

Ирена Трајковска,
Скопје

ПАРАДОКСИ

1. НЕКОЛКУ ЛОГИЧКИ ПРОБЛЕМИ

За почеток ви предлагам да се обидете да ги решите следните логички проблеми:

Проблем 1. Во едно село во кое има само еден бербер постои правило според кое берберот ги бричи сите оние кои не се бричат сами и не бричи никој друг. Кој го бричи берберот?

Проблем 2. *Едно племе човекојдци фатило еден истражувач. Поглаварот на племето му рекол на истражувачот: “Мораш да дадеш една изјава. Ако таа биде вистинита ќе те испечеме и ќе те изедеме, а ако таа биде лажна ќе те свариме и ќе те изедеме.” Дали може истражувачот да се спаси?*

Проблем 3. *Еден патник се нашол на раскрсница од која излегуваат два пата од кои само едниот води кон градот кон кој тргнал. Патникот не знае кој е вистинскиот пат по кој треба да тргне. На раскрсницата седат двајца браќа од кои едниот постојано ја зборува вистината, а другиот секогаш лаже. На патникот му е познато дека и двајцата на секое поставено прашање одговараат или со “да” или со “не”, но не знае кој од нив ја зборува вистината, а кој лаже. Дали може патникот само на еден од браќата да му постави едно единствено прашање, па од одговорот да заклучи по кој пат треба да оди?*

Се очекуваат вакви размислувања:

Во Проблемот 1. постојат две можности, или берберот се бричи сам, или берберот не се бричи сам.

Ако берберот се бричи сам, тогаш тој спаѓа во оние жители на селото кои според правилото берберот не смее да ги бричи, што значи дека тој така би го прекршил правилото.

Ако берберот не се бричи сам, тогаш според правилото него треба да го бричи берберот, односно да се бричи сам, со што би го прекршил правилото.

Доаѓаме до заклучок дека не може да се даде одговор на прашањето кој го бричи берберот. Имено, проблемот е во тоа што даденото правило не

одредува кој ќе го брочи берберот. Прифаќаеме дека *решението на оваа задача е дека нема решение*, односно такво село не постои.

Во *Проблемот 2*. за да се спаси истражувачот, односно да не биде изеден, потребно е тој да ја даде изјавата “Вие ќе ме сварите.”

Тогаш човекојадците не смеат да го испечат, затоа што печењето е предвидено за вистинита изјава, а кога би го испекле изјавата “Вие ќе ме сварите.” би била лажна. Но, човекојадците не смеат ни да го сварат, бидејќи варењето е предвидено за лажна изјава, а кога би го свариле изјавата “Вие ќе ме сварите.” би била вистинита. Според тоа, ако поглаварот го одржи своето ветување, истражувачот нема да биде ниту испечен, ниту сварен.

Истражувачот се спасува кога дава *изјава која не е ниту вистинита, ниту лажна* во дадениот момент, туку нејзината вистинитост, односно невивистинитост зависи од идните настани.

Во *Проблемот 3*. патникот може да го постави прашањето “Што ќе одговори твојот брат, ако го прашам, дали левиов пат води кон градот?”

Така, ако патникот зборува со братот кој лаже, и тој му одговори со “да”, тогаш тоа не е вистина, па патникот треба да се упати по десниот пат. Ако патникот зборува со братот кој ја зборува вистината, и тој му одговори со “да”, тогаш тоа е вистина, значи патникот треба да се упати по десниот пат.

Ако патникот зборува со братот кој лаже, и тој му одговори со “не”, тогаш тоа не е вистина, па патникот треба да се упати по левиот пат. Ако патникот зборува со братот кој ја зборува вистината, и тој му одговори со “не”, тогаш тоа е вистина, значи патникот треба да се упати по левиот пат.

Значи, на поставеното прашање ако патникот добие одговор “да”, треба да тргне по десниот пат, ако добие одговор “не”, треба да тргне по левиот пат за да стигне во градот.

Патникот дознава каде се наоѓа градот ако на едниот брат му постави прашање чиј *потврден одговор го одрекнува, а одречен одговор го потврдува* прашањето кое треба да го одговори неговиот брат.

Проблемите се решени, некои од добиените решенија се неочекувани, некои од изречените мисли се спротивни на општото мислење, со еден збор добиени се *парадокси* (грч. paradoxos против мислење, против очекување).

2. ПАРАДОКСИТЕ ПОРАНО, СЕГА-ЗАСЕКОГАШ

Според Вебстер, парадоксот е *тврдење кое и кога е вистинито, изгледа лажно и си противречи самото на себе си*.

Додека пак, Лонгман вели дека, парадоксот е *тврдење кое изгледа глупаво или невозможно, но содржи некаква вистина*.

А еден од најдобрите популаризатори на математиката, Мартин Гарднер, ги класифицира парадоксите во четири категории:

- *тврдења кои се на изглед неистинити, но всушност се вистинити;*
- *тврдења кои се на изглед вистинити, но всушност се неистинити;*
- *низа од на изглед логички сврзани тврдења, кои водат до логичка противречност, односно погрешен заклучок;*
- *тврдења за кои не може да се каже дали се вистинити или неистинити.*

Како и да е парадоксот и нема некоја голема потреба од дефинирање, за да се препознае. Го препознаваме во реченицата исшкртана на училишната клупа која гласи: *Не шкртај по клупи!* Во реченицата напишана на туку што пристигнатиот факс, на кој нема ништо друго освен неа и гласи: *Ако не го добиете овој факс, јавете ни се по телефон*. Кога неодговорниот пријател му одговара со писмо на својот пријател во кое пишува: *Пријателе, писмото во кое ми пишуваш да ти ги вратам парите, го немам добиено*. Кога со цел да ги смири учениците кои прават неред на часот, наставникот им дава на немирните ученици ливче на кое од едната страна пишува: *Реченицата од обратната страна не е вистинита*, а на другата страна е напишано: *Реченицата од обратната страна е вистинита*, така тие долго време ќе го вртат листот, де од едната страна, де од другата, цело време во потрага по вистината.

Парадоксите ги има насекаде, во секојдневниот говор, во околината што не опкружува, во пишаните зборови, а некои од нив оставиле таков впечаток што засекогаш се запишани во историјата. Позната е Сократовата изјава: *Јас знам дека ништо не знам*. Потоа, реченицата на Бернард Шо: *Единственото златно правило е дека нема златни правила*. А големиот француски математичар и филозоф Блез Паскал во писмото пратено на својот пријател пишува: *Се извинувам многу, што писмото излезе толку долго, но немав доволно време да го скратам ...*

Парадоксите може и самите да ги формираме. Еве неколку правила за формирање на лингвистички (говорни) парадокси кои по формирањето може и да се модифицираат во зависност од структурата на јазикот:

Нека I , G , P се ознаки за именка, глагол, придавка соодветно, а neI , neG , neP соодветно нивните антоними (спротивни значења). На пример, ако P е *слаб*, тогаш neP е *силен* или *дебел*. Тогаш, парадокси се

- 1⁰ neI е подобар од I ; neG е подобар од G ; neP е подобар од P ;
Таа е подобра од неа.
Да нема новости е добра вест.
- 2⁰ Само I е вистински neI ; Само P е вистински neP ;
Никој е навистина “некој”.
Пријателот е најопасниот скриен непријател.
- 3⁰ Ова е толку P , така што изгледа neP ;
Ова е толку просто, така што изгледа тешко.
Не можам да ги видам дрвта од шумата.
- 4⁰ Постојат некои I кои се P и neP истовремено;
Некои настани се добри и лоши истовремено.
Напреварот беше возбудлив, но досаден (затоа што губевме).
- 5⁰ Постојат некои I кои G и neG истовремено;
Некои деца слушаат и не слушаат (послушуваат) истовремено.
Политичари кои лажат и ја зборуваат вистината постојано!
- 6⁰ Да G , дури и кога neG ;
Да се умре од жед опкружен со вода (но солена).
Таа сонува со отворени очи.
- 7⁰ Овој I е доволен neI ;
Оваа маса за четворица е доволна за шест луѓе.
Ми се стемни сред бел ден (кога ја слушнав веста).
- 8⁰ neG понекогаш значи G ;
Молчењето понекогаш кажува многу.
Војна за да се обезбеди мир.
- 9⁰ I без I ;
Живот без живеење. (се плаши од смртта, па не сака да живее)
Правилото гласи: нема правила!
- 10⁰ neI во I ;
Осаменост во толпа.
Сиромаштија во богатство. (ако нема љубов во богата фамилија)
- 11⁰ I на neI ;
Сенката на светлината.
Музиката на тишината.
- 12⁰ G тоа што никој neG ;

Го гледа тоа што никој не може да го види.

Го кажува тоа што никој не може да го каже. (открива тајна)

13⁰ $neP \in P$;

Лошото е добро (затоа што приморува да се обидеш повторно).

Да не згрешиш никогаш е грешка.

14⁰ $neI \in I$;

Тажна среќа.

Гласен шепот.

15⁰ Да G тоа што neG ;

Ти си тоа што не си.

Да се умре може да значи да се живее вечно. (за научник)

3. МАТЕМАТИКАТА И ПАРАДОКСИТЕ

Најголемите три кризи во математиката се поврзани со решавање на парадокси. И токму нивното разрешување довело до појавување на нови и важни теории.

Околу VI век п.н.е настанала првата криза, со откривањето дека страната на квадратот и неговата дијагонала се неизразливи меѓусебно со помош на тогашните броеви. Тоа довело до појава на *ирационалните броеви* (ако a е страната на квадратот, тогаш неговата дијагонала d изразена преку страната е $d = a\sqrt{2}$).

Втората криза е поврзана со појавувањето на *бескрајно малите големини*. Имено, математичарите од XVII и XVIII век се судриле со проблемот како е можно да постојат големини кои се земаат дека се нула, а тие цело време се различни од нула (бројот $\frac{1}{n}$, каде n е многу голем природен број, се зема приближно дека е еднаков на нула, но за секој $n \in \mathbb{N}$ бројот $\frac{1}{n} \neq 0$). Овој парадокс бил разрешен од Коши со создавањето на *теоријата на границите*.

Засега последна, третата криза во математиката (XIX и XX век) била толку силна што довела до појавување на цела една теорија - *теоријата на множества* создадена од Георг Кантор. Кризата настанала при обид да се реши Раселовиот парадокс на берберот (*Проблемот 1.*). Ако го означиме со M множеството од сите села во кои има само еден бербер и кој бречи според наведеното птавило, тогаш решението на овој “парадокс” ќе биде $M = \emptyset$.

Значи, како што подоцна изјавил Расел, *благодарение на стремешта да се разрешат парадоксите математиката станала положична, а логиката поматематичка. Парадоксите не го разрушиле авторитетот на математиката како непогрешлива наука, туку напротив, довеле до нејзино збогатување со нови поими и теории ...*

Но, не се што изгледа како парадокс во математиката е навистина парадокс и ќе доведе до појавување на некоја нова теорија, тоа најчесто е резултат на недоволно математичко знаење, расеаност или едноставно - забава.

Едно момче туку што научило да работи со калкулатор вели: $\frac{1}{2}$ е мал број (калкулаторот покажува 0.5), $\frac{1}{4}$ е исто така мал број (калкулаторот покажува 0.25), а гледајте којку голем број е $\frac{1}{3}$ (калкулаторот покажува 0.33333333).

Додека пак, еден истакнат професор по математика ја прави следната класификација: *Има три вида на математичари - тие кои знаат да бројат и тие кои не знаат да бројат.*

А познатата изрека на Епименид, поет од VI век п.н.е, кој бил жител на островот Крит и кој кажал: *Сите критјани лажат*, долго време се сметала за парадокс, затоа што се размислувало вака:

„Ако Епименид ја зборува вистината, тогаш тој треба ја лаже затоа што е критјанин, па заклучуваме дека Епименид лаже. Ако пак Епименид лаже, тогаш сите критјани ја зборуваат вистината, односно и тој ја зборува вистината. Излегува дека изјавата на Епименид не е ниту вистинита, ниту лажна.“

Меѓутоа грешката се правела кога е правена негација на Епименидовата изјава. Имено, логичката негација на *Сите критјани лажат* не е *Сите критјани ја зборуваат вистината*, туку *Постојат критјани кои ја зборуваат вистината*. Така, парадокс нема, а изјавата на Епименид е лажна, тој лаже, но има критјани кои ја зборуваат вистината.

На часот по математика за алгебарски изрази, за да провери наставникот дали учениците ги усвоиле новите знаења, вели: *Ученици, сега ќе ви докажам дека $1=2$. Нека x и y се ненулти броеви, така што $x=y$. Со множење на последното равенство со y се добива $xy=y^2$.*

Одземаме x^2 од двете страни

$$xy - x^2 = y^2 - x^2,$$

односно

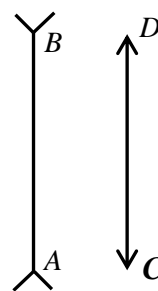
$$x(y-x) = (y-x)(y+x).$$

Го делиме последното равенство со $y-x$ и добиваме $x = y+x$. Како $x = y$, тогаш $x = 2x$. По делењето на последното равенство со x се добива $1 = 2$.

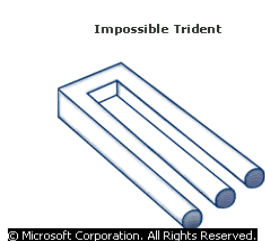
По изложениот доказ некои од учениците се изненадиле и си помислиле дека бадијала учат математика, кога еднаш $1 \neq 2$, а друг пат $1 = 2$. Но, подобро би било да седнат и да научат дека секогаш кога ќе делат некое равенство да проверуваат дали при условите на задачата изразот со кој се дели е нула, како што за $x = y$ имаме дека $y-x = 0$, па не смее да се дели со $y-x$.

На друг час по математика, наставникот прашува еден ученик: Која од отсечките AB и CD (на црт. 1) е подолга? Ученикот без размислување одговара: *Очигледно е дека отсечката AB е подолга од CD* . Што мислите вие?

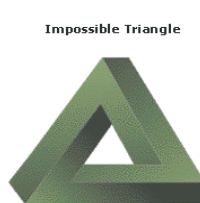
Што мислите и за сликите на црт. 2 и црт. 3? Дали нивното постоење е парадокс или може да најдете некое рационално објаснување?



црт. 1



црт. 2



црт. 3

4. ЛОГИЧКИ ПРОБЛЕМИ ЗА КРАЈ

Се надевам дека успеав парадоксите да ви ги прикажам и како интересни и како многу важни за математиката. А токму тука, во математиката нив ги има најмногу во логичките проблеми. Затоа, ви приложувам уште неколку логички проблеми:

Проблем 4. На еден затвореник му кажале дека ќе биде обесен некој ден помеѓу понеделник и петок, но тој нема да знае кој ден ќе биде бесенето пред тоа да се случи. Кој ден е обесен затвореникот?

Затвореникот размислувал вака: „Нема да бидам обесен во петок затоа што ако е така во четврток ќе бидам се уште жив и ќе знам дека во петок ќе ме обесат, а не треба да знам однапред. Нема да ме обесат во четврток од исти причини, а со истото размислување не е тешко да се заклучи дека нема да ме обесат во ниеден друг ден.“ Така, затвореникот заклучил дека нема да биде обесен. Но, бесењето се случило некој ден освен петок, изненадувајќи го затвореникот.

Проблем 5. *Две момчиња и се додворуваат на иста девојка. Таа им вели: „Напишете ми по една песна. Ќе ја одберам онаа која повеќе ќе ми се допадне. Ако погодам кој од вас двајцата ја напишал, ќе се омажам за него. Ако не погодам, ќе се омажам за тој што ја напишал другата песна.“ Дали е фер овој предлог, односно дали и двете момчиња имаат подеднакви шанси да се омажат за девојката?*

Предлогот на девојката не е фер, бидејќи иако изгледа дека момчињата имаат подеднакви шанси, сепак таа ќе се омажи за она момче за кое што сака. Имено, при погодувањето на тој што ја напишал подобрата песна треба само да го именува момчето што го сака. Ако, погоди дека песната е негова, јасно е дека ќе се омажи за него. Ако не погоди дека подобрата песна е негова, ќе се омажи за она момче што ја напишало полошата песна, односно повторно за момчето што го сака.

Проблем 6. *Судијата на еден обвинет, кој не сакал да го ослободи, му понудил еден фер предлог. На едно ливче напишал “живот”, а на друго “смрт”. Обвинетиот со врзани очи избира едно ливче и ако на него пишува “живот”, тој ќе биде ослободен, а во спротивен случај ќе биде осуден на смртна казна. Меѓутоа обвинетиот пред да избира ливче дознал дека судијата и на двете ливчиња напишал “смрт”. Дали може обвинетиот да се спаси?*

Парадоксот е во тоа што обвинетиот може да се спаси од оваа сигурна смрт. Доволно е избраното ливче да го проголта, тоа значи на ливчето што останало пишува “смрт”, па според предлогот што го дал, судијата ќе мора да признае дека на извлеченото ливче пишувало “живот” и така ќе мора да го ослободи затвореникот.

На следните логички проблеми ви предлагам самите да најдете решенија:

Проблем 7. Двајца близнаци се разликуваат само во тоа што едниот секогаш лаже, а другиот секогаш ја зборува вистината. На секое поставено прашање тие одговараат со “да” или со “не”. Дали може да им се постави на двата близнака исто прашање на кое и двајцата ќе дадат ист одговор?

Проблем 8. Таткото решил да го подари имотот на еден од своите два сина. Секој од синовите имал своја камила. Тој им рекол: “Јавнете ги камилите и чија камила стигне последна до дрвото на ридот, на тој ќе му го подарам имотот.” Никој од синовите не сакал да стигне последен, и затоа тие не тргале. Но, по некое време, и двајцата тргнале со најголеми брзини. Што се договориле синовите за да ја отпочнат трката, но и да го испочитуваат условот на татка си?

Проблем 9. Еден истражувач се нашол во една земја во која живееле две племиња. Членовите на едното племе секогаш лажат, додека членовите на другото секогаш ја зборуваат вистината. Истражувачот сретнал двајца домородци и го прашал повисокиот од нив: “Дали ја зборувааш само вистината?” Тој одговорил: “Тарабара”. Тогаш, понискиот домородец му објаснил на истражувачот: “Тој рече “да”, меѓутоа тој секогаш лаже.” На кого истражувачот може да му верува?

Проблем 10. Според една стара легенда, околу тркалезната маса седеле 13 витези на чело со кралот Артур, при што секој се заколнал дека или секогаш ќе ја зборува вистината или секогаш ќе лаже. Пристигнал еден странец и секој витез го запрашал што мисли за својот сосед од десно. Сите одговориле дека нивниот сосед е лажго, само кралскиот советник Мерлин кој седел лево од кралот Артур одговорил дека кралот секогаш ја зборува вистината. На прашањето на странецот, дали околу масата се повеќе оние кои лажат или оние кои ја зборуваат вистината, кралот одговорил дека оние кои ја зборуваат вистината се повеќе, а неговиот советник Мерлин прецизирал дека оние кои ја зборуваат вистината се за тројца повеќе. Колку витези никогаш не лажат и дали меѓу нив се кралот Артур и неговиот советник Мерлин?

Литература

1. **Тренчевски К.; Малчески Р.; Димовски Д.:** *Занимлива математика*, МММ, Скопје, 1994
2. **Stojanović V.:** *Matematiskop 3*, Nauka, Beograd, 1988
3. **Сендова Е.:** *Математика+логика*, Математика плОс ООД, СофиО, 1998/2 (23-27)
4. **Девиде В.:** *Увод во математичката логика*, Математички институт со нумерички центар при Универзитетот Кирил и Методиј, Скопје, 1973

Забелешка. Статијата за прв пат е објавена во списанието СИГМА.