ЈБМО 2010

1. Реалните броеви a,b,c,d се такви што важи
$$abc-d=1,\quad bcd-a=2,\quad cda-b=3,\quad dab-c=-6.$$
Докажи дека
$$a+b+c+d\neq 0.$$
Решение. Јасно, a,b,c,d се различни од 0, бидејќи ако било кој од нив е еднаков на 0, тогаш не е можно да се исполнети сите четири равенства. Нека претпоставиме дека $a+b+c+d=0$. Ако ги собереме дадените равенства од условот на задачата и искористиме дека
$$a+b+c+d=0$$
добиваме
$$abc+bcd+cda+dab=0.$$
Значи,
$$0=ab(c+d)+cd(a+b)=ab(c+d)-cd(c+d)=(c+d)(ab-cd).$$
Ако $c+d=0$, тогаш $a+b=0$, па ако ги собереме првото и четвртото равенство од сулвот на задачата добиваме
$$-5=ab(c+d)-(c+d)=0,$$
што е противречност.
Нека $ab=cd$ и $a+b\neq 0$. Аналогно добиваме
$$0=bc(a+b)+ad(b+c)=-bc(b+c)+ad(b+c)=(b+c)(ad-bc).$$
Ако $b+c=0$, тогаш собирајќи ги третото и четвртото равенство од условот на задачата повторно добиваме противречност. Затоа останува $ad=bc$. Аналогно ја отфрламе можноста $b+d=0$ и заклучуваме дека $ac=bd$. Множејќи ги $ab=cd$ и $ad=bc$ добиваме $a^2bd=c^2bd$, односно $a^2=c^2$, па затоа $(a-c)(a+c)=0$. Но, $a+c\neq 0$, па затоа $a=c$. Сега од $a\neq 0$ и $ab=cd$ следува $b=d$, Според тоа,
$$0=a+b+c+d=2a+2b=2(a+b)\text{, т.е. } a+b=0,$$
што противречи на $a+b\neq 0$. Конечно, од последната противречност следува тврдењето на задачата.

2. Определи ги сите природни броеви n такци што $n2^{n+1}+1$ е точен квадрат.

Решение. Нека $n2^{n+1}+1=x^2$. Тогаш $x=2k+1$, за некој $k\in\mathbb{N}$, па затоа $n2^{n-1}=k(k+1)$. Броевите k и $k+1$ се заемно прости, па затоа еден од нив сигурно е делив со 2^{n-1} и еден од нив сигурно е помал или еднаков на n. Значи, $k \leq n$ и $k+1 \geq 2^{n-1}$. Според тоа, $n+1 \geq k+1 \geq 2^{n-1}$.

Ќе докажеме дека за $n \geq 4$ важи $2^{n-1} \geq n+1$.

За $n=4$ имаме $8=2^{4-1} \geq 5=4+1$, т.е. неравенството е точно.

Нека претпоставиме дека неравенството е точно за некој $n \geq 4$. Тогаш,

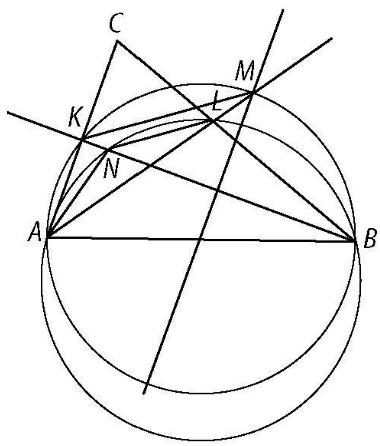
$$2^{(n+1)-1}=2\cdot 2^{n-1} \geq 2(n+1) \geq n+2=(n+1)+1,$$

што значи дека неравенството е точно за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека е точно за секој природен број $n \geq 4$.

Од претходно изнесеното следува дека за $n \geq 4$ задачата нема решение.

Останува да ги провериме случаите $n=1,2,3$, при што важи $n2^{n+1}+1=$ $3,17,49$. Според тоа, единствено решение е $n=3$.

3. Нека AL и BK се симетралите на аглите на разностраниот триаголник ABC ($L \in BC, K \in AC$). Симетралата на отсечката BK ја сече правата AL во точката M. Нека N е точка на правата BK таква што $LN \| MK$. Докажи, дека $\overline{LN}=\overline{NA}$.



Решение. Во произволен триаголник симетралата на страна и симетралата на спротивниот агол на таа страна се сечат на опишаната кружница околу тој триаголник, па затоа точката M припаѓа на опишаната кружница околу $\triangle ABK$. Оттука користејќи ја еднаквоста на периферни агли и на агли со паралелни краци добиваме

$$\measuredangle CBK=\measuredangle ABK=\measuredangle AMK=\measuredangle NLA.$$

Значи

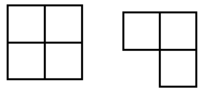
$$\measuredangle ABN=\measuredangle ABK=\measuredangle ALN,$$

па затоа четириаголникот $ABLN$ е тетивен. Ако искористиме дека AK е симетрала на $\measuredangle ABC$, тогаш од својството на периферните агли следува

$$\measuredangle NAL=\measuredangle NABL=\measuredangle CBK=\measuredangle ABK=\measuredangle NLA.$$

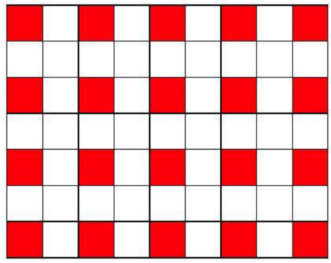
Според тоа, $\triangle ALN$ е рамнокрак, па затоа $\overline{LN}=\overline{NA}$.

4. Табла со димензии 9×7 е покриена со тетрамина и тримина прикажани на цртежите десно. Нека n е бројот тетрамината кои учествуваат во покривањето. Определи ги сите можни вредности на n.



Решение. Со m да го означиме бројот на тримината кои учествуваат во покривањето. Тогаш за вкупниот број важи

$$4n+3m=63,$$



па затоа $3|n$. Таблата да ја обоиме како на цртежот десно. Тогаш секое тетрамино покрива точно едно црно поле, додека секое тримино покрива едно ли ниту едно црно поле. Затоа бројот на тримината и тетрамината е поголем од бројот на црните полиња, т.е. $m+n\geq 20$. Оттука следува дека $3m+3n\geq 60$, па ако искористиме дека $3m=63-4n$ добиваме дека $n\leq 3$. Но, $3|n$, па затоа $n=0$ или $n=3$. Следните примери покажуваа покривања за $n=0$ и $n=3$, што значи дека тоа се и решенија на задачата.