СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

В. Л. Гутенмахер, Москва

Системи линеарних једначина често се срећу у разним применама математике (на пример, у физици, хемији, економији). У овом чланку говоримо о најједноставнијим начинима решавања таквих система као и о универзалном начину – Гаусовој методи.

Елиминисање променљиве

Најлакше је схватити метод на примеру. Посматрајмо систем

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 7x + 5y &= 1. \end{aligned}$$

Да бисмо га решили, елиминишимо помоћу прве једначине променљиву x из друге једначине. У ту сврху, трансформишемо обе једначине тако да у њима коефицијенти уз x буду једнаки. Множећи прву једначину са 7 а другу са 2 добијамо

$$\begin{aligned} 14x + 21y &= 35 \\ 14x + 10y &= 2. \end{aligned}$$

Заменимо сада другу једначину разликом прве и друге, остављајући прву једначину непромењеном:

$$\begin{aligned} 14x + 21y &= 35 \\ 11y &= 33. \end{aligned}$$

Вратимо сада прву једначину на првобитни облик а другу поделимо са 11:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ y &= 3. \end{aligned}$$

Замењујући вредност $y = 3$ у прву једначину, налазимо

$$\begin{aligned} x &= -2 \\ y &= 3. \end{aligned}$$

Одговор је добијен; систем једначина има јединствено решење – пар бројева $(-2, 3)$.

Задатак 1. Методом елиминације променљиве решити систем

$$(a)\quad \begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 4 \\ 3x & - & 2y & = & 5. \end{array}$$

$$(b)\quad \begin{array}{rcrcl} \frac{3}{4}x & - & \frac{5}{6}y & = & 1 \\ \frac{5}{6}x & - & \frac{3}{4}y & = & 2. \end{array}$$

Смена променљивих

Један од основних метода у алгебри је замена једних променљивих другима, што омогућава да се задаци своде на једноставније. Претпоставимо да треба да решимо систем нелинеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcl} \frac{2}{x} & + & \frac{3}{y} & = & 5 \\ \frac{7}{x} & + & \frac{5}{y} & = & 1. \end{array}$$

Сменом $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$, добијамо линеарни систем са новим променљивим u и v:

$$\begin{array}{rcrcl} 2u & + & 3v & = & 5 \\ 7u & + & 5v & = & 1. \end{array}$$

Решавајући га, налазимо $u = -2,\ v = 3$.
Вратимо се сад на старе променљиве: $\frac{1}{x} = -2$, $\frac{1}{y} = 3$, одакле је $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$.

Задатак 2. Методом смене променљивих решити систем

$$(\text{а})\quad \begin{array}{rcrcl} \frac{1}{2x+3y-5} & + & \frac{7}{5x-8y+12} & = & 1 \\ \frac{4}{2x+3y-5} & + & \frac{14}{5x-8y+12} & = & 1; \end{array}$$

$$(\text{б})\quad \begin{array}{rcrcl} x^2 & + & xy & = & 5 \\ 3x^2 & + & 5xy & = & 23; \end{array}$$

$$(\text{в})\quad \begin{array}{rcl} \frac{xy}{3x+2y} & = & \frac{1}{5} \\ \frac{xy}{5x+7y} & = & 1. \end{array}$$

Геометријски смисао линеарне једначине

Да бисмо нашли једначину праве $y = kx + b$, која пролази кроз тачке са координатама (1,2) и (3,1), уврстимо у једначину $y = kx + b$ уместо x и y координате датих тачака. Добијамо систем

$$\begin{array}{rcrcl} 2 & = & k & + & b \\ 1 & = & 3k & + & b. \end{array}$$

Решавајући га, налазимо $k = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{2}$.
Дакле, тражена једначина је $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Може се десити, међутим, да одговарајући систем једначина нема решење. Нека, на пример, дате тачке имају координате (1,2) и (1,3). Уврштавањем тих вредности у једначину $y = kx + b$, добијамо систем

$$\begin{array}{rcrcl} 2 & = & k & + & b \\ 3 & = & k & + & b. \end{array}$$

који нема решења (из једначина система следи 2=3). На први поглед, то је чудно, јер кроз две тачке увек пролази права. Испоставља се, да се једначина праве кроз тачке (1,2) и (1,3) не може записати у облику $y = kx + b$ и њена једначина је $x = 1$.

На тај начин разјаснили смо узрок неспоразума – задатак није адекватно формулисан. У услову се претпостављало да једначина праве у координатној равни увек има облик $y = kx + b$; међутим, за праву паралелну са y осом то није случај. У вези с тим, једначину праве записујемо у облику $ax + by = c$. Тај начин омогућава нам да обухватимо све праве у координатној равни. На пример, ако узмемо $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = \frac{5}{2}$, добијамо једначину прве праве коју смо већ нашли, а за $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ – једначину друге праве.

Размотримо сад систем

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & \sqrt{2}y & = & \sqrt{3} \\ \sqrt{2}x & + & 2y & = & \sqrt{6}. \end{array}$$

Решити га – то на језику геометрије значи наћи заједничке тачке правих, које су дате једначинама $x + \sqrt{2}y = \sqrt{3}$, $\sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6}$. Решимо систем методом елиминације променљиве: помножимо прву једначину са $\sqrt{2}$ и одузмимо од друге:

$$\begin{array}{rcrcl} \sqrt{2}x & + & 2y & = & \sqrt{6} \\ \sqrt{2}x & + & 2y & = & \sqrt{6}; \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl} \sqrt{2}x & + & 2y & = & \sqrt{6} \\ & & 0 & = & 0. \end{array}$$

Остала је само једна једначина. То значи да систем има бесконачно много решења и да се праве поклапају. У процесу решавања уочили смо да је друга једначина исто што и прва, помножена са $\sqrt{2}$, што је могуће да се одмах не примети.

У размотреним примерима сусрели смо се са свим могућим ситуацијама: систем има јединствено решење, нема решење, има бесконачно много решења. Тако стоји ствар и у општем случају. Систем од n линеарних једначина са n непознатих, по правилу има јединствено решење. Међутим, кад је једна од једначина "линеарна комбинација" осталих једначина или је у контрадикцији са њима, систем има бесконачно много решења или их уопште нема.

Задатак 3. Наћи једначину праве која пролази кроз тачке: (а) (1,5) и (2,3); (б) (6,1) и (6,5).

Задатак 4. За које k и b се праве $y - kx = 2$ и $2y - 6x = b$: (а) поклапају; (б) не секу?

Задатак 5. За које a систем

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & (9a^2-2)y & = & 3a \\ x & + & y & = & 1 \end{array}$$

нема решење?

Задатак 6. Доказати да систем

$$\begin{array}{rcrcl} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{array}$$

има јединствено решење ако и само ако је $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. (Број $a_1b_2 - a_2b_1$ назива се *детерминанта система*.)

Грешке при заокругљивању

При решавању задатака на рачунару може доћи до чудних ситуација. Класична илустрација је решење система

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & \sqrt{2}y & = & \sqrt{3} \\ \sqrt{2}x & + & 2y & = & \sqrt{6}. \end{array} \tag{1}$$

Тај систем, као што смо видели, има бесконачно много решења. Међутим, ако га решавамо на рачунару, он ће имати ... јединствено решење! До тога долази зато што рачунар не зна да оперише на бројевима облика $\sqrt{2}$, – они се у њему замењују приближним децималним (или бинарним) разломцима.

Ако се, на пример, бројеви $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ замене њиховим приближним вредностима, на једну децималу: $\sqrt{2} = 1,4$; $\sqrt{3} = 1,7$; $\sqrt{6} = 2,4$, систем добија облик

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 1,4y & = & 1,7 \\ 1,4x & + & 2y & = & 2,4. \end{array} \tag{2}$$

Решавајући га, добијамо јединствено решење: $x = 1$, $y = 0,5$.

Ако се узму приближне вредности са 4 децимале, добија се систем

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 1,4142y & = & 1,7320 \\ 1,4142x & + & 2y & = & 2,4494, \end{array} \tag{3}$$

који има тачно једно (али сада друго) решење: $x = 0,3178$, $y = 1$.

Интересантно је да заменом броја $\sqrt{2}$ са било којом приближном вредношћу, увек добијамо јединствено решење.

Докажимо то. Замењујући у систем (1) $\sqrt{2}$ са a, добијамо

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & ay & = & \sqrt{3} \\ ax & + & 2y & = & \sqrt{6}. \end{array}$$

Доказаћемо да за $a^2 \neq 2$ систем има јединствено решење. Множећи прву једначину са a и одузимајући од ње другу, сводимо систем на облик

$$\begin{array}{rcl} x + ay & = & \sqrt{3} \\ (a^2 - 2)y & = & a\sqrt{3} - \sqrt{6}. \end{array}$$

Како је $a^2 \neq 2$, y узима јединствену вреденост $\frac{a\sqrt{3}-\sqrt{6}}{a^2-2}$. Заменом у прву једначину, налазимо јединствену вредност за x. На тај начин, ако за a не заменимо број $\sqrt{2}$ него било коју његову приближну вредност, онда је $a^2 \neq 2$, па систем има јединствено решење.

Напоменимо да се број $\sqrt{2}$ не може представити у облику коначног децималног разломка (нити у облику било ког разломка $\frac{p}{q}$, где су p и q цели бројеви). Због тога смо и добили парадокс при решавању система (1) на рачунару.

Обратимо пажњу на чињеницу, да и у случају кад су сви коефицијенти датог система коначни децимални разломци, при њиховом заокругљивању решење система може да се јако промени. Тако се систем (2) добија из система (3), и при томе су решења сасвим различита. У системима са великим бројем променљивих, грешке које настају при заокругљивању могу да доведу до битних промена решења.

Оцене грешке и налажење процедуре решавања која гарантује најмању грешку – важан је и ни у ком случају једноставан проблем. Почетком прошлог века, тај проблем почео је изучавати велики математичар Гаус а даљи систематски напредак у том правцу учињен је тек последњих деценија. У вези са фундаменталним доприносом Гауса у тој области, његовим именом назван је једноставан и универзалан метод елиминације променљивих.

Гаусов метод

Гаусов метод елиминације променљивих је најпогоднији начин решавања система линеарних једначина на рачунару. Илустроваћемо га на примеру система од три једначине са три непознате

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -4 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -2. \end{array}$$

Први корак састоји се у томе да се помоћу прве једначине елиминише променљива x из осталих једначина: прва једначина остаје непромењена, од друге одузимамо прву помножену са 2, од треће одузмемо прву помножену са 4; добијамо систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -2 \\ & - & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 2. \end{array}$$

Други корак састоји се у томе да се помоћу нове друге једначине променљива x_2 елиминише из треће једначине: прве две једначине остају непромењене; од треће одузимамо другу; добијамо систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -2 \\ & & & - & 2x_3 & = & 4. \end{array}$$

Сада из последње једначине налазимо $x_3 = -2$. Заменом $x_3 = -2$ у претходну једначину, налазимо $x_2 = 2$. Заменом $x_2 = 2$ и $x_3 = -2$ у прву једначину, налазимо $x_1 = 1$. Тако добијамо решење: (1,2,-2).

На описани начин можемо решити сваки систем линеарних једначина. Грубо говорећи, Гаусов метод састоји се у следећем:

Помоћу прве једначине елиминише се променљива x_1 из осталих једначина. Затим се помоћу нове друге једначине елиминише променљива x_2 из свих следећих. Затим се помоћу нове треће једначине елиминише променљива x_3. Поступак се наставља док из последње једначине не *добијемо вредност последње променљиве. После тога налазимо вредности променљивих обрнутим редом, замењујући познате вредности у једначине.*

Видимо да је ово скоро готов програм за рачунар. Међутим, да би тај метод радио, потребно је да у k–том кораку нова k–та једначина садржи k–ту променљиву (јер помоћу ње треба да елиминишемо ту променљиву из осталих једначина). Ако то није случај, онда је потребно да променимо редослед једначина или да преименујемо променљиве.

Може се десити, такође, да се почев од неког места, преостале једначине претворе у бројевне једнакости облика $0 = b$. Ако је бар једна од тих једнакости нетачна ($b \neq 0$), систем нема решење. Ако су све једнакости тачне, систем има бесконачно много решења. (Све такве ситуације предвиђене су у реалним рачунарским програмима.)

Приметимо да се као подаци у рачунар уносе не једначине, него таблице коефицијената – тзв. **матрице** система. На пример матрица система који смо управо решили је

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right].$$

Два корака Гаусовог метода која смо извршили при решавању, могу се представити овако:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right].$$

Треба рећи да иако се систем са три или више променљивих решава ручно, а не на рачунару, погодније је радити са матрицама, јер је мања могућност грешке.

Задатак 7. Решити систем једначина

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & + & 4x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & + & 6x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & + & 8x_5 & = & 4 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & + & 9x_5 & = & 5. \end{array}$$

Разни примери

Пример 1. Одредити бројеве a, b и c тако да функција $y = ax^2 + bx + c$ има таблицу вредности

x	0	1	2
y	1	2	2

Решење. Замењујући редом дате вредности за x и y у формулу $y = ax^2 + bx + c$, добијамо систем једначина са непознатим a, b, c:

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & & & c & = & 1 \\ a & + & b & + & c & = & 2 \\ 4a & + & 2b & + & c & = & 2. \end{array}$$

Решавањем система, налазимо $c = 1$, $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$. Према томе функција има облик

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1.$$

Пример 2. Одредити бројеве a, b, c и d тако да једнакост

$$(x-1)^2(ax+b) + (x^2+x-1)(cx+d) = 1$$

важи за све реалне вредности x.

Решење. Ако једнакост важи за произвољне вредности x, онда важи и за $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$ и $x = 2$. Замењујући те вредности у једнакост добијамо

$$\begin{gathered} c + d = 1 \\ b - d = 1 \\ -4a + 4b + c - d = 1 \\ 2a + b + 10c + 5d = 1. \end{gathered}$$

Решавајући овај систем једначина по a, b, c, d, налазимо $a = 3$, $b = 5$, $c = -3$, $d = 4$. Замењујући ове вредности у полазну једнакост, уношењем заграда, проверавамо да једнакост важи за произвољно x.

Примедба. Заменили смо само четири вредности x, јер је то довољно да бисмо одредили четири непознате.

Пример 3. Кружница уписана у троугао ABC додирује странице BC, CA, AB у тачкама P, Q, R (слика 1). Наћи $AQ = AR = x$, $BR = BP = y$ и $CP = CQ = z$, ако је $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

Решење. На основу слике 1 добија се систем

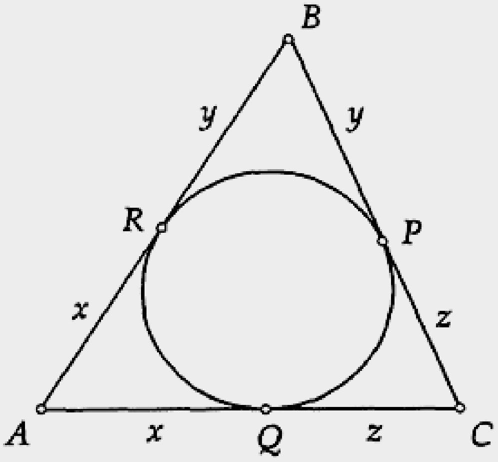
$$\begin{gathered} x + y = c \\ y + z = a \\ z + x = b, \end{gathered}$$

који се лако решава на било који од горе изложених начина, али је лепше и једноставније поступити на други начин. Сабирањем све три једначине добијамо

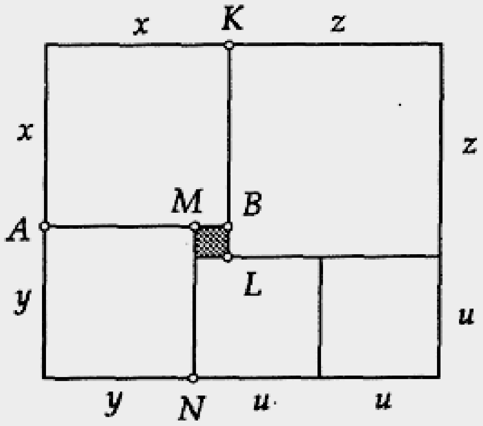
$$2x + 2y + 2z = a + b + c,$$

одакле је $x + y + z = \frac{a+b+c}{2}$. Одузимајући од ове једначине сваку од једначина система, налазимо

$$x = \frac{b+c-a}{2},\ y = \frac{a+c-b}{2},\ z = \frac{a+b-c}{2}.$$



Слика 1



Слика 2

Пример 4. Правоугаоник је разбијен у квадрате као на слици 2. Познато је да је страница осенченог квадрата једнака 1. Одредити странице осталих квадрата.

Решење. Означимо тражене странице са x, y, z, u (слика 2). Тада је $MN = y = u + 1$, $AB = x = y + 1$, $KL = z = x + 1$. Стављајући $y = u + 1$ у другу једначину, добијамо $x = u + 2$. Стављајући $x = u + 2$ у трећу, добијамо $z = u + 3$. Сада изразимо једнакост наспрамних страница датог правоугаоника:

$$x + z = y + 2u.$$

Замењујући овде x, y и z добијамо

$$(u + 2) + (u + 3) = (u + 1) + 2u,$$

одакле је $u = 4$. Сада налазимо $x = 6,\ y = 5,\ z = 7$.

Задатак 8. Математичар је изашао у шетњу – прво је ишао по равном путу а затим узбрдо, окренуо се назад и вратио кући истим путем. Он зна да је шетао укупно 5 сати, по равном путу брзином $4km/h$, узбрдо $3km/h$, а низбрдо $6km/h$. Дужина узбрдице је y. Одредити укупан пут x који је прешао математичар.

Задатак 9. Одредити бројеве a, b и c тако да важи

$$(x^2 - 3x + 2)a + (3x - 1)(bx + c) = 1$$

за произвољно x.

Задатак 10. Нека је E тачка на основици AB једнакокраког троугла ABC. У троуглове ACE и ECB уписане су кружнице које додирују дуж CE у тачкама K и H редом. Одредити дужину дужи KH, ако је $AE = a$, $EB = b$.

Задатак 11. Два играча играју следећу игру: у систему једначина

$$*x + *y = *$$
$$*x + *y = *$$

они наизменично замењују по једну звездицу неким бројем; први настоји да систем добијен на крају – има решење, други настоји да добијени систем нема решење. Ко може да победи при правилној игри, без обзира на то како игра његов противник? Ко може да победи ако је циљ првога да добијени систем нема решење а другога – да има?

Задатак 12. Решити систем једначина (a и b су дати бројеви)

$$\frac{x - y\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = a, \qquad \frac{y - x\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = b. \qquad (1)$$

Решење. Сменом $\sqrt{x^2 - y^2} = v$, добијамо систем

$$x - yv = a\sqrt{1 - v^2}$$

$$-xv + y = b\sqrt{1 - v^2}.$$

Решавајући као систем по x и y, добијамо

$$x = \frac{a + bv}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad y = \frac{b + av}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Квадрирањем једначина система (1), и одузимањем друге једначине од прве, имајући у виду да је $v \neq 1$, добијамо $v = \sqrt{a^2 - b^2}$, одакле добијамо решење:

$$x = \frac{a + b\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{1 - a^2 + b^2}}, \quad y = \frac{b + a\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{1 - a^2 + b^2}}.$$

Како смо при решавању користили последице једначина система, требало би извршити проверу; уместо тога приметимо да су формуле у решењу исте као у датом систему, ако се x замени са a и $-y$ замени са b; зато једначине система следе из формула за решење.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 1996/97 година