ММО 2023

1. Определете ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што за сите $x, y \in \mathbb{R}$ важи:

$$xf(x+y) + yf(y-x) = f(x^2+y^2) .$$

Решение. Да забележиме дека сите функции од облик $f(x) = cx$, каде што c е реална константа, ја задоволуваат равенката.

Со $P(x,y)$ го означуваме тврдењето

$$xf(x+y) + yf(y-x) = f(x^2+y^2).$$

Од $P(0,0)$ добиваме $f(0) = 0$ и со помош на тоа, заедно со $P(x,0)$, заклучуваме дека $xf(x) = f(x^2)$ за сите $x \in \mathbb{R}$. Од $P(-x,0)$ имаме и дека $-xf(-x) = f(x^2) = xf(x)$ за сите $x \in \mathbb{R}$. Оттаму, ако $x \neq 0$ тогаш $f(-x) = -f(x)$. Со оглед дека $f(0) = 0$, следува дека $f(-x) = -f(x)$ за сите $x \in \mathbb{R}$, т.е. f е непарна функција.

Од $P(y,x)$ се добива:

$$yf(y+x) + xf(x-y) = f(y^2+x^2) = f(x^2+y^2) = xf(x+y) + yf(y-x) .$$

Согласно непарноста на f, важи $f(x-y) = -f(y-x)$, што значи дека:

$$yf(x+y) - xf(y-x) = xf(x+y) + yf(y-x).$$

Да фиксираме $t \in \mathbb{R}$ и замениме $x = \frac{t-1}{2}$ и $y = \frac{t+1}{2}$ во последната равенка. Добиваме

$$f(t) = t \cdot f(1), \quad \text{за секој } t \in \mathbb{R} .$$

Следствено, сите решенија се дадени со $f(x) = cx$, каде c е реална константа. □

2. Нека p и q се непарни прости броеви и нека a е природен број таков што $p | a^q + 1$ и $q | a^p + 1$. Докажете дека $p | a + 1$ или $q | a + 1$.

Решение. Да претпоставиме дека $p \nmid a+1$ и $q \nmid a+1$. Без губење на општост, нека $q \geq p$.

Нека $t = \mathrm{ord}_p(a)$. Бидејќи $p | a^q + 1$, добиваме $p | a^{2q} - 1 = (a^q-1)(a^q+1)$. Тоа значи дека $t | 2q$, и оттука $t \in \{1, 2, q, 2q\}$.

Ако $t = 1$, тогаш $p | a-1$, што повлекува $p = 2$; но p е непарен, па овој случај не е возможен.

Ако $t = q$, тогаш $p | a^q - 1$; но исто така знаеме дека $p | a^q + 1$, па со тоа заклучуваме дека $p | 2$, што повторно е контрадикција. Доколку пак $t = 2q$, од малата теорема на Ферма добиваме $2q | p-1$. Но, $p - 1 < p \leq q < 2q$, од каде повторно се добива контрадикција. Заклучуваме дека $t = 2$ и тогаш важи $p | a^2 - 1$. Со оглед дека $p \nmid a-1$, добиваме $p | a+1$, што и требаше да се докаже. □

3. Во градот на џуџињата има 1000 идентични згради, од кои секоја има 1000 ката, при што точно едно џуџе живее на секој кат. Секој жител во градот носи капа обоена во една од 1000 можни бои и било кои два станари на иста зграда имаат различно обоени капи. За две џуџиња велиме дека се *пријатели* доколку носат капи во иста боја, и живеат на последователни катови (во различни згради). Одредете го најголемиот можен број на (неподредени) парови џуџиња кои се пријатели.

Решение. Нека $k = 500$. Прво ќе покажеме дека за фиксна боја c, не може да има повеќе од k^2 парови другари со капи во бојата c.

Навистина, да формираме (едноставен) граф чии темиња се џуџињата со капи во бојата c при што помеѓу две темиња има ребро доколку соодветните џуџиња се пријатели.

Да покажеме дека овој граф нема триаголници. Да го претпоставиме спротивното, дека џуџињата кои живеат на катови со броеви s_1, s_2 и s_3 се пријатели (по парови). Без губење на општоста, нека $s_1 > s_2 > s_3$. Тогаш $s_1 = s_2 + 1$ и $s_2 = s_3 + 1$. Но ова значи дека џуџињата кои живеат на катовите нумерирани со броевите s_1 и s_3 не се пријатели бидејќи $s_1 - s_3 = 2$, контрадикција.

Ќе го користиме следниот помошен резултат (познат како **Теорема на Мантел**).

Лема. Секој едноставен граф од ред (број на темиња) $n \geq 3$ и големина (број на ребра) $m > \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ содржи триаголник.

Доказ 1. Да забележиме дека тврдењето е исполнето за $n \in \{4, 5\}$. Под претпоставка дека тврдењето не е точно во општ случај, разгледуваме противпример G од најмал можен ред n. Значи $n \geq 5$. Нека uv е произволно ребро од G. Со оглед дека uv не лежи на триаголник, не постои теме w кое е соседно со обете u и v. Оттаму, $(\deg(u) - 1) + (\deg(v) - 1) \leq n - 2$, односно $\deg(u) + \deg(v) \leq n$. Нека $G' = G - u - v$ е графот добиен од G со бришење на темињата u и v (заедно со сите ребра инцидентни со барем едно од овие две темиња). Така G' има ред (број на темиња) $n' = n - 2$ и големина (број на ребра)

$$m' = m - (\deg(u) + \deg(v)) + 1 \geq m - n + 1 > \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor - n + 1\,.$$

Значи,

$$m' > \frac{n^2}{4} - n + 1 = \frac{n^2 - 4n + 4}{4} = \frac{(n-2)^2}{4}\,.$$

Со оглед дека $n - 2 \geq 3$, од минималниот избор на G следува дека G' содржи триаголник. Но, $G' \subseteq G$, што противречи на претпоставката дека G не содржи триаголник. ⋄

Доказ 2. Нека G е едноставен граф од ред n кој не содржи триаголници. Со α го означуваме бројот на елементи на едно најголемо независно множество $A \subseteq V(G)$. (За подмножество од $V(G)$ велиме дека е *независно* доколку нема ребра помеѓу неговите елементи.) Нека $\beta = n - \alpha$. Со оглед дека G не содржи триаголник, соседите на произволно теме $v \in V(G)$ формираат независно множество. Оттаму, $\deg(v) \leq \alpha$.

Секое ребро од G има барем еден завршеток (теме) во множеството $B = V(G)\backslash A$ (бидејќи A е независно). Затоа, броејќи ги ребрата на G гледано од нивните завршетоци во B, имаме $m = |E(G)| \leq \sum\limits_{v \in B} \deg(v)$. Следствено, неравенството помеѓу аритметичка и геометриска средина дава

$$m \leq \sum_{v \in B} \deg(v) \leq \alpha\beta \leq (\frac{\alpha + \beta}{2})^2 = \frac{n^2}{4}$$

.

Всушност, овој доказ покажува нешто повеќе: Помеѓу едноставните графови од ред n кои не содржат триаголник, најмногу ребра, имено $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$, има единствено графот $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$. ⋄

Од лемата непосредно имаме дека секој едноставен граф без триаголници кој има $2k$ темиња може да има најмногу k^2 ребра. (Притоа, равенство се достигнува единствено за комплетниот бипартитен граф $K_{k,k}$.) Оттука, за секоја боја може да има најмногу k^2 парови џуџиња пријатели со капи во таа боја. Следствено, вкупниот број на пријателства во градот не може да надмине $2k \cdot k^2 = 2k^3 = 2 \cdot 500^3$.

За да добиеме конструкција при која се реализира добиената горна граница, нека $\{c_1,...,c_{2k}\}$ е множеството бои. Во првите 500 згради земаме низата бои на капите кои џуџуњата станари ги носат, редоследно од долу нагоре, да е $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots, c_{2k-1}, c_{2k}$, а во преостанатите 500 згради нека таа низа гласи $c_2, c_1, c_4, c_3, \ldots, c_{2k}, c_{2k-1}$. Така секое џуџе има точно k пријатели. Со оглед дека вкупниот број на џуџиња е $2k \cdot 2k = 4k^2$, вкупниот број на пријателства е

$$\frac{1}{2} \cdot kn^2 \cdot k = 2k^3 = 2 \cdot 500^3.$$

Оттука заклучуваме дека најголемиот можен број на пријателства изнесува $2 \cdot 500^3$. □

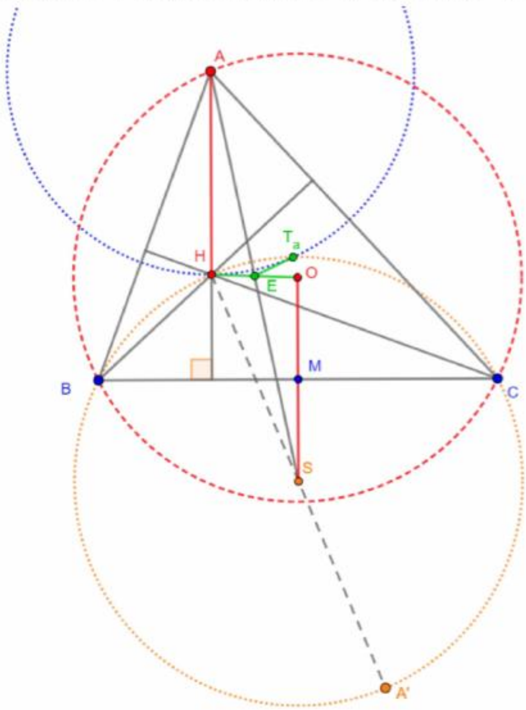
4. Нека ABC е остроаголен триаголник кој не е рамнокрак. Нека H е ортоцентар на $\triangle ABC$. Кружницата со центар во A и радиус AH ја сече опишаната кружница околу $\triangle BHC$ во точка $T_a \neq H$. Точките T_b и T_c се дефинирани аналогно. Докажете дека H лежи на опишаната кружница околу $\triangle T_a T_b T_c$.

Решение 1. Нека M е средина на BC. Со $\mathcal{S}$ ја означуваме централната симетрија во однос на точката M. Ако $A' = \mathcal{S}(A)$, тогаш $BA'CH$ е тетивен бидејќи

$$\angle BA'C + \angle BHC = \angle BAC + \angle BHC = 180°,$$

затоа што $\angle BA'C = \angle BAC$ и $\angle BHC = 180° - \angle BAC$. Исто така гледаме дека $\mathcal{S}(A) = A'$, $\mathcal{S}(B) = C$, $\mathcal{S}(C) = B$, што повлекува дека $\mathcal{S}$ ја пресликува опишаната кружница на триаголникот ABC во опишаната кружница на BHC. Конкретно, $\mathcal{S}$ го пресликува центарот O на опишаната кружница околу ABC во центарот S на опишаната кружница околу BHC.

Освен тоа, од $OM \perp BC$ следува дека $OS \perp BC$ и $OM = MS$. Познато е дека $AH = 2 \cdot OM$, што може да се докаже така што ќе се примети дека AO и HM се сечат на кружницата околу ABC во точката H' и дека OM е средна линија во триаголникот AHH'.



Сега можеме да кажеме дека $AH = 2 \cdot OM = OS$. Меѓутоа, $AH \perp BC$ и $OS \perp BC$, што значи дека AH е паралелна со OS. Тоа значи дека $AHSO$ е паралелограм, од каде заклучуваме дека AS минува низ средината E од OH. Имаме дека $AH = AT_a$ од дефиницијата на T_a и $SH = ST_a$ затоа што S е центар на опишаната кружница околу BHC. Заклучуваме дека AS е симетрала на HT_a, но E лежи на правата AS, што значи дека $ET_a = EH$.

Аналогно, добиваме дека $ET_b = ET_c = EH$. Тоа значи дека $ET_a = ET_b = ET_c = EH$, од каде се добива дека $HT_aT_bT_c$ е тетивен со центар во E. □

Решение 2. Тоа што се бара да се докаже е еквивалентно со конкурентноста на симетралите на HT_a, HT_b и HT_c. Тие симетрали се од обликот AO_a (т.е. BO_b, CO_c), каде O_a (т.е. O_b, O_c) е центар на опишаната кружница на $\triangle BHC$ ($\triangle CHA$, $\triangle AHB$). Од синусната теорема имаме $\frac{sin\angle BAO_a}{BO_a} = \frac{sin\angle ABO_a}{AO_a}$ и $\frac{sin\angle CAO_a}{CO_a} = \frac{sin\angle ACO_a}{AO_a}$, при што со делење на последниве два израза и користејќи го фактот дека

$$\angle ABO_a = \angle ABH + \angle HBO_a = 90^\circ - \alpha + \frac{180^\circ - \angle BO_aH}{2} =$$

$$= 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \angle BCH = 90^\circ - \alpha + \beta,$$

следува $\frac{sin\angle BAO_a}{sin\angle CAO_a} = \frac{sin(90^\circ-\alpha+\beta)}{sin(90^\circ-\alpha+\gamma)}$, а слично добиваме и $\frac{sin\angle CBO_b}{sin\angle ABO_b} = \frac{sin(90^\circ-\beta+\gamma)}{sin(90^\circ-\beta+\alpha)}$ и $\frac{sin\angle ACO_c}{sin\angle BCO_c} = \frac{sin(90^\circ-\gamma+\alpha)}{sin(90^\circ-\gamma+\beta)}$. Со множење на овие три израза (и користејќи го идентитетот $sin\angle(90^\circ - x) = sin\angle(90^\circ + x)$) добиваме

$$\frac{sin\angle BAO_a}{sin\angle CAO_a} \cdot \frac{sin\angle CBO_b}{sin\angle ABO_b} \cdot \frac{sin\angle ACO_c}{sin\angle BCO_c} = 1,$$

што според тригонометрискиот облик на теоремата на Чева повлекува дека AO_a, BO_b и CO_c се конкурентни, што и требаше да докажеме. □

5. Околу тркалезна маса седат n момчиња и n девојчиња, при што $n > 3$. Во секој чекор, две соседни деца може да си ги заменат местата. Под *ентропија* на дадена конфигурација (распоред на седење) се подразбира најмалиот можен број на чекори после што секое дете има барем еден сосед од својот пол. Најдете ја најголемата можна ентропија помеѓу сите конфигурации.

Решение 1. Одговор: $n - 2$.

Велиме дека дете е *осамено* ако нема ниту еден сосед од ист пол, во спротивно велиме дека е *здружено*.

Прво ќе докажеме дека $n - 2$ чекори се неопходни. Да ја разгледаме конфигурацијата со едно осамено девојче и едно осамено момче кои седат на дијаметрално спротивни места. Осаменото момче седи точно во средината помеѓу $n - 1$ последователни девојчиња, а осаменото девојче седи точно во средината помеѓу $n-1$ последователни момчиња. Јасно е дека се потребни барем $n - 2$ чекори да ги здружиме и осаменото момче и осаменото девојче:

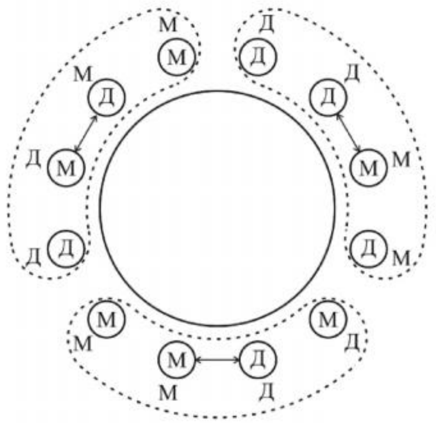
Алгоритам 1: ги поместуваме осаменото момче и осаменото девојче еден кон друг се додека меѓу нив има 2 деца од различен пол, за што ни требаат $n - 3$ чекори, и на крај ги замнуваме двете деца во средината.

Да дефинираме *блок* да биде група од барем 2 последователни деца од ист пол. За осамено дете кое седи помеѓу два блока велиме дека е *изолирано*. *Група* е множество на последователни деца.

Го делиме решението во неколку леми.

Лема 1. Наизменична низа со должина $2k$ каде $k > 3$, со ограничување да не ги поместиме крајните деца, може да биде здружена со најмногу $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ чекори, што не надминува $k - 2$.

Доказ. Нека низата е $d_1m_1d_2m_2\dots d_km_k$, при што не смееме да ги поместиме d_1 and m_k. (Тука m означува момче, а d девојче.) Да забележиме дека за $k=2$ одговорот е 1 (размени ги d_2 and m_1). За $k=3$ одговорот е 3. Ќе го докажеме главното тврдење со индукција. За $k=4$ одговорот е 2, третирајќи ја низата како 2 посебни низи, секоја со должина 4, за кои ни треба по 1 чекор. За $k=5$ ни требаат 3 чекори, размени ги m_1 и d_2, m_4 и d_5, и на крајот m_3 и d_3. Нека важи за сите природни броеви помали од k, ќе го докажеме за k: ги игнорираме последните 4 деца најдесно, потоа по индуктивната хипотеза ги здружуваме останатите со $\lceil\frac{k-2}{2}\rceil$ чекори, и за крај уште 1 чекор за последните 4 деца. ◇



СЛИКА 1. Лема 1 - За $n=6$ потребни се 3 чекори.

Последица. Ако сите $2n$ деца се осамени, доволни се $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ чекори за да ги здружиме. ◇

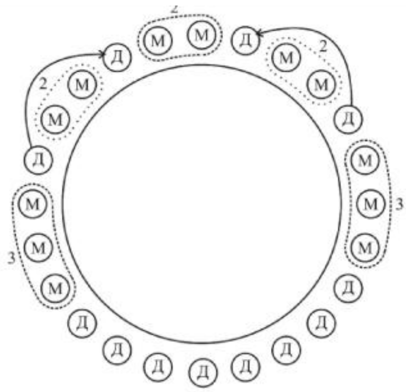
Лема 2. Нека сите осамени деца се од ист пол (на пример девојчиња). Тогаш можеме да ги здружиме со најмногу $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ чекори.

Доказ. Нема осамени момчиња, што значи сите припаѓаат на блокови. Ги боиме сите момчиња на еден блок во една боја, сина или црвена, така што последователни дисјунктни блокови момчиња се со различни бои („шаховски"). Една од овие бои, да речеме сина, има најмногу $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ момчиња. Одејќи околу масата, кога ќе сретнеме осамено девојче, го движиме низ синиот лак од момчиња соседен на тоа девојче. Вака ќе направиме најмногу $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ чекори да ги здружиме сите девојчиња, бидејќи секое сино момче ќе биде поместено најмногу еднаш, а црвените момчиња воопшто не се движат. ◇

Да нагласиме дека „средбите" („здружувањата") секогаш се случуваат на краевите на сините лаци, за да избегнеме раздвојување на момчиња кои се веќе здружени. Со други зборови, кога здружуваме 2 деца, едно од нив воопшто не се поместува.
Понатаму, претпоставуваме дека има најмалку едно осамено момче и едно осамено девојче.

Лема 3. Маса без алтернирачка низа подолга од 2 може да се здружи во $n-2$ чекори.

Доказ. За даден блок деца велиме дека е *ограда* ако барем до еден негов крај се наоѓа осамено дете. Нека O_m е бројот на момчиња кои припаѓаат на огради, O_d бројот на девојчиња на огради, S_m бројот на сами момчиња и S_d бројот на сами девојчиња. Јасно $O_m+S_m\leq n$ и $O_d+S_d\leq n$. Бидејќи нема наизменична низа, секое осамено дете е изоирано. Исто така, имаме have $S_m\geq 1$



СЛИКА 2. Лема 2 - Во групите заокружени со ⋯⋯ има вкупно 4 момчиња, а во групите заокружени со $---$ има вкупно 8 момчиња. При оваа конфигурација, за $n = 12$ и 4 осамени девојчиња, имаме решение во 4 чекори.

and $S_d \geq 1$. На ист начин како во Лема 2 може да се докаже дека сите момчиња може да се здружат со $\left\lfloor \frac{O_d}{2} \right\rfloor$ чекори, и сите осамени девојчиња со $\left\lfloor \frac{O_m}{2} \right\rfloor$ чекори. Во овој процес треба да се внимава да се одбегне двојно броење, т.е. изолирано дете да не стане дел од ограда. За ова го користиме истиот пристап од Алгоритам 1: ако изолирано девојче и изолирано момче се движат еден кон друг, ги запираме кога меѓу нив остануваат 2 деца од различен пол, и потоа ги разменуваме овие 2 деца во средината.
Ако $S_m \geq 2$ или $S_d \geq 2$, потребниот број на чекори не надминува $\left\lfloor \frac{O_m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{O_d}{2} \right\rfloor < n - 1$.
Ако $S_m = 1$ и $S_d = 1$:
- Ако $O_m + O_d < 2n - 2$, $\left\lfloor \frac{O_m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{O_d}{2} \right\rfloor < n - 1$
- Ако $O_m + O_d = 2n - 2$, во најлош случај ни требаат $n - 2$ чекори како во Алгоритам 1.
Ова го комплетира доказот на Лема 3. ⋄

Можен е алтернативен доказ преку концептот на супер-пријател, дефиниран подолу. Овде индуктивниот чекор би го правеле заменувајќи едно момче и едно девојче кои се соседни и се наоѓаат на краевите на два блока од различен пол со супер-пријател (на пример во $d_1d_2d_3b_1b_2b_3b_4$, место d_3 и b_1 вметнуваме супер-пријател).
Да дефинираме *супер-пријател* да биде дете кое ги прави двата негови соседа здружени независно од нивниот пол. Во спротивно, велиме дека детето е *обично* (вообичаено момче или девојче). Да забележиме дека во оптималното решение никогаш не мораме да ги поместуваме супер-пријателите.

Сега сме подготвени за финалната лема.

Лема 4. Маса со $2n$ обични деца може да биде здружена со $n - 2$ чекори, при што $n > 3$. Ако има супер-пријатели, не мора да бидат поместени во процесот.

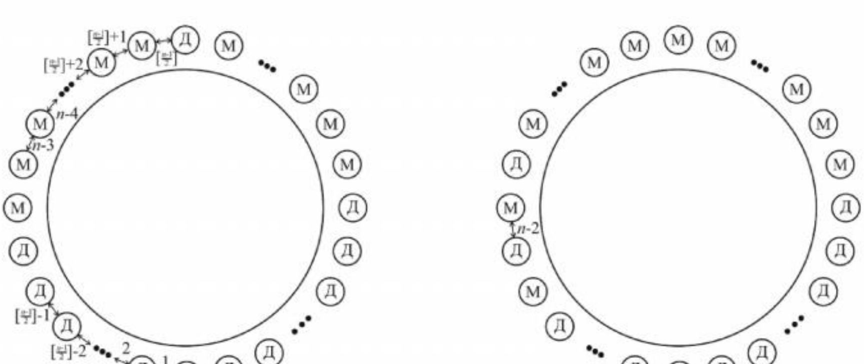
Доказ. Индукција по n. Тврдењето важи за $n = 4$, нека важи за сите природни броеви помали од n ќе го докажеме за n.
Ако нема наизменична низа, доказот е готов според Лема 3. Во спротивно, ја земаме најдолгата можна парна наизменична низа која не може од ниту еден крај да биде продолжена и да остане парна наизменична низа, нека нејзината должина е $2a$ и ја заменуваме со супер-пријател.
- Ако $n - a > 3$, по индуктивната хипотеза овие $2(n - a)$ деца може да се здружат со $n - a - 2$ чекори. Потоа ја ставаме наизменичната низа на местото на супер-пријателот. Ако ова креира осамени деца соседни до алтернирачката низа, ги додаваме овие деца на низата заедно со

нивниот сосед, за да се зачува парноста. Добиената низа има најмногу $2a + 4$ деца, и ако овој број е поголем од 6 може да ја здружиме во најмногу $\lceil \frac{a+2}{2} \rceil \leq a$ чекори според Лема 1 без да ги поместиме нејзините крајни точки. Значи севкупно $(n - a - 2) + a = n - 2$ чекори. Ако наизменичната низа е „мала“ (најмногу 6 деца), можеме да ја здружиме со a чекори, и повторно добиваме $(n - a - 2) + a = n - 2$.
- Ако $n-a = 0$, целата маса е наизменична низа, па според Лема 1 ни требаат најмногу $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq n-2$ чекори.
- Ако $n - a = 1$, имаме дека $a > 3$, па според Лема 1 наизменичната низа може да биде здружена со $a - 1 = n - 2$ чекори. Не ни требаат дополнителни чекори, бидејќи од конструкцијата на алтернативната низа знаеме дека имаме ситуација $d_1|d_2m_1 \ldots m_{n-1}|m_n$, каде наизменичната низа е помеѓу |. Со оглед дека не ги поместуваме d_2 and m_{n-1} (крајните членови во наизменична низа не се поместуваат), d_1 и m_n почнуваат здружени и остануваат до крајот на процесот.
- Доколку $n - a = 2$, имаме две можни сценарија:
1. $d_1d_2|d_3m_1 \ldots m_{n-2}|m_{n-1}m_n$ (каде d_1 и m_n се соседни), па тогаш доволно е да ја здружиме наизменичната низа, што се постигнува во најмногу $a = n - 2$ чекори. Аналоген е случајот $d_1d_2|m_1d_3m_2 \ldots d_n|m_{n-1}m_n$.
2. $d_1m_1|m_2d_2 \ldots d_{n-1}|d_nm_n$ при што m_1, d_1, m_n и d_n формираат наизменична низа, и за нив ни треба само 1 чекор (ги разменуваме d_1 и m_n). Исто така, да забележиме дека краевите на наизменичната низа се веќе здружени. Ако $a = 3$, ни треба 1 чекор за наизменичната низа, значи вкупно 2. Во спротивно, $\lceil \frac{a}{2} \rceil + 1 < a = n - 2$
- Ако $n - a = 3$, имаме 3 различни ситуации:
1. $a = 1$ и $a = 2$ се тривијални.
2. Ако $a > 3$ прво го здружуваме остатокот од масата, за што ни требаат најмногу 3 чекори. Потоа за наизменичната низа ни требаат $\lceil \frac{a}{2} \rceil <= a - 2$ чекори, вкупно $(a - 2) + 3 = n - 2$ чекори.
3. Ако $a = 3$ лесно се проверува дека 4 чекори ни се доволни: прво 2 за не-наизменичната низа, потоа уште 2 за наизменичната. Нека низата е $x|m_1d_1m_2d_2m_3d_3|y$, можни се следните случаи:

3.а Доколку x и y се од различен пол, x мора да е момче и y девојче, според конструкцијата на максималната наизменична низа. Потребни ни се најмногу 2 чекора за четирите деца помеѓу x и y, потоа ги разменуваме d_2 и m_2, што ги здружува сите деца, бидејќи m_1 и d_3 се веќе здружени.

3.б Доколку x и y се од ист пол (на пример машки), имаме $m_0|m_1d_1m_2d_2m_3d_3|m_4$. Ги разменуваме d_1 и m_2, а потоа d_3 и m_3. Понатаму, два чекора ни се довоолни да ги здружиме четирите деца помеѓу m_0 и m_4, од кои 3 се девојчиња и едно момче.
Ова ги покрива сите случаи и лемата е докажана. ◇

□



Решение 2. Одговор: $n-2$.

Велиме дека дете е *осамено* ако нема ниту еден сосед од ист пол, во спротивно велиме дека е *здружено*.

Прво ќе докажеме дека $n-2$ чекори се неопходни. Да ја разгледаме конфигурацијата со едно осамено девојче и едно осамено момче кои седат на дијаметрално спротивни места. Осаменото момче седи точно во средината помеѓу $n-1$ последователни девојчиња, а осаменото девојче седи точно во средината помеѓу $n-1$ последователни момчиња. Јасно е дека се потребни барем $n-2$ чекори да ги здружиме и осаменото момче и осаменото девојче:

Алгоритам 1: ги поместуваме осаменото момче и осаменото девојче еден кон друг се додека меѓу нив има 2 деца од различен пол, за што ни требаат $n-3$ чекори, и на крај ги заменуваме двете деца во средината.

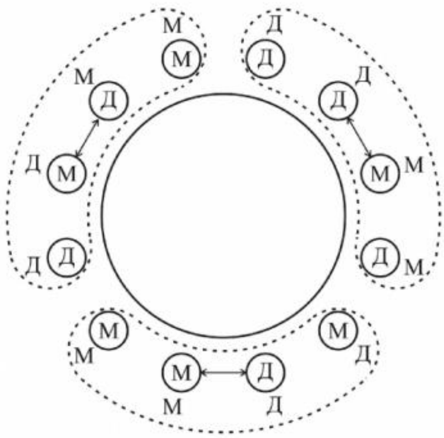
Да дефинираме *блок* да биде група од барем 2 последователни деца од ист пол. За осамено дете кое седи помеѓу два блока велиме дека е *изолирано*. *Група* е множество на последователни деца.

Го делиме решението во неколку леми.

Лема 1. Ако сите $2n$ деца се осамени, можеме да ги здружиме во најмногу $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ чекори.

Доказ. Одејќи околу масата во насока на стрелките на часовникот, секогаш кога ќе сретнеме осамено момче, го разменуваме со девојчето до него во наоска на стрелките на часовникот ако е осамено, во спротивно со другото девојче. Секој ваков чекор освен можеби последниот го смалува бројот на осамени деца за 4, така што нема да ни требаат повеќе од $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ чекори, кој не надминува $n-2$ за $n>3$.

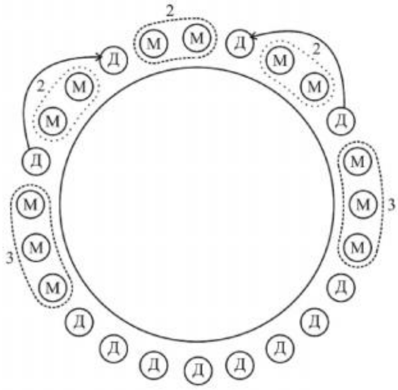
Еквивалентно решение: ги делиме децата на групи по 4, во секоја група ги разменуваме средните 2 деца. Ако n е парен, завршуваме во $\frac{n}{2}$ чекори, ако n е непарен, ни требаат $\frac{2n+2}{4} = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ чекори. ◇



СЛИКА 3. Лема 1 - За $n=6$ потребни се 3 чекори.

Лема 2. Нека сите осамени деца се од ист пол (на пример девојчиња). Тогаш можеме да ги здружиме со најмногу $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ чекори.

Доказ. Нема осамени момчиња, што значи сите припаѓаат на блокови. Ги боиме сите момчиња на еден блок во една боја, сина или црвена, така што последователни дисјунктни блокови момчиња се со различни бои („шаховски"). Една од овие бои, да речеме сина, има најмногу $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ момчиња. Одејќи околу масата, кога ќе сретнеме осамено девојче, го движиме низ синиот лак од момчиња соседен на тоа девојче. Вака ќе направиме најмногу $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ чекори да ги здружиме сите девојчиња, бидејќи секое сино момче ќе биде поместено најмногу еднаш, а црвените момчиња воопшто не се движат. ◇



Слика 4. Лема 2 - Во групите заокружени со ······ има вкупно 4 момчиња, а во групите заокружени со − − − − има вкупно 8 момчиња. При оваа конфигурација, за $n = 12$ и 4 осамени девојчиња, имаме решение во 4 чекори.

Да нагласиме дека „средбите" („здружувањата") секогаш се случуваат на краевите на сините лаци, за да избегнеме раздвојување на момчиња кои се веќе здружени. Со други зборови, кога здружуваме 2 деца, едно од нив воопшто не се поместува.
Понатаму, претпоставуваме дека има најмалку едно осамено момче и едно осамено девојче. Од ова следи дека има барем еден блок момчиња. Има 3 можни структури кои може да се најдат помеѓу 2 последователни блока момчиња (овие 2 блока не мора да се различни, ако има само 1 блок момчиња):
- Единствено осамено (изолирано) девојче.
- Блок девојчиња (очигледно никогаш не мора да се поместат во оптималното решение).
- Множество деца меѓу кои има барем 1 осамено момче, и нема здружени момчиња. Оваа структура ќе ја наречеме *сектор*.
Еве пример за сектор: mmmm | *ddmdmdddmd* | *mmmmm*. Конкретно, низата деца помеѓу двете | сочинува сектор. Да забележиме дека крајните деца во секторот се девојчиња, во спротивно не би припаѓале на секторот, а на соседните блокови. Од дефиницијата следи дека сите момчиња на еден сектор се осамени. Велиме дека сектор станува *здружен* кога сите осамени деца на него ќе станат здружени. Нека севкупниот број на момчиња кои припаѓаат на блокови е B.

Лема 3. Сите изолирани девојчиња може да бидат здружени во $\left\lfloor \frac{B}{2} \right\rfloor$ чекори.
Доказ. Истиот пристап со наизменично боење на блоковите момчиња како Лема 2. ◇

Подоцна како конечен чекор ќе го докажеме следното тврдење, кое во меѓувреме го користиме да го комплетираме решението:

Тврдење 1. Сектор со d девојчиња може да се здружи во $\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil$ чекори. При тоа, најчесто доволни се $\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ чекори, освен во случајот кога имаме наизменична низа со непарен број на девојчиња, на пример dmdmdmdmd. Во овој случај мора да има барем 2 момчиња, бидејќи има барем 3 девојчиња.

Да го означиме со D_s вкупниот број на девојчиња на сектори, и нека има k наизменични сектори за кои ни треба горната граница на бројот на чекори со „таван" (значи со барем 2 момчиња), и l останати сектори (со барем 1 момче). Нека d_i е бројот на изолирани девојчиња. Тогаш важи $D_s + d_i \leq n$. Исто така, вкупниот број на момчиња на блокови $B \leq n - 2k - l$. За вкупниот број на неопходни чекори C сакаме да докажеме дека $C \leq n - 2$. Според Лема 3 и Тврдење 1 важи

$$C \leq \left\lfloor \frac{B}{2} \right\rfloor + \frac{D_s}{2} + \frac{k}{2} \leq \frac{n - 2k - l}{2} + \frac{n - d_i}{2} + \frac{k}{2} \leq n - \frac{k + d_i + l}{2}. \tag{1}$$

Ако $d_i = 0$, тогаш не ни требаат $\left\lfloor \frac{B}{2} \right\rfloor$ чекори да ги социјализираме изолираните девојчиња (бидејќи такви нема), па имаме решение во најмногу $\left\lceil \frac{D_s}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq n - 2$ чекори.
Понатаму нека $d_i \geq 1$. Знаеме дека $k + l \geq 1$ бидејќи има барем едно осамено момче. Единствен начин да добиеме $C > n - 2$ е ако $k + d_i + l = 2$, и при тоа $d_i = 1$ и $k + l = 1$. Ова значи дека неравенствата (1) стануваат равенства, па имаме $B = D_S = n - 1$, па имаме едно изолирано девојче и едно осамено момче. Равенство може да важи само во сценариото опишано во Алгоритам 1, но тогаш знаеме дека $n - 2$ чекори ни се доволни.
Во овој процес треба да се внимава да се одбегне двојно броење, на пример изолирано девојче непланирано да стане дел од сектор, или осамено момче да стане дел од блок. За ова го користиме истиот пристап од Алгоритам 1: ако изолирано девојче и осамено момче се движат еден кон друг, ги запираме кога меѓу нив остануваат 2 деца од различен пол, што создава наизменична низа, во која разменуваме оптимален број на парови. Така заштедуваме 1 чекор на итерацијата на блокот момчиња, но во исто време додаваме 1 девојче во блокот, па вкупниот број на чекори не расте.

Конечно ќе го докажеме Тврдењето 1 во три леми од растечки опсег.

Лема 4. Сектор со r девојчиња, од кои ниту едно не е осамено, и 1 момче, може да се здружи со $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$ чекори.

Доказ. Имаме 2 блока девојчиња, и осаменото момче поминува низ пократкиот од нив за да се здружи со друго момче. ◇

Лема 5. Сектор со r девојчиња, од кои ниту едно не е осамено, може да се здружи со $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$ чекори.

Доказ. Истиот пристап како Лема 2: ги боиме наизменично блоковите девојчиња. ◇

Лема 6. Сектор со r девојчиња може да се здружи во $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$ чекори, освен во случајот на наизменична низа со r непарен, за кој ни требаат $\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$ чекори.

Доказ. Ако сите девојчиња се осамени, тогаш го добиваме одговорот со ист пристап како Лема 1. Во спротивно, имаме барем еден блок од девојчиња, па бројот на момчиња е најмногу $r - 2$.
Пристапуваме со индукција по r, јасно $r \geq 2$. Тврдењето лесно се проверува за $r = 2$ и $r = 3$. Да претпоставиме дека важи за сите природни броеви помали од r, ќе го докажеме за r.
Ако нема осамено девојче во внатрешноста на секторот (единствено можеби на рабовите), го добиваме решението на ист начин како Лема 5, при што водиме сметка да ги поместиме осамените момчиња соседни до осамените девојчиња, што ги здружува и девојчињата, па не ни требаат дополнителни чекори (секоагш кога здружуваме 2 осамени деца, имаме избор кое од нив

го движиме кон другото).
Во спротивно, ако има осамено девојче во внатрешноста, да го означиме најлевото од нив со D_L, нека d_1 е најлевото девојче во секторот, а d_r најдесното:

$$|d_1 \cdots mddM_L D_L M_R \ \# \ d \cdots d_r|.$$

($\#$ означува сепаратор)

Нека лево од $\#$ има a девојчиња, а десно b, при што $a + b = r$.
Најпрво го разгледуваме случајот $b > 1$. Момчињата во левиот дел може да се здружат во $\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$ чекори, по истиот принцип како Лема 2. При тоа, да забележиме дека овој дел има најмногу 2 осамени девојчиња (D_L и можеби d_1), кои автоматски ќе бидат здружени без дополнителни чекори (ако d_1 е осамено, го поместуваме момчето кое на почетокот седи десно од d_1). Исто така, при тоа водиме сметка да не го поместиме M_R. Бидејќи $b > 1$, на овој начин десно од $\#$ добиваме нов помал сектор за кој можеме да ја примениме индуктивната хиотеза. Добиваме дека вкупниот број на чекори е најмногу $\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{a+b}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$, како што посакуваме.
Доколку $b = 1$, секторот изгледа вака:

$$|d_1 \cdots mddM_L D_L M_R d_r|,$$

па во првиот чекор ги разменуваме D_L и M_R и добиваме $|d_1 \cdots mddM_L M_R D_L d_r|$. Со овој **еден** чекор елиминиравме **две** девојчиња (D_L и d_r) и добивме помал сектор лево од M_L, па може да продолжиме по индуктивната хипотеза.
Ако пак $b = 0$, тогаш $a = r$ и тврдењето важи бидејќи го здружуваме целиот сектор со $\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$ чекори. ◇

□

ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА БМО 2023

1. Нека $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа од позитивни реални броеви таква што $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $\frac{a_{n+1}^4}{a_n^3} = 2a_{n+2} - a_{n+1}$. Докажете дека за секој природен број $N > 1$ важи

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k^2}{a_{k+1}} < 3.$$

Решение 1. Ќе ја презапишеме релацијата во следниот облик:

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^3 = 2 \cdot \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - 1.$$

Дефинираме нова низа $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ со $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ за $n \geq 1$. Важи $x_1 = \frac{a_2}{a_1} = 2$ и

$$x_n^3 = 2x_{n+1} - 1 \iff x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (x_n^3 + 1).$$

Горната рекурзија може да се запише како

$$x_{n+1} - 1 = \frac{1}{2} \cdot (x_n^3 - 1) \iff \frac{x_{n+1} - 1}{x_n - 1} = \frac{1}{2} \cdot (x_n^2 + x_n + 1).$$

Со множење на равенките за $k = 1, 2, \ldots, n$ и користејќи дека $x_1 = 2$ добиваме

$$x_{n+1} - 1 = \frac{x_{n+1} - 1}{x_1 - 1} = \frac{x_{n+1} - 1}{x_n - 1} \cdot \frac{x_n - 1}{x_{n-1} - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{x_2 - 1}{x_1 - 1} = \frac{1}{2^n} \cdot \prod_{k=1}^{n} (x_k^2 + x_k + 1).$$

Го користиме очигледното неравенство $t^2 + t + 1 \geq 3t$, еквивалентно на $(t-1)^2 \geq 0$, и добиваме

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^n} \cdot \prod_{k=1}^{n} (x_k^2 + x_k + 1) > \frac{3^n}{2^n} \cdot \prod_{k=1}^{n} x_k.$$

Користејќи дека $x_k = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ за $k \geq 1$, горното неравенство е еквивалентно со:

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} > \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1} \iff a_{n+2} > \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot a_{n+1}^2.$$

Случајот $n = 1$ се проверува директно, додека за секое $n \geq 1$ добиваме

$$a_{n+1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot a_n^2 \iff \frac{a_n^2}{a_{n+1}} < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

За фиксно $N > 1$ имаме

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k^2}{a_{k+1}} < \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^N}{1 - \frac{2}{3}} < \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3.$$

$\square$

Решение 2. Од дадената релација добиваме дека

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^4}{2a_n^3} + \frac{a_{n+1}}{2}.$$

Следува дека низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е строго растечка. Оттаму, $a_n > 2$ за секое $n > 2$. По делење на последниот израз со a_{n+1}^2 добиваме:

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}^2} = \frac{a_{n+1}^2}{2a_n^3} + \frac{1}{2a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}^2}{a_n^4}\left(\frac{a_n}{2}\right) + \frac{1}{2a_{n+1}} > \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2.$$

Од $a_3 = \frac{a_2^4}{2a_1^3} + \frac{a_2}{2} = \frac{2^4}{2} + \frac{2}{2} = 9$, $\frac{a_1^2}{a_2} = \frac{1}{2}$ и $\frac{a_2^2}{a_3} = \frac{4}{9}$, добиваме дека за $i \geq 2$ важи:

$$\frac{a_i^2}{a_{i+1}} < \left(\frac{4}{9}\right)^{2^{i-2}} < \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1}.$$

Следствено,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{a_{k+1}} < \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = 1.3 < 3.$$

□

2. На еден шаховски турнир, секои двајца учесници играле меѓусебно најмногу еднаш. Притоа, за секои двајца од нив, A и B, кои не играле меѓусебе на турнирот, точно двајца други учесници, C и D, играле и против A и против B во текот на турнирот. Никои 4 учесници не одиграле точно 5 партии меѓусебно. Докажете дека секој учесник одиграл подеднаков број партии на турнирот.

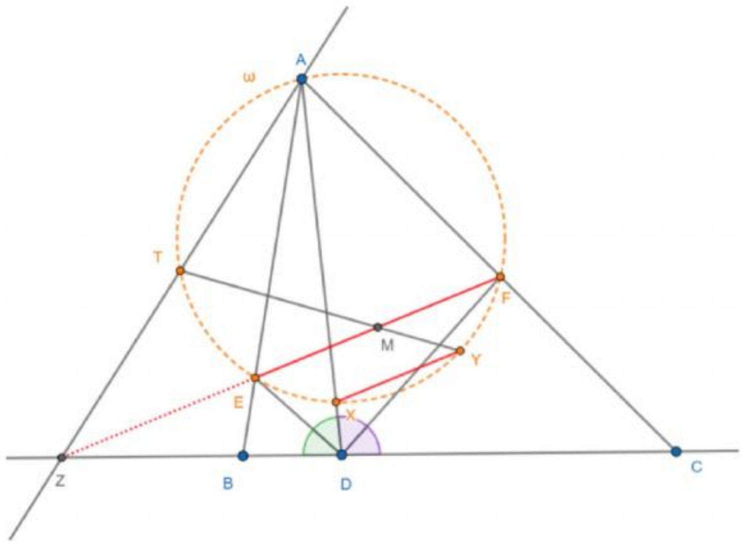
Решение. Нека G е едноставниот граф кој соодветствува на турнирот: темињата се учесниците а ребрата се одиграните партии. Согласно условот на задачата, секој пар несоседни темиња во G имаат точно два заеднички соседа, и ниту еден индуциран подграф од G има ред (број на темиња) 4 и големина (број на ребра) 5. Барањето е да се докаже дека G е регуларен.

Со оглед дека секои несоседни темиња имаат барем еден заеднички сосед, G е сврзан (всушност, неговиот дијаметар е најмногу 2). Оттаму доволно е да докажеме дека секои две соседни темиња u и v имаат еднакви степени, и ова ќе го докажеме воспоставувајќи биекција помеѓу множествата $S = N(u)\backslash N(v)$ и $T = N(v)\backslash N(u)$.

Нека $x \in S$. Бидејќи $x \nleftrightarrow v$, постои $y \in N(x) \cap N(v)$ со $y \neq u$. Имајќи го предвид индуцираниот подграф $G[\{u, v, x, y\}]$, кој ги содржи ребрата ux, uv, xy аи vy, несоседноста $x \nleftrightarrow v$ повлекува дека $u \nleftrightarrow y$. Значи $y \in T$. Притоа, бидејќи u и y ги имаат за заеднички соседи v и x, темето y не е можно да се генерира на овој начин тргнувајќи од друго теме x' од S. Значи $x \mapsto y$ дефинира инјекција од S во T. Заменувајќи ги улогите на v и u добиваме и инјекција од T во S. Со оглед дека овие две множества се конечни, добиените инјекции се всушност биекции, и оттука $\deg(u) = \deg(v)$. □

3. Нека ABC е триаголник таков што $AB < AC$. Точката D е избрана на отсечката BC, така што $BD < CD$. Симетралите на $\angle ADB$ и $\angle ADC$ ги сечат отсечките AB и AC во E и F, соодветно. Нека ω е опишаната кружница околу $\triangle AEF$ и нека M е средина на EF. Полуправата AD ја сече кружницата ω во X, додека правата што минува низ X паралелна со EF повторно ја сече ω во Y. Ако YM ја сече ω во T, докажете дека AT, EF и BC се конкурентни.

Решение. Ќе го поделиме доказот во неколку чекори.



Чекор 1: $TF \cdot EX = TE \cdot XF$.

Доказ: Нека E_1 и F_1 се проекциите од E и F на правата TY. Јасно е дека триаголникот $\triangle EME_1$ е складен со триаголникот $\triangle FMF_1$. Затоа важи

$$1 = \frac{EM}{FM} = \frac{EE_1}{FF_1} = \frac{\text{Area}(TEY)}{\text{Area}(TFY)} = \frac{TE \cdot EY \cdot \sin\angle TEY}{TF \cdot YF \cdot \sin\angle TFY} = \frac{TE \cdot XF}{TF \cdot EX}$$

користејќи дека $EX = YF$ и $EY = XF$, што е последица на фактот дека $EXYF$ е тетивен трапез.

Чекор 2: Правата AT ја сече BC во точката Z таква што

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BZ}{CZ}.$$

Доказ: Ќе ги воведеме ознаките $\angle BAT = \alpha$, $\angle BAD = \beta$ и $\angle DAC = \gamma$. Ги имаме следните пресметки:

$$\frac{BD}{CD} : \frac{BZ}{CZ} = \frac{BD \cdot CZ}{CD \cdot BZ} = \frac{\text{Area}(BAD)}{\text{Area}(CAD)} \cdot \frac{\text{Area}(CAZ)}{\text{Area}(BAZ)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin\beta}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \cdot \sin\gamma} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot AZ \cdot \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AZ \cdot \sin\alpha} = \frac{\sin\beta \cdot \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}.$$

Нека d е дијаметар на кружницата $\odot AEF$. Со примена на синусна теорема добиваме дека $TE = d \cdot \sin\alpha$, $EX = d \cdot \sin\beta$, $FX = d \cdot \sin\gamma$ и $TF = d \cdot \sin(\alpha+\beta+\gamma)$. Користејќи го Чекор 1 добиваме:

$$1 = \frac{TF \cdot EX}{TE \cdot XF} = \frac{d \cdot \sin(\alpha+\beta+\gamma) \cdot d \cdot \sin\beta}{d \cdot \sin\alpha \cdot d \cdot \sin\gamma} = \frac{\sin\beta \cdot \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}$$

што го комплетира доказот на овој чекор.

Чекор 3: Точките E, F и Z се колинеарни.

Доказ: Користејќи ја теоремата за симетрала на агол за $\triangle ADB$ добиваме

$$\frac{BE}{AE} = \frac{BD}{AD}.$$

Слично, од теоремата за симетрала на агол за $\triangle ADC$ добиваме

$$\frac{AF}{CF} = \frac{AD}{CD}.$$

Комбинирајќи со Чекор 2, имаме

$$\frac{BE}{AE} \cdot \frac{AF}{CF} \cdot \frac{CZ}{BZ} = \frac{BD}{AD} \cdot \frac{AD}{CD} \cdot \frac{CD}{BD} = 1.$$

Заклучокот сега следува од теоремата на Менелај. □

4. Нека f е ненулта функција од множеството позитивни цели броеви во множеството ненегативни цели броеви таква што за сите позитивни цели броеви a и b важи

$$2f(ab) = (b+1)f(a) + (a+1)f(b).$$

Докажете дека за секој прост број p постои прост број q и позитивни цели броеви x_1, ..., x_n, како и цел број $m \geq 0$, такви што

$$\frac{f(q^p)}{f(q)} = (px_1+1) \cdot \ldots \cdot (px_n+1) \cdot p^m,$$

при што сите броеви px_1+1,..., px_n+1 се прости.

Решение. Лесно воочуваме дека $f(1) = 0$ ставајќи $a = b = 1$. Прво ќе докажеме дека $f(a) = 0$ и $f(b) = 0$ повлекува $f(ab) = 0$. Имено, доколку a и b се пресликуваат во нула, тогаш

$$(b+1)f(a) + (a+1)f(b) = (b+1) \cdot 0 + (a+1) \cdot 0 = 0.$$

Нека p е даден прост број. Функцијата f не е идентично нула, па постои најмал природен број q таков што $f(q) \neq 0$. Ако q не е прост, тогаш $q = xy$ (бидејќи $f(1) = 0$), каде што $1 < x \leq y < q$. Меѓутоа, тоа би значело дека $f(x) = f(y) = 0$ заради минималноста на q, што исто така би значело дека $f(q) = 0$, што е невозможно. Заклучуваме дека q е прост и дека $f(q) \neq 0$.

Следно ќе докажеме (со математичка индукција) дека $f(q^k) = (q^{k-1} + \ldots + q + 1)f(q)$ за сите $k \geq 1$. Случајот $k = 1$ е тривијален. Ако претпоставиме дека ова важи за дадено $k \geq 1$ и ставиме $a = q^k$ и $b = q$, добиваме

$$\begin{gathered} 2f(q^{k+1}) = (q+1)f(q^k) + (q^k+1)f(q) = \\ (q+1)(q^{k-1} + \ldots + q + 1)f(q) + (q^k+1)f(q) = \\ 2(q^k + \ldots + q + 1)f(q). \end{gathered}$$

Тоа значи дека $f(q^{k+1}) = (q^k + \cdots + q + 1)f(q)$, со што индуктивниот доказ е завршен.
Сега можеме да избереме $k = p$. Да забележиме дека

$$f(q^p) = (q^{p-1} + \ldots + q + 1)f(q) = \Phi_p(q) \cdot f(q),$$

каде што $\Phi_p(x) = x^{p-1} + \cdots + x + 1$. Освен тоа, $f(q) \neq 0$, па

$$\frac{f(q^p)}{f(q)} = \Phi_p(q).$$

Нека r е прост делител на $\Phi_p(q)$. Бидејќи $(q-1)\Phi_p(q) = q^p - 1$, имаме дека $r|q^p - 1$. Нека $t = \text{ord}_r(q)$. Тогаш $t|p$, па или $t = 1$ или $t = p$. Ако $t = 1$, имаме дека $r|q-1$ и $r|\Phi_p(q)$, па $r|p$, што значи дека $r = p$. Ако $t = p$, имаме $p|r-1$ од малата теорема на Ферма, па r може да се запише како $px+1$.

Тоа значи дека сите прости делители од $\frac{f(q^p)}{f(q)}$ се или p или се од облик $px+1$. Сега заклучокот следува од основната теорема на аритметика. □

ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА ИМО 2023

1. За секој цел број $n > 1$, нека $s(n)$ е најмалиот прост делител на n, а $d(n)$ е бројот на позитивни делители на n. Дали постојат 2022 позитивни цели броеви $a_1, a_2, ..., a_{2022}$ со $a_1 < a_2 - 1 < ... < a_{2022} - 2021$ такви што за секој $k = 1, ..., 2021$ важи $d(a_{k+1} - a_k - 1) > 2022^k$ и $s(a_{k+1} - a_k) > 2022^k$?

Решение. Одговорот е: Да.
Нека $a_k = k \cdot (2023^{2023})! + k$ за $k = 1, ..., 2023$. Да забележиме дека $a_{k+1} - a_k - 1 = (2023^{2023})!$, па оттаму $d(2023^{2023}!) > 2023^{2023} > 2023^k$ за $k = 1, ..., 2022$. Исто така, важи $s(a_{k+1} - a_k) = s((2023^{2023})! + 1) > 2023^{2023} > 2023^k$; имено, ако прост број p е делител на $n! + 1$, тогаш мора да важи $p > n$ (во спротивно $p|n!$, што не е возможно). □

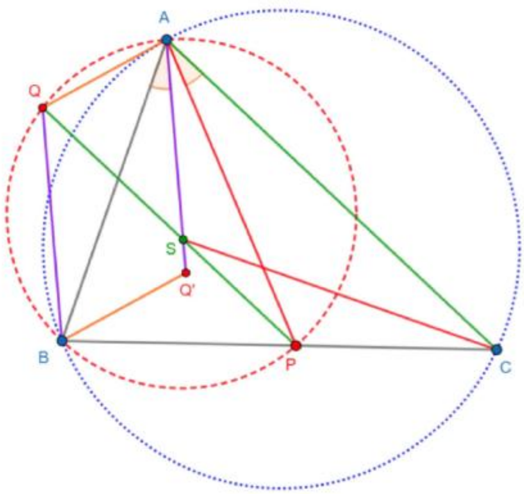
2. Нека ABC е остроаголен триаголник со $AB < AC$ и $AB < BC$. На отсечката BC избрана е точка P таква што $\angle APB = \angle BAC$. Тангентата на опишаната кружница на $\triangle ABC$ повлечена во A ја сече опишаната кружница на $\triangle APB$ во точка $Q \neq A$. Нека Q' е симетрична на Q во однос на средината на AB. Правата PQ ја сече отсечката AQ' во S. Докажете дека

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} > \frac{1}{CS}.$$

Решение. Прво ќе докажеме дека $PQ \parallel AC$. Правата AQ е тангента на $\odot ABC$ во A, па $\angle BAQ = \angle ACB$. Исто така имаме $\angle AQP = \angle ABP = \angle ABC$. Оттука заклучуваме дека

$$\angle AQP + \angle QAC = \angle ABC + \angle QAB + \angle BAC = \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$$

па добиваме $PQ \parallel AC$, што и требаше да се докаже.



Исто така имаме $\angle ACP = \angle ACB = \angle BAQ = \angle ABQ'$, бидејќи $AQ \parallel BQ'$. Да забележиме и дека $\angle APC = \angle AQB = \angle AQ'B$, па $\triangle AQ'B$ е сличен со $\triangle APC$. Тоа значи дека $\angle BAQ' = \angle CAP$, што повлекува $\angle BAP = \angle CAS$. Имаме и

$$\angle BAP = 180^\circ - \angle ABC - \angle APB = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAC = \angle ACB.$$

Заклучуваме дека $\angle CAS = \angle BAP = \angle ACP$. Заедно со $PS \parallel AC$, добиваме дека $ASPC$ е рамнокрак трапез. Тоа значи и дека $CS = AP$.

Нека $AP = x$, $BC = a$, $AC = b$ и $BC = c$. Користејќи ја сличноста на $\triangle AQ'B$ со $\triangle APC$ добиваме

$$\frac{b}{c} = \frac{AP}{AQ'} = \frac{AP}{BQ},$$

затоа што $BQ = AQ'$. Од синусната теорема за $\triangle AQB$ добиваме

$$\frac{BQ}{\sin\angle BAQ} = \frac{c}{\sin\angle AQB} \iff \frac{BQ}{\sin\angle ACB} = \frac{c}{\sin\angle BAC}.$$

Ако сега ја примениме синусната теорема и на $\triangle ABC$, добиваме

$$BQ = \frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle BAC}\cdot c = \frac{c}{a}\cdot c = \frac{c^2}{a}.$$

Исто така имаме и

$$x = AP = \frac{b}{c}\cdot BQ = \frac{b}{c}\cdot\frac{c^2}{a} = \frac{bc}{a}.$$

Така заклучуваме дека

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{b+c}{bc} > \frac{a}{bc} = \frac{1}{x} = \frac{1}{AP} = \frac{1}{CS}.$$

□

3. Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е монотоно растечка функција на множеството од природни броеви, таква што $f(f(n)) = n^2$. Која е најмалата, а која најголемата можна вредност на $f(2023)$?

Решение. Бидејќи $f(f(1)) = 1$, ако $f(1) > 1$ добиваме $f(f(1)) = 1 < f(1)$. Ова е контрадикторно на монотоноста на функцијата, па $f(1) = 1$. Од $f(f(2)) = 4$, добиваме $4 > f(2) > 2$, од каде мора $f(2) = 3$ и $f(3) = 4$. Оттука следуваат $f(4) = f(f(3)) = 9, f(9) = f(f(4)) = 16$ и $f(16) = f(f(9)) = 81$.

Од $f(a) = f(b)$ следува дека $a^2 = f(f(a)) = f(f(b)) = b^2$, па f е инјективна. Ова во комбинација со монотоноста ни го дава неравенството $f(x+a) - f(x) \geq a$ за секои природни броеви a и x.

Оттука добиваме дека $f(f(f(44)))+87 = f(1936)+87 \leq f(2023) \leq f(2025)-2 = f(f(f(45)))-2$. Од исти причини важат

$$f(f(f(6))) + 8 = f(36) + 8 \leq f(44) < f(45) \leq f(49) - 4 = f(f(f(7))) - 4$$

и

$$11 = f(4) + 2 \leq f(6) < f(7) \leq f(9) - 2 = 14.$$

Од овие неравенства имаме:

$$f(2023) \geq f(44)^2 + 87 \geq (11^2 + 8)^2 + 87 = 129^2 + 87 = m$$

$$f(2023) \leq f(45)^2 - 2 \leq (14^2 - 4)^2 - 2 = 192^2 - 2 = M.$$

Останува да докажеме дека овие вредности можат да се достигнат. Ги дефинираме функциите рекурзивно $f_1(1) = f_2(1) = 1$, $f_1(2) = f_2(2) = 3$, $f_1(3) = f_2(3) = 4$ за $a \geq 2$ и $0 \leq b < f_1(a+1) - f_1(a)$ дефинираме $f_1(f_1(a)+b) = a^2 + b$ и за $a \geq 2$ и $0 < b \leq f_2(a+1) - f_2(a)$ дефинираме $f_2(f_2(a+1) - b) = (a+1)^2 - b$.

Забележуваме дека

$$f_1(f_1(a) + b + 1) - f_1(f_1(a) + b) = (b+1) - b = 1$$

за секое $0 < b < f_1(a+1) - f_1(a) - 1$ и

$$f_1(f_1(a+1)) - f_1(f_1(a)) = (a+1)^2 - a^2 = 2a + 1.$$

Освен тоа $f_1(a+1) - f_1(a) = 1$, ако $a+1$ не е во $f_1(\mathbb{N})$, а ако $a + 1 = f_1(u)$:

$$f_1(a+1) - f_1(a) = f_1(f_1(u)) - f_1(f_1(u) - 1) < f_1(f_1(u)) - f_1(f_1(u-1)) = 2u - 1 < 2a + 1.$$

Сега од $f_1(f_1(a+1)) - f_1(f_1(a)) > f_1(a+1) - f_1(a)$ следува $f_1(f_1(a+1)) - f_1(f_1(a+1) - 1) > 1$, што со индукција ни ја дава монотоноста на f_1. Сличен е и доказот за f_2.

Да провериме дали овие функции го задоволуваат даденото равенство. Од дефиницијата имаме $f_1(f_1(1)) = 1^2$ и $f_1(f_1(2)) = f_1(3) = 4 = 2^2$. За $b = 0$ добиваме $f_1(f_1(a)) = a^2$ и $f_2(f_2(a+1)) = (a+1)^2$, што е даденото равенство.

Сега $f_1(6) = f_1(f_1(3) + 2) = 11$, $f_1(11) = 6^2 = 36$, $f_1(7) = f_1(f_1(3) + 3) = 12$, $f_1(12) = 7^2 = 49$. Според ова 44 не е слика на ниту еден број, па $f_1(44) = f_1(f_1(11) + 8) = 11^2 + 8 = 129$ и $f_1(2023) = f_1(f_1(129) + 87) = 129^2 + 87 = m$.

Исто така $f_2(6) = f_2(f_2(4) - 3) = 11$, $f_2(11) = 6^2 = 36$, $f_2(7) = f_2(f_2(4) - 2) = 14$, $f_2(14) = 7^2 = 49$. Според ова 45 не е слика на ниту еден број, па $f_2(45) = f_2(f_2(14) - 4) = 14^2 - 4 = 192$ и $f_2(2023) = f_2(f_2(192) - 2) = 192^2 - 2 = M$.

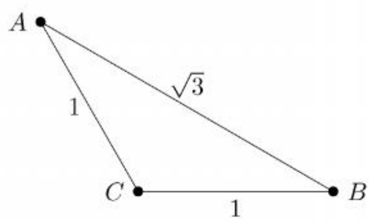
Со ова докажавме дека најмалата и најголемата можна вредност на $f(2023)$ се m и M соодветно. $\square$

4. Функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ја има следната особина: Ако $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ се темиња на рамностран триаголник со страна 1, тогаш

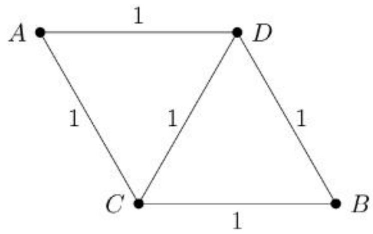
$$f(A) + f(B) + f(C) = 0.$$

Докажете дека $f(x) = 0$ за секој $x \in \mathbb{R}^2$.

Решение. Прво ќе докажеме дека ако A и B се точки во $\mathbb{R}^2$ на растојание $\sqrt{3}$, тогаш $f(A) = f(B)$. Избираме точка $C \in \mathbb{R}^2$ таква што A, B и C се темиња на триаголник со страни 1, 1 и $\sqrt{3}$ (видете ја долната слика).

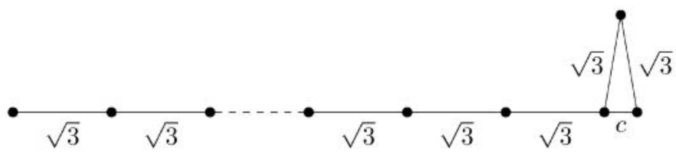


Од косинусната теорема добиваме дека $\angle ACB = 120°$. Го преполовуваме аголот $\angle ACB$ и избираме точка $D \in \mathbb{R}^2$ како што е прикажано на следната слика.



Следува дека $f(A)+f(D)+f(C)=0$ и $f(B)+f(D)+f(C)=0$, па $f(A)=f(B)$, што и саквме да докажеме.

Сега нека A и B се произволни точки во $\mathbb{R}^2$. Нека a е растојанието помеѓу A и B. Нека $a=n\sqrt{3}+c$, каде што n е ненегативен цел број и $0\le c<\sqrt{3}$. Следната слика покажува дека $f(A)=f(B)$.



Заклучуваме дека f е константна, па мора да важи $f(x)=0$ за секое $x\in\mathbb{R}^2$. $\square$

5. Нека $Q(x)=a_{2023}x^{2023}+a_{2022}x^{2022}+\cdots+a_1x+a_0$ е полином со целобројни коефициенти. За секој непарен прост број p дефинираме полином $Q_p(x)=a_{2023}^{p-2}x^{2023}+a_{2022}^{p-2}x^{2022}+\cdots+a_1^{p-2}x+a_0^{p-2}$. Познато е дека за бесконечно многу непарни прости броеви p изразот

$$\frac{Q_p(x)-Q(x)}{p}$$

е цел број за секој $x\in\mathbb{Z}$. Одредете ја најголемата можна вредност на $Q(2023)$.

Решение. Ќе користиме добро позната лема дека за полином $S(x)\in\mathbb{Z}[x]$ и фиксен прост број p, сите коефициенти на S се деливи со p ако и само ако $p|S(x)$ за сите $x\in\mathbb{Z}$. Впрочем, ова следува од малата Безуова Теорема по модул p. Сега да фиксираме прост број $p>2$ таков што

$$\frac{Q_p(x)-Q(x)}{p}$$

е цел број за сите $x\in\mathbb{Z}$. Па ја применуваме лемата на полиномот $S(x)=Q_p(x)-Q(x)$. Заклучуваме дека

$$p|a_i^{p-2}-a_i$$

за сите $0\le i\le 2021$. Од Малата теорема на Ферма имаме дека $p|a_i^p-a_i$. Сега да забележиме дека

$$p|a_i^3-a_i=(a_i^p-a_i)-a_i^2(a_i^{p-2}-a_i).$$

Користејќи го ова, заклучуваме од условот на задачата дека за фиксно $0\le i\le 2023$ постојат бесконечно многу прости p такви што:

$$p|a_i(a_i-1)(a_i+1).$$

Ова значи дека постојат бесконечно многу прости кои делат барем еден од a_i-1, a_i и a_i+1, па барем еден од нив е еднаков на нула. Заклучуваме дека сите коефициенти на $Q(x)$ се елементи на множеството $\{-1,0,1\}$.

Оттука, го имаме неравенството

$$Q(2023) \leq |Q(2023)| \leq |a_{2023}| \cdot 2023^{2023} + \cdots + |a_1| \cdot 2023 + |a_0| \leq$$

$$\leq 2023^{2023} + \ldots + 2023 + 1 = \frac{2023^{2024} - 1}{2022}.$$

Равенство се постигнува за полиномот $Q(x) = x^{2023} + \ldots + x + 1$, кој јасно го задоволува условот на задачата бидејќи за сите прости броеви $p > 2$, полиномите $Q_p(x)$ и $Q(x)$ се исти. Затоа, добиената горна граница е најголемата можна вредност за $Q(2023)$. □

6. На Среќко и Малер им е даден по еден лист хартија на кој има 2023 точки распоредени како темиња на правилен многуаголник. Потоа им е дадена задача да ги обојат сите отсечки кои ги поврзуваат овие точки (секој на својот лист) така што:

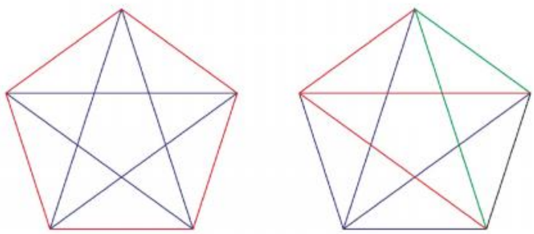
(1^0) Нема триаголник со темиња меѓу овие точки чии страни се обоени во иста боја.

(2^0) Нема триаголник со темиња меѓу овие точки чии страни се обоени во три различни бои.

(3^0) Нема четириаголник со темиња меѓу овие точки (не мора конвексен) чии страни се обоени во иста боја.

После боењето е забележано дека Малер употребил барем две бои повеќе отколку Среќко. Колку бои употебил секој од нив? Образложи го одговорот.

Решение. За боење на отсечките кои поврзуваат n точки велиме дека е *добро* ако ги задоволува условите (1^0), (2^0) и (3^0) при што сите отсечки меѓу n-те точки се обоени. Нека $m(n)$ е најмалиот, а $l(n)$ е најголемиот број на бои за кои постои добро обојување во случајот за n точки. Ќе докажеме дека за $n \geq 5$, $m(n) = n - 1$ и $l(n) = n - 3$.



На сликата се прикажани боења со 2 и со 4 бои за случајот $n = 5$. Ако нова точка поврземе со секоја од постоечките со иста нова боја добиваме добро обојување. Навистина секој триаголник/четириаголник кој ја има за теме новата точка има точно две страни во новата боја и $1/2$ страни во стари бои, па условите се исполнети. Со продолжување на постапката на додавање на нови точки и бои индуктивно добиваме боења со $n - 3$ и $n - 1$ бои соодветно. Од ова ќе следува дека Среќко употребил 2020 бои, а Малер употребил 2022 бои.

Очигледно во случајот $n = 1$ нема отсечки, па употребуваме 0 бои, а за $n = 2$ има една отсечка, па боењето единствено може да се направи со 1 боја. Од дефиницијата за боење на страните на секој триаголник мора да се употребат точно 2 бои. Според ова $m(1) = l(1) = 0$, $m(2) = l(2) = 1$ и $m(3) = l(3) = 2$.

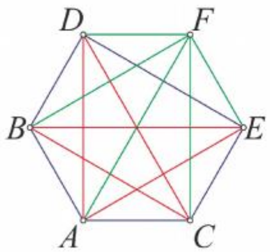
Да претпоставиме дека $m(k) = k - 1$ за секој $k < n$. Во случајот со n точки нека A е една од точките и меѓу отсечките со една крајна точка A има отсечки во точно s различни бои. Да ги обележиме тие бои со c_1, $c_2, \ldots$, c_s, а отсечките кои се обоени со c_i ги означуваме со $\overline{AA_i^1}$, $\overline{AA_i^2}, \ldots$, $\overline{AA_i^{d_i}}$. Бидејќи вкупно има точно $n - 1$ вакви отсечка со крајна точка A добиваме

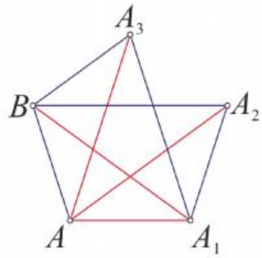
$$\sum_{i=1}^{s} d_i = n - 1. \tag{1}$$

Бидејќи $\triangle AA_i^uA_j^v$ за $i \neq j$ мора да има отсечки обоени во точно 2 бои, а отсечките $\overline{AA_i^u}$ и $\overline{AA_j^v}$ се обоени со c_i и c_j соодветно, третата страна $\overline{A_i^uA_j^v}$ мора да е обоена со c_i или c_j. Ова значи дека сите отсечки кои поврзуваат темиња од различни групи се обоени со некоја од боите $c_1, c_2, \ldots, c_s$. Разгледуваме сега една од групите темиња: $A_i^1, A_i^2, \ldots, A_i^{d_i}$. Има d_i точки, па од $1 \le d_i < n$ според индукциската претпоставка отсечките кои ги поврзуваат се обоени во најмногу $d_i - 1$ боја. Истото важи за секоја група, па со замена во (1) добиваме дека вкупниот број на бои е најмногу $s + \sum_{i=1}^{s}(d_i - 1) = \sum_{i=1}^{s} d_i = n - 1$, со што докажавме дека $m(n) = n - 1$.

За $l(n)$ важат $l(4) = 2$ и $l(5) = 2$, бидејќи во спротивно секој триаголник ќе има страни обоени во една боја. Да претпоставиме дека $l(n-1) = l(n) = n - 4$, за некој $n > 5$. Одбираме t да биде максималниот број на отсечки обоени во иста боја кои имаат заедничка крајна точка. Бидејќи имаме вкупно $n - 4$ бои и $n - 1$ отсечка за секоја точка, t мора да биде најмалку 2. Освен тоа или $t \geq 3$ или постојат најмалку 3 бои со по 2 отсечки со заедничка крајна точка.

Ако $t = 2$, нека отсечките $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ се обоени сино (полна линија), $\overline{AD}$ и $\overline{AE}$ се црвени (испрекината линија) и $\overline{AF}$ е зелена (линија со точки). Отсечките кои ги поврзуваат B и C со D и E мора да бидат црвени или сини. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $\overline{BD}$ е сина. Бидејќи $t = 2$, $\overline{BE}$ не е сина, па мора да е црвена. Слично $\overline{EC}$ мора да е сина и $\overline{CD}$ е црвена (цртеж долу - лево). Од $\triangle BDE$ знаеме дека $\overline{DE}$ мора да биде сина или црвена, а од $\triangle ADE$ не може да е црвена, па $\overline{DE}$ е сина и на ист начин добиваме дека $\overline{BC}$ е црвена. Сите отсечки меѓу F и овие пет точки се сини, црвени или зелени. Но, бидејќи $t = 2$ не можат да бидат сини, ниту црвени, па мора да се зелени, но тогаш $t \geq 5$, што е контрадикција.





Ако $n - 1 > t \geq 3$, нека $\overline{AA_1}, \overline{AA_2}, \ldots, \overline{AA_t}$ се максимален број на отсечки обоени во иста боја, нека таа боја е црвена (испрекината линија) и нека $\overline{AB}$ е отсечка обоена во друга боја, на пример сина (полна линија). За отсечките кои ја поврзуваат B со A_i имаме две можности за нивната боја (црвена и сина). Нека една од нив ($\overline{BA_1}$) е црвена. Ако $\overline{BA_i}$ за $i > 1$ е црвена имаме четириаголник AA_1BA_i на кој сите страни му се обоени црвено, што е спротивно на (3^0). Според ова сите отсечки $\overline{BA_i}$ за $i > 1$ се сини. Во овој случај секоја од отсечките $\overline{A_1A_i}$ мора да биде сина или црвена ($\overline{BA_1}$ е црвена, а $\overline{BA_i}$ е сина). Но, од $\triangle AA_iA_j$ не можат да бидат црвени, па се сини како на цртежот погоре (десно). Бидејќи $t \geq 3$ имаме четириаголник $BA_2A_1A_3$ на кој сите страни му се обоени сино, што е контрадикција.

Според ова секоја од отсечките $\overline{BA_i}$ е обоена сино, па има $t + 1$ сини отсечки со заедничка крајна точка B. Ова противречи на максималноста на t, па $t = n - 1$ и постои точка A за која сите отсечки со крајна точка A се во иста боја, на пример сина. Од (1^0) следува дека останатите отсечки не можат да бидат сини, па добиваме дека $l(n-1) \leq n - 5$, што е спротивно на индукциската претпоставка. Заклучуваме дека $l(n) = n - 3$. $\square$