Ристо Малчески, Македонија
Алија Муминагиќ, Данска

ЛУКАСОВИТЕ И ФИБОНАЧИЕВИТЕ БРОЕВИ НА НЕОЧЕКУВАНИ МЕСТА

Низата Фибиналчиеви броеви е определена со $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ и

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \text{ за секој } n \geq 1. \tag{1}$$

а низата Лукасови броеви е определена со $l_0 = 2, l_1 = 1$ и

$$l_{n+1} = l_n + l_{n-1}, \text{ за секој } n \geq 1. \tag{2}$$

Првите неколку членови на низата фибоначиеви броеви се: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., а на низата Лукасови броеви се: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, ...

Во [4] е докажано дела за Фибоначиевите броеви важи формулата

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n], \text{ за секој } n \geq 0 \tag{3}$$

а за Лукасовите броеви важи формулатаа

$$l_n = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n, \text{ за секој } n \geq 0 \tag{4}$$

и се докажани голем број идентите во врска со Фибоначиевите и Лукасовите броеви. Во продолжение ќе разгледаме две задачи во кои неочекувано се појавуваат Фибоначиевите и Лукасовите броеви, а на крајот ќе разгледаме уште една задача која е природни продолжение на третата задача. Пред да преминеме на разгледување на споменатите задачи, ќе ја решиме следнава помошна задача.

Задача 1. Докажи дека за секој $n \geq 3$ важи

$$f_{2n-5} = 3f_{2n-3} - f_{2n-1}. \tag{5}$$

Решение. Ако ја искористиме релацијата (1), добиваме дека за $m \geq 2$ важи

$$\begin{aligned} f_{m+2} + f_{m-2} &= (f_m + f_{m+1}) + f_{m-2} \\ &= f_m + (f_{m-1} + f_m) + f_{m-2} \\ &= 2f_m + (f_{m-1} + f_{m-2}) \\ &= 3f_m. \end{aligned} \tag{6}$$

Сега, ако во (6) ставиме $m = 2n-3$, ја добиваме формулата $f_{2n-1} + f_{2n-5} = 3f_{2n-3}$, која е еквивалентна на (3).

Забелешка. Равенството (5) може да се докаже и со примена на формулата (3). Деталите ги оставаме на оставаме на читателот за вежба. ■

Задача 2. Низата броеви $\{a_n\}$ е определена со $a_0 = a_1 = 1$ и

$$a_{n+1} = 7a_n - a_{n-1} - 2, \text{ за } n \geq 1. \tag{7}$$

Докажи дека a_n е точен квадрат за секој $n \in \mathbb{N}_0$.

Решение. *Прв начин*. Имаме

$$a_1 = 1 = 1^2 = f_1^2,$$
$$a_2 = 7\cdot 1 - 1 - 2 = 2^2 = f_3^2,$$
$$a_3 = 7\cdot 4 - 1 - 2 = 5^2 = f_5^2,$$
$$a_4 = 7\cdot 25 - 4 - 2 = 13^2 = f_7^2,$$

па затоа логично е да претпоставиме дека

$$a_n = f_{2n-1}^2, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}_0. \quad (8)$$

Формулата (8) ќе ја докажеме со индукција по n.

Погоре видовме дека (8) важи за $n = 1, 2, 3, 4$. Нека претпоставиме дека (8) важи за сите природни броеви помали или еднакви на n. Според (7) имаме

$$a_{n+1} = 7a_n - a_{n-1} - 2,$$
$$a_n = 7a_{n-1} - a_{n-2} - 2.$$

Ако ги одземеме последните две равенства, по средувањето го добиваме равенството

$$a_{n+1} = 8a_n - 8a_{n-1} + a_{n-2},$$

па од индуктивната претпоставка и од задача 1 последователно добиваме

$$a_{n+1} = 8f_{2n-1}^2 - 8f_{2n-3}^2 + f_{2n-5}^2,$$
$$a_{n+1} = 8f_{2n-1}^2 - 8f_{2n-3}^2 + (3f_{2n-3} - f_{2n-1})^2$$
$$a_{n+1} = 9f_{2n-1}^2 - 6f_{2n-3}f_{2n-1} + f_{2n-3}^2$$
$$a_{n+1} = (3f_{2n-1} - f_{2n-3})^2$$
$$a_{n+1} = f_{2n+1}^2.$$

Според тоа, (8) важи и за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n.

Втор начин. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$a_{n+1} - 7a_n + a_{n-1} = -2 \quad (9)$$

Соодветната хомогена диференцна равенка на равенката (9) е

$$a_{n+1} - 7a_n + a_{n-1} = 0. \quad (10)$$

Карактеристичната равенка на равенката (10) е $r^2 - 7r + 1 = 0$ и корени на истата се $r_{1,2} = \frac{7\pm 3\sqrt{5}}{2}$, па затоа општото решение на (10) е дадено со

$$A\left(\tfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\tfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^n = A\left(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + B\left(\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}.$$

Бидејќи десната страна на (9) е полином и 1 не е корен на карактеристичната равенка, добиваме дека партикуларното решение е $x_n = A_0$. Со замена во равенката (9) добиваме $A_0 - 7A_0 + A_0 = -2$, односно $A_0 = \frac{2}{5}$. Значи, општото решение на равенката (5) е дадено со

$$a_n = A(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2})^{2n} + B(\tfrac{3-\sqrt{5}}{2})^{2n} + \tfrac{2}{5},$$

со почетни услови $a_0 = a_1 = 1$, од каде добиваме

$$A + B = \tfrac{3}{5},\ \tfrac{7+3\sqrt{5}}{2}A + \tfrac{7-3\sqrt{5}}{2}B = \tfrac{3}{5},$$

па затоа $A = \frac{3-\sqrt{5}}{10}$, $B = \frac{3+\sqrt{5}}{10}$. Според тоа,

$$\begin{aligned}
a_n &= \tfrac{3-\sqrt{5}}{10}(\tfrac{7+3\sqrt{5}}{2})^n + \tfrac{3+\sqrt{5}}{10}(\tfrac{7-3\sqrt{5}}{2})^n + \tfrac{2}{5}\\
&= \tfrac{1}{5}(\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}(\tfrac{14+6\sqrt{5}}{4})^n + \tfrac{3+\sqrt{5}}{2}(\tfrac{14-6\sqrt{5}}{4})^n + 2)\\
&= \tfrac{1}{5}(\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2})^{2n} + \tfrac{3+\sqrt{5}}{2}(\tfrac{3-\sqrt{5}}{2})^{2n} + 2)\\
&= \tfrac{1}{5}((\tfrac{3+\sqrt{5}}{2})^{2n-1} + (\tfrac{3-\sqrt{5}}{2})^{2n-1} + 2)\\
&= (\tfrac{1}{\sqrt{5}}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n-1} - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n-1}])^2\\
&= f_{2n-1}^2,
\end{aligned}$$

т.е. a_n е точен квадрат за секој $n \in \mathbb{N}_0$.

Трет начин. Нека $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ е генераторната функција на низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Од $a_0 = a_1 = 1$ последователно следуваат равенствата

$$\frac{A(x)-1}{x} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + ... + a_{n+1}x^n + ...$$

$$\frac{A(x)-1-x}{x^2} = a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + ... + a_{n+2}x^n + ...$$

Ако во последното равенство замениме $a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n - 2$, за $n \geq 0$ и земеме предвид дека $2 + 2x + 2x^2 + ... + 2x^n + ... = \frac{2}{1-x}$, добиваме

$$\frac{A(x)-1-x}{x^2} = 7\frac{A(x)-1}{x} - A(x) - \frac{2}{1-x},$$

од каде наоѓаме

$$A(x) = \frac{4x^2-7x+1}{(1-x)(x^2-7x+1)} = \frac{4x^2-7x+1}{(1-x)(x-\frac{7+3\sqrt{5}}{2})(x-\frac{7-3\sqrt{5}}{2})} = \frac{M}{1-x} + \frac{N}{x-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} + \frac{P}{x-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}.$$

Останува уште со методот на неопределени коефициенти да ги најдеме коефициентите M, N, P, а потоа користејќи ги својствата на генераторните функции да го определиме коефициентот a_n пред x^n (види во [4]), па потоа да докажеме дека $a_n = f_{2n-1}^2$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

Задача 3. Нека

$$s_n = (\mathrm{tg}\,9^\circ + \mathrm{tg}\,81^\circ)^n + (\mathrm{tg}\,117^\circ + \mathrm{tg}\,153^\circ)^n,\ \text{за секој } n \in \mathbb{N}.$$

Докажи дека $s_n = 4^n l_n$, за секој $n \in \mathbb{N}$, каде $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низата Лукасови броеви.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(45^\circ + x) + \operatorname{tg}(45^\circ - x) &= \frac{\sin(45^\circ + x)}{\cos(45^\circ + x)} + \frac{\sin(45^\circ - x)}{\cos(45^\circ - x)}\\ &= \frac{\sin(45^\circ + x)\cos(45^\circ - x) + \cos(45^\circ + x)\sin(45^\circ - x)}{\cos(45^\circ + x)\cos(45^\circ - x)}\\ &= \frac{\sin(45^\circ + x + 45^\circ - x)}{(\cos 45^\circ \cos x - \sin 45^\circ \sin x)(\cos 45^\circ \cos x + \sin 45^\circ \sin x)}\\ &= \frac{\sin 90^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)} = \frac{2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2}{\cos 2x}\end{aligned}$$

т.е.

$$\operatorname{tg}(45^\circ + x) + \operatorname{tg}(45^\circ - x) = \frac{2}{\cos 2x}. \tag{11}$$

Да ставиме

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{tg} 117^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 72^\circ),\\ b &= \operatorname{tg} 153^\circ = \operatorname{tg}(-27^\circ) = \operatorname{tg}(45^\circ - 72^\circ),\\ c &= \operatorname{tg} 9^\circ = \operatorname{tg} 189^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 144^\circ),\\ d &= \operatorname{tg} 81^\circ = \operatorname{tg}(-99^\circ) = \operatorname{tg}(45^\circ - 144^\circ).\end{aligned}$$

Понатаму, ако искористиме дека $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ и $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, (Докажи!), тогаш од од (11) добиваме

$$a + b = \operatorname{tg}(45^\circ + 72^\circ) + \operatorname{tg}(45^\circ - 72^\circ) = \frac{2}{\cos 144^\circ} = \frac{-2}{\cos 36^\circ} = \frac{-2}{\frac{\sqrt{5}+1}{4}} = 2 - 2\sqrt{5},$$

$$c + d = \operatorname{tg}(45^\circ + 144^\circ) + \operatorname{tg}(45^\circ - 144^\circ) = \frac{2}{\cos 288^\circ} = \frac{2}{\cos 72^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}} = 2 + 2\sqrt{5}.$$

Според тоа, од претходните разгледувања и од (4) следува

$$\begin{aligned} s_n &= (\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ)^n + (\operatorname{tg} 117^\circ + \operatorname{tg} 153^\circ)^n\\ &= (c+d)^n + (a+b)^n\\ &= (2 + 2\sqrt{5})^n + (2 - 2\sqrt{5})^n\\ &= 4^n[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n]\\ &= 4^n l_n,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 4. Докажи дека при ознаки од решението на задача 3 за секој $n \in \mathbb{N}_0$ важи

i) $u_n = 1 + a^n + b^n + c^n + d^n = 5D$, за некој $D \in \mathbb{Z}$, и

ii) $v_n = c^n + d^n - a^n - b^n = \sqrt{5}K$, за некој $K \in \mathbb{Z}$.

Решение. Имаме, $u_0 = 5$, а според решението на задача 3 добиваме

$$u_1 = 1 + a + b + c + d = 1 + 2 - 2\sqrt{5} + 2 + 2\sqrt{5} = 5,$$

што значи дека тврдењето i) важи за $n = 0$ и $n = 1$. Понатаму, за $n = 0$ имаме $v_0 = 0 = \sqrt{5} \cdot 0$, а според решението на задача 3 за $n = 1$ имаме

$$v_1 = c + d - a - b = 2 + 2\sqrt{5} - 2 + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5},$$

што значи дека тврдењето ii) важи за $n = 0$ и $n = 1$.

Понатаму, лесно се проверува дека $\mathrm{tg}(45^\circ + x) = \mathrm{ctg}(45^\circ - x)$, од каде следува

$$ab = cd = 1. \tag{12}$$

Нека претпоставиме дека тврдењата i) и ii) се точни за секој природен број помал или еднаков на n, т.е. дека

$$u_n = 1 + a^n + b^n + c^n + d^n = 5D', \qquad D' \in \mathbb{Z},$$
$$u_{n-1} = 1 + a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1} + d^{n-1} = 5D'', \qquad D'' \in \mathbb{Z},$$

и

$$v_n = c^n + d^n - a^n - b^n = \sqrt{5}K', \qquad K' \in \mathbb{Z},$$
$$v_{n-1} = c^{n-1} + d^{n-1} - a^{n-1} - b^{n-1} = \sqrt{5}K'', \qquad K'' \in \mathbb{Z}.$$

Тогаш, од (12), од решението на задача 3 и од индуктивната претпоставка следува

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 1 + a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1} + d^{n+1} \\
&= 1 + a^{n+1} + a^n b + b^{n+1} + b^n a + c^{n+1} + c^n d + d^{n+1} + d^n c - (a^n b + b^n a + c^n d + d^n c) \\
&= 1 + a^n(a+b) + b^n(a+b) + c^n(c+d) + d^n(c+d) - ab(a^{n-1} + b^{n-1}) - cd(c^{n-1} + d^{n-1}) \\
&= 2 + (2 - 2\sqrt{5})(a^n + b^n) + (2 + 2\sqrt{5})(c^n + d^n) - (1 + a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1} + d^{n-1}) \\
&= 2(1 + a^n + b^n + c^n + d^n) - (1 + a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1} + d^{n-1}) + 2\sqrt{5}(c^n + d^n - a^n - b^n) \\
&= 10D' - 5D'' + 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}K' = 5(2D' - D'' + 2K'),
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
v_{n+1} = c^{n+1} + d^{n+1} - a^{n+1} - b^{n+1} &= c^{n+1} + c^n d + d^{n+1} + d^n c - a^{n+1} - a^n b - b^{n+1} - b^n a - \\
&\quad - c^n d - d^n c + a^n b + b^n a \\
&= c^n(c+d) + d^n(c+d) - a^n(a+b) - b^n(a+b) - \\
&\quad - cd(c^{n-1} + d^{n-1}) + ab(a^{n-1} + b^{n-1}) \\
&= (2 + \sqrt{5})(c^n + d^n) - (2 - \sqrt{5})(a^n + b^n) \\
&\quad - (c^{n-1} + d^{n-1} - a^{n-1} - b^{n-1}) \\
&= 2(c^n + d^n - a^n - b^n) + \sqrt{5}(c^{n-1} + d^{n-1} + a^{n-1} + b^{n-1}) \\
&\quad - (c^{n-1} + d^{n-1} - a^{n-1} - b^{n-1}) \\
&= 2\sqrt{5}K' + \sqrt{5}(5D'' - 1) - \sqrt{5}K'' \\
&= \sqrt{5}(2K' + 5D'' - 1 - K''),
\end{aligned}$$

што значи дека тврдењата *i*) и *ii*) се точни и за $n+1$. Конечно, од прнципот на математичка индукција следува дека тврдењата *i*) и *ii*) се точни за секој $n \in \mathbb{N}_0$. ■

Коментар. Во претходната задача ние всушност докажавме дека за секој $n \in \mathbb{N}_0$ бројот

$$u_n = \mathrm{tg}^n 9^\circ + \mathrm{tg}^n 45^\circ + \mathrm{tg}^n 81^\circ + \mathrm{tg}^n 117^\circ + \mathrm{tg}^n 153^\circ$$

е природен број и дека $5 \mid u_n$, за секој $n \in \mathbb{N}_0$.

Литература

1. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: *Тригонометрија, хипеболични функции и Фибоначиеви броеви*, Математички талент, Скопје, 2023
2. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: *Фибоначиеви броеви и полиноми со целобројни коефициенти*, Математички талент, Скопје, 2021
3. Малчески, Р., Муминагиќ, А.: *Некои релации за Фибоначиевите и Лукасовите броеви*, Математички талент, Скопје, 2021
4. Малчески, Р.: *Комбинаторика (дефиниции, теореми и задачи – прв дел)*, Математички талент, Скопје, 2023