XXXI РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VI одделение

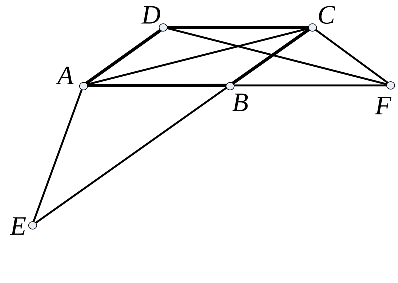
1. Во $1000\,\text{kg}$ свежи печурки има 77% вода. По испарување на одредено количество вода, масата на печурките била преполовена. Колку проценти вода содржат сега печурките?

Решение. Во $1000\,\text{kg}$ свежи печурки има $770\,\text{kg}$ вода. По испарувањето на водата масата на печурките се преполовила што значи дека испариле $500\,\text{kg}$ вода. Значи во преостанатите $500\,\text{kg}$ печурки има $770-500=$ $270\,kg$ вода. Значи сега во печурките има $\frac{270}{500}=54\%$ вода.

2. Најди го петцифрениот број, делив со 3, чии што први три цифри формираат број кој е квадрат на некој природен број, а последните три цифри формираат трицифрен број кој е куб на некој природен број.

Решение. Ако бараниот петцифрен број е $\overline{abcde}$ тогаш $\overline{abc}$ е квадрат на некој број и $\overline{cde}$ е куб на некој природен број. Тогаш $\overline{cde}\in\{125, 216, 343, 512, 729\}$. Бидејќи $\overline{abc}$ е квадрат на некој број имаме $c\in\{0,1,4,5,6,9\}$, па $\overline{cde}\in\{125, 512\}$. Трицифрени броеви кои се квадрат на природен број со цифра на единици 1 или 5 се: 121, 225, 361, 441, 625, 841 и 961. Бидејќи $a+b+c+d+e=3k$, бараниот петцифрен број е 22512.

3. Даден е паралелограмот $ABCD$. Нека E лежи на правата BC така што $\overline{AE}=\overline{AB}$ и нека F лежи на правата AB така што $\overline{CF}=\overline{CB}$. Докажи дека $\overline{DE}=\overline{DF}=\overline{AC}$.



Решение. Да го означиме аголот DAB со α. Тогаш важи

$\measuredangle CBF=\measuredangle CFB=\measuredangle ABE=\measuredangle AEB=\alpha$,

$\measuredangle BAE=180^\circ-2\alpha$ и $\measuredangle BCF=180^\circ-2\alpha$.

За триаголниците ADE и DAC важи:

$\overline{AD}=\overline{DA}$, $\overline{AE}=\overline{AB}=\overline{DC}$ и

$\measuredangle DAE=\alpha+180^\circ-2\alpha=180^\circ-\alpha=\measuredangle ADC$

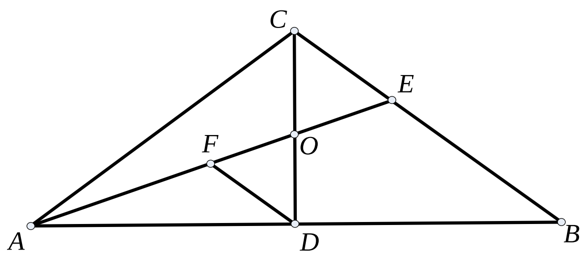
и затоа тие се складни. Тогаш $\overline{DE}=\overline{AC}$. Бидејќи

$$\overline{FC}=\overline{CB}=\overline{DA},\ \overline{DC}=\overline{AB}=\overline{EA}\ \text{ и}$$

$$\measuredangle DCF=\alpha+180^\circ-2\alpha=180^\circ-\alpha=\measuredangle EAD$$

триаголниците DFC и EDA се складни, па затоа $\overline{DF}=\overline{ED}$. Конечно, $\overline{DF}=\overline{ED}=\overline{AC}$.

4. Во рамнокрак триаголник аголот кај врвот е 108°. Докажи дека висината спуштена кон основата е два пати помала од симетралата на аголот на основата.



Решение. Да ја означиме висината кон основата со $\overline{CD}$ која воедно е и симетрала на аголот кај врвот, а со $\overline{AE}$ симетралата на аголот на основата и нека пресечната точка на CD и AE е O. Аглите на основата се $(180^\circ-108^\circ):2=36^\circ$. Тогаш $\measuredangle OCE=54^\circ$ и $\measuredangle CEO=\measuredangle CEA=180^\circ-108^\circ-18^\circ=54^\circ$.

Значи триаголникот ECO е рамнокрак, па $\overline{OC}=\overline{OE}$. Ако F е средина на $\overline{AE}$ тогаш $2\overline{FE}=\overline{AE}$. Уште, $\overline{FD}$ е средна линија на триаголникот ABE па $FD\|BC$. Тогаш $\measuredangle FDO=\measuredangle OCE=54^\circ$ и $\measuredangle OFD=\measuredangle OEC=54^\circ$.

Затоа и триаголникот FDO е рамнокрак и важи $\overline{OF}=\overline{OD}$. Тогаш имаме $\overline{FE}=\overline{FO}+\overline{OE}=\overline{OD}+\overline{OC}=\overline{CD}$. Значи $\overline{AE}=2\overline{FE}=2\overline{CD}$, па висината кон основата е два пати помала од симетралата на аголот на основата.

5. Анета и Виктор играат игра. Играта ја започнува Анета кажувајќи број од 1 до 7. Потоа Виктор го собира тој број со некој број од 1 до 7 и го кажува збирот. Анета, бројот што го кажал Виктор го собира со некој број од 1 до 7 и го кажува збирот и оваа постапка наизменично ја повторуваат, се додека некој од нив не го каже бројот 100. Победник е оној кој прв ќе го каже бројот 100. Дали Анета, како играч што ја почнува играта, може да си обезбеди сигурна победа и како?

Решение. Анета ќе победи во оваа игра ако стигне до бројот 92 (тогаш Виктор би го добил бројот $93,94,...,98$ или 99 па јасно Анета додавајќи

$7,6,...,2$ или 1 ќе го каже бројот 100). За да со сигурност го каже бројот 92, во претходниот чекор Анета треба да го каже бројот 84, односно претходно да го каже 76 итн. Бидејќи $92=11\cdot 8+4$, Анета како прв играч, треба да почне со бројот 4 и кажувајќи ги во секој нејзин следен чекор броевите помали од сто кои при делење со 8 даваат остаток 4 си обезбедува сигурна победа.

VII одделение

1. Најди ја вредноста на изразот $(3x-y)(x+3y)+(3x+y)(x-3y)$ ако важи $x^2+y^2+4x-10y+29=0$.

Решение. Од

$$x^2+y^2+4x-10y+29=(x+2)^2+(y-5)^2,$$

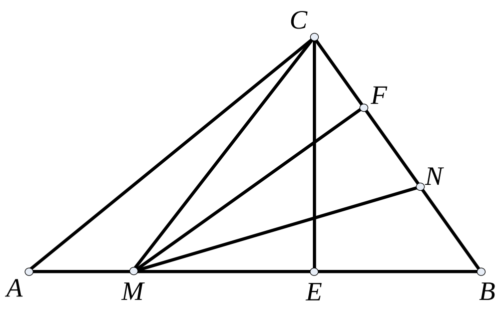
следува

$$(x+2)^2+(y-5)^2=0.$$

Оттука $x+2=0$ и $y-5=0$, односно $x=-2$ и $y=5$. Тогаш

$$(3x-y)(x+3y)+(3x+y)(x-3y)=-11\cdot 13+17=-126.$$

2. Даден е триаголникот ABC. На страната AB дадена е точка M така што $\overline{AM}=\frac{1}{5}\overline{AB}$, а на страната BC точка N така што $\overline{BN}=\frac{1}{3}\overline{BC}$. Ако плоштината на триаголникот MBN е $16\,\mathrm{cm}^2$, најди ја плоштината на триаголникот ABC.



Решение. Плоштината на триаголникот MBC е

$$P_{MBC}=\frac{1}{2}\overline{MB}\cdot\overline{CE}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\overline{AB}\cdot\overline{CE}$$
$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CE}=\frac{4}{5}P_{ABC}.$$

Од друга страна,

$$P_{MBC}=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{MF}=\frac{1}{2}\cdot 3\overline{BN}\cdot\overline{MF}$$
$$=3\cdot\frac{1}{2}\overline{BN}\cdot\overline{MF}=3P_{MBN}.$$

Значи, $3P_{MBN}=\dfrac{4}{5}P_{ABC}$ и оттука $P_{ABC}=\dfrac{15}{4}\cdot 16=60\,\mathrm{cm}^2$.

3. Најди ја цифрата на илјадите во бројот

$$2\cdot 7^{2009}+6\cdot 7^{2008}+3\cdot 7^{2007}-7^{2006}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} n &= 2\cdot 7^{2009}+6\cdot 7^{2008}+3\cdot 7^{2007}-7^{2006} \\ &= 7^{2006}(2\cdot 7^3+6\cdot 7^2+3\cdot 7-1) \\ &= 7^{2004}\cdot 7^2\cdot 1000 \\ &= (7^4)^{501}\cdot 49\cdot 1000 \\ &= 2401^{501}\cdot 49\cdot 1000 \end{aligned}.$$

Бидејќи 2401^{501} за цифра на единици ја има цифрата 1, следува дека $2401^{501}\cdot 49$ завршува на цифрата 9, па последните четири цифри на n се 9000. Значи цифрата на илјадите на бројот n е 9.

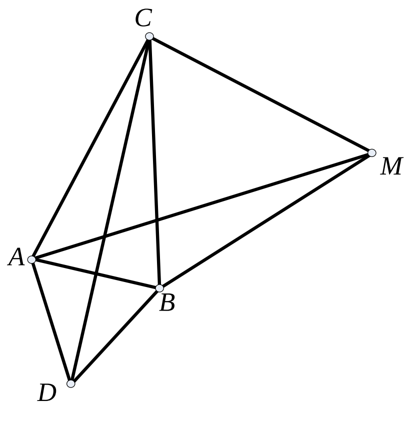
4. Аголот BCA на триаголникот ABC е 30°. Нека триаголникот ABD е рамностран така што триаголниците ABC и ABD се во различна полурамнина во однос на правата AB. Докажи дека важи $\overline{CD}^2=\overline{CA}^2+\overline{CB}^2$.

Решение. Нека M е точка така што триаголникот CBM е рамностран и триаголниците ABC и CBM се во различни полурамнини во однос на правата CB. Тогаш

$$\measuredangle ACM=30^\circ+60^\circ=90^\circ,$$

па триаголникот AMC е правоаголен. Значи

$$\overline{AM}^2=\overline{AC}^2+\overline{CM}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2.$$



Од друга страна, триаголниците DBC и ABM се складни ($\overline{DB}=\overline{AB}$, $\measuredangle DBC=\measuredangle ABM$ и $\overline{BC}=\overline{BM}$) и затоа $\overline{CD}=\overline{AM}$. Значи, $\overline{AC}^2+\overline{CB}^2=\overline{AM}^2=\overline{CD}^2$.

5. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Над страните $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CA}$ и $\overline{DA}$ како над дијаметри се конструирани полукругови кон внатрешноста на четириаголникот $ABCD$. Докажи дека не постои точка од внатрешноста на четириаголникот која е надворешна точка за сите четири полукругови.

Решение. Нека точката P е внатрешна за четириаголникот $ABCD$, а е надворешна точка за четирите полукругови. Нека правата AP ја сече полукружницата со дијаметар $\overline{AB}$ во точка Q, па $\measuredangle AQB = 90^\circ$. Тогаш

$$90^\circ = \measuredangle AQB = \measuredangle QPB + \measuredangle PBQ > \measuredangle QPB = \measuredangle APB.$$

Слично, $\measuredangle BPC < 90^\circ$, $\measuredangle CPD < 90^\circ$ и $\measuredangle DPA < 90^\circ$. Тогаш

$$360^\circ = \measuredangle APB + \measuredangle BPC + \measuredangle CPD + \measuredangle DPA < 360^\circ,$$

што не е можно.

Значи, не постои точка од внатрешноста на четириаголникот која е надворешна точка за сите четири полукругови.

VIII одделение

1. Ако за ненултите броеви a,b,c важи $\frac{ay-bx}{c} = \frac{cx-az}{b} = \frac{bz-cy}{a}$ тогаш $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Докажи.

Решение. Од $\frac{ay-bx}{c} = \frac{cx-az}{b}$ имаме $y = \frac{c^2x-acz+b^2x}{ab}$, а од $\frac{cx-az}{b} = \frac{bz-cy}{a}$ имаме $y = \frac{b^2z-acx+a^2z}{bc}$. Тогаш од $\frac{c^2x-acz+b^2x}{ab} = \frac{b^2z-acx+a^2z}{bc}$ добиваме $cx(c^2+b^2+a^2) = az(c^2+b^2+a^2)$.

Бидејќи $a,b,c \neq 0$, имаме $c^2+b^2+a^2 \neq 0$. Затоа $cx = az$, т.е. $\frac{x}{a} = \frac{z}{c}$. Од $cx = az$ следува $\frac{ay-bx}{c} = \frac{cx-az}{b} = 0$, односно $ay-bx = 0$. Значи $ay = bx$, односно $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

2. Најди ги сите трицифрени броеви $\overline{abc}$ со различни цифри за кои важи $a^2-b^2-c^2 = a-b-c$.

Решение. Ако $b=0$ тогаш $a^2-c^2 = a-c$, односно $(a-c)(a+c) = a-c$. Бидејќи од условот во задачата $a \neq c$ добиваме дека $a+c=1$, а оттука $a=1$ и $c=0$, односно цифрите b и c се еднакви што е контрадикција. Значи $b \neq 0$ и аналогно се докажува дека $c \neq 0$. Слично се докажува дека $b \neq 1$ и $c \neq 1$. Ако $a=1$, тогаш од условот следува дека

$b^2+c^2=b+c$, т.е. $b(b-1)+c(c-1)=0$, а од друга страна бидејќи $b,c\neq 0$ и $b,c\neq 1$ имаме $b(b-1)+c(c-1)>0$. Значи, $a\neq 1$. Натаму ќе го разгледуваме еквивалентното равенство

$$a(a-1)=b(b-1)+c(c-1).$$

Производот на левата страна на ова равенство припаѓа во множеството

$$\{2,6,12,20,30,42,56,72\},$$

а збирот на производите на десната страна во множеството

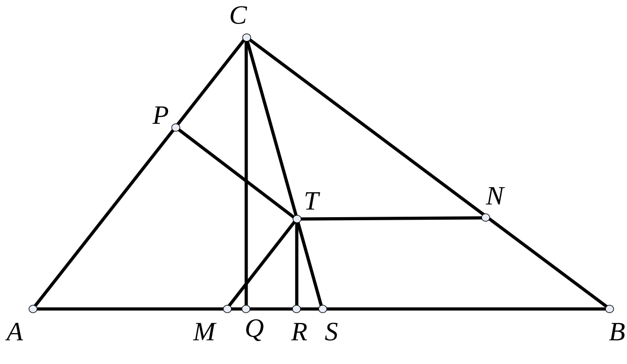
$$\{8,14,22,32,44,58,74,18,26,36,48,62,78,42,$$
$$54,68,84,50,76,92,72,86,102,98,114,128\}$$

Бидејќи 42 и 72 се во пресекот на двете множества имаме:

i) $42=12+30$, односно $7\cdot 6=4\cdot 3+6\cdot 5$, па ги добиваме броевите 746 и 764;

ii) $72=30+42$, односно $9\cdot 8=6\cdot 5+7\cdot 6$, па ги добиваме броевите 967 и 976. Значи, бараните броеви се 746, 764, 967 и 976.

3. Нека T е тежиште на триаголникот ABC. Правата p која минува низ T и е паралелна со AC ја сече страната AB во точка M, правата q која минува низ T и е паралелна со AB ја сече страната BC во точка N и правата r која минува низ T и е паралелна со BC ја сече страната AC во точка P. Докажи дека трапезите $MBNT$, $NCPT$ и $PAMT$ имаат еднакви плоштини.



Решение. Нека $\overline{CS}$ е тежишна линија во триаголникот ABC. Тогаш триаголниците CSB и CTN се слични и важи

$$\frac{\overline{TN}}{\overline{SB}}=\frac{\overline{CT}}{\overline{CS}}=\frac{2}{3}.$$

Оттука

$$\overline{TN}=\tfrac{2}{3}\overline{SB}=\tfrac{1}{3}\overline{AB}.$$

Исто така, триаголниците ASC и MST се слични и важи $\frac{\overline{MS}}{\overline{AS}}=\frac{\overline{TS}}{\overline{CS}}=\frac{1}{3}$, па $\overline{MS}=\frac{1}{3}\overline{AS}=\frac{1}{6}\overline{AB}$. Тогаш $\overline{MB}=\overline{MS}+\overline{SB}=\frac{1}{6}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{2}{3}\overline{AB}$. Ако $\overline{CQ}$ е висина во триаголникот ABC, а $\overline{TR}$ е висина во трапезот $MBNT$

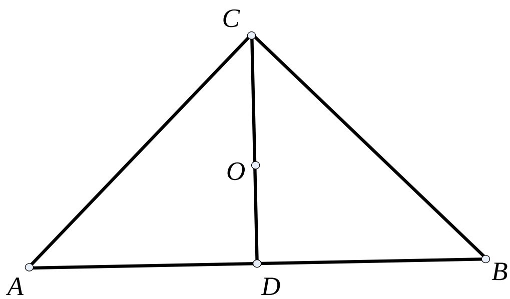
тогаш триаголниците QSC и RST се слични и имаме $\frac{\overline{TR}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{TS}}{\overline{CS}} = \frac{1}{3}$.

Значи, $\overline{TR} = \frac{1}{3}\overline{CQ}$ и за плоштината на трапезот $MBNT$ добиваме

$$P_{MBNT} = \frac{\frac{2}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AB}}{2} \cdot \frac{1}{3}\overline{CQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CQ}}{2} = \frac{1}{3} P_{ABC}.$$

Слично, се добива дека $P_{NCPT} = \frac{1}{3} P_{ABC}$ и $P_{PAMT} = \frac{1}{3} P_{ABC}$.

4. Нека O е центар на впишаната кружница во рамнокракиот триаголник ABC $(\overline{AC} = \overline{BC})$. Правата CO ја сече страната AB во точката D. Ако важи $\overline{AB} \cdot \overline{OD} = \overline{AC} \cdot \overline{CO}$ тогаш триаголникот ABC е правоаголен. Докажи!



Решение. Да означиме со $\overline{OD} = r$, $\overline{CD} = h$. Тогаш

$$\overline{CO} = h - r.$$

Од $\overline{AB} \cdot \overline{OD} = \overline{AC} \cdot \overline{CO}$ имаме

$$\overline{AB} \cdot r = \overline{AC} \cdot (h - r)$$

од каде што $h = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{\overline{AC}} r$.

Од $\frac{\overline{AB} \cdot h}{2} = \frac{(\overline{AB} + 2\overline{AC})r}{2}$ имаме

$h = \frac{\overline{AB} + 2\overline{AC}}{\overline{AB}} r$. Значи, $\frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{\overline{AC}} r = \frac{\overline{AB} + 2\overline{AC}}{\overline{AB}} r$ и оттука

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC} \cdot \overline{AB} = \overline{AC} \cdot \overline{AB} + 2\overline{AC}^2.$$

Конечно,

$$\overline{AB}^2 = 2\overline{AC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$$

односно триаголникот ABC е правоаголен.

5. Дадено е множество од 7 природни броеви кои имаат различни остатоци при делење со 20. Докажи дека од тоа множество може да избереме 4 броеви a, b, c и d така што бројот $a + b - c - d$ е делив со 20.

Решение. Од даденото множество може да избереме два броја a и b на $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ начини. За секој таков избор го формираме збирот $a + b$ и го одредуваме остатокот при делење со 20. Значи добиени се 21 остатоци.

Но при делење со 20 можат да се добијат 20 остатоци, па меѓу добиените остатоци има барем два исти. Според тоа постојат два пара броеви, пар a и b и пар c и d, така што $a+b$ и $c+d$ имаат ист остаток при делење со 20. Броевите a,b,c и d се различни меѓу себе, бидејќи во спротивно, ако $a=c$, тогаш b и d ќе имаат ист остаток при делење со 20, што не е можно. Значи, бараниот број е $a+b-c-d$.