Д-р Михајло Петровиќ
Србија

Михајло Петровиќ – Алас (1868-1943) е истакнат математичар и зачетник на научната работа на полето на математиката во Србија. Тој е автор на повеќе научни трудови, меѓутоа покрај начни трудови проф. Петровиќ напишал и неколку научно-популарни статии наменети за учениците од основното и средното образование. Овде ќе презентираме една од научно популарните статии на проф. Петровиќ

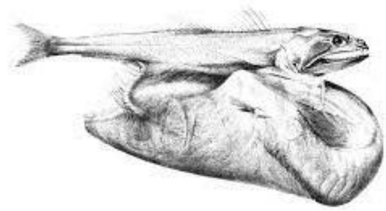
# ЗАНИМЛИВОСТИ ВО ПРИМЕНАТА НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА

Питагоровата теорема, според која во правоаголен траголник квадратот на хипотенузата е еднаков на збирот на квадратите на катетите, е една од основните теореми за пресметување на должините во геометријата. Во редовната настава се запозна со примената на Питагоровата теорема при такви пресметувања, а овде ќе покажеме како оваа теорема може да доведе до неочекувани резултати, кои сами по себе се интересни.

Во определени случаи ни изгледа дека некоја задача нема решение, па дури и дека е бесмислена, но Питагоровата теорема покажува дека истата таа задача има смисла и дека има решение. Пример на вакви задачи се следниве.

Тврдењето дека едно цврсто тело, без да се менува обликот и големината, не може да помине низ отвор на некое друго исто такво цврсто тело кај кое сите димензии се помали од првото тело, изгледа сосема разбирливо и очигледно. Но, што ќе кажете, на пример, ако некој тврди дека низ нерастеглив кружен отвор со големина на еден динар може да помине и поголема метална монета од 20 динари која не може да се витка или компресира (станува збор за монети кои во минатиот век меѓу двете светски војни се користеле во Кралството Југославија)? Или ако некој тврди дека во една цврста нееластчна коцка секогаш може да се расече канал низ кој може да помине друга, од неа поголема, исто така цврста и нееластична коцка, и тоа без промена на обликот и големниата?

Во природата има случаи кои потсетуваат на тоа дека поголем прдмет може да помине низ помал предмет или да се стави во него. Така, на пример, во зоологијата е констатирано дека еден вид морска риба (Chiasmodus, цртеж десно) голта риби од истиот вид кои се до три пати поголеми од неа. Но, тоа не е исто со претходното тврдење: устата и просторот за варење на оваа риба се растегливи така што може да

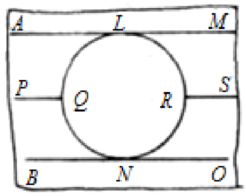


собере поголема риба. Меѓутоа, во горните тврдења станува збор за цврсти тела, нерастегливи, несвитливи и кои не може да се компресираат. Колку овие тврдења се необични за нашите разбирања на просторот може да се види од тоа што во вакви случаи нашиот народ ја користи изреката „Побрзо камила ќе помине низ иглени уши, отколку тоа да се случи.“

Но сепак вакви работи се можни, и со малку умешност се изводливи. Ова ќе го покажеме на неколку примери, а во точноста ќе се увериме со сосема едноставни пресметувања.

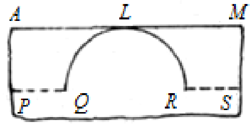
Прво ќе ја разгледаме следнава задача:

*Низ даден кружен отвор (цртеж десно) да се провлече кружен прстен со поголем радиус, но притоа радиусот на кружниот отвор да не се зголеми.*

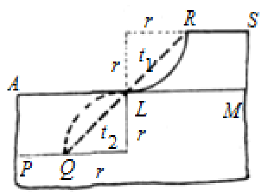



За таа цел на парче цврста хартија да опишеме круг $C$, па да повлечеме две негови паралелни тангенти $AM$ и $BO$ и една на нив паралелна права низ центарот на кругот (види цртеж). Потоа да го изечеме кругот $NQLRN$ така што на тоа место ќе имаме кружен отвор чиј дијаметар е еднаков на дијаметарот на кругот $C$.

Хартијата ја превиткуваме долж тангентите $AM$, $BO$ и правата $PS$ така што парчето хартија гледано од горе го добива обликот како на цртежот десно. Притоа двете тангенти се поколпени и се паралелни со правата $PS$, а полукругот $QLR$ е прклопен со полукругот $QNR$.




Откако ова ќе се направи го туркаме работ $RS$ нагоре така пто ќе се подигне и ќе дојде во положба како на цртежот десно. Кружниот лак $LR$ ќе дојде во положбата $LR$ на овој цртеж, а на отсечката $QLR$ ќе се појави еден праволиниски отвор $QR$ кој е поголем од отворот $QR$ на прв иот цртеж. За колку овој нов отвор $QR$ ќе



биде поголем од отворот $QR$ на првиот цртеж, т.е. од дијаметарот $d$ на кругот $C$ ? Според Питагоровата теорема и едната и другата тетива $t_1$ и $t_2$ ќе бидат, како хипотенузи на рамнокрак правоаголен триаолник, чии катети се еднакви на радиусот $r$ на кругот $C$, еднакви на

$$\sqrt{r^2+r^2}=r\sqrt{2},$$

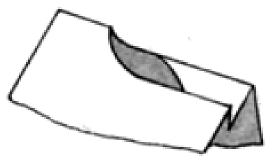
па затоа

$$\overline{QR}=t_1+t_2=2r\sqrt{2}=d\sqrt{2}.$$

Според тоа, од кружен отвор со дијаметар $d$ направивме, без проширување на кругот, праволиниски отвор со должина $d\sqrt{2}$. Овој отвор е еднаков на дожината на почетниот отвор зголемен за должина еднаква на

$$d\sqrt{2}-d=(\sqrt{2}-1)d=0,41421356...d$$

Значи, отворот го зголемивме за нешто повеќе од $0,4d$, односно за нешто повеќе од две петтини од првобитната должина. Монетата од 1 динар има дијаметар $23mm$, а монетата од 20 динари има дијаметар $31mm$. Една петтина на дијаметарот на 1 динар изнесува $4,6mm$, па затоа отворот на хартијата ќе се зголеми за повеќе од $9,2mm$. Бидејќи дијаметарот на монетатаод 20 динари е поголем од дијаметарот на монетата од 1 динар з $31-23=8mm$, т.е. за помалку од зголемувањето на отворот, заклучуваме дека низ овој отвор сигурно може да помине монета од 20 динари. Во последното лесно можеш и практично да се увериш (цртеж десно).



Горното тврдење може да се искаже и на следниов начин.

Бидејќи плоштината $P$ на кружниот отвор со дијаметар $d$ е

$$P=\pi(\tfrac{d}{2})^2=\tfrac{1}{4}\pi d^2,$$

а плоштината $P_1$ на кругот со дијаметар $d\sqrt{2}$ е

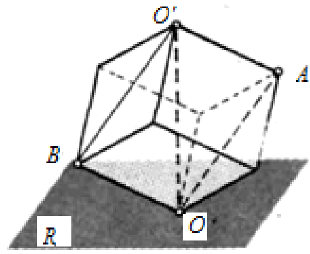
$$P_1=\pi(\tfrac{d\sqrt{2}}{2})^2=\tfrac{1}{2}\pi d^2=2P,$$

добиваме дека:

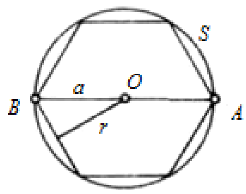
Низ секој нерастеглив кружен отвор може, на претходно опишаниот начин, да се провлече несвитлив и нееластичен кружен котур кој не може да се компресира и чија плоштина е два пати поголема од плоштината на самиот отвор.

Сега ќе ја разгледаме следнава задача:

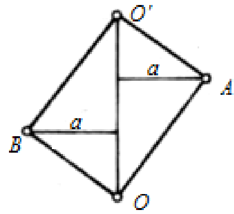
*Низ нерастеглива цврста коцка да се направи канал ни кој ќе може да помине друга нерастеглива и цврста коцка која е поголема од дадената коцка.*




Коцката $K$ ја поставуваме на хоризонтална рамнина $R$ така што нејзината просторна дијагонала $OO'$ е нормална на рамнината.




Сега, ако коцката ја погледнеме од страна ќе ја видиме во положба како на цртежот десно, а ако ја погледнеме од горе ќе ја видиме проекцијата на нејзините рабови на рамнината $R$ во вид на правилен шестаголник $S$ (цртеж лево).




За да ја пресметаме страната $a$ на овој правилен шестаголник да го разгледаме пресекот на коцката $AO'BO$ (цртеж десно), кој е правоаголник. Едната страна на овој правоаголник е еднаква на работ на коцката и оваа должина ќе ја земеме за единица. Другата страна е дијагонала на страна на коцката и според тоа нејзината должина е $\sqrt{2}$. Понатаму, дијагоналата $OO'$ на правоаголникот е просторната дијагонала на коцката со должина на раб 1, па затоа нејзината должина е $\sqrt{3}$. Должината $a$ е еднаква на висината на двата триаголника на кои дијагоналата $OO'$ го дели правоаголникот. За плоштината на правоаголникот добиваме

$$P = 1 \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

од каде добиваме $a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Сега, да го определиме радиусот на кружницата впишана во нашиот шестаголник. Познато е дека

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

што во нашиот случја дава

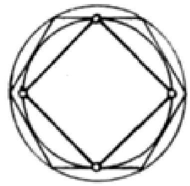
$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

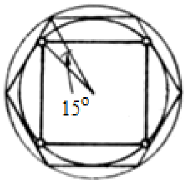
Сега да ја определиме страната $b$ на квадратот впишан во таа кружница. Таа како хипотенуза на рамнокрак правоаголен триаголник со страна $r$ е еднаква на $r\sqrt{2}$. Во нашиот случај добиваме

$$b = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1.$$

На овој начин поажавме дека страната на квадратот впишана во оваа кружница е еднаква на работ на нашата коцка.

Вака впишаниот квадрат може во кружницата да има произволна положба. Ако од положбата (цртеж десно), каде две темиња на квадратот лежат на страните на шестаголникот, нашиот квадрат го завртиме за $10^\circ$, тој ќе дојди во нова полоѓба (цртеж лево), во која ниту






едно теме нема да припаѓа на страните на шестаголникот. Со други зборови, овој цртеж покажува дека меѓу квадратот и шестаголникот секаде има растојание. Значи, нашиот квадрат можеме уште да го зголемиме и тој ќе лежи во шестаголникот. Ако сега на нашата коцка направиме канал во правец на дијагоналата $OO'$ со пресек на вака зголемениот квадрат, тогаш низ овој канал може да помине и коцка која е поголема од нашата првобитна коцка.

Статијата прв пта е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија