Ристо Малчески
Скопје

РЕШАВАЊЕ НА НЕКОИ НЕЛИНЕАРНИ ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

Нелинеарните Диофантови равенки се честа тема на натпреварите по математика. Притоа, најлесто користени методи за решавање на овие равенки се користење неравенства, разложување на множители, дискусија на количник, дискусија на цифрата на единиците и разгледување на остатоци при делење со даден број. Во следните разгледувања, користејќи некои од овие методи ќе решиме неколку нелинеарни Диофантови равенки.

Задача 1. Во множеството природни броеви реши ја равенката:

$$3^x + 4^x = 5^x.$$

Решение. Знаеме дека $3^2 + 4^2 = 5^2$, што значи дека едно решение на дадената равенка е $x = 2$. Дадената равенка е еквивалентна со равенката $(\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x = 1$. Затоа, од својствата на степените следува:

- ако $x < 2$, тогаш $(\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x > (\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = 1$, и
- ако $x > 2$, тогаш $(\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x < (\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = 1$,

што значи дека дадената равенка нема решение различно од $x = 2$. ■

Задача 2. Во множеството прости броеви реши ја равенката:

$$x^2 - y^2 = 45.$$

Решение. Броевите x и y се со различна парност и како $x > y$, бидејќи 2 е единствениот парен број заклучуваме дека $y = 2$. Сега, со замена во дадената равенка добиваме $x^2 = 49$, од каде наоѓаме $x = 7$. ■

Задача 3. Во множеството цели броеви реши ја равенката: $2^x + 1 = y^2$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката:

$$2^x = (y-1)(y+1).$$

Од последната равенка следува дека $y-1$ и $y+1$ се степени на бројот 2 земени и два со знак + или и двата со знак $-$.

1) Ако $y+1=2^a$ и $y-1=2^b$, $a>b$, тогаш $2^a-2^b=y+1-(y-1)=2$, од каде следува $2^b(2^{a-b}-1)=2$, т.е. $2^b=2$, бидејќи $2^{a-b}-1$ е непарен број. Според тоа, $b=1$, па затоа $y=1+2^1=3$ и $2^x=3^2-1=8$, т.е. $x=3$.
2) Ако $y+1=-2^a$ и $y-1=-2^b$, $b>a$, тогаш $2^b-2^a=y+1-(y-1)=2$ од каде следува $2^a(2^{b-a}-1)=2, 2^a(2^{b-a}-1)=2$, т.е. $2^a=2$, бидејќи $2^{b-a}-1$ е непарен број. Според тоа, $a=1$, па затоа $y=-1-2^1=-3$ и $2^x=(-3)^2-1=8$, т.е. $x=3$. ■

Задача 4. Во множеството природни броеви реши ја равеката:

$$\frac{5}{m}+\frac{401}{n}=1.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките:

$$\begin{aligned}&5n+401m=mn\\&mn-5n-401m=0\\&n(m-5)-401m+401\cdot 5=401\cdot 5\\&(m-5)(n-401)=401\cdot 5.\end{aligned}$$

Дадената равенка треба да ја решиме во множеството природни броеви, па затоа бидејќи 5 и 401 се прости броеви од последната равенка ги добиваме системите равенки:

$$\begin{cases}m-5=5\\n-401=401\end{cases}\text{ и }\begin{cases}m-5=401\\n-401=5\end{cases}$$

чии решенија се $m=10, n=802$ и $m=n=406$. ■

Задача 5. Во множеството цели броеви реши ја равенката:

$$3x^2+2xy+3=y^2+10.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките:

$$\begin{aligned}&3x^2+2xy-y^2=7\\&3x^2-xy+3xy-y^2=7\\&x(3x-y)+y(3x-y)=7\\&(3x-y)(x+y)=7.\end{aligned}$$

Понатаму, бидејќи $7=1\cdot 7=(-1)\cdot(-7)$ од последната равенка следуваат системите равенки:

$$\begin{cases}3x-y=1\\ x+y=7\end{cases}\quad \begin{cases}3x-y=7\\ x+y=1\end{cases}\quad \begin{cases}3x-y=-1\\ x+y=-7\end{cases}\quad \begin{cases}3x-y=-7\\ x+y=-1\end{cases}$$

чии решенија се

$$x=2, y=5;\quad x=2, y=-1;\ \ x=-2, y=-5;\ \ x=-2, y=-1$$

и тоа се решенија на почетната равенка. ■

Задача 6. Колку последователни природни броеви треба да се соберат за да се добие збир 2010?

Упатство. Нека се собрани $n+1$ последователни природни броеви и нека x е најмалиот од нив. Имаме:

$$x+x+1+...+x+n=2010$$

$$(n+1)x+\frac{n(n+1)}{2}=2010$$

$$(n+1)(x+\frac{n}{2})=2010$$

$$(n+1)(2x+n)=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$$

итн. ■

Задача 7. Во множеството цели броеви реши ја равенката:

$$5x^2+7y^2=945.$$

Решение. Имаме, $5x^2+7y^2=945=3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7$, што значи дека десната страна е делива со 5 и со 7. Тоа значи дека x^2 е делив со 7, а y^2 е делив со 5. Последното значи дека x е делив со 7, а y е делив со 5, т.е. $x=7k$ и $y=5l,\ k,l\in\mathbb{Z}$. Значи, дадената равенка го добива обликот

$$5(7k)^2+7(5l)^2=945,$$

Од каде добиваме $7k^2+5l^2=27$. Од последното равенство следува

$$k^2\le\frac{27}{7}<4 \text{ и } l^2\le\frac{27}{5}<6.$$

Според тоа, $k^2\le 1$ и $l^2\le 4$, односно $|k|\le 1$ и $|l|\le 2$.

Ако $k=\pm 1$, тогаш $7+5l^2=27$, од каде добиваме $l=\pm 2$, што значи дека во овој случај ги добиваме решенијата:

$$(x,y)\in\{(7,10),(7,-10),(-7,10),(-7,-10)\}.$$

Ако $k=0$, тогаш $5l^2=27$, па во овој случај немаме решенија на $7k^2+5l^2=27$, што значи дека немаме решенија на почетната равенка. ■

Задача 8. Определи го бројот на целите броеви x за кои изразот $\frac{x^2+2011}{x+2011}$ е цел број.

Решение. Имаме,

$$\frac{x^2+2011}{x+2011}=\frac{x^2-2011^2+2011^2+2011}{x+2011}=x-2011+\frac{2011\cdot 2012}{x+2011}=x-2011+\frac{2\cdot 2\cdot 17\cdot 59\cdot 2011}{x+2011}.$$

Според тоа, бројот $x+2011$ треба да е делител на бројот $2^2\cdot 17\cdot 59\cdot 2011$. Затоа бројот на цели броеви x за кои изразот $\frac{x^2+2011}{x+2011}$ е цел број е еднаков на удвоениот број природни делители на бројот $2^2\cdot 17\cdot 59\cdot 2011$, што значи дека е еднаков на $2\cdot(2+1)(1+1)(1+1)(1+1)=2\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2=48$. ■

Задача 9. Определи го бројот на сите парови природни броеви (a,b) за кои важи

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2010}.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$2010a+2010b=ab$$
$$ab-2010a-2010b=0$$
$$a(b-2010)-2010b+2010^2=2010^2$$
$$a(b-2010)+2010(b-2010)=2010^2$$
$$(b-2010)(a-2010)=2010^2=2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 67^2.$$

Според тоа, бројот $a-2010$ треба да е делител на $2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 67^2$ и за секоја вредност на $a-2010$ еднозначно е определена вредноста на $b-2010$. Затоа постојат $(2+1)(2+1)(2+1)(2+1)=81$ парови природни броеви (a,b) за кои важи $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2010}$. ■

Задача 10. Определи го бројот на сите парови природни броеви (x,y) за кои важи

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{1002\sqrt{2004}}.$$

Решение. Имаме:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{1002\sqrt{2004}}-\frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{1002^2\cdot 2004}+\frac{1}{y}-\frac{1}{1002\sqrt{501y}}.$$

Изразот на левата страна во последното равенство е рационален број, па затоа и изразот на десната страна мора да е рационаен број, што значи дека $\sqrt{501y}$ е природен број, односно $y=501b^2$. Аналогно добиваме дека мора да е $x=501a^2$. Понатаму, со замена во почетната равенка добиваме

$$\frac{1}{a\sqrt{501}}+\frac{1}{b\sqrt{501}}=\frac{1}{1002\sqrt{2004}}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2004}$$

$$(a-2004)(b-2004)=2004^2$$

$$(a-2004)(b-2004)=2^4\cdot 3^2\cdot 167^2.$$

Бидејќи бројот на паровите (x,y) за кои важи $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{1002\sqrt{2004}}$ е еднаков на бројот на паровите (a,b) закои важи $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2004}$, аналогно како во претходната задача добиваме дека бараниот број е еднаков на

$$(4+1)(2+1)(2+1)=45.\ \blacksquare$$

Задачи за самостојна работа

1. Во множеството природни броеви реши ја равенката: $5^x+12^x=13^x$.
2. Во множеството прости броеви реши ја равенката: $x^y+y^x=177$.
3. Во множеството природни броеви реши ја равеката: $x^2-y^2=45$.
4. Во множеството цели броеви реши ја равенката: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2007}$.
5. Докажи дека равенката $x^2+y^2=1990$ нема решение во множеството природни броеви.
6. Докажи дека равенката $2015x+y^2=2017^{2017}$ нема решение во множеством природни броеви.
7. Докажи дека не постојат цели броеви x,y и z такви што $x^4+y^4=z^4+3$.
8. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 2019 и кои имаат точно 9 делители.

Статијата прв пат е објавена во списанието НУМЕРУС на СММ