Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус

Стојко Стојоски
Скопје

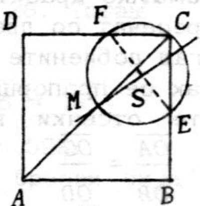
ДВЕ КОНСТРУКЦИИ НА КВАДРАТ

Познати ви се голем број конструктивни задачи за квадрат. Еве, уште две конструкции на квадрат што се помалку познати од редовната настава.

Задача 1. Дадени се три неколинеарни точки A, E и F. Да се конструира квадрат, така што едно негово теме е точката A, а двете негови страни, кои што не ја содржат точката A, да лежат на прави, кои што минуваат низ точките E и F.

Решение: а) Анализа.

Нека $ABCD$ е бараниот квадрат, при што едно теме е точката A, а страните BC и CD, кои што не ја содржат точката A, минуваат низ точките E и F соодветно.



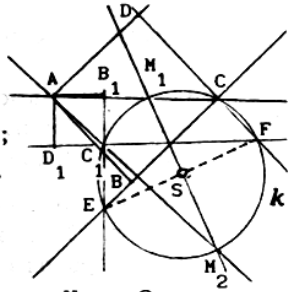
Црт. 1

Бидејќи $\sphericalangle ECF$ е прав, кружницата k конструирана над отсечката EF, како дијаметар, минува и низ точката C (според Талесовата теорема).

Дијагоналата AC го дели аголот BCD од квадратот $ABCD$ на два еднакви дела, т.е. $\sphericalangle ECA = \sphericalangle DCA = 45^\circ$, кои што истовремено се еднакви и на аглите ECM и FCM, при што точката M е пресек од дијагоналата AC и кружницата $k(S; \frac{\overline{EF}}{2})$. Од еднаквоста на периферните агли ($\sphericalangle ECM = \sphericalangle FCM$) следува и еднаквост на соодветните кружни лаци $EM = FM$.

б) Конструкција

Конструкцијата се изведува на следниот начин:



Црт. 2

- ја конструираме кружницата $k(S, \frac{\overline{EF}}{2})$;
- ја определуваме средината на лакот EF (точките M_1 и M_2);
- ја определуваме точката C со: $k \cap AM_1 = \{C\}$ (или $k \cap AM_2 = \{C_1\}$);
- ги спуштаме нормалите од точката A кон правите CE и CF и гиопределуваме точките B и D на правите CE и CF соодветно, како пресек со нормалите спуштени од точката A.
- Така ги добиваме четирите точки A, B, C и D што се темиња на бараниот квадрат.

в) Доказ: Четириаголникот $ABCD$ е квадрат затоа што

1. Аголот BCD е прав што следува од Талесовата теорема (Периферниот агол над дијаметарот во секоја кружница е прав);

2. Аглите ABC и ADC се прави по конструкција;

3. Аголот BAD е исто така прав (ако трите агли во четириаголникот се прави, тогаш и четвртиот агол е прав). Од условите 1, 2 и 3 следува дека четириаголникот $ABCD$ е правоаголник.

4. Бидејќи дијагоналата AC, аголот при темето C го дели на два складни агли, тогаш триаголниците ABC и ADC се рамнокраки правоаголни, од што следува дека $\overline{AD} = \overline{DC}$;

$AB = BC$, па според тоа правоаголникот $ABCD$ е квадрат (што и требаше да се докаже).

г) Дискусија

Разликуваме два случаја:

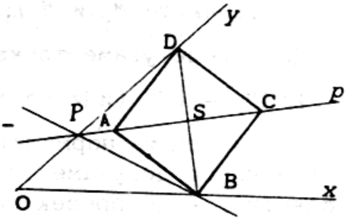
1. Ако $A \neq M_1$ и $A \neq M_2$, тогаш задачата има две решенија (црт. 2 - квадратите $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$).

2. Ако $A = M_1$ или $A = M_2$, тогаш задачата има бесконечно многу решенија. Едно од нив е $M_1EM_2F_1$, а покрај ова има уште бесконечно многу. (Зошто?)

Задача 2. Да се конструира квадрат $ABCD$, така што две спротивни темиња да лежат на краците на даден остар агол, а другите две темиња на дадена права.

Решение: а) Анализа

На црт. 3 нека е даден аголот XOY, правата p и квадратот $ABCD$, при што $B \in OX$; $D \in OY$ и $A, C \in p$. Нека $\{P\} = OY \cap p$, тогаш точката B е пресек на кракот OX и правата PY' каде PY' што е права симетрична на правата (кракот) PY во однос на дадената права p.



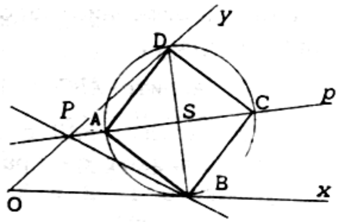
Црт. 3

Правата p е истовремено и оска на симетрија на квадратот $ABCD$ и минува низ темињата A и C.

б) Конструкција (црт. 4)

Конструкцијата се изведува на следниот начин:

- ја определуваме точката P, како пресек на правата p и едниот од краците OY (или OX) на аголот XOY.
- ја определуваме правата PY' како права симетрична на кракот PY во однос на правата p.



Црт. 3

- ја наоѓаме точката B како пресек од кракот OX и правата PY' т.е. $\{B\} = OX \cap PY'$

-ја определуваме точката D симетрична на B во однос на p.
- Нека $\{S\} = p \cap BD$, а потоа опишуваме кружница $k(S;\overline{SB})$.
- пресекот на кружницата $k(S,\overline{SB})$ и правата p ги определува другите две темиња A и C. На овој начин ги определивме точките A, B, C и D, кои што го определуваат бараниот квадрат.

в) Доказ

Очигледно од конструкцијата следува дека двете темиња на квадратот $ABCD$ лежат на правата p, т.е. $A, C \in p$, а другите две спротивни темиња лежат на краците на аголот XOY, односно $B \in OX$ а $D \in OY$.

Бидејќи $BD \perp p$, т.е. $BD \perp AC$ и точките A, B, C и D лежат на кружницата $k(S,\overline{SB})$, следува дека тетивите AB, BC, CD и DA се еднакви, т.е. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$, а тоа се пак страни на бараниот квадрат $ABCD$.

г) Дискусија

1. Ако правата p не ги сече краците OY (или OX), тогаш задачата нема решение.

2. Да претпоставиме дека правата p го сече кракот OY во точка $P \neq O$ и правата p не го сече кракот OX, тогаш:

а) ако $\sphericalangle XOY \geq 2 \cdot \sphericalangle(PY, p)$, тогаш правата PY (симетрична со PY во однос на p), не го сече кракот OX, па задачата нема решение.

б) ако $\sphericalangle XOY < 2 \cdot \sphericalangle(PY, p)$, задачата има единствено решение (постои единствен квадрат $ABCD$).

3. Нека правата p ги сече двата крака OX и OY во точките $Q \neq O$ и $P \neq O$ (каде што $p \cap OX = \{Q\}$ и $p \cap OY = \{P\}$) тогаш задачата има единствено решение.

4. Ако правата p го сече кракот OX во точката $Q \neq O$ и правата p не го сече кракот OY, тогаш случајот се сведува на 2.

5. Ако правата p минува низ темето O на $\sphericalangle XOY$ и во случај p да е симетрала на $\sphericalangle XOY$, тогаш задачата има безконечно многу решенија, а ако p не е симетрала, тогаш нема ниедно решение.