соодветно, тогаш докажи дека $h_c \leq x+y+z \leq h_a$.

Решение. Имаме

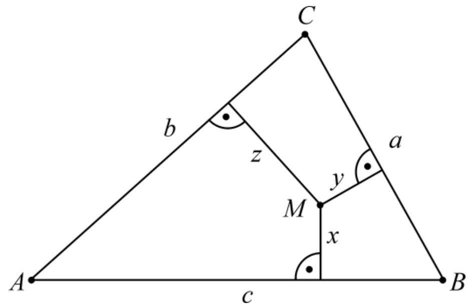
$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABM} + P_{\triangle ACB} + P_{\triangle BCM} = \frac{1}{2}xc + \frac{1}{2}zb + \frac{1}{2}ya = \frac{1}{2}(xc+zb+ya)$$

Од $x,y,z>0$ и од условот $a \leq b \leq c$ следува

$ax+ay+az \le ay+bz+cx \le cx+cy+cz$.

Сега, заради последното неравенство:

$$P_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}(xc+ya+zb) \ge \frac{1}{2}a(x+y+z),$$



од каде следува дека $h_a \ge x+y+z$.

Аналогно,

$$P_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ch_c=\frac{1}{2}(xc+ya+zb) \le \frac{1}{2}c(x+y+z)$$

од каде следува дека $h_c \le x+y+z$.

VIII одделение

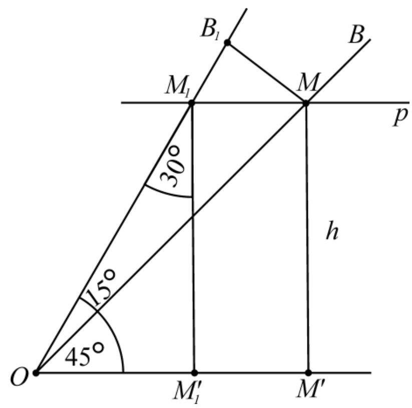
1. Една група на девојчиња и момчиња собрала 1700 денари за роденденски подарок на свој другар. Девојчињата давале по 200 денари, а момчињата по 300 денари. Колку биле девојчиња, а колку момчиња, ако групата имала непарен број на членови.

Решение. Нека има d - девојчиња а m - момчиња. Имаме

$$300m+200d=1700 \text{ т.е. } 3d+2m=17.$$

Па добиваме $2d=17-3m$. m може да прима вредности од 1 до 5, а бидејќи $2d$ е парен m може да биде 1, 3 и 5. Ако $m=1, d=7, m+d=8$; ако $m=3, d=4, m+d=7$; ако $m=5, d=1, m+d=6$,. Бидејќи $m+d$ е непарен добиваме дека бројот на момчињата е 3 а бројот на девојчињата е 4.

2. На кракот OB на аголот $\measuredangle AOB=45^\circ$ се наоѓа точка M така што $\overline{OM}=6cm$. Низ точката M е повлечена права p паралелна со кракот OA. Ако кракот OB изротира околу темето O до положбата OB_1, тогаш аголот ќе се зголеми за 15°. Одреди на кое растојание од темето O е точката M_1 во која правата p го сече кракот OB_1 на новиот агол $\measuredangle AOB_1$.



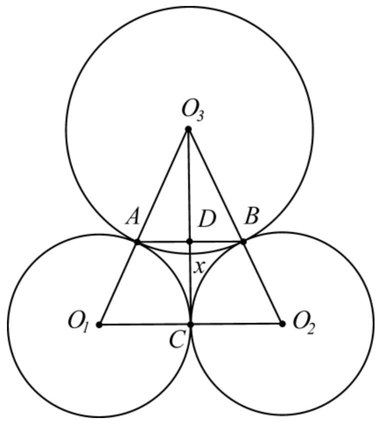
Решение. Од $\overline{OM}^2 = \overline{OM'}^2 + \overline{MM'}^2$ и $\overline{OM'} = \overline{MM'} = h$ добиваме дека $\overline{OM}^2 = 2h^2$. Значи, $36 = 2h^2$, односно $h^2 = 18$. Сега, бидејќи катетета спроти агол од 30° е половина од хипотенузата добиваме $\overline{OM'} = \frac{1}{2}\overline{OM}_1$. Значи,

$$\overline{OM}_1^2 = \overline{OM'}_1^2 + h^2,$$
$$\overline{OM}_1^2 = \frac{1}{4}\overline{OM}_1^2 + 18,$$
$$\frac{3}{4}\overline{OM}_1^2 = 18,\ \overline{OM}_1 = 2\sqrt{6}.$$

3. Две кружници со еднакви радиуси се допираат во точката C и допираат однадвор трета кружница со радиус $r = 5cm$ во точките A и B. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC, ако $\overline{AB} = 6cm$.

Решение. Нека

$$\overline{AO}_3 = 5cm, \overline{AB} = 6cm, \overline{CD} = x.$$



Од $\triangle O_1CO_3 \sim \triangle ADO_3$ добиваме

$$\overline{O_1C} : \overline{AD} = \overline{O_1O_3} : \overline{AO}_3 \Rightarrow$$
$$\overline{O_1C} : \frac{\overline{AB}}{2} = \overline{O_1A} : \overline{AO}_3 \Rightarrow$$
$$\overline{O_1C} : 3 = (\overline{O_1C} + 5) : 5 \Rightarrow$$
$$5\overline{O_1C} = 3\overline{O_1C} + 15 \Rightarrow$$
$$\overline{O_1C} = \frac{15}{2} = 7{,}5cm.$$

Според тоа,

$$\overline{O_3D} = \sqrt{\overline{AD}_3^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{25-7} = 4.$$

Од

$$\overline{O_1C} : \overline{AD} = \overline{O_3C} : \overline{CD}$$

добиваме $\frac{15}{2} : 3 = (x+4) : 4$, т.е. $x = 6cm$. Конечно, $P = \frac{\overline{AB}x}{2} = 18cm^2$.

4. Докажи дека во произволен конвексен седумаголник, постојат две дијагонали кои градат агол помал од 13° (агол меѓу две паралелни прави е 0°).

Решение. Вкупниот број на дијагонали во седумаголникот изнесува $\frac{7(7-3)}{2}=14$. Ако две од нив се паралелни, тогаш аголот меѓу нив е $0^\circ <$ 13°. Нека не постојат дијагонали кои се паралелни меѓу себе. Избираме точка во рамнината на седумаголникот и низ неа повлекуваме 14 прави паралелни на дијагоналите на седумаголникот. Овие прави ја делат рамнината на 28агли чиј збир е 360°. Ако ниту еден од овие агли не е помал од 13°, тогаш нивниот збир не би бил помал од $28\cdot 13^\circ = 364^\circ$, што е контрадикција. Според тоа постои агол меѓу две дијагонали кој е помал од 13°.