XXIII РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

IV одделение

1. **Пресметај:**
$2005+2005\cdot20+(52\cdot6677+53\cdot6676-54\cdot6675)\cdot0+25\cdot2005\cdot4-7777:77$.

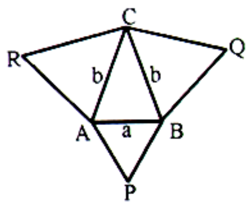
Решение. $2005+2005\cdot20+(52\cdot6677+53\cdot6676-54\cdot6675)\cdot0+25\cdot2005\cdot4-7777:77=$
$=2005+40100+0+200500-101=242504$ ♦

2. Еден камион наполнет со пченица има маса од 7284kg, а празен има маса од 2576kg. Пченицата во камионот е товарена од силос кој собирал 15200kg пченица. Колку килограми пченица останале во силосот?

Решение. Од условот во задачата добиваме $15200-(7284-2576)=15200-4708=10492$. Во силосот останале 10492kg пченица. ♦

3. Дедото сега има 64 години, неговиот син 38 години, неговиот внук 10 години, а неговата внука 6 години. По колку години збирот на годините на синот, внукот и внуката ќе биде еднаков со бројот на годините на дедото?

Решение. Сега разликата на годините на дедото и збирот на годините на другите е 10 години. Збирот на годините на синот, внукот и внуката ќе биде еднаков со бројот на годините на дедото ако разликата на годините на дедото и збирот на годините на другите се подели со 2, односно 10:2=5. Значи одговорот е по 5 години. ♦



црт.1

4. Над страните на рамнокрак триаголник ABC чија основа е за 2cm помала од кракот, се конструирани рамнострани триаголници APB, BQC и CRA. Обиколката на така добиената фигура APBQCR е 38cm. Најди ги страните на рамнокракиот триаголник.

Решение. Да ја означиме основата на рамнокракиот триаголник со a, а краците со b (црт. 1). Од условот во задачата имаме $a=b-2$ и $4b+2(b-2)=38$. Значи $b=7$cm и $a=5$cm. ♦

V одделение

1. За нумерирање на една книга се употребени 4373 цифри. Колку страници има книгата?

Решение. Од првата до деветтата страница се употребени 9 цифри. Од десеттата до 99-та се употребени двоцифрени броеви, односно 180 цифри. Од 100-та до 999-та страница се употребени трицифрени броеви, односно 2700 цифри. Тогаш $4373-9-180-2700=1484$ цифри се употребени за четирицифрените броеви, односно книгата завршува со 371-от (1484:4=371) четирицифрен број. Значи книгата има 1370 страници. ♦

2. Дадени се множествата $A=\{1, 2, x, 5, 9\}$ и $B=\{2, y, 3\}$. Најди ги сите броеви x и y такви што множеството B да има три различни елементи и $B\subset A$.

Решение. Од $B\subset A$ јасно е дека $x=3$. Тогаш y може да биде еден од броевите 1, 5 или 9. ♦

3. Кои цифри треба да стојат на местото на ѕвездичките во бројот 2834**,

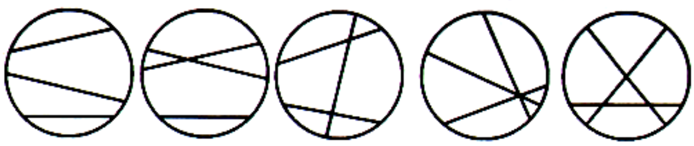
така што при делење на бројот со 12 и со 15 да се добие остаток 9?

Решение. Да ги определиме броевите од облик 2834•• деливи со 12 и 15. Бидејќи бројот треба да е делив со 2 и 5, следува дека последната ѕвездичка е 0, односно обликот на бројот е 2834•0. Од деливоста на бројот со 3 добиваме дека претпоследната ѕвездичка може да биде 1, 4 или 7. Бидејќи бројот треба да е делив со 4 следува дека бројот е 283440. Бараниот број е 283449. ♦

4. Две тетиви го делат кругот на три или четири дела. На колку делови го делат кругот три тетиви? (Образложи ги и илустрирај ги добиените резултати.)

Решение. Бројот на деловите на кои е разделен кругот со тетивите зависи од бројот на пресечните точки на тетивите во внатрешноста на кругот (случајот кога барем две од тетивите се сечат на кружницата е ист со случајот кога тие не се сечат во внатрешноста). Значи ги имаме следниве случаи:

1. Тетивите, две по две, немаат заеднички точки во внатрешноста на кругот. Во тој случај тетивите го делат кругот на 4 дела (црт. 2).
2. Две од тетивите се сечат во внатрешноста на кругот и не се сечат со третата. Во тој случај тетивите го делат кругот на 5 дела (црт. 3).
3. Две од тетивите не се сечат во внатрешноста на кругот, а третата ги сече и двете (црт. 4) или трите тетиви минуваат низ една точка во внатрешноста (црт. 5). Во тој случај тетивите го делат кругот на 6 дела.
4. Тетивите, две по две, се сечат во внатрешноста на кругот. Во тој случај тетивите го делат кругот на 7 дела (црт. 6). ♦



црт. 2 црт. 3 црт. 4 црт. 5 црт. 6

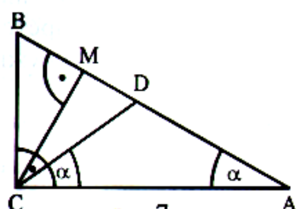
VI одделение

1. На еден шахист по 9 победи и 6 нерешени партии му останале уште 25% неодиграни партии. Ако за победа се добива 1 поен, а за нерешена партија 0,5 поени, колку најмногу поени може да освои овој шахист на крајот на турнирот?

Решение. Шахистот изиграл 75% од партиите што е еднакво на 15 партии. Значи вкупно на турнирот треба да изигра $\frac{15\cdot 100}{75}=20$ партии. Тогаш од неодиграните партии најмногу може да освои 5 поени, односно вкупно може да освои најмногу $5+9+6\cdot 0{,}5=17$ поени. ♦

2. Еден остар агол на правоаголен триаголник е пет пати поголем од другиот. Докажи дека хипотенузата е четири пати поголема од висината спуштена кон неа.

Решение. Од $\beta=5\alpha$ и $\alpha+\beta=90^\circ$ следува дека $\alpha=15^\circ$, $\beta=75^\circ$. Нека висината повлечена кон хипотенузата е CM и нека D е средина на хипотенузата (црт. 7). Тогаш



црт.7

$\overline{CD} = \overline{AD} = \overline{BD} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$.

Триаголникот CDM е правоаголен, во кој $\angle CDM=\alpha+\alpha$. Според тоа $\overline{CD} = 2\overline{CM}$. Оттука $\overline{AB} = 2\overline{CD} = 4\overline{CM}$. ♦

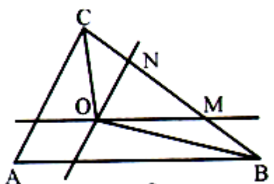
3. а) Докажи дека за произволни цели броеви a и b броевите $\dfrac{5a}{2}+\dfrac{13}{5}$ и $\dfrac{23b}{15}+\dfrac{53}{10}$ не се цели.

б) Дали нивниот збир може да е цел број? Образложи.

Решение. а) $\dfrac{5a}{2}+\dfrac{13}{5}=\dfrac{25a+26}{10}$ и $\dfrac{23b}{15}+\dfrac{53}{10}=\dfrac{46b+159}{30}$. Бидејќи 5 не е делител на 25a+26, следува дека 25a+26 не се дели со 10, односно $\dfrac{5a}{2}+\dfrac{13}{5}$ не е цел број. Бидејќи 46b+159 е непарен број имаме дека $\dfrac{23b}{15}+\dfrac{53}{10}$ не е цел број.

б) Нека a=b=33. Тогаш $\dfrac{25\cdot 33+26}{10}+\dfrac{46\cdot 33+159}{30}=141$ па нивниот збир може да е цел број. ♦

4. Нека O е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC и правите повлечени низ O и паралелни со AB и AC ја сечат страната BC во точките M и N соодветно. Докажи дека важи равенството $\overline{BC} = \overline{OM} + \overline{MN} + \overline{ON}$.



црт.8

Решение. Бидејќи правите OM и AB се паралелни следува дека $\angle MOB=\angle OBA$ (црт. 8). Уште важи $\angle OBA=\angle OBM$. Значи $\angle MOB=\angle OBM$, а оттука триаголникот OBM е рамнокрак, односно $\overline{OM} = \overline{MB}$. Слично, $\overline{ON} = \overline{NC}$. Тогаш $\overline{BC} = \overline{BM} + \overline{MN} + \overline{NC} = \overline{OM} + \overline{MN} + \overline{ON}$. ♦

VII одделение

1. Во кружница k(O,r) повлечен е радиусот OM и низ неговата средина S, тетивата AB нормална на OM. Докажи дека таа тетива претставува страна на впишан рамностран триаголник во кружницата.

црт.9

Решение. Нека втората пресечна точка на k(O, r) и OM е точката C. Бидејќи триаголниците CSA и CSB се складни (CAC) триаголникот ACB е рамнокрак, односно $\overline{CA} = \overline{CB}$. Бидејќи во правоаголниот триаголник OSA хипотенузата е двапати поголема ($\overline{OA} = 2\overline{OS}$)

следува дека ∠OAS=30° и ∠AOS=60°. Тогаш ∠ACS=30° и затоа ∠ACB=60°. Затоа триаголникот ACB е рамностран и е впишан во кружницата. ♦

2. Најди ја вредноста на изразот $7xy+11yz-7xz-2x^2-6y^2-3z^2+5$ ако $2y-3z-x=0$.

Решение. $7(2y-3z)y+11yz-7(2y-3z)z-2(2y-3z)^2-6y^2-3z^2+5= \ldots =5$. ♦

3. Од сите дропки помеѓу $\frac{13}{167}$ и $\frac{1}{12}$ чиј именител е четирицифрен број и чиј броител е трет степен на природен број, најди ја онаа со најголем именител.

Решение. Нека бараната дропка е $\frac{t^3}{\overline{abcd}}$, каде што $t\in\mathbb{N}$, a, b, c и d се цифри и $a\neq 0$. Бидејќи $\overline{abcd}\leq 9999$ следува $\frac{t^3}{9999}\leq\frac{t^3}{\overline{abcd}}<\frac{1}{12}$ од каде што $t^3<\frac{9999}{12}=833{,}25$.

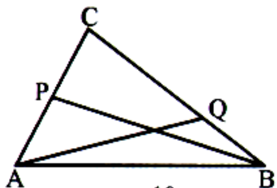
Тогаш $t\leq 9$. Од друга страна, $\frac{13}{167}<\frac{t^3}{\overline{abcd}}$, односно $\overline{abcd}<\frac{167t^3}{13}\leq\frac{167\cdot 9^3}{13}=9364\frac{11}{13}$.

Конечно, бараната дропка е $\frac{729}{9364}$. ♦

4. Даден е триаголник ABC. Точките P и Q лежат на страните AC и BC, соодветно и за нив важи $L_{\Delta ABP}=L_{\Delta ABQ}$, $L_{\Delta AQC}=L_{\Delta BPC}$ (каде со $L_{\Delta XYZ}$ е означен периметарот на триаголник XYZ). Докажи дека триаголникот ABC е рамнокрак.

Решение. Од $L_{\Delta ABC}=L_{\Delta ABQ}+L_{\Delta AQC}-2\overline{AQ}$ и $L_{\Delta ABC}=L_{\Delta ABP}+L_{\Delta BPC}-2\overline{PB}$ следува дека $\overline{AQ}=\overline{PB}$ (црт. 10). Потоа,

$\overline{AP}=L_{\Delta ABP}-\overline{AB}-\overline{PB}=L_{\Delta ABQ}-\overline{AB}-\overline{AQ}=\overline{BQ}$. Значи триаголниците ABP и AQB се складни, па ∠PAB=∠QBA, односно триаголникот ABC е рамнокрак. ♦



црт.10

VIII одделение

1. Двајца работници можат да завршат една работа за 12 дена. По 5 дена заедничка работа едниот работник ја напуштил работата така што другиот работник, работејќи сам, ја завршил работата за 17,5 дена. За колку дена можел да ја заврши работата секој работник ако работел сам?

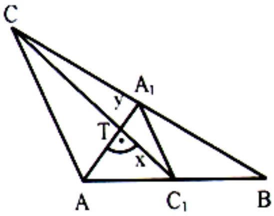
Решение. Нека првиот работник може да ја заврши работата за x, а вториот за y дена. Тогаш за еден ден работниците ќе завршат $\frac{1}{x}$, односно $\frac{1}{y}$ од работата.

Од условот во задачата го добиваме системот

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12}\\ 5(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})+17{,}5\dfrac{1}{y}=1\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12}\\ \dfrac{5}{12}+17{,}5\dfrac{1}{y}=1\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12}\\ y=30\end{cases}$$, а оттука x=20. ♦

2. **Во триаголник ABC со страни $\overline{AB}=32cm$ и $\overline{BC}=24cm$, тежишните линии AA_1 и CC_1 се сечат под прав агол. Пресметај ја должината на страната AC на триаголникот ABC.**

Решение. Нека T е тежиште на триаголникот ABC и нека $\overline{TC_1}=x$, $\overline{TA_1}=y$



црт.11

(црт. 11). Тогаш од правоаголниот триаголник CTA_1 имаме $(2x)^2+y^2=(\frac{1}{2}\overline{CB})^2=144$, а од правоаголниот триаголник ATC_1 $(2y)^2+x^2=(\frac{1}{2}\overline{AB})^2=256$. Со собирање на последните две равенства добиваме дека $400=5(x^2+y^2)$, односно $80=x^2+y^2$. Сега, од правоаголниот триаголник A_1TC_1 следува дека $x^2+y^2=\overline{A_1C_1}^2=\frac{\overline{AC}^2}{4}$. Значи имаме

$\overline{AC}^2=4(x^2+y^2)=320$, односно $\overline{AC}=8\sqrt{5}cm$. ♦

3. **Нека n е природен број за кој броевите n+1, n+3, n+4, n+5, n+6, n+8 се сложени. Докажи дека постојат барем седум последователни сложени броеви во множеството {n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6, n+7, n+8, n+9}.**

Решение. Ако n+2 е прост број тогаш тој е непарен број (n+2>2). Тогаш n+7 е парен број поголем од 2 и затоа е сложен, како и n+9. Затоа n+3, n+4, n+5, n+6, n+7, n+8, n+9 се седум последователни сложени броеви.

Нека n+2 е сложен број. Ако n+7 е сложен број тогаш n+2, n+3, n+4, n+5, n+6, n+7, n+8 се седум последователни сложени броеви. Ако n+7 е прост број, тогаш тој е непарен број и затоа n е парен број. Уште, n е поголем од 2 бидејќи ако n=2 тогаш n+1=3 не е сложен број, што е во контрадикција со условот. Значи n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6 се седум последователни сложени броеви. ♦

4. **Во внатрешноста на триаголник ABC е избрана точка P така што триаголниците ABP, BCP и CAP имаат еднакви плоштини. Докажи дека точката P е тежиште на триаголникот ABC.**

црт.12

Решение. Триаголниците ABP и CAP имаат еднакви плоштини и заедничка страна AP. Затоа висините во овие триаголници BM и CN, соодветно, повлечени кон AP, се еднакви. Нека AP ја сече страната BC во точка K. Тогаш, од $\overline{BM}=\overline{CN}$, ∠CNK=∠BMK и ∠CKN=∠BKM, триаголниците CNK и BMK се складни и затоа $\overline{CK}=\overline{BK}$, односно AK е тежишна линија. Аналогно, се докажува дека и другите две тежишни линии минуваат низ P. Според тоа P е тежиште во триаголникот ABC. ♦