Ристо Малчески
Алекса Малчески

306 ПОДГОТВИТЕЛНИ ЗАДАЧИ ЗА МАТЕМАТИЧКИ ОЛИМПИЈАДИ

Скопје, октомври 2016

Издавач: Сојуз на математичари на Македонија
Ул. Бул. Александар Македонски бб
Скопје, Република МАкедонија

Претседател на СММ: проф. д-р Алекса Малчески

Одговорен уредник
Д-р Слаѓана Брсакоска, Скопје

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(079.1)

МАЛЧЕСКИ, Ристо
306 подготвителни задачи за математички олимпијади / Ристо Малчески, Алекса Малчески. - Скопје : Сојуз на математичари на Македонија, 2016. - 52 стр. ; 21 см

ISBN 978-9989-646-92-8
1. Малчески, Алекса [автор]
а) Математика - Задачи
COBISS.MK-ID 101774346

Содржина

Предговор

Дел од активностите на Сојузот на математичарите на Македонија (СММ) е организацијата на натпревари по математика, кои се реализираат во сите степени на образованието: основно, средно и високо. Покрај грижата за надарените ученици за математика, кој е примарна цел на дејствувањето на СММ и за што се издаваат периодичните списанија Нумерус и Сигма, националниот систем на натпревари, како и меѓународните натпревари Европски математички куп (ЕМЦ), Европската математичка олимпијада за девојки (ЕГМО), Иранската геометриска олимпијада (ИГО) и Азиско-пацифичката математичка олимпијада (АПМО) се во функција и на изборот на екипите кои ја претставуваат нашата земја на Јуниорската Балканска математичка олимпијада, Балканската математичка олимпијада и Меѓународната математичка олимпијада (ИМО). Оттука, имајќи предвид дека задачите кои се задаваат на споменатите натпревари значително се над нивото на задачите кои се усвојуваат во редовната настава, за успешно учество на учениците на меѓународните натпревари е неопходна дополнителна подготовка.

Имајќи го предвид претходно кажаното, од средината на месец април, па до почетокот на месец септември 2016 година на учениците кои се пласираа за учество на Македонската математичка олимпијада (ММО) и на Јуниорската македонска математичка олимпијада (ЈММО) во три циклуси им се испраќаа тестови составени од четири и три задачи. За решавање на овие тестови учениците имаа време од еден до два дена, после што ги добиваа решенијата на истите. Се разбира, ова не може да ги замени класичните подготовки реализирани во училница, но сепак придонесува учениците подобро да се подготват за учество на претстојните натпревари.

Во оваа книга се дадени формулациите на 306 задачи, кои се содржеа во споменатите тестови. Притоа истите се групирани по области, но не се подредени по тежина, бидејќи за ваков вид задачи тоа скоро и да не е можно да се направи. Во рамките на секоја од шесте теми, најпрво се дадени задачите кои беа задавани за подготовка на ЈММО и ЈБМО, а потоа се поместени задачите кои беа задавани за подготовка на ММО, БМО, ИМО и ИГО. Притоа, во рамките на секоја тема задачите се задавани по истиот редослед како што се содржани во тестовите, т.е. не се групирани според сродност.

Се надеваме дека оваа мала, но содржајна збирка на нерешени задачи ќе придонесе за развојот на надарените ученици за математика и дека истата ќе послужи како патоказ за нивото кое треба да се достигне за успешно учество на престижните меѓународни математички натпревари.

Октомври, 2016 Авторите
Скопје

Теорија на броеви

1. Определи ги сите ненегативни цели броеви n, за кои бројот $a_n = 6\underbrace{00...0}_{n}4$ е полн квадрат.

2. Докажи дека секој прост број p е делител на бесконечно многу броеви од видот $2^n - n$.

3. Докажи дека постојат бесконечно многу сложени природни броеви n такви што n е делител на $3^{n-1} - 2^{n-1}$.

4. Ако p е прост број, тогаш $p \mid \underbrace{11...1}_{p}\underbrace{22...2}_{p}...\underbrace{99...9}_{p} - 123456789$. Докажи!

5. Дадени се n цели броеви, такви што производот на секој нив со збирот на останатите зголемен за 1 е делив со збирот на сите n броеви. Докажи дека збирот на квадратите на дадените броеви е делив со нивниот збир.

6. Определи ги сите природни броеви a, b и c, за кои е исполнето равенството $a!b! = a! + b! + c!$.

7. Определи ги сите прости броеви p и q такви што
$$(2p-q)^2 = 17p - 10q.$$

8. Определи го најмалиот природен број n за кој секоја од дропките
$$\frac{7}{n+9}, \frac{8}{n+10}, \frac{9}{n+11}, ..., \frac{30}{n+32}, \frac{31}{n+33}$$
е нескратлива.

9. Определи ги сите парови прости броеви p и q такви што
$$p^6 - q^9 = p^3q^3 + 1.$$

10. Дадена е равенката $|x^2 - yz| + |y^2 - zx| + |z^2 - xy| = n$, каде x, y, z се цели и n е природен број.
а) Докажи дека равенката има решение за секој непарен природен број n.
б) Определи ги сите природни броеви m за кои равенката нема решение за $n = 2^m$.

11. Во множеството цели ненегативни броеви реши ја равенката
$$7^x - 2 \cdot 5^y = -1.$$

12. Определи ги сите прости броеви p и q такви што $p\,|\,30q-1$ и $q\,|\,30p-1$.

13. Определи ги сите парови природни броеви (a,b) такви што $\frac{a^2(b-a)}{b+a}$ е квадрат на прост број.

14. Определи го најмалиот прост број p за кој равенката
$$p(31x^2-x+24)=6y^3$$
нема решение во множеството цели броеви.

15. Определи ги сите природни броеви x, y и n, за кои е точно равенството
$$x^2+8xy+2x+12y^2-3=p^n,$$
каде p е прост број.

16. Природните броеви a, b и c се такви, што бројот $a+b+c$ се дели со 6, а бројот $ab+bc+ca$ се дели со 3. Докажи, дека бројот $a^n+b^n+c^n$ се дели со 6 за секој природен број $n\geq 2$.

17. Дали постојат три заемно прости броеви такви, да квадратот на секој од нив се дели на збирот на другите два?

18. Нека $q=\frac{3p-5}{2}$, каде p е непарен прост број. Да означиме
$$S_q=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{q(q+1)(q+2)}.$$
Докажи, дека ако $\frac{1}{p}-2S_q=\frac{m}{n}$, $m,n\in\mathbb{Z}$, тогаш разликата $n-m$ се дели со p.

19. Нека n е природен број. Докажи, дека ако n^5+n^4+1 има точно 6 различни природни делители, тогаш n^3-n+1 е точен квадрат на природен број.

20. Определи ги сите цифри a $(0\leq a\leq 9)$, за кои постои таков природен број n, што последните 2011 цифри на бројот 3^n-1 се еднакви на a.

21. На почетокот на таблата се запишани 10 последователни природни броеви. Во еден чекор се произволно се избираат два броја (да ги означиме со a и b) и на нивно место се запишуваат броевите $a^2-2011b^2$ и ab.

После неколку чекори на таблата не останал ниту еден од почетните броеви. Дали е можно новодобиените 10 броеви да се последователни 10 природни броја (запишани во некаков редослед)?

22. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$p^3 - q^7 = p - q.$$

23. Симон избрал два различни природни броја a и b и во тетратката ги запишал броевите $a, a+2, b$ и $b+2$. Потоа на таблата ги запишал шесте производи формирани од различните парови броеви запишани во тетратката. Колку најмногу точни квадрати запишал Симон на таблата?

24. Дадени се различни природни броеви $a_1, a_2, ..., a_{11}$ не помали од 2, чиј збир е еднаков на 407. Дали постои природен број n, за кој збирот на остатоците при делењето на n со броевите $a_1, a_2, ..., a_{11}, 4a_1, 4a_2, ..., 4a_{11}$ е еднаков на 2012?

25. На таблата се запишани природните броеви од 1 до 10. Избираме два од запишаните броеви x и y, ги бришиме и на нивно место го запишуваме бројот $\varphi(x+y)$, каде φ е функцијата на Ојлер (т.е. $\varphi(k)$ е бројот на природните броеви, помали или еднакви на k, кои се зааемно прости с k; на пример, ако p е прост број, тогаш $\varphi(p) = p-1$). Опишаната операција ја реализираме, додека на таблата не остане еден број. Определи ја можната најмала вредност на последниот број.

26. Природните броеви $m \geq 3$ и n се такви што $n > m(m-2)$. Определи го најголемиот природен број d таков што d е делител на $n!$ и k не е делител на d, за секој $k \in \{m, m+1, ..., n\}$.

27. Определи ги сите заемно прости природни броеви a и b такви што $\overline{b,a} = \frac{a}{b}$.

28. За природниот број n ќе велиме дека е *убав*, ако секој негов природен делител, зголемен за 1, е делител на бројот $n+1$. Определи ги сите убави природни броеви.

29. Определи ги сите прости броеви p, за кои бројот $2p^2 - 3p - 1$ е точен куб на природен број.

30. Даден е прост број $p>3$. Докажи, дека ако постои природен број k, за кој k^2+5 се дели со p, тогаш постојат природни броеви m и n, такви што $p^2=m^2+5n^2$.

31. Низата $a_0,a_1,a_2,...$ е зададена со равенствата $a_0=4, a_n=a_{n-1}^2-a_{n-1}$, за секој $n\in\mathbb{N}$.
а) Докажи, дека постојат бесконечно многу прости броеви, кои се делители барем на еден член од низата $a_0,a_1,a_2,....$
б) Дали постојат бесконечно многу прости броеви, кои не се делители на ниту еден член на низата $a_0,a_1,a_2,...$?

32. Дали постојат бесконечно многу парови природни броеви (m,n) такви што $m\,|\,(n^2+1)$ и $n\,|\,(m^2+1)$.

33. Определи ги сите природни броеви k, за кои производот на првите k прости броеви, намален за 1, е точен степен (поголем од еден) на природен број.

34. Определи ги сите природни броеви k за кои производот на првите k непарни прости броеви, намален за 1, е точен степен (поголем од прв) на природен број.

35. Определи го најголемиот природен број, кој е делител на p^4-1 за секој прост број $p>3$.

36. Да се определи петцифрен природен број n таков што збирот на неговите цифри е минимален и n^3-1 се дели со 2556.

37. Определи ги сите природни броеви x и y за кои бројот $\frac{xy^3}{x+y}$ е точен куб на прост број.

38. Нека a и b се заемно прости природни броеви и a_n и b_n се цели броеви, дефинирани со равенството $(a+b\sqrt{2})^{2n}=a_n+b_n\sqrt{2}$. Определи ги сите прости броеви p, за кои постои природен број $n\le p$ таков што p е делител на b_n.

39. За секој природен број n со канонично претставување $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_t^{a_t}$ ставаме

$$\omega(n)=t,\quad \Omega(n)=a_1+a_2+...+a_t\,.$$

Докажи го или оповргни го следново тврдење: За дадени произволен природен број k и произволни позитивни реални броеви α и β постои природен број n, за кој $\frac{\omega(n+k)}{\omega(n)}>\alpha$, $\frac{\Omega(n+k)}{\Omega(n)}<\beta$.

40. Нека p е непарен прост број. Докажи дека

$$1^{p-2}+2^{p-2}+...+(\tfrac{p-1}{2})^{p-2}\equiv\frac{2-2^p}{p}(\mathrm{mod}\,p)\,.$$

41. Во множеството цели броеви реши ја равенката $2x^2-y^{14}=1$.

42. Дадени се природни броеви m и n. Определи го најмалиот природен број $N, N\geq m$, со следново својство: ако $N-$елементно множество од цели броеви содржи комплетен систем на остатоци по модул m, тогаш тоа множество има непразно подмножество, чиј збир на елементи е делив со n.

43. За секој реален број x со $[x]$ го означуваме најголемиот цел број, кој е помал или еднаков на x. Определи ги сите прости броеви p, за кои

$$[\tfrac{p^2+1}{2}]+[\tfrac{p^2+2}{3}]+[\tfrac{p^2+7}{8}]+[\tfrac{p^2+18}{24}]$$

е прост број.

44. Нека n е природен број и x е позитивен реален број, таков што ниту еден од броевите $x,2x,...,nx$ и ниту еден од броевите $\frac{1}{x},\frac{2}{x},...,\frac{[nx]}{x}$ не е цел број. Докажи дека е точно равенството

$$[x]+[2x]+...+[nx]+[\tfrac{1}{x}]+[\tfrac{2}{x}]+...[\tfrac{[nx]}{x}]=n[nx]\,. \qquad (1)$$

45. Нека n е природен број. Докажи, дека постојат бесконечно многу тројки по парови заемно прости броеви (x,y,z) такви што е исполнето равенството $nx^2+y^3=z^4$.

46. Определи ги сите природни броеви $n\geq 2$ со следново својство: за секои $i,j\in\{0,1,2,...,n\}$ броевите $i+j$ и $\binom{n}{i}+\binom{n}{j}$ имаат еднаква парност.

47. Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$(y^3+xy-1)(x^2+x-y)=(x^3-xy+1)(y^2+x-y)\,.$$

48. Нека $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е растечка функција за која постојат прости броеви $p_1, p_2,..., p_n$ и природни броеви $s_1, s_2,..., s_n$ такви, што за секои $i=1,2,...,n$ множеството $\{f(p_i r+s_i)\,|\,r=1,2,...\}$ е бесконечна аритметичка прогресија. Докажи, дека постои $a\in\mathbb{N}$ таков, што $f(a+1)$, $f(a+2),...,$ $f(a+n)$ е аритметичка прогресија.

49. Определи го најмалиот природен број кој е делив со 2009 и чиј збир на цифри е еднаков на 2009.

Неравенства

1. Нека a,b и c се страни на триаголник со периметар 1. Докажи, дека
$$a^2+b^2+c^2+4abc<\tfrac{1}{2}.$$

2. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ се такви што $a^2+b^2+c^2=3$. Докажи, дека
$$\frac{a}{3c(a^2-ab+b^2)}+\frac{b}{3a(b^2-bc+c^2)}+\frac{c}{3b(c^2-ca+a^2)}\le\frac{1}{abc}.$$
Кога важи знак за равенство?

3. Нека a,b,c е позитивни реални броеви, такви што $a+b+c=1$. Докажи, дека важи неравенството
$$\frac{1}{\sqrt{(a+2b)(b+2a)}}+\frac{1}{\sqrt{(b+2c)(c+2b)}}+\frac{1}{\sqrt{(c+2a)(a+2c)}}\ge 3.$$
Кога важи знак за равенство?

4. Докажи, дека ако $x+y+z=1$, тогаш важи $x^2+y^2+z^2\ge\frac{1}{3}$. Кога важи знак за равенство?

5. Нека x и y се позитивни реални броеви такви што $x^3+y^3=4xy$. Докажи, дека

   а) $x+y\le 4$ б) $x^2+y^2\le 8$.

6. Нека x,y и z се позитивни броеви.

   а) Докажи, дека $3(xy+yz+zx)\le(x+y+z)^2$.

   б) Определи ја најмалата вредност на изразот $A=\frac{1}{xy+yz+zx}-\frac{4}{x+y+z}$.

7. Нека A е најголемиот меѓу позитивните рационални броеви a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 и a_7, за кои е исполнето

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=12 \quad \text{и}$$
$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2+a_7^2=24.$$

Определи ги броевите, кога A прима можна најголема вредност.

8. Секои два од реалните броеви a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 се разликуваат барем за 1. За некој реален број k се исполнети равенствата

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2k \text{ и } a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=2k^2.$$

Докажи, дека $k^2 \geq \frac{25}{3}$.

9. Дадени са изразите:

$$M=a^4-6a^3+b^2+24b-119 \text{ и } N=b^4-6b^3+a^2+24a+151,$$

каде a и b се реални броеви. Докажи, дека $M+N\geq 0$. Кога се достигнува равенство?

10. Нека a,b,c се позитивни реални броеви, за кои е исполнето неравенството $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2 \leq 4$. Докажи, дека

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2}\geq 3.$$

11. Докажи, дека за произволни произволни реални броеви x,y,z е исполнето неравенството

$$\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}+\frac{1+yz+yx}{(1+z+x)^2}+\frac{1+zx+zy}{(1+x+y)^2}\geq 1.$$

12. Нека a,b,x,y и z се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}\geq \frac{3}{a+b}.$$

13. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}^+$. Докажи, дека

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}+\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}+\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1}\geq a+b+c+3.$$

14. Нека a,b,c се позитивни реални броеви чиј збир е еднаков на 1. Докажи, дека важи неравенството

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\leq 1.$$

15. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c\leq 3$. Определи ја најмалата можна вредност на изразот

$$\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)}.$$

16. Нека a,b,c се различни реални броеви.

1) Пресметај ги вредностите на изразите

а) $\frac{1+ab}{a-b}\cdot\frac{1+bc}{b-c}+\frac{1+bc}{b-c}\cdot\frac{1+ca}{c-a}+\frac{1+ca}{c-a}\cdot\frac{1+ab}{a-b}$.

б) $\frac{1-ab}{a-b}\cdot\frac{1-bc}{b-c}+\frac{1-bc}{b-c}\cdot\frac{1-ca}{c-a}+\frac{1-ca}{c-a}\cdot\frac{1-ab}{a-b}$.

2) Докажи го неравенството

$$\frac{1+a^2b^2}{(a-b)^2}+\frac{1+b^2c^2}{(b-c)^2}+\frac{1+c^2a^2}{(c-a)^2}\geq\frac{3}{2}.$$

Дали може да важи знак за равенство?

17. Определи го најголемиот реален број k, за кој неравенството

$$(k+\tfrac{a}{b})(k+\tfrac{b}{c})(k+\tfrac{c}{a})\leq(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{a})(\tfrac{b}{a}+\tfrac{c}{b}+\tfrac{a}{c})$$

е исполнето за произволни позитивни реални броеви.

18. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви да $x+y+z=1$. Докажи, дека $A\geq B^2$, каде

$$A=\frac{(1+xy+yz+zx)(1+3x^2+3y^2+3z^2)}{9(x+y)(y+z)(z+x)} \text{ и } B=\frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{3+9x^2}}+\frac{y\sqrt{y+1}}{\sqrt[4]{3+9y^2}}+\frac{z\sqrt{z+1}}{\sqrt[4]{3+9z^2}}.$$

19. Дадени се позитивните реални броеви a,b,c,d такви што

$$2(a+b+c+d)\geq abcd.$$

Докажи, дека

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geq abcd.$$

20. Определи ги сите реални броеви x,y и z, поголми или еднакви на 1, кои го задоволуваат условот

$$\min\{\sqrt{x+xyz},\sqrt{y+xyz},\sqrt{z+xyz}\}=\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}. \qquad (1)$$

21. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$\frac{2x^2+xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}+\frac{2y^2+yz}{(z+\sqrt{xy}+x)^2}+\frac{2z^2+zx}{(x+\sqrt{yz}+y)^2}\geq 1.$$

22. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви, што $ab+bc+ca=1$. Докажи го неравенството

$$\sqrt{3}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \le \frac{a\sqrt{a}}{bc}+\frac{b\sqrt{b}}{ca}+\frac{c\sqrt{c}}{ab}.$$

23. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви, што $abc=1$. Докажи, дека

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2} \le 1.$$

24. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што

$$xy+yz+zx=x+y+z.$$

Докажи го неравенството

$$\frac{1}{x^2+y+1}+\frac{1}{y^2+z+1}+\frac{1}{z^2+x+1} \le 1.$$

Кога во претходното неравенство важи знак за равенство?

Низи, функции и функционални равенки

1. Реалните броеви a,b,c и d се такви што $b-d \ge 5$ и полиномот

$$P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$$

има четири реални корени x_1,x_2,x_3 и x_4. Определи ја најмалата можна вредност на производот

$$(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1).$$

2. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ такви што

$$xf(xy)+f(-y)=xf(x), \text{ за секои } x,y\in\setminus\{0\}.$$

3. За функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ важи: за произволни x и y такви што $x>y$ точно е неравенството $(f(x))^2 \le f(y)$. Докажи дека множеството вредности на функцијата f се содржи во интервалот $[0,1]$.

4. Низата $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ е определена со $x_2=1, x_3=1$ и

$$(n+1)(n-2)x_{n+1}=n(n^2-n-1)x_n-(n-1)^3x_{n-1}, \text{ за } n\ge 3.$$

Докажи дека x_n е цел број ако и само ако n е прост број.

5. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$f(xy-1)+f(x)f(y)=2xy-1. \qquad (1)$$

6. Низата природни броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ го задоволува равенството
$$a_{n+2}=[\frac{2a_{n+1}}{a_n}]+[\frac{2a_n}{a_{n+1}}],$$
каде $[x]$ е функцијата цел дел од x. Докажи дека постои природен број m таков што $a_m=4$ и $a_{m+1}\in\{3,4\}$.

7. Определи ги сите полиноми $P(x)$ со целобројни коефициенти, за кои $P(n)$ е делител на $2557^n+213\cdot 2015$ за секој природен број n.

8. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ такви што
$$xf(2f(y)-x)+y^2f(2x-f(y))=\frac{f(x)^2}{x}+f(yf(y)), \qquad (1)$$
за секои цели броеви x и y, $x\neq 0$.

9. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што $f(0)=0, f(1)=2013$ и
$$(x-y)(f(f^2(x))-f(f^2(y)))=(f(x)-f(y))(f^2(x)-f^2(y)),$$
за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

10. Даден е полином со реални коефициенти
$$p(x)=x^{2013}+a_{2012}x^{2012}+...+a_1x+a_0.$$
Нека сите корени на $p(x)$ се
$$-b_{1006},-b_{1005},...,-b_1,0,b_1,...,b_{1005},b_{1006},$$
каде $b_1,...,b_{1005},b_{1006}$ се позитивни реални броеви чиј производ е еднаков на 1. Докажи дека $a_3a_{2011}\geq 1012036$.

11. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за кои равенството
$$f(x^2+2yf(x))+f(y^2)=f^2(x+y)$$
е исполнето за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

12. Дали постои функција $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ која не е полином и таква што за секои $a,b\in\mathbb{Z}$ важи $a-b\mid f(a)-f(b)$?

13. Определи ги сите полиноми $p(x)$ со водечки коефициент 1, такви што
1) $p(x)$ не е константен полином и сите нули му се реални и различни,
2) ако a и b се нули на $p(x)$, тогаш и $a+b+ab$ е нула на $p(x)$.

14. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ такви што равенството
$$f(a-b)+f(c-d)=f(a)+f(b+c)+f(d)$$

е исполнето за сите реални броеви a,b,c и d кои го задоволуваат равенството $ab+bc+cd=0$.

15. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$(x^2+y^2)f(xy)=f(x)f(y)f(x^2+y^2),$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

16. Даден е природен број $n\geq 2$. Определи го најмалиот природен број m за кој постои низа природни броеви $a_1,a_2,...,a_n$, која ги задоволува условите:
    1) $a_1<a_2<...<a_n=m$;
    2) Сите $n-1$ броеви $\frac{a_1^2+a_2^2}{2},...,\frac{a_{n-1}^2+a_n^2}{2}$ се точни квадрати.

17. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(m)+f(n)=f(mn)+f(m+n+mn), \qquad (1)$$

за секои $m,n\in\mathbb{Z}$.

18. Докажи, дека постои единствена функција $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ таква што $f(1)=f(2)=1$ и

$$f(n)=f(f(n-1))+f(n-f(n-1)),\ n=3,4,... .$$

За оваа функција да се пресмета $f(2^m)$, кога $m\geq 2$.

19. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$(x+y)(f(x)-f(y))=(x-y)f(x+y),$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

20. Нека $Q(x)$ и $R(x)$ се полиноми со реални коефициенти, за кои е познато, дека постои полином $P(x)$ со реални коефициенти таков, што $P(Q(x))+P(R(x))$ е константа за секој x. Докажи, дека барем еден од полиномите $P(x)$ и $Q(x)+R(x)$ е константа за секој x.

21. Дали постојат природни броеви m и n и функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што се исполнети следниве услови:
    i) $f(f(x))=2f(x)-x-2,$ за секој $x\in\mathbb{R}$,
    ii) $m\leq n$ и $f(m)=n$.

22. Даден е полином $P(x)$ и броеви a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 за кои $a_1a_2a_3\neq 0$. Нека за секој реален број x е исполнето равенството

$$P(a_1x+b_1)+P(a_2x+b_2)=P(a_3x+b_3).$$

Докажи, дека $P(x)$ има барем еден реален корен.

23. Дадена е низата $a_0=1, a_1=1, a_{n+1}=14a_n-a_{n-1}-4$, за $n\geq 1$. Докажи, дека сите членови на оваа низа се точни квадрати.

24. Низата $\{a_n\}$ е зададена со $a_1=\frac{1}{2}, a_m=\frac{a_{m-1}}{2ma_{m-1}+1}, m>1$. Пресметај го збирот $a_1+a_2+...+a_k$, за произволен $k\in\mathbb{N}$.

25. Нека $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ е функција, за која
   1) $f(a)=0 \Leftrightarrow a=0$,
   2) $f(ab)=f(a)f(b)$ и
   3) $f(a+b)\leq 2\max\{f(a),f(b)\}$.

   Докажи, дека $f(a+b)\leq f(a)+f(b)$, за секој $a,b\in[0,+\infty)$.

26. Нека g е полином со ненегативни коефициенти и степен поголем или еднаков на 2. Определи ги сите функции $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, за кои
$$f(f(x)+g(x)+2y)=f(x)+g(x)+2f(y) \qquad (1)$$
за секои $x,y\in(0,+\infty)$.

27. Определи ги сите растечки функции $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ такви што
$$f(\tfrac{x+f(x)}{2}+y)=2x-f(x)+f(f(y)),\ \text{за секои } x,y\geq 0.$$

28. Определи ги сите полиноми $P(x,y)$ со реални коефициенти такви што
$$P(ab,c^2+1)+P(bc,a^2+1)+P(ca,b^2+1)=0,\ \text{за секои } a,b,c\in\mathbb{R}.$$

29. Дали постојат функции $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што
$$|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|>1,\ \text{за секои } x\neq y.$$

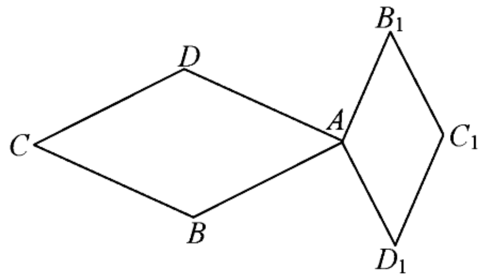
30. Определи ги сите полиноми со реални коефициенти такви, што за секој релане број x важи $P(x^2+1)=P(x)^2+1$.

31. Дадена е низата $x_1=1, x_2=4$ и $x_{n+2}=4x_{n+1}-x_n, n\geq 1$. Определи ги сите природни броеви m такви, што бројот $3x_n^2+m$ е точен квадрат за секој природен број n.

Геометрија

1. Даден е паралелограм $ABCD$, за кој точката S е пресек на неговите дијагонали. Периметарот на триаголникот CDS е за $5,6cm$ помал од периметарот на триаголникот BCS. Симетралата на аголот $\measuredangle BAD$ ја сече страната BC во точка M така што $\overline{BM} : \overline{BM} = 7:4$.
   Определи ја должината на страната и периметарот на паралелограмот $ABCD$.

2. Ромбот $ABCD$ и ромбот $AB_1C_1D_1$ имаат заедничко теме A и притоа $\measuredangle DAB_1 = \measuredangle BAD_1$ (види цртеж). Докажи дека средината на отсечката BD_1, пресекот на дијагоналите на ромбот $ABCD$ и пресекот на дијагоналите $AB_1C_1D_1$ се темиња на рамнокрак триаголник.



3. Даден е ΔABC и внатрешна точка M, за која важи $\measuredangle MAC = \measuredangle MBC = 30^\circ$. Ако P и Q се подножните точки на нормалите повлечени од M соодветно кон страните BC и AC, а D е средината на страната AB, докажи дека ΔPQD е рамностран.

4. Нека $ABCD$ е трапез со основи AB и CD и нека $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d, \overline{AC} = m$ и $\overline{BD} = n$. Познато е дека важи $m^2 + n^2 = (a+c)^2$.
   а) Докажи, дека AC и BD се заедно нормални.
   б) Докажи, дека $ac < bd$.

5. Над страните AB, BC и AC на рамностраниот триаголник ABC замени се соодветно точки M, N и Pтакви што $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = \frac{1}{2}$. На отсечката PM земена е точка Q таква што $\frac{\overline{PQ}}{\overline{QM}} = \frac{1}{2}$. Определи ги аглите на триаголникот AQN.

6. На кружницата последователно во насока на движењето на стрелката на часовникот се избрани точки A, B, C, D и E такви што $\measuredangle ABE = \measuredangle BEC = \measuredangle ECD = 45^\circ$. Докажи дека

$$\overline{AB}^2+\overline{CE}^2=\overline{BE}^2+\overline{CD}^2. \qquad (1)$$

7. За конвексниот четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AD}=\overline{BD}, \overline{AB}=\overline{AC}$, $\measuredangle CAD=25^\circ$ и $\measuredangle ACB=85^\circ$. Определи ги аглите на четириаголникот.

8. Дадени се кружница k со центар O и радиус 5, тетива AB со должина 7 и точка C на тетивата. Кружницата k_1 која минува низ точките A, O и C по вторпат ја сече k во точката D. Определи го аголот $\measuredangle ABD$ ако периметарот на $\triangle ACD$ е 12.

9. Даден е рамнокрак триаголник ABC $(\overline{AC}=\overline{BC})$ со $\measuredangle ACB=20^\circ$. Симетралата на страната BC ја сече AC во точката Q, а точката P од страната BC е таква што $\overline{BP}=\overline{BA}$. Определи ја големината на $\measuredangle PBQ$.

10. Точката M е средина на страната AC на триаголникот ABC со тежиште G. На страната AB земена е точка N таква што $\overline{AN}=\frac{1}{3}\overline{AB}$. Пресечната точка на отсечките BM и CN е означена со P, а тежиштата на триаголниците CPM и BNP се означени со Q и R, соодветно. Докажи, дека точките Q, G и R лежат на една права и најди го односот $\frac{P_{ARQ}}{P_{ABC}}$ на плоштините на триаголниците ARQ и ABC.

11. На страната $\overline{BC}=6cm$ на рамностран ΔABC земена е точка M таква, што $\measuredangle MAB=20^\circ$. Нека N е точка на правата AM, при што M е меѓу A и N. Определи ја должината на отсечката MN, ако $\measuredangle BCN=50^\circ$.

12. Во правоаголен триаголник ABC $(\measuredangle ACB=90^\circ)$ симетралата на аголот CL $(L\in AB)$ ја дели хипотенузата на отсечки со должини a и b, $(a>b)$. Ако H_1 и H_2 се ортоцентрите соодветно на ΔALC и ΔBLC, определи ја плоштината на четириаголника AH_1BH_2.

13. На страните BC, CA и AB на триаголникот ABC соодветно се избрани точките A_1, B_1 и C_1 така што се исполнети равенствата

$$\overline{AB_1}-\overline{AC_1}=\overline{CA_1}-\overline{CB_1}=\overline{BC_1}-\overline{BA_1}.$$

Нека I_A, I_B, I_C соодветно се центрите на впишаните кружници во триаголниците $AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C$. Докажи, дека центарот на кружницата опишана околу $\triangle I_A I_B I_C$ се совпаѓа со центарот на кружницата впишана во $\triangle ABC$.

14. Даден е правоаголен триаголник ABC со хипотенуза $AB, \overline{AB}=12cm$ и катета $AC, \overline{AC}=4cm$. Точката M е средина на катетата BC, а точките P и Q се наоѓаат на хипотенузата AB така, што $\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QB}$.
а) Определи го $\measuredangle PMQ$.
б) Ако симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече полуправата QM во точката K, определи ја должината на отсечката KP.

15. Даден е ΔABC со $\measuredangle ACB=100^\circ$. Средината на страната AC е означена со M, а на нејзината симетрала е земена точка K таква, што $2\overline{MK}=\overline{BK}$ и $\measuredangle MKB=100^\circ$. Определи ги аглите на ΔABC.

16. Даден е ΔABC и внатрешна точка D од страната AB. Правата CD ја сече опишаната кружница k на ΔABC во точка E. Ако F е втората заедничка точка на правата AC и опишаната кружница k_1 на ΔADE, а G е пресечната точка на правите FD и BC, докажи, дека точките B, D, E и G лежат на една кружница. Определи го видот на ΔABC, ако правата AC е тангента на k_1.

17. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ с висини AK $(K\in BC)$ и BL $(L\in AC)$. Нека G и T се тежиштата соодветно на ΔABL и ΔABK. Докажи, дека острииот агол меѓу AK и BL е еднаков на 60° ако и само ако $\overline{GT}=\frac{1}{6}\overline{AB}$.

18. Даден е триаголник ABC и точки E и D на страната AB така, што $\measuredangle ACE=\measuredangle ECD=12^\circ$. Определи го $\measuredangle ABC$, ако $\measuredangle ECB=90^\circ$ и $\overline{AC}+\overline{CD}=\overline{AB}$.

19. Даден е $\triangle A_1A_2A_3$ со тежиште G, во кој P_1, P_2 и P_3 соодветно се средините на страните A_2A_3, A_3A_1 и A_1A_2. Нека точките G_1, G_2 и G_3 се такви, што отсечките P_1G_1, P_2G_2 и P_3G_3 имаат заедничка точка M, за која важи
$$\overline{MG_1}:\overline{P_1G_1}=\overline{MG_2}:\overline{P_2G_2}=\overline{MG_3}:\overline{P_3G_3}=1:m,$$
каде $m>1$ е реален број. Ако точките M_1, M_2 и M_3 се соодветно од отсечките GG_1, GG_2 и GG_3 и се такви, што
$$\overline{GM_1}:\overline{M_1G_1}=\overline{GM_2}:\overline{M_2G_2}=\overline{GM_3}:\overline{M_3G_3}=10:11,$$

определи ги вредностите на m, за кои отсечките A_1M_1, A_2M_2 и A_3M_3 се паралелни и еднакви.

20. Точката M е средина на страната AC на остроаголниот $\triangle ABC$, во кој $\overline{AB} > \overline{BC}$, а Ω е кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Тангентите на Ω во точките A и C се сечат во точка P. Отсечките BP и AC се сечат во точка S. Нека AD е висина во $\triangle ABP$. Кружницата ω, опишана околу $\triangle CSD$, ја сече Ω во точка $K \neq C$. Докажи, дека $\measuredangle CKM = 90^\circ$.

21. Даден е $\triangle ABC$ со центар на впишаната кружница I. Кружницата која минува низ B и во точката I ја допира правата AI по вторпат ја сече правата AB во точката P и по вторпат ја сече правата BC во точката Q. Правата QI ја сече AC во точката R. Докажи, дека $\overline{AR} \cdot \overline{BQ} = \overline{PI}^2$.

22. Нека P е внатрешна точка за $\triangle ABC$. Правата AP по вторпат ја сече кружницата опишана околу $\triangle ABC$ во точката A'. Аналогно се дефинираат точките B' и C'. Нека O_A е центарот на кружницата опишана околу $\triangle BCP$. Аналогно се дефинираат точките O_B и O_C. Нека $O_A^{'}$ е центарот на кружницата опишана околу $\triangle B'C'P$. Аналогно се дефинираат точките $O_B^{'}$ и $O_C^{'}$. Докажи, дека правите $O_AO_A^{'}, O_BO_B^{'}$ и $O_CO_C^{'}$ се сечат во една точка.

23. Нека s е полупериметарот на $\triangle ABC$ и нека E и F се точки на правата AB такви да важи $\overline{CE} = \overline{CF} = s$. Докажи дека опишаната кружница околу $\triangle EFC$ и кружницата која ја допира страната AB и продолженијата на страните AC и BC на триаголникот ABC се допираат.

24. Точката M е средина на страната AC на $\triangle ABC$. На отсечките AM и CM соодветно се избрани точки P и Q такви, што $\overline{PQ} = \frac{\overline{AC}}{2}$. Кружницата, опишана околу $\triangle ABQ$ ја сече страната BC во точка $X \neq B$, а кружницата, опишана околу $\triangle BCP$ ја сече страната AB во точка $Y \neq B$. Докажи, дека четириаголникот $BXMY$ е тетивен.

25. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ за кој најкратката страна е AB и најдолгата страна е CD ($\overline{AB} < \overline{CD}$). Докажи, дека на отсечката CD може да се избере точка E со следново својство: за секоја точка $P \neq E$ од отсечката CD должината на отсечката, која ги поврзува цен-

трите на кружниците опишани околу триаголниците APD и BPE, не зависи од изборот на точката P.

26. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, за кој $\measuredangle BAC = 100^\circ$. На продолжението на страната AB преку темето B земени се точки D и E такви што $\overline{BC} = \overline{AD} = \overline{BE}$. Докажи, дека $\overline{BC} \cdot \overline{DE} = \overline{BD} \cdot \overline{CE}$.

27. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, за кој важи $\overline{AC} = \overline{BC} > \overline{AB}$. Точките E и F се средини на страните AC и AB, соодветно. Симетралата l на AC ја сече AB во точката K, а правата низ B паралелна со KC ја сече AC то точката L. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ACP$, каде P е произволна точка од отсечката BF. Отсечките BH и CP се сечат во точката J, а правите FJ и l се сечат во точката M. Нека W е пресечната точка на правите FL и l. Докажи, дека $\overline{AW} = \overline{PW}$ ако и само ако точките B, E, F и M лежат на една кружница.

28. Дадена е кружница C и точка P надвор од кружницата. Отсечките PA и PB се тангенти на кружницата C и K е произволна точка од отсечката AB. Опишаната кружница околу $\triangle PBK$ по вторпат ја сече C во точка T. Ако точката P' е симетрична на P во однос на A, докажи дека $\measuredangle PBT = \measuredangle P'KA$.

29. Даден е $\triangle ABC$ и нека ω е опишната околу него кружница со центар O. Точката M е средина на лакот BC, кој не ја содржи A. Правите низ O, кои се паралелни на MB и MC, ги сечат страните AB и AC соодветно во точки K и L. Ако висината спуштена од темето A кон страната BC ја сече ω во точка N, докажи дека $\overline{NK} = \overline{NL}$.

30. Впишаната кружница ω во $\triangle ABC$ ги допира страните BC, CA и AB соодветно во точките D, E и F. Права низ темето A го сече лакот EF (кој не ја содржи D) во точката T. Правата низ T, која ја допира ω, ја сече правата EF во точката P, а правата низ P, паралелна со AB, ја сече правата AT во точката H. Докажи, дека $\measuredangle HEF = 90^\circ$.

31. Остроаголен $\triangle ABC$ е впишан во кружница k и на лакот BC кој не ја содржи точката A е избрана точка D. Произволна права l која минува низ ортоцентарот H на $\triangle ABC$ гио сече опишаните кружници околу $\triangle ABH$ и $\triangle ACH$ соодветно во точките M и N.
а) Определи ја положбата на правата l за која $\triangle AMN$ има максимална плоштина.

б) Нека d_1 е правата низ M, нормална на правата DB, а d_2 е правата низ N нормална на правата DC. Докажи, дека за секоја права l пресечната точка P на правите d_1 и d_2 лежи на една иста кружница.

32. Кружница k со центар I е впишана во разностран $\triangle ABC$. Допирните точки на k со страните BC, CA, AB соодветно со D, E, F. Правата која минува низ E и е нормална на BI ја сече k во точката $K \neq E$. Правата која минува низ F и е нормална на CI ја сече k во точка $L \neq F$. Нека J е средината на отсечката KL.
а) Докажи, дека точките D, I и J лежат на една права.
б) Нека B и C се фиксирани, а точката A е таква што $\frac{\overline{AB}}{AC} = t$, каде t е дадена константа, при што A, B и C не лежат на една права. Нека M и N соодветно се пресечните точки на IE и IF со кружницата k ($M \neq E, N \neq F$). Правата MN соодветно ги сече правите IB и IC во точките P и Q. Докажи, дека симетралата на отсечката PQ минува низ една иста точка.

33. Надвор од остроаголниот $\triangle ABC$ се конструирани квадрати $CAKL$ и $CBMN$. Правата CN ја сече отсечката AK во точка X, а правата CL ја сече отсечката BM во точка Y. Точката P, која лежи во внатрешноста на $\triangle ABC$ е пресек меѓу кружниците опишани околу триаголниците KXN и LYM. Точката S е средина на отсечката AB. Докажи, дека $\measuredangle ACS = \measuredangle BCP$.

34. На кружница се означени n точки, кои ја делат на n лаци. Кружницата ротира околу центарот за агол $\frac{2\pi k}{n}$, k е некој природен број, после што означените n точки се пресликуваат во нови n точки, кои ја делат кружницата на n нови лаци. Докажи дека некој од новите лаци целосно лежи во некој од старите лаци. (Лаците се разгледуваат како затворени множества.)

35. Остроаголен $\triangle ABC$ е впишан во кружница Ω. Тангентите на Ω во точките B и C се сечат во точката P. Точките D и E се подножја на нормалите повлечени од P соодветно кон правите AB и AC. Докажи, дека ортоцентарот на $\triangle ADE$ се совпаѓа со средината на отсечката BC.

36. Во внатрешноста на тетивен четириаголник $ABCD$ се дадени точки P и Q такви што

$$\measuredangle PDC + \measuredangle PCB = \measuredangle PAB + \measuredangle PBC = \measuredangle QCD + \measuredangle QDA$$
$$= \measuredangle QBA + \measuredangle QAD = 90^\circ.$$

Докажи, дека правата PQ зафаќа исти агли со правите AD и BC.

37. Кружница со центар I е впишана во $\triangle ABC$ и страните BC, CA, AB ги допира соодветно во точките A_1, B_1, C_1. Нека I_a, I_b, I_c се центрите на припишаните кружници на $\triangle ABC$ кои соодветно се допираат до страните BC, CA, AB. Отсечките I_aB_1 и I_bA_1 се сечат во точката C_2, отсечките I_bC_1 и I_cB_1 се сечат во точката A_2 и I_cA_1 и I_aC_1 се сечат во точката B_2. Докажи, дека I е центар на кружницата опишана околу $\triangle A_2B_2C_2$.

38. Во $\triangle ABC$ е впишана кружница ω со центар I. Околу триаголникот AIB е опишана кружница Γ. Кружниците ω и Γ се сечат во точките X и Y. Заедничките тангенти на ω и Γ се сечат во точката Z. Докажи, дека опишаните кружници околу $\triangle ABC$ и $\triangle XYZ$ се допираат.

39. Вписаната кружница k во $\triangle ABC$ ги допира страните BC и AC соодветно во точките D и E. Правата која минува низ точката D и е нормална на BC ја сече k во точка P поблиску до A. Правата AP ја сече BC во точката M. Нека N е точка од отсечката AC таква што $\overline{AE} = \overline{CN}$ и BN ја сече k во точката Q поблиску до B и ја сече AM во точката R. Докажи, дека $\triangle ABR$ и четириаголникот $PQMN$ имаат еднакви плоштини.

40. Даден е $\triangle ABC$, таков што $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$ и точка $D \in AC$ таква што $\measuredangle ABD = \measuredangle ACB$. Нека I е центарот на вписаната кружница во $\triangle ABC$ и E е втората пресечна точка на правата AI и кружницата опишана околу $\triangle CDI$. Нека P е пресечната точка на правата BD и правата низ E, паралелна на AB. Нека J е центарот на вписаната кружница во $\triangle ABD$ и точката A' е симетрична на A во однос на I. Конечно, нека правите JP и $A'C$ се сечат во точка Q. Докажи, дека $\overline{QJ} = \overline{QA'}$.

41. Даден е $\triangle ABC$, за кој точките B_1 и C_1 се центри на припишаните кружници соодветно кон страните AC и AB. Правата B_1C_1 ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката $D, D \neq A$. Нека E е пресечната точка на нормалите повлечени од B_1 кон CA и C_1 кон AB. Нека ω е опишаната кружница околу $\triangle ADE$. Тангентата на ω во точката D ја сече правата AE во точка F. Нормалата повлечена од D на AE ја сече

AE во точката G и таа права ја сече ω во точка $H, H \neq D$. Кружницата опишана околу $\triangle HGF$ ја сече ω во точка $I, I \neq H$. Нека J е подножјето на нормалата повлечена од D на AH. Докажи, дека правата AI минува низ средината на отсечката DJ.

42. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со ортоцентар H. Кружница која минува низ точките B и C ја сече кружницата со дијаметар AH во точките X и Y. Нека D е подножјето на нормалата повлечена од A кон правата BC, а K е подножјето на нормалата повлечена од D кон правата XY. Докажи, дека $\measuredangle BKD = \measuredangle CKD$.

43. Впишаната и надворешно впишаната сфера на триаголна пирамида $ABCD$ ја допираат страната (BCD) во различни точки X и Y. Докажи дека $\triangle AXY$ е тапоаголен. (Надворешновпишана сфера се допира до една од страните на пирамидата и до рамнините на останатите страни во токи, надворешни за страните.)

44. Точките P, Q и R лежат соодветно на страните BC, CA и AB на $\triangle ABC$. Нека ω_A, ω_B и ω_C се соодветно опишаните кружници околу триаголниците $ARQ,$ BRP и CPQ. Ако отсечката AP ги сече ω_A, ω_B и ω_C повторно соодветно во точките X, Y и Z, докажи дека $\frac{\overline{YX}}{\overline{XZ}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}$.

45. Во остроаголен $\triangle ABC$, $\overline{AB} > \overline{AC}$, симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече страната BC во точка D. Точките E и F соодветно од страните AB и AC се такви, што B, C, E и F лежат на една кружница. Докажи, дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle DEF$ се совпаѓа со центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ ако и само ако $\overline{BE} + \overline{CF} = \overline{BC}$.

46. Во $\triangle ABC$ е впишана кружница со центар I, која страните BC, CA и AB соодветно во точките D, E и F. Правата ID ја сече отсечката EF во точка K и точката M е средината на отсечката BC. Докажи, дека точките A, K и M лежат на една права.

47. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Нека D е произволна внатрешна точка пд страната AB, а M и N се подножјата на нормалите спуштени од D кон страните BC и AC. Нека H_1 и H_2 се соодветно ортоцентрите на триаголниците MNC и MND. Докажи, дека плоштината на четириаголникот AH_1BH_2 не зависи од положбата на точката D на страната AB.

48. Над дијагоналите на конвексен четириаголник $ABCD$ конструирани се рамнострани триаголници ACB' и BDC' такви, што B и B' се од една иста страна на AC, а C и C' се од една иста страна на BD. Определи го збирот $\measuredangle BAD+\measuredangle CDA$, ако е познато дека $\overline{B'C'}=\overline{AB}+\overline{CD}$.

49. Даден е паралелограм $ABCD$ со тап агол во темето A. Точката H е подножје на нормалата повлечена од точката A кон страната BC. Продолжението на тежишната линија од темето C на $\triangle ABC$ ја сече опишаната околу него кружница во точка K. Докажи, дека точките K,H,C и D лежат на една кружница.

50. Кружниците k_1 и k_2 со различни радиуси се сечат во точките A и B. Точките C и D соодветно од k_1 и k_2 се такви, што A е средина на отсечката CD. Правата DB ја сече k_1 по втор пат во точката E, а правата CB ја сече k_2 по втор пат во точката E. Нека l_1 и l_2 се соодветно симетралите на отсечките CD и EF.
а) Докажи, дека l_1 и l_2 имаат единствена заеднничка точка P.
б) Докажи, дека должините на отсечките CA, AP и PE се должини на страни на правоаголен триаголник.

51. Нека ω опишаната кружница околу остроаголниот $\triangle ABC$, D е средината на лакот BAC и I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Нека DI ја сече BC во точката E и по втор пат ја сече ω во точката F, а правата која минува низ E и е паралелна со AI ја сече AF во точката P. Докажи, дека PE е симетрала на $\measuredangle BPC$.

52. Даден е паралелограм $ABCD$. Кружницата ω_1 се допира до отсечките AB и AD, а кружницата ω_2 се допира до отсечките BC и CD. Познато е, дека постои кружница, која се допира до правите AD и DC и надворешно ги допира кружниците ω_1 и ω_2. Докажи дека постои кружница, која ги допира правите AB и BC и надворешно ги допира кружниците ω_1 и ω_2.

53. Нека A и B се различни точки на кружницата ω со центар O, такви што $60^\circ \le \measuredangle AOB \le 120^\circ$. Нека C е центарот на опшаната кружница околу $\triangle AOB$, а l е права низ C која со OC зафаќа агол од 60°. Тангентите на ω во точките A и B соодветно ја сечат l во точките M и N, а опишаната кружници околу $\triangle CAM$ и $\triangle CBN$ соодветно по вторпат

ја сечат ω во точките Q и R и по втор пат се сечат во точката P. Докажи, дека $OP \perp QR$.

54. Даден е остроаголен триаголник ABC. Нека D е средина на помалиот лак BC на кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Точките E и F се симетрични на точката D соодветно во однос на правата BC и центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Нека K е средина на отсечката EA.
а) Докажи, дека кружницата која минува низ средините на страните на $\triangle ABC$ ја содржи точката K.
б) Докажи, дека правата која минува низ точката K и средината на страната BC е нормална на правата AF.

55. Нека M, N, P се подножјата на нормалите повлечени од тежиштето G на остроаголниот ΔABC соодветно на страните AB, BC, CA. Докажи, дека важи

$$\frac{4}{27} < \frac{P_{MNP}}{P_{ABC}} \leq \frac{1}{4}.$$

56. Нека ABC е разностран остроаголен триаголник и E е внатрешна точка на тежишната линија $AD\,(D \in BC)$. Нека точката F е подножјето на нормалата повлечена од точката E на правата BC, M е внатрепна точка на отсечката EF, а N и P се подножјата на нормалите повлечени од точката M соодветно на правите AC и AB. Докажи дека правите на кои лежат симетралите на аглите PMN и PEN немаат заеднички точки.

57. Нека конвексниот петаголник ги задоволува условите
1) Сите внатрешни агли се еднакви, и
2) Должините на сите страни се рационални броеви.
Докажи, дека петаголникот е правилен.

58. Кружниците C_1 и C_2 имаат различни радиуси и се сечат во точките A и B. Нека MN и ST, $(M, S \in C_1, N, T \in C_2)$ се заедничките тангенти на C_1 и C_2. Докажи, дека ортоцентрите на триаголниците AMN, AST, BMN и BST се темиња на правоаголник.

59. Нека ABC е триаголник таков што $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Нека D е пресечната точка на тангентата на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката A и правата BC. Нека E и F се точки соодветно на симетралите на отсечките AB и AC такви што BE и CF се нормални на BC. Докажи, дека точките D, E и F се колинеарни.

60. Нека O е внатрешна точка на остроаголниот триаголник ABC. Кружниците со центри во средините на страните на триаголникот ABC кои минуваат низ точката O меѓусебно се сечат во точките K, L и M различни од O. Докажи дека O е центар на впишаната кружница на триаголникот KLM ако и само ако O е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC.

61. Впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните AB и AC во точките D и E, соодветно. Нека симетралите на аглите во темињата C и B ја сечат правата DE соодветно во точките X и Y и нека Z е средината на страната BC. Докажи, дека триаголникот XYZ е рамностран ако и само ако $\measuredangle A = 60^\circ$.

62. Даден е триаголник ABC и права m која ги сече страните AB и AC соодветно во точките D и F, и продолжението на страната BC во точката E така што C е меѓу B и E. Трите прави кои минуваат низ точките A, B, C и се паралелни со m по вторпат ја сечат кружницата опишана околу триаголникот ABC соодветно во точките A_1, B_1, C_1. Докажи, дека правите A_1E, B_1F, C_1D се сечат во една точка.

63. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$, дијагоналите AC и BD се со различни должини и се сечат во точката E. Докажи, дека $\overline{AE} = \overline{DE}$ ако и само ако $\measuredangle BAD + \measuredangle ADC = 120^\circ$.

64. Даден е разностран остроаголен триаголник ABC во кој $\overline{AC} > \overline{BC}$. Нека O е центарот на опишаната кружница и H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и нека F е подножјето на висината повлечена од темето C. На правата AB е избрана точка P, различна од A, таква што $\overline{AF} = \overline{PF}$, а M е средината на страната AC. Нека X е пресекот на правите PH и BC, Y е пресекот на правите OM и FX, а Z е пресекот на правите OF и AC. Докажи, дека точките F, M, Y и Z лежат на иста кружница.

65. Во триаголникот ABC точките M и N се соодветно на страните AB и AC такви, што правата MN е паралелна со страната BC. Нека P е пресекот на правите BN и CM. Кружниците опишани околу $\triangle BMP$ и $\triangle CNP$ се сечат во две различни точки P и Q. Докажи, дека $\measuredangle BAQ = \measuredangle CAP$.

66. Правоаголник со димензии 9×12 е поделен на единични квадрати. Со црвена боја се обоени центрите на сите единични квадрати, освен на

четирите аголни и осумте квадрати кои имаат заедничка страна со некој од аголните квадрати. Дали е можно црвените центри да се означат со $C_1, C_2, ..., C_{96}$, но така да се исполнети следниве услови:

1) $\overline{C_1C_2} = \overline{C_2C_3} = ... = \overline{C_{95}C_{96}} = \overline{C_{96}C_1} = \sqrt{13}$, и
2) затворената искршена линија $C_1C_2...C_{96}C_1$ е централно симетрична.

67. Нека H е ортоцентар на остроаголниот триаголник ABC, а M средината на AC. Нека C_1 е подножјето на нормалата повлечена од C на AB, а H_1 е симетричната точка на H во однос на AB. Нека P, Q и R соодветно се подножјата на нормалите повлечени од точката C_1 на правите AH_1, AC и CB, а M_1 е центарот на опишаната кружница околу триаголникот PQR. Докажи, дека симетричната точка на M во однос на точката M_1 лежи на отсечката BH_1.

68. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник кој не е трапез и чии дијагонали се сечат во точката E. Нека средините на отсечките AB и CD се точките F и G, соодветно, а l е права која минува низ G и е паралелна со AB. Подножјата на нормалите повлечени од точката E кон правите l и CD соодветно се H и K. Докажи, дека правите EF и HK за заемно нормални.

69. Нека $ABCDEF$ е конвексен шестаголник со плоштина 1 и таков што секои две спротивни страни му се паралелни. Правите AB, CD и EF се сечат по парови, при што определуваат триаголник. Слично правите BC, DE и FA определуваат друг триаголник. Докажи, дека барем еден од овие два триаголници има плоштина поголема или еднаква на $\frac{3}{2}$.

70. Нека A, B и C се точки на кружница Γ со центар O такви што $\measuredangle ABC > 90^\circ$. Нека D е пресечната точка на правата AB и нормалата на правата AV во точката C. Нека l е нормалата повлечена од точката D на правата AO, E е пресечната точка на правите l и AC, а F е точката на пресекот на кружницата Γ и правата l која се наоѓа меѓу точките D и E. Докажи, дека кружниците опишани околу триаголниците BFE и CFD се допираат во точката F.

71. Во триаголник ABC припишаната кружница наспроти темето A ги допира правата AB во точката P и правата AC во точката Q, а припишаната кружница наспроти темето B ги допира правата AB во точката M и правата BC во точката N. Нека K и L соодветно се подножјата

на нормалите повлечени од C кон правите MN и PQ. Докажи, дека четириаголникот $MKLP$ е тетивен.

72. Нека $A_1A_2A_3A_4$ тетивен е четириаголник. Со H_1, H_2, H_3, H_4 соодветно да ги означиме ортоцентрите на триаголниците $A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_4,$ $A_1A_2A_3$. Докажи, дека четириаголниците $A_1A_2A_3A_4$ и $H_1H_2H_3H_4$ се складни.

73. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, а D е средината на AB. Нека E е тежиштето на $\triangle ACD$. Докажи, дека правата CD е нормална на OE ако и само ако $\overline{AB} = \overline{AC}$.

74. Права, која минува низа центарот I на впишаната кружница во $\triangle ABC$, ја сече опишаната кружницата во точките F и G и впишаната кружница во точките D и E, при што D е меѓу I и F. Докажи, дека $\overline{DF} \cdot \overline{EG} \geq r^2$, каде r е радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Кога важи знак за равенство?

75. Нека $ABCD$ е теетраедар и E, F, G, H, K, L се точки соодветно на рабовите AB, BS, CD, DA, DB, DC. Докажи, дека ако
$$\overline{AE} \cdot \overline{BE} = \overline{BF} \cdot \overline{CF} = \overline{CG} \cdot \overline{AG} = \overline{DH} \cdot \overline{AH} = \overline{DK} \cdot \overline{BK} = \overline{DL} \cdot \overline{CL},$$
тогаш точките E, F, G, H, K, L лежат на една свера.

76. Триаголникот ABC е таков што во рамнината постои точка P таква, што триаголниците PAB, PBC И PCA имаат еднакви периметри и еднакви плоштини. Докажи, дека
1) Ако P е внатрешна точка за $\triangle ABC$, тогаш тој е рамностран.
2) Ако P не е внатрешна точка за $\triangle ABC$, тогаш тој е правоаголен.

77. Ако за $\triangle ABC$ важи
$$(\sin\frac{\alpha}{2})^{23}(\cos\frac{\beta}{2})^{48} = (\sin\frac{\beta}{2})^{23}(\cos\frac{\alpha}{2})^{48},$$
каде α и β се аглите при темињата A и B, соодветно, пресметај го односот $\overline{AC} : \overline{BC}$.

78. Две кружници k_1 и k_2 соодветно со центри O_1 и O_2 и радиуси 1 и $\sqrt{2}$ се сечат во точките A и B, при што $\overline{O_2O_1} = 2$. Нека AC е тетива во k_2 чија средина лежи на k_1. Определи ја должината на AC.

79. Нека CH, CL и CM се соодветно висината, симетралата на аголот и тежишната линија повлечени од темето C во $\triangle ABC$ (точките H, L и

M се на правата AB). Односите на плоштините на $\triangle HMC$ и $\triangle LMC$ спрема плоштината на $\triangle ABC$ соодветно се $\frac{1}{4}$ и $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

80. Докажи, дека секој тетраедар $A_1A_2A_3A_4$ може да биде поставен меѓу две паралелни рамнини, кои се на растојание d и бројот d го задоволува неравенството $d \le \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{3}}$, каде
$$p = \overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_1A_3}^2 + \overline{A_1A_4}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_2A_4}^2 + \overline{A_3A_4}^2.$$

81. Нека BAC е триаголник со тежиште G и нека l е права која ги сече страните AB и AC соодветно во точките B_1 и C_1 така што A и G лежат во иста полурамнина во однос на l. Докажи, дека
$$P_{BB_1GC_1} + P_{CC_1GB_1} \ge \frac{4}{9} P_{ABC}.$$
Кога важи знак за равенство?

82. Нека ABC е остроаголен триаголник кој не е рамнострам. Нека A_1, B_1, C_1 се подножјата на висините повлечени соодветно од темињата A, B, C и нека A_2, B_2, C_2 се допирните точки на впишаната кружница во $\triangle A_1B_1C_1$ со неговите страни. Докажи, дека Ојлеровите прави на $\triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2$ се совпаѓаат.
Забелешка. Ојлеровата права на даден триаголник е правата определена од ортоцентарот и центарот на опишаната кружница околу триаголникот.

83. Нека M е точка на лакот AB од опишаната кружница околу остроаголен $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката C. Нормалата повлечена од M на радиусот OA, O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ ги сече страните AB и AC соодветно во точките K и L, а нормалата повлечена од M на радиусот OB ги сече страните AB и BC соодветно во точките N и P. Изрази го $\measuredangle MLP$ со помош на аглите на триаголникот, ако е дадено, дека $\overline{KL} = \overline{MN}$.

84. Докажи, дека постојат бесконечно многу триаголници T кои не се складни и за кои:
а) должините на страните a, b, c на T се заемно прости природни броеви, т.е. најголемиот заеднички делител на a, b, c е 1,
б) плоштината на T е природен број,

в) должините на висините на T не се природни броеви.

85. Правилен шестаголник со плоштина H е впишан во конвексен многуаголник со плоштина P. Докажи, дека $P \le \frac{3H}{2}$. Кога важи знак за равенство?

86. Даден е $\triangle ABC$ и точки D, E, F соодветно на неговите страни BC, CA, AB, различни од темињата на триаголникот. Докажи, дека ако четириаголникот $AFDE$ е тетивен, тогаш
$$\frac{4P_{DEF}}{P_{ABC}} \le \frac{\overline{EF}^2}{\overline{AD}^2}.$$

87. Кружниците C_1 и C_2 со центри соодветно O_1 и O_2 надворешно се допираат во точката T. Нека C е кружница со центар O таква што C_1 и C_2 се допираат внатрешно со C соодветно во точките A и B. Заедничката тангента на C_1 и C_2 во точката T ја сече C во точките K и L. Нека D е средината на отсечката KL. Докажи дека $\measuredangle O_1OO_2 = \measuredangle ADB$.

88. Дадени се кружниците $c_1(O_1, r_1)$ и $c_2(O_2, r_2)$, кои се сечат во точките A и B, при што $r_2 > r_1$ и $\measuredangle O_1AO_2 = 90^\circ$. Правата O_1O_2 ја сече c_1 во точките C и D, а c_2 ја сече во точките E и F (E е меѓу C и D, а D е меѓу E и F). Правата BE ги сече кружницата c_1 во точката K и правата AC во точката M, а правата BD ги сече кружницата c_2 во точката L и правата AF во точката N. Докажи, дека $\frac{r_2}{r_1} = \frac{\overline{KF}}{\overline{KM}} \cdot \frac{\overline{LN}}{\overline{LD}}$.

89. Нека G и O се соодветно тежиштето и центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, а R и r соодветно се радиусите на оопишаната и впишаната кружница. Докажи, дека $\overline{OG} \le \sqrt{R(R-2r)}$.

90. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник и нека M, N, P, Q и R се средините на страните AB, BC, CD, DE и EA, соодветно. Ако AP, BQ, CR и DM се сечат во една точка, докажи дека таа точка лежи на отсечката EN.

91. Нека O е внатрешна точка на конвексен четириаголник $ABCD$ со плоштина P таква што $\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = 2P$. Докажи, дека $ABCD$ е квадрат со центар O.

92. Нека C_1 и C_2 се две кружници, кои надворешно се допираат во точка D, а Γ е кружница која C_1 и C_2 внатрешно ја допираат соодветно во точки B и C. Со A да ја означиме едната од двете пресечни точки на Γ со заедничката тангента на C_1 и C_2 во точката D. Ако K и L се пресечните точки на AB и AC соодветно со C_1 и C_2, а M и N сае пресечните точки на BC соодветно со C_1 и C_2, докажи дека правите AD, KM и LN се сечат во една точка.

93. Нека S е множеството внатрешни точки на даден триаголник без една контурна точка. Докажи, дека S може да се претстави како унија на затворени отсечки такви што не постојат две отсечки кои имаат заедничка точка.

94. Нека $ABCD$ е вписан во кружница Γ со дијаметар AB и нека E е пресечната точка на дијагоналите AC и BD на трапезот. Кружницата со центар во точката B и радиус BE ја сече кружницата Γ во точките K и L, при што точката K е од иста страна на правата AB како и точката C. Ако нормалата повлечена од точката E на правата BD ја сече правата CD во точката M, докажи дека правите KM и DL се заемно нормални.

95. Даден е разностран триаголник ABC, со опишана околу него кружница ω со центар I. Правите AI, BI и CI ја сечат соодветно ω во точките D, E и F, различни од A, B и C. Правите низ точката I паралелни со правите BC, CA и AB соодветно ги сечат правите EF, FD и DE во точките K, L и M. Докажи, дека точките K, L и M се колинеарни.

96. Во остроаголен $\triangle ABC$ со $\measuredangle ACB = 45^\circ$ симетралите на страните AB и AC се сечат во точката O. Висината AH ја сече правата BO во точката L и правата AO ја сече страната BC во точката K. Ако $\overline{AL} = 2\overline{CK}$ определи ја големината на $\measuredangle ABC$.

97. Во кружница k е вписан остроаголен $\triangle ABC$ со ортоцентар H. Кружницата опишана околу $\triangle ACH$ има радиус 1 и центарот и лежи на k.
а) Определи ја големината на $\measuredangle ABC$.
б) Определи ја должината на отсечката BH.

98. Даден е $\triangle ABC$ со $\measuredangle ACB \neq 90^\circ$. Правите кои минуваат низ темето C и се нормални на страните AC и BC, ги сечат соодветно правите кои минуваат низ темињата A и B и се нормални на страните BC и AC во

точките P и Q. Ако M е средината на страната AB докажи, дека правите PQ и CM се заемно нормални.

99. На дијагоналата BD на трапезот $ABCD$, $AB \| CD$, земена е произволна точка M. Докажи, дека растојанието меѓу центрите на опишаните кружници околу $\triangle ABM$ и $\triangle CDM$ не зависи од изборот на точката M.

100. Права која минува низ центарот на впишаната кружница во триаголник, го дели триаголникот на два дела така, што односнот на нивните плоштини е еднаков на односот на нивните периметри. Докажи, дека тој однос е еднаков на 1.

101. Во остроаголниот $\triangle ABC$ отсечките AA_1 $(A_1 \in BC)$, BB_1 $(B_1 \in AC)$ се висини, а точката M е средина на страната AB. Триаголникот A_1B_1M е правоаголе и има плоштина еднаква на 2.
а) Определи ја должината на страната AB и големината на $\measuredangle ACB$.
б) Определи ја должината на радиусот на кружницата опишана околу A_1B_1C.

102. Даден е $\triangle ABC$ со ортоцентар H и тежиште G. Нека тежиштето G припаѓа на кружницата со дијаметар CH.
а) Докажи, дека четириаголникот $ABGH$ е тетивен.
б) Определи ја максимално можната вредност на $\measuredangle ACB$.

103. Даден е трапез $ABCD$, $AB \| CD$, за кој важи $\overline{AD} = 6, \overline{DC} = 3, \overline{BC} = 12$ и симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече страната AD во точка M таква што $\frac{\overline{AM}}{\overline{MD}} = \frac{5}{3}$.
а) Докажи, дека во четириаголникот $ABCD$ може да се впише кружница.
б) Определи ја должината на отсечката OM, каде O е центар на впишаната кружница во члетириаголникот $ABCD$.

104. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник, за кој важи $\overline{AB} = 2, \overline{AD} = 3$ и $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD$. Определи ги должините на страните BC и CD, ако е познато, дека тие се природни броеви.

105. Даден е рамностран $\triangle ABC$. Точката D е внатрешна за страната BC. Надворешно за $\triangle ABC$ се конструирани рамнострани триаголници BDE и CDF. Правите AE и AF ја сечат правата BC соодветно во точките M и N.

а) Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{\overline{DM}}{\overline{MB}}+\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$.

б) Ако $\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{3}$, пресметај $\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$.

106. Даден е $\triangle ABC$ со $\measuredangle ACB=90^\circ$, во кој припишаната кружница кон страната AB ја допира AB во точка N. Определи ја големината на $\measuredangle BAC$ ако $\measuredangle BNC=45^\circ$.

107. На страните на $\triangle ABC$ се избрани точки $P\in BC, Q\in AC$ и $R\in AB$ такви што $PQ\perp AC$ и $PR\perp AB$. Опредли ја големината на $\measuredangle BAC$ ако $P_{PCQ}=P_{PBR}=P_{PQR}$.

108. Точката M на страната AB во рамностраниот $\triangle ABC$ е таква што односот на радиусите на впишаните кружници во $\triangle AMC$ и $\triangle BMC$ е еднаков на $\frac{\overline{CM}}{\overline{BM}}-1$. Определи ја вредноста на изразот $\frac{\overline{CM}}{\overline{BM}}-1$.

109. Дали постои остроаголен $\triangle ABC$ со радиус на опишаната кружница еднаков на 1 таков што множеството $\mathbb{R}^2\setminus\{A,B,C\}$ е унија на отворени кругови со радиуси поголеми од 1?

110. Даден е $\triangle ABC$. Припишана кружница кон страната BC има центар J и ги допира правите AB и AC соодветно во точките E и F. Правите BJ и CJ ја сечат правата EF соодветно во точките P и Q и притоа важи $\overline{BC}=2\overline{PQ}$. Определи ја големината на $\measuredangle BAC$.

111. Даден е $\triangle ABC$ со центри I_a и I_b на припишаните кружници кон страните BC и AC, соодветно. Ако M е средината на страната AB и правите MI_a и MI_b ги сечат страните BC и AC соодветно во точките Q и P, докажи дека правата PQ е паралелна на AB и минува низ центарот I на впишаната кружница во $\triangle ABC$

112. Во остроаголен $\triangle ABC$ со ортоцентар H, симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече HM, каде M е средината на отсечката AB, во точка T.

а) Докажи, дека $\frac{\overline{HT}}{\overline{TM}}=\frac{2\cos\gamma}{1-\cos\gamma}$, каде $\gamma=\measuredangle ACB$.

б) Ако P е подножјето на нормалата повлечена од точката T кон страната BC, определи ја големината на $\measuredangle HPC$.

в) Докажи, дека H лежи на отсечката чии крајни точки се подножјата на нормалите повлечени од точката T кон страните AC и BC.

113. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ и произволна внатрешна точка X, различна од центарот на опишаната кружница k околу $\triangle ABC$. Правите AX, BX и CX по вторпат ја сечат k соодветно во точките A_1, B_1 и C_1. Нека A_2, B_2 и C_2 се симетричните точки на точките A_1, B_1 и C_1 во однос на правите BC, AC и AB соодветно. Докажи, дека опишаната кружница околу $\triangle A_2B_2C_2$ минува низ постојана точка, која не зависи од изборот на точката X.

114. Даден е тетивен четириаголеник $ABCD$. Точката E е симетрична на точката B во однос на пресекот на правите AD и BC, точката F е симетрична на точката B во однос на средината на страната CD и точката G е симетрична на точката A во однос на средината на отсечката CE. Докажи, дека четириаголникот $EFGC$ е тетивен.

115. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Кружницата k ги допира страните AD и BC соодветно во точките D и C. Кружницата k ја сече страната AB во точките K и L и притоа важи $\overline{DL} = \overline{CL}$. Нека E е средината на страната CD. Докажи, дека пресекот на дијагоналите AC и BD лежи на правата KE.

116. Даден е $\triangle ABC$ со центар на опишаната кружница O и симетрала на агол $AD, D \in BC$. Правата l минува низ точката O и е паралелна со AD. Докажи, дека l минува низ ортоцентарот на $\triangle ABC$ ако и само ако $\triangle ABC$ е рамнокрак со основа BC или $\measuredangle BAC = 120^\circ$.

117. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните AB, BC и CA во точките C_1, A_1 и B_1, соодветно. Ортогоналните проекции на ортоцентарот на $\triangle A_1B_1C_1$ врз правите AA_1 и BC се точките P и Q, соодветно. Докажи, дека правата PQ ја полови отсечката B_1C_1.

118. Даден е рамностран $\triangle ABC$ со должина на страна 1. На страните AB, BC и CA соодветно се избрани точки M, N и Q така што отсечките AN, BQ и CM го разделуваат $\triangle ABC$ на четири триаголници и три четириаголници. Секој триаголник го боиме со плава или жолта боја така што триаголниците со заедничко теме се обоени со различна боја. Ако плавиот и жолтиот дел имаат еднакви плоштини, пресметај ја вредноста на изразот $\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CQ}$.

119. Даден е $\triangle ABC$, за кој $\overline{AC} > \overline{BC}$. Кружница со центар M на симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече правата AC во точките A и P, а правата BC во точките B и Q. Правите PQ и AB се сечат во точката L. Докажи, дека точките C, L и M лежат на една права.

120. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ ($\measuredangle ACB = 90^\circ$, $\overline{AC} > \overline{BC}$) со висина CH и тежиште G. Кружницата k со дијаметар CH ги сече катетите AC и BC соодветно во точките P и Q. Ако PQ ја полови отсечката CG, тогаш

а) докажи, дека G лежи на кружницата k,

б) пресметај го односот $\overline{AH} : \overline{BH}$.

121. Нека ABC и $A_1B_1C_1$ се два складни спротивно ориентирани рамнострани триаголници со должина на страна 1. Колку изнесува најмалата можна должина на најдолгата меѓу отсечките AA_1, BB_1 и CC_1?

122. Даден е $\triangle ABC$ за кој $\overline{AC} = 3, \overline{BC} = 4$ и $\measuredangle ACB = 60^\circ$. Нека $CL, L \in AB$ е симетралата на $\measuredangle ACB$ и O е точка од отсечката CL. Ако M е подножната точка на нормалата повлечена од O кон BC и $AM \perp BO$, определи ја должината на отсечката CO.

123. Точката D на страната AB на $\triangle ABC$ и точката E на отсечката CD се такви што $\overline{AD} = 2\overline{BD}$, $\measuredangle AED = \measuredangle ACB$ и $2\measuredangle BED = \measuredangle ABC$. Докажи дека $\triangle ABC$ е рамнокрак.

124. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$, со симетрала на агол $AL, L \in BC$. Кружницата со дијаметар AL ги сече AC и BL соодветно во точките D и E, $D \neq A, E \neq L$. Докажи, дека D е средина на AC ако и само ако E е средина на BL.

125. Даден е ромб $ABCD$ со $\measuredangle BAD = \alpha < 90^\circ$. Нека M е средината на страната CD и $BP \perp AM, (P \in AM)$. Определи ги односот $\overline{BP} : \overline{PD}$ и $\measuredangle BPD$.

126. Впишаната кружница во правоаголниот $\triangle ABC$ ја допира хипотенузата AB во точката C_1. Точките $P \in CC_1$ и $Q \in AC$ се такви што $PQ \parallel BC$ и четириаголникот AC_1PQ е тангентен. Докажи, дека $\overline{CP} = \overline{O_1O_2}$, каде O_1 и O_2 се центрите на впишаните кружници во $\triangle AC_1C$ и $\triangle BC_1C$.

127. Определи го најголемиот реален број a со својство: постои конвексен шестаголник $ABCDEF$ чии страни се со должина 1 и точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 и F_1 во внатрешноста на $ABCDEF$, за кои секоја од отсечките $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1$ и FF_1 има должина a и никои две од тие отсечки немаат заедничка точка која е внатрешна и за двете отсечки.

128. Должините на страните на разностран триаголник формираат аритметичка прогресија и правата низ тежиштето и центарот на впишаната кружница во триаголникот е нормална на негова страна. Докажи дека триаголникот е правоаголен.

Множества и комбинаторика

1. На еден натпревар учествувале 2016 ученици. Докажи дека меѓу нив може да се изберат 45 ученици така да сите се од ист град или сите се од различни градови.

2. Во квадрат 3×3, составен од 9 мали квадратчиња се запишани броевите од 1 до 9. За секој од четирите 2×2 подквадрати е пресметан збирот од запишаните броеви. Најмалиот од четирите збирови го нарекуваме карактеристика на квадратот. Да се определи најголемата можна карактеристика на квадратот.

3. Во единечните квадратчиња на квадратна табела 3×3 се запишуваат 9 различни природни броеви чиј збир е еднаков на S. Табелата ја нарекуваме “интересна”, ако при прецртување на било кој ред и било која колона збирот на двата броја во дијагонални полиња е еднаков на збирот на другите два броја во дијагоналните полиња.
а) Докажи дека за $S = 2018$ не постои интересна табела.
б) Најди го бројот на различните интересни табели кои ги содржат броевите 1, 2, 3, 5, 668 и за кои S е најмал можен број. (Две табели се различни, ако не се добиваат една од друга со вртење околу центарот на табелата.)

4. Нека $ABCD$ е квадрат со должина на страната 10. Да се определи максималниот број точки, кои можат да бидат распоредени во внатрешноста на квадратот, така што секој квадрат со должина на страна 1 и страни, паралелни на страните на $ABCD$, да содржи (заклучно со неговата граница) најмногу 4 точки.

5. Во еден град има вкупно 151 спортски клубови, при што во секој клу членуваат точно по 12 жители на градот. Познато е дека секои два клуба имаат точно по еден заеднички член, а градоначалникот членува во клубовите “Спортист” и “Фудбалер”. Во уште колку клубови членува градоначалникот?

6. Град има форма на квадрат $n\times n$ и е поделен на квартови 1×1. Во некои од квартовите има предаватели на еден од трите мобилни оператори A,B и C. Секој предавател го опслужува квартот во кој се наоѓа, како и соседните квартови (соседни се квартовите кои имаат заедничка страна или теме). Еколошките стандарди забрануваат монтирање на повеќе од еден предавател во кварт. Монтирани се помалку од 2010 предаватели и секој кварт е опслужен од секој оператор. Определи ја најголемата можна вредност на n.

7. Ќе велиме, дека едно пополнување со 0 и 1 на правоаголна таблица со 5 реда и n колони ($n-$ природен број) е “добро”, ако можеме да избереме 3 реда и 3 колони од таблицата така, што во клетките, во кои тие се сечат, е запишан еден и ист број. Да се определи најмалиот m, за кој секое пополнување со 0 и 1 на таблица со 5 реда и n колони, каде $n\geq m$, е добро.

8. Квадрат 13×13 е поделен на единечни квдратчиња и е покриен со 28 правоаголници 3×2 кои не се преклопуваат така, што точно едно единечно квадратче не е покриено. Најди ги можните положби на непокриеното единечно квадратче.

9. Квадрат 17×17 е разделен на единечни квадратчиња и е покриен со 24 правоаголници 4×3 кои не се преклопуваат така, што точно едно единечно квадратче не е покриено. Определи ги можните положби на непокриеното единечно квадратче.

10. На кружница се избрани 2012 точки, кои кружницата ја делат на еднакви лаци. Од овие 2012 точки се земени k точки и со нив е конструиран конвексен $k-$аголник. Кој е најголемиот број k, за кој е можно $k-$аголникот да нема паралелни страни?

11. Во конвексен $n-$аголник се повлечени неколку дијагонали. Една од повлечените дијагоналите се нарекува *добра*, ако во внатрешна точка сече точно една од другите повлечени дијагонали. Определи го најголемиот можен број на добри дијагонали.

12. Дадени се n тегови со тежини природни броеви $w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_n$. Едно такво множество од тегови се нарекува *комплетно*, ако секој природен број, кој е помал од $w_1 + w_2 + \ldots + w_n$, може да се претстави како збир од неколку од дадените тежини. Докажи, дека ако од комплетно множествосе отстрани најголемата тежина, тогаш останатите тежини повторно формираат комплетно множество.

13. Даден е природен број n. Определи го минималниот број на броеви од видот $m!$, каде m е природен број со следново својство:
За секој природен број $t \le n!$ збирот на неколку од броевите од видот $m!$ (можно е само еден) е еднаков на t.

14. Во една земја има n градови, секои два града се поврзани со двонасочна железничка линија. Цените на билетите се еднакви во двете насоки за секои два града, но се различни за секоја линија, која директно поврзува два града. Докажи, дека патник може да тргне од некој од градовите и последователно да патува по $n-1$ линија, плаќајќи за секое патување помалку, отколку за претходното. (Патникот има право да минува низ еден ист град повеќе од еднаш.)

15. Во сите единечни клетки на $n \times m$ табела е запишан по еден цел број. Дијагонала на табелата се нарекува множеството клетки за кои разликата меѓу бројот на редот и бројот на колоната е еднаква. Во секој чекор имаме право или да додадеме 1 или да одземеме 1 од сите клетки од даден ред, дадена колона или дадена дијагонала. Докажи, дека ако со помош на овие операции можеме да ги направиме еднакви на нула броевите во секоја 3×3 подтабела, при што останатите броеви не се менуваат, тогаш можеме да ги направиме еднакви на нула сите броеви од табелата.

16. Квадрат $n \times n$ е поделен на n^2 единечни квадратчиња. Некои од квадратчињата се обоени со црна боја, а останатите се обоени со бела боја. За секои два реда и секои две колони четирите квадратчиња кои се наоѓаат во тие два реда и тие две колони не се обоени со иста боја. Определи ја најголемата можна вредност на n.

17. Секоја точка во рамнината е обоена во црвена или плава боја. Докажи дека постои триаголник со должини на страни $1, 2$ и $\sqrt{3}$ чии темиња се еднобојни.

18. Во рамнината се дадени n конвексни $k-$аголници, такви што секои два од нив имаат заедничка внатрешна точка. Познато е дека секој од $k-$аголниците може да се преслика во секој друг $k-$аголник со хомотетија со позитивен коефициент. Докажи, дека во рамнината постои точка која припаѓа барем на $1+\frac{n-1}{2k}$ од тие $k-$аголници.

19. На правата се запишани неколку природни броеви. Во еден чекор ги избираме сите парови од последователни броеви на правата и за парот (a,b) во средината на отсечката меѓу броевите a и b го запишуваме бројот $a+b$. Колку пати после 2013 чекори е запишан бројот 2013, ако:
а) дадените броеви се 1 и 1000,
б) дадените броеви се 1, 2, ..., 1000 запишани во растечки редослед од лево на десно.

20. Да ги разгледаме сите природни броеви чии записи во систем со основа 2 имаат 2013 цифри и содржат повеќе нули отколку единици. Нека n е бројот на тие броеви, а s е нивниот збир. Докажи, дека записот на бројот $n+s$ во систем со основа 2 содржи повеќе нули отколку единици.

21. Да се најде бројот на подредените шесторки (a,b,c,a',b',c') такви што
$$ab+a'b'\equiv bc+b'c'\equiv ca+c'a'(\text{mod}15)$$
и $a,b,c,a',b',c'\in\{1,2,3,...,14\}$.

22. Од квадрат 55×55 составен од единечни клетки, по границите на клетките се изечени 400 триклеточни агли (квадрат 2×2, од кој е отстранета една аголна клетка) и уште 500 клетки. Докажи, дека две од исечените фигури имале заедничка страна на клетка за граница.

23. На табла се запишани 100 по парови различни природни броеви $a_1,a_2,...,a_{100}$. Потоа, под секој број a_i е запишан број b_i еднаков на збирот на a_i и најголемиот заеднички делител на останатите 99 почетни броеви. Колку најмногу може по парови да се различни меѓу броевите $b_1,b_2,...,b_{100}$.

24. Нека n е природен број, а $f:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ е пермутација. Множествата A,B,C и D се дефинирани како што следува
$$A=\{i\,|\,i>f(i)\},$$
$$B=\{(i,j)\,|\,i<j\le f(j)<f(i)\text{ или } f(j)<f(i)<i<j\},$$
$$C=\{(i,j)\,|\,i<j\le f(i)<f(j)\text{ или } f(i)<f(j)<i<j\}\text{ и}$$
$$D=\{(i,j)\,|\,i<j\text{ и } f(i)>f(j)\}.$$

Докажи, дека $|A|+2|B|+|C|=|D|$.

25. Дадени се природни броеви n и k, $n\geq k$. Во група од n луѓе секој човек е член на точно еден од k клубови, означени со $C_1,C_2,...,C_k$, при што секој клуб има барем еден член. Докажи, дека меѓу сите n луѓе може да се распределат n^2 парчиња торта, така што се исполнети следниве услови:
   1) Секој човек добива барем едно парче торта,
   2) За секој $i, 1\leq i\leq k$, секој член на клубот C_i добива a_i парчиња торта,
   3) Ако $1\leq i<j\leq k$, тогаш $a_i>a_j$.

26. Во правилен шестаголник $ABCDEF$ со должина на страна еднаква на 1 избрани се различни точки $P_1,P_2,...,P_{2556}$. Ако никои три точки од множеството $S=\{A,B,C,D,E,F,P_1,P_2,...,P_{2556}\}$ не лежат на една права, докажи дека постои триаголник со темиња од S чија плоштина е помала од $\frac{1}{1700}$.

27. Даден е природен број n. Во рамнината се избрани точки $P_1,P_2,...,P_{4n}$ такви што никои три од нив не лежат на иста права. Познато е дека за секој $i=1,2,...,4n$ сликата на зракот $\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$ при ротација со центар P_i и агол 90° во насока на движењето на стрелката на часовникот е зракот $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$. Определи го максималниот можен број подредени парови (i, j), $1\leq i<j\leq 4n$, за кои отсечките P_iP_{i+1} и P_jP_{j+1} се сечат во точка, различна од крајна точка на отсечка. (Земаме $P_0=P_{4n}, P_{4n+1}=P_1$.)

28. За секој природен број $n>1$ дефинираме
$$D(n)=\{a-b \mid a,b \text{ се природни броеви и } n=ab,\ a>b\}.$$
Докажи, дека за секои природен број $k>1$ постојат k различни природни броеви $n_1,n_2,...,n_k$, $n_i>1, 1\leq i\leq k$, за кои пресекот
$$D(n_1)\cap D(n_2)\cap ...\cap D(n_k)$$
содржи барем два елементи.

29. За множеството $X=\{1,2,...,100\}$ разгледуваме функција $f:X\to X$, за која се исполнето следниве два услови:
   1) $f(x)\neq x$, за секој $x\neq X$;
   2) $A\cap f(A)\neq\varnothing$ за секое множество $A\subset X$, за кое $|A|=40$.

Определи го најмалиот природен број k, за кој за секоја таква функција постои множество $B \subseteq X$, за кое $|B| = k$ и $B \cup f(B) = X$.

Забелешка. За подмножество T на X дефинираме

$$f(T) = \{x \mid \exists t, x = f(t)\}.$$

30. За непразни бројни множества S и T дефинираме

$$S + T = \{s + t \mid s \in S, t \in T\},\ 2S = \{2s \mid s \in S\}.$$

Нека n е природен број, а A и B се подмножества од $\{1, 2, ..., n\}$. Докажи, дека постои подмножество D на $A + B$, за кое

$$D + D \subseteq 2(A + B) \text{ и } |D| \geq \frac{|A| \cdot |B|}{2n},$$

каде $|X|$ го означува бројот на елементите на множеството X.

31. Нека $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, ..., N$ се цели броеви такви што за секоја тројка (a_i, b_i, c_i) барем еден од броевите е непарен. Докажи, дека постојат цели броеви x, y и z такви што барем $\frac{4N}{7}$ од броевите $xa_i + yb_i + zc_i$, $i = 1, 2, ..., N$ се непарни.

32. Во рамнината се дадени 2012 точки, секоја обоена во една од n бои. Познато е дека нема две бои со кои се обоени ист број точки. Да се определи оној број n, за кој бројот на множествата со по n точки, по една од секоја боја, е максимален.

33. Множеството клетки на таблица со димензии $n \times n, n \geq 5$ го нарекуваме *убаво,* ако секој ред и секоја колона на таблицата содржи барем по две клетки од тоа множество. Определи го наголемиот број m со следното својство: постои убаво множество со m клетки, кое престанува да биде убаво ако од него отстраниме произволна клетка.

34. Определи ги сите множества S од цели броеви, за кои од $m, n \in S$ следува $3m - 2n \in S$ (m и n не мора да се различни).

35. Нека $n \geq 2$ е природен број и конечните непразни множества $A_1, A_2, ..., A_n$ се такви, што $|A_i \Delta A_j| = |i - j|$ за секои $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Определи ја максималната можна вредност на $|A_1| + |A_2| + ... + |A_n|$. (Симетричната разлика на множества A и B се дефинира со $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$).

36. Во рамнината е даден квадрат, чии страни се хоризонтални и вертикални. Во квадратот се наоѓаат неколку отсечки, паралелни со страните

и такви што никои две отсечки не лажат на иста права и не се сечат во точка, која е внатрешна и за двете отсечки. Се покажало, дека отсечките го разбиваат квадратот на правоаголници, при што секоја вертикална права, која го сече квадратот и не содржи отсечки од разбивањето пресекува точно k правоаголници од разбивањето, а секоја хоризонтална права, која го сече квадратот и не содржи отсечки од разбивањето пресекува точно l правоаголници од разбивањето. Определи го бројот на правоаголниците во разбивањето.

37. Дадени се множествата $A_1, A_2, ..., A_n$. За подмножество X од $\{1,2,...,n\}$ означуваме

$$N(X)=\{i\in\{1,2,...,n\}\setminus X \mid A_i\cap A_j\neq\emptyset, \text{ за секој } j\in X\}.$$

Докажи, дека за секој цел број $3\le m\le n-2$ постои подмножество X на $\{1,2,...,n\}$ за кое $|X|=m$ и $|N(X)|\neq 1$.

38. Нека Q е фамилијата од сите конечни множества, составени од последователни природни броеви. За секое множество

$$A=\{a_1,a_2,...,a_k\}\subset\{1,2,...,n\},\ a_1<a_2<...<a_k$$

дефинираме

$$g(A)=\max_{B\subset A,\ B\in Q}|B|,\quad f(A)=\max_{1\le i\le k-1} a_{i+1}-a_i.$$

Уште дефинираме

$$G(n)=\sum_A g(A),\ \ F(n)=\sum_A f(A).$$

Докажи, дека постои природен број m таков, што за секој природен број $n>m$ е исполнето неравенството $F(n)>G(n)$.

39. Пермутацијата π на броевите од 1 до n ќе ја наречеме добра, ако множеството $\{\pi(k)-k \mid k=1,2,...,n\}$ има два елементи. Докажи, дека бројот на добрите пермитации е еднаков на $\sigma(n)-\tau(n)$, каде $\sigma(n)$ е збирот на позитивните делители на n, а $\tau(n)$ е нивниот број.

40. Нека $n\in\mathbb{N}$ и A_n е множеството од сите пермутации $(a_1,a_2,...,a_n)$ на множеството $\{1,2,...,n\}$ такви што важи

$$k\mid 2(a_1+a_2+...+a_k), \text{ за секој } k\in\{1,2,...,n\}.$$

Определи го бројот на елементите на множеството A_n.

41. Определи го најголемиот број правоаголници со димензии $1\times 10\sqrt{2}$ кој може да се добие од правоаголник со димензии 50×90, ако е дозволено сечење по прави паралелни на страните на дадениот правоаголник.

42. Нека m и n се заемно прости непарни природни броеви. Правоаголникот $ABCD$ е таков што $\overline{AB}=m, \overline{AD}=n$ и е поделен на mn единечни квадрати. Со $A_1, A_2, ..., A_k$ да ги означиме последователните пресечни точки на дијагоналата AC со страните на делбените единечни квадрати ($A_1 = A, A_k = C$). Докажи, дека
$$\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \overline{A_i A_{i+1}} = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}.$$

Дополнителни задачи

1. Дадени се n различни природни броеви $1 = a_1 < a_2 < ... < a_n = 2010$, при што збирот на секои $n-1$ од овие броеви се дели со $n-1$. Определи ја најголемата можна вредност на n.

2. а) Определи ги сите цели броеви x, за кои е исполнето равенството $|x^2-1|+|x^2-4|=3x$.
   б) Определи ги сите цели броеви x и a, за кои е исполнено равенството $|x^2-1|+|x^2-4|=ax$.

3. Определи ја најголемата можна вредност на изразот $M = a^2b^2(a^2+b^2)$, ако $a > 0$, $b > 0$ и $a+b=2$. Кога таа се достигнува?

4. Даден е полиномот $M(x) = ax+b$, каде a и b се параметри. Реши ја равенката $2M(x) = x-2016$, ако $M(x^2)-(M(x))^2 \geq \frac{1}{4}$, за секој x.

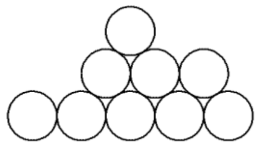
5. Позитивните реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ и k се такви, што
   $a_1 + a_2 + ... + a_n = 3k$, $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 3k^2$ и $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 > 3k^3 + k$.
   Докажи, дека разликата на некои два од броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ е поголема од 1.

6. Во круг се седнати 101 мудрец. Секој од нив смета дека или Земјата се врти околу Јупитер или дека Јупитер се врти околу Земјата. Еднаш на секоја минута секој мудрец го кажува своето мислење. Одма после тоа секој мудрец, чии два соседи не се на неговото мислење, го менува мислењето, а никој од останатите мудреци не го менува мислењето. До-

кажи, дека после определено време ниту еден мудрец нема да го менува мислењето.

7. На натпревар во танци учествувале 129 танчерки, кои на случаен начин играле танци по парови. По завршување на натпреварот се покажало, дека ниту еден пар не играл повеќе од еден танц и за секој природен број n од 1 до 128 има танчерка, која играла во точно n танци. Докажи, дека две од танчерките играле во еднаков број танци и најди го тој број.

8. Дадени се неколку еднакви монети, кои се нареден во редици на следниов начин:
   - монетите во првиот ред се допираат една до друга,
   - монетите во секој ред формираат непрекинат блок, и
   - монетите во секој ред допираат точно две монети во долниот ред.

   Едно допуштливо подредување со 5 монети во првиот ред е дадено на цртежот десно.
   Нека $A(n)$ е бројот на можните конфигурации, кога имаме n монети во првиот ред. Определи го најмалиот n, за кој $A(n) > 10^4$.

9. Множеството темиња на правилен 30-аголник е разбиено на 15 парови, кои определуваат 15 отсечки. Докажи, дека барем две од 15-те отсечки имаат еднакви должини.

10. На кружница се засадени n дрва, $11 < n < 2012$. На секое дрво со боја е запишан број, еднаков на вкупниот број листови на тоа дрво и на следните 11 дрва во насока на стрелката на часовникот. Секој од тие броеви, освен еден од нив, е за 1 помал од бројот на следното дрво во насока на стрелката на часовникот. Определи го бројот на сите n, за кои е тоа можно.

11. Даден е 2013-аголник $A_1A_2...A_{2013}$. Неговите темиња се означени со броеви, така што збирот на броевите со кои се означени било кои 9 последователни темиња е константен и е еднаков на 300. Ако е познато дека темето A_{13} е означено со бројот 13, а темето A_{20} со бројот 20, да се определи со кој број е означено темето A_{2013}.

12. Дадени се 2016 точки во рамнината, растојанијата меѓу кои се различни. Секоја точка е сврзана со отсечка со најблиската до неа точка. Нека M е множеството од тие отсечки.

а) Да се определи можниот најмал и најголем број елементи на M со различни должини.

б) Докажи, дека ако l е искршена линија од отсечки во M, тоогаш таа е отворена (т.е. крајот на l не се совпаѓа со почетокот) и не се сече самата.

13. Квадратна градина е поделена на 25 квадратни леи со плоштини од по $1m^2$. Соседни се леите кои имаат заедничка страна. Во некои од леите се посадени цвеќиња. Леите, во кои има цвеќиња, имаат цвеќиња и следната година. Ако некоја леа нема цвеќиња, тогаш следната година во неа никнуваат цвеќиња само ако таа има барем две соседни леи со цвеќиња.

а) Дали може во последователни 14 години да имам различен број на леи со цвеќиња?

б) Колку најмалку леи треба да се засадат, за да може после извесно време во сите леи да има цвеќиња?

14. Дадени се природни броеви M и N. Иван се наоѓа во точката $(0,N)$ и се движи со чекори до точката $(M,0)$, при што ги почитува следниве две правила:

1) Секој чекор е со должина 1 и е паралелен на некоја од координатните оски.
2) За секоја точка (x,y) на неговиот пат важи $x \geq 0, y \geq 0$.

При секој чекор тој го запишува растојанието до оската која е паралелна на тој чекор, при што ако чекорот го оддалечува од координатниот почеток, тој тоа растојание го запишува со позитивен знак, а во спротивен случај го запишува со негативен знак.

Докажи дека кога Иван ќе стигне во точката $(M,0)$, збирот на сите запишани броеви ќе биде еднаков на нула.

15. Во земјата на математичарите избрале реален број $\alpha > 2$ и во оптек пуштиле монети со вредност 1 денар и α^k денари за секој природен број k. Притоа бројот α бил избран така што сите вредности на монетите, без најмалата, биле ирационални броеви. Дали може да се случи, секоја сума на пари од природен број денари да се исплати со такви монети, при што секој вид монета се користи не повеќе од 6 пати?

16. Позитивни рационални броеви a и b се запишани како децимални броеви. Познато е дека најмалата периода и на двете дропки е со должина од 30 цифри, а во децималниот запис на бројот $a-b$ најмалата

периода е со должина од 15 цифри. Кој е најмалиот природен број k за кој најмалиот период во децималниот запис на бројот $a+kb$ исто така може да е со должина од 15 цифри?

17. Во множеството реални броеви реши го системот:

$$\begin{cases} \sqrt{\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}}+\sqrt{\cos^2 y+\frac{1}{\cos^2 y}}=\sqrt{\frac{20x}{x+y}} \\ \sqrt{\sin^2 y+\frac{1}{\sin^2 y}}+\sqrt{\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}}=\sqrt{\frac{20y}{x+y}}. \end{cases}$$

18. Нека n е природен број и $T=\{(i,j)\,|\,1\le i<j\le n, i\,|\,j\}$. Определи ја како функција од n најголемата можна вредност на изразот $\sum\limits_{(i,j)\in T} x_i x_j$, каде $x_1,x_2,...,x_n$ се ненегативни реални броеви такви што $x_1+x_2+...+x_n=1$.

19. Народната банка сака да пушти во употреба 12 различни монети, секоја со номинална вредност природен број. Дали може монетите да имаат номинални вредности така што секоја сума од 1 до 6543 денари да се плати со најмногу 8 монети. (При плаќањето на сумата може да се користат неколку монети со една иста нпминална вредност.)

20. Определи ги сите реални броеви t со следново својство: Постои бесконечно множество реални броеви X такво, што неравенството

$$\max\{|x-(a-d)|,|y-a|,|z-(a+d)|\}>td$$

е точно за секои $x,y,z\in X$, секој реален број a и секој позитивен реален број d (броевите x,y,z не мора да се различни).

21. Броевите $1,2,...,2n$ се распоредени во две низи

$$a_1<a_2<...<a_n \text{ и } b_1>b_2>...>b_n.$$

Докажи дека бројот $w=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$ е точен квадрат.

22. Нека $n\ge 3$ е природен број и нека се $x_i\ge 0$, $i=1,2,...,n$ реални броеви за кои важи

$$x_1+x_2+...+x_n=1.$$

Да означиме

$$F_n=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2-2(x_1x_2+x_2x_3+...+x_{n-1}x_n+x_nx_1).$$

Докажи дека

а) $\min F_3=-\frac{1}{3}$, б) $\min F_4=-\frac{1}{4}$, в) $\min F_5=-\frac{1}{5}$.

23. Низата $a_0, a_1, ..., a_{1389}$ од ненегативни броеви ќе ја нарекуваме *испакната*, ако $a_i \geq \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{2}$, за секој $i = 1, 2, ..., 1388$. Определи го најголемиот број c таков што за секоја испакната низа важи

$$\sum_{i=0}^{1389} i a_i^2 \geq c \sum_{i=0}^{1389} a_i^2.$$

24. Дадени се броевите 1, 3, 5, 7 и 9. Нови пет броеви добиваме така што произволни четири броја a, b, c, d од претходната петорка ги заменуваме со броевите $\frac{a+b+c-d}{2}, \frac{a+b-c+d}{2}, \frac{a-b+c+d}{2}, \frac{-a+b+c+d}{2}$, а петтиот број останува непроменет. Дали со повеќекратно повторување на оваа постапка може да се добијат следниве пет брови:
а) 0, 2 , 4, 6, 8,
б) 3, 4, 5, 6, 7?

25. Правоаголна таблица има 30 редици и 67 колони. Во секое квадратче на таблицата е запишан еден ист природен број. Соседни квадратчиња ги нарекуваме квадратчињата кои имаат заедничка страна. Ја реализираме следнава операција: избираме произволно квадратче и ако тоа има парен број соседни квадратчиња, тогаш додаваме 1 на секој од броевите запишани во нив, а ако има непарен број соседни квадратчиња, додаваме 2 на секој од броевите запишани во нив. Дали може после повеќекратно повторување на оваа операција бројот на парните и непарните броеви запишани во таблицата да е еднаков?

26. Природните броеви од 1 до 2011 се запишани во произволен редослед еден до друг. Се реализира следнава следната операција $(*)$: ако k ($1 \leq k \leq 2011$) е најлевиот број, првите k броеви се бришат и на нивно место се запишуваат истите броеви, но во обратен редослед (останатите броеви во записот не се менуваат). Докажи, дека:
а) за секој природен број n $(1 \leq n \leq 2011)$ постои почетен запис, таков што ако операцијата $(*)$ се примени последователно n пати, на првата позиција ќе се најде бројот 1.
б) за секој почетен запис постои природен број n таков што ако операцијата $(*)$ се примени последователно n пати, на првата позиција ќе се најде бројот 1.

27. Даден е природен број k и бесконечна решетка од правилни шестаголници. Двајца играчи A и B наизменично играат на решетката, прв поч-

нува играчот A. На почетокот сите клетки на решетката се празни. Играчот A има право да избере две празни соседни клетки и да стави жетони на нив, а играчот B има право да отстрани еден од веќе поставените жетони. Играчот A победува ако успее во една линија да постави жетони во k последователни клетки. Определи ја најмалата вредност за k, за која играчот A не може да победи со конечен број чекори или докажи дека, таква најмала вредност не постои.

28. Даден е природен број n. Даниел и Марија играат игра. Даниел има k листови, каде k е природен број. На горната страна на секој лист тој запишува некои од броевите од 1 до n (може да запише произволно многу броеви, вклучително ниту еден или сите броеви). На спротивната страна тој ги запишува останатите броеви. Марија може да преврти дел од листовите (може да преврти произволно многу листови, вклучително нула или сите листови). Ако Марија може да постигне сите броеви од 1 до n да се гледаат, тогаш таа победува.
Определи го најмалиот број k, за кој Марија секогаш може да победи, независно од тоа кои броеви ги запишал Даниел.

29. Павел и Васил играат игра на $n \times n, n > 1$ табла. На почетокот една од аголните клетки е црна и на неа се наоѓа шаховски топ, а останатите клетки се бели. Играта ја почнува Павел, а потоа играчите наизменично се менуваат. Во секој потез соодветниот играч го преместува топот хоризонтално или вертикално и во тој момент сите клетки, преку кои поминува топот (вклучувајќи ја клетката на која потезот завршува) стануваат црни. Топот не може да преминува преку црни клетки или да застане на црна клетка. Играта ја губи играчот кој не може да направи потез. Кој од играчите има добитна стратегија?

30. Во секое теме на правилниот $n-$аголник $P_1P_2...P_n$ е запишан бројот 1. Имаме право да ја реализираме следнава операција:
Избираме три произволни темиња $P_iP_{i+1}P_{i+2}, (P_{n+1} = P_1, P_{n+2} = P_1)$ и ги заменуваме броевите a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, запишани во нив соодветно со броевите $a_i - x$, $a_{i+1} - |x - y|$ и $a_{i+2} - y$, каде $x, y \in \mathbb{R}^+$ ги задоволуваат неравенствата $\frac{x}{2} \le y \le 2x, a_i - x \ge 0$ и $a_{i+2} - y \ge 0$. За секоја операција броевите x и y може да се различни. Определи дали после неколкукратно применување на горната операција за некој $a_i, 1 \le i \le n$ е можно да е исполнето неравенството:

а) $a_i > 1,5$, б) $a_i > \frac{5}{3}$.

31. Петар и Васил измислиле десет квадратни полиноми. Потоа Васил кажувал последователни природни броеви (почнувајќи од некој број), а Петар го заменувал секој од кажаните броеви во некој од квадратните полиноми (по сопствен избор) и добиените вредности ги запишувал на табла од лево на десно. Се покажало, дека броевите, запишани на таблата, формираат аритметичка прогресија (во редослед во кој се запишувани). Колку најмногу броеви може да каже Васил?

32. Дадени се природни броеви m и n. Дадени се n купчиња од златни монети, при што $i-$тото купче содржи $a_i > 0$ монети. Ја разгледуваме следнава игра:
    1) Бојан избира множества $B_1, B_2, ..., B_n$, секое од кои е подмножество на $\{1, 2, ..., m\}$.
    2) Ана, знаејќи ги избраните множества на Бојан, избира непразно подмножество S на $\{1, 2, ..., m\}$.
    3) Монетите од $i-$тото купче се даваат на Бојан ако $B_i \cap S$ има парен број елементи. Во спротивен случај монетите се даваат на Ана.

    Докажи дека за секој избор на множествата $B_1, B_2, ..., B_n$ кој може да го направи на Бојан, Ана може да избере множество S така, што ќе добие повеќе монети од Бојан.