ПРИЧА О ШЕТЊИ ГОСПОДИНА ПЕТРА ПЕТРОВИЋА ПО НОВОСАДСКИМ КАФЕИМА ЈЕДНОГ СУНЧАНОГ СЕПТЕМБАРСКОГ ДАНА, 2036. ПРЕСТУПНЕ ГОДИНЕ, СА НАРАВОУЧЕНИЈЕМ У КОМЕ СЕ УКАЗУЈЕ НА ПОСЛЕДИЦЕ КОЈЕ МОГУ НАСТУПИТИ У СЛУЧАЈУ КАД ФОРМУЛАЦИЈА ЗАДАТКА НИЈЕ ДОВОЉНО ПРЕЦИЗНА ИЛИ КАД ЈЕ ЧИТАЛАЦ ЗАКЕРАЛО

Ратко Тошић, Нови Сад

Шта се све може са мање од 100 евра у џепу?

У тренутку кад је Петар Петровић кренуо у шетњу, у џепу је имао износ мањи од 100 евра. Успут је свратио у неколико кафеа. Сваки пут кад је у неки кафе ушао са m евра и n цента, у кафеу је потрошио n евра и m цента. Колико је највише кафеа могао посетити Петар Петровић?

У тражењу одговора на горње питање, одмах ћемо искључити три тривијална случаја:

(1) Петар Петровић је пошао у шетњу празних џепова, тј. са 0 евра и 0 цента. У том случају он може посетити бесконачно много кафеа. Заиста, према датим условима, он ће у сваком кафеу потрошити 0 евра и 0 цента и напустити кафе са истим износом новца са којим је ушао.

(2) Петар Петровић пошао је у шетњу са истим бројем евра и цента. У том случају, он ће сав новац потрошити у првом кафеу, а затим може да настави као у првом случају – да без икаквог трошка посећује кафее до бесконачности.

(3) Петар Петровић је пошао у шетњу са m евра и n цента, при чему је $m < n$. У том случају он не може да посети више од 0 кафеа, јер би већ у првом морао да потроши n евра и m центи, а то је више од износа са којим располаже. У овом случају преостаје му само да се прошета Дунавским парком или евентуално сврати у клуб пензионера на партију домина.

Закључујемо да Петар Петровић може да посети бар један кафе само у случају кад је $m \geq n$. Како смо случај $m = n$ већ скинули с дневног реда, посматрајмо сада случај кад се Петар Петровић у једном тренутку своје шетње нађе у следећем кафеу, са m евра и n цента ($m > n$). По изласку из кафеа, у коме је потрошио n евра и m цента, њему је остало $n - m - 1$ евра и $100 + n - m$ цента. У следећи кафе може ући само ако је $n - m - 1 > 100 + n - m$.

Доказаћемо да он није могао посетити више од 6 кафеа. Претпоставимо супротно – да је посетио бар 7 кафеа. Користећи горе наведену формулу за број преосталих евра и цента, можемо да закључимо следеће:

Ако је на почетку Петар Петровић имао E евра и C цента, после првог кафеа остало му је $E - C - 1$ евра и $100 + C - E$ цента. Уведимо ознаку $x = 100 + C - E$. Тада је:

- после првог кафеа Петру Петровићу остало $99 - x$ евра и x цента;
- после другог $(99 - x) - x - 1 = 98 - 2x$ евра и $100 + x - (99 - x) = 1 + 2x$ цента;
- после трећег $96 - 4x$ евра и $3 + 4x$ цента;
- после четвртог $92 - 8x$ евра и $7 + 8x$ цента;
- после петог $84 - 16x$ евра и $15 + 16x$ цента;
- после шестог $68 - 32x$ евра и $31 + 32x$ цента;
- после седмог $36 - 64x$ евра.

(Број цента после изласка из седмог кафеа не морамо да рачунамо; и без тога је јасно да је у том тренутку број евра негативан, јер x не може бити 0). Зато Петар Петровић не може да посети седам кафеа.

С друге стране, могуће је навести пример кад Петар Петровић може да посети 6 кафеа. На пример, ако он уђе у први кафе са 99,00 евра, непосредним израчунавањем налазимо да ће он:

по изласку из првог кафеа имати 99,00 – 0,99 = 98,01 евра (тј. 98 евра и 1 цент);
по изласку из другог 98,01 – 1,98 = 96,03 евра;
по изласку из трећег 96,03 – 3,96 = 92,07 евра;
по изласку из четвртог 92,07 – 7,92 = 84,15 евра;
по изласку из петог 84,15 – 15,84 = 68,31 евра;
по изласку из шестог 68,31 – 31,68 = 36,63 евра.

Дакле, Петар Петровић под датим условима могао је да посети највише 6 кафеа.

Fabula docet

Задатак о господину Петру Петровићу припада типу задатака у којима се тражи максимум неке величине. У конкретном случају ради се о максималном броју кафеа које може посетити Петар Петровић под одређеним условима. Преведено на језик бројева, тражи се максималан број одређених рачунских операција које је могуће извршити полазећи од датих бројева. Следећи задатак припада истом типу, а читаоцу препуштамо да уочи везу између ова два задатка.

Задатак. Написан је двоцифрен број у коме је цифра десетица већа од цифре јединица. Од тога броја Марко одузима број који се добије кад цифре написаног броја замене места. Исти поступак примењује на добијену разлику. Поступак се понавља све док је добијена разлика позитиван број. Колико се највише пута може применити такав поступак пре него што се добије негативан број?

Решење. Приметимо прво да ма колико пута понављали поступак, цифре добијених бројева остају различите, а поступак се даље не може продужавати онда кад добијемо број чија је цифра десетица мања од цифре јединица.

С друге стране, ако при одузимању добијемо једноцифрен број, ми ћемо га и даље третирати као двоцифрен, формално пишући цифру 0 као цифру десетица.

Нека је написани број $\overline{ab}$, $a > b$. После првог корака добијамо број

$$\overline{ab} - \overline{ba} = 10(a-b) + (b-a) = 10(a-b-1) + (10+b-a).$$

Како је $a > b$, $a - b - 1$ и $10 + b - a$ су ненегативни једноцифрени бројеви. Уведимо ознаке

$$x = 10 + b - a,\quad A = a - b - 1. \qquad (1)$$

Дакле, број добијен после првог корака је $\overline{Ax} = 10A + x$. Из прве једнакости (1) следи да је $a - b = 10 - x$, $A = 9 - x$.

Имајући у виду формуле (1) за цифре разлике, после другог корака друга цифра ће бити $10 + (x - (9 - x)) = 1 + 2x$, а прва $9 - (1 + 2x) = 8 - 2x$.

Ако је $8 - 2x > 1 + 2x$, после трећег корака друга цифра ће бити $10 + (1 + 2x) - (8 - 2x) = 3 + 4x$, а прва $9 - (3 + 4x) = 6 - 4x$.

Како је x цео број и $x > 0$, то је $3 + 4x > 6 - 4x$, то значи да најдаље после 3 корака добијамо разлику код које је друга цифра већа од прве, па се поступак даље не може наставити.

Поступак може да садржи три корака; на пример, ако је на почетку написан број 90. Заиста, тада имамо редом: 90 – 9 = 81; 81 – 18 = 63; 63 – 36 = 27 и ту се поступак завршава.

Да ли расипничко понашање може бити од користи?

Кад се ради о задацима у којима се тражи максимум, важно је, као и у другим задацима, да услови задатка буду јасни и прецизно формулисани. Ученици показују велику досетљивост да сваку непрецизност искористе за навођење воде на своју воденицу. Зато, кад достигнете максимум, размислите да ли он може још да се повећа.

Господин Петар Петровић је, такође, веома досетљив човек. У циљу постизања рекорда, он не жали паре. Зато, располажући почетном сумом од 99 евра, он после сваког изласка из кафеа, може да баци вишак цента (остављајући у џепу највећу могућу суму од целог броја евра). На тај начин, он у сваком кафеу троши суму мању од 1 евро, што му омогућава да посети 99 кафеа.

Понашајући се тако расипнички, Петар Петровић ће бацити укупно 1 + 2 + 3 + ... + 98 цента, што чини 48,51 евра; дакле, скоро половину новца коју је понео од куће. (Последњих 99 центи, преосталих после изласка из 99. кафеа, нема смисла да баца.)

У последњем кафеу, у који је ушао са једним евром у џепу, Петар Петровић је потрошио 1 цент. Остаће заувек тајна шта је могао наручити за те паре, али то није тема овог задатка.

Више од 99 кафеа Петар Петровић не може посетити, чак и ако се понаша мање расипнички, тј. не баца сав вишак цента. Наиме, после сваке посете кафеа, број евра смањује се бар за 1, било зато што је број цента (изнад целог броја евра) бар 1, било зато што је ипак нешто потрошио у кафеу.

Кад достигнете максимум, размислите да ли он може још да се повећа или додатак причи о Петру Петровићу

Кад се мало боље размисли, постоји начин да Петар Петровић посети и више од 99 кафеа. Он после изласка из неког кафеа може да баци или поклони некоме сав преостали новац, па да онда празних џепова настави да посећује кафее до бесконачности (као што смо видели на почетку). Међутим, не верујем да би се он одлучио на тако екстреман поступак, колико због недостатка времена, толико и због чињенице да би такво његово понашање изазвало одређене сумње код његових суграђана.

Као додатак нашој причи о Петру Петровићу, размотрићемо још један задатак о тражењу максимума, у коме непрецизна формулација доводи до могућности да се једним триком „повећа максимум".

Задатак. На папирној траци написан је број 123456789. На колико највише делова можемо разрезати траку тако да бројеви на свим деловима буду по паровима узајамно прости?

Решење. Траку можемо расећи на 6 делова на следећи начин: 1, 23, 4, 5, 67, 89.

Докажимо да сечење на већи број делова под датим условима – није могуће. Претпоставимо да смо успели да траку исечемо на 7 или више делова. Како има свега пет непарних цифара, нека два од добијених бројева морају се завршавати парном цифром. Ти бројеви су дељиви са 2 и не могу бити узајамно прости. Дакле, није могуће под датим условима разрезати траку на више од 6 делова.

Па ипак – јесте. Овде треба имати у виду да смо ми резали не број, него траку. Зато прво разрежимо траку на 7 делова са бројевима: 1, 23, 4, 5, 6, 7 и 89. Затим преврнимо део са бројем 6. На тај начин смо број 6 претворили у 9 и добили 7 бројева таквих да су свака два узајамно прости: 1, 23, 4, 5, 9, 7 и 89.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија