Самоил Малчески
Скопје

ОДБРАНИ ЗАДАЧИ ОД ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

Елементарната теорија на броеви е неодминлива област на престижните математички натпревари. Притоа, до овој момент, теориската основа за решавање на задачите кои се задачваат на математичките олимпијади за учениците до 15,5 години е заклучбо со Малата теорема на Ферма и елементарни познавања на функциите $\tau(n)$ и $\sigma(n)$. Имајќи го ова во предвид во оваа статија ќе разгледаме неколку задачи кои се на ниво на задачите кои се задаваат на спомenатите натпревари.

Задача 1. Нека a и b се природни броеви. Докажи дека, ако $a+\frac{b}{a}-\frac{1}{b}$ е цел број, тогаш тој е полн квадрат.

Решение. Нека $a+\frac{b}{a}-\frac{1}{b}=k\in\mathbb{Z}$, тогаш $a^2b+b^2-a=kab$, од каде следува дека $b\,|\,a$, т.е. па нека $a=bq, q\in\mathbb{N}$. Со замена во последното равенство и по делењето со b добиваме $b^2q^2+b-q=kbq$, од каде следува дека $q\,|\,b$, односно $b=qt, t\in\mathbb{N}$. Со замена во последното равенство и по делењето со q, добиваme $q^3t^2+t-1=kqt$, од каде следи дека $t\,|\,1$, па заклучуваме дека $t=1$. Со замена добиваме $b=q\Rightarrow a=b^2\Rightarrow k=b^2$, што и требаше да се докаже

Задача 2. Ако a и b се цифри, докажи дека во низата броеви $\overline{b}$, $\overline{ab}$, $\overline{aab}$, $\overline{aaab}$, ..., постојат бесконечно многу сложени броеви.

Решение. *i*) Ако $b\in\{0,2,4,5,6,8\}$, тврдењето важи, бидејќи тогаш секој од броевите $\overline{b}$, $\overline{ab}$, $\overline{aab}$, $\overline{aaab}$, ... е делив со 2 или со 5.

ii) Ако $b=3$ или $b=9$, тогаш броевите од облик $\overline{\underbrace{aa...a}_{3k}b}$, $k=1,2,...$ се деливи со 3, затоа што збирот на нивните цифри е

$$3ka+b=3ka+3=3(ka+1) \text{ или}$$

$$3ka+b=3ka+9=3(ka+3).$$

iii) Ако $b=7$, тогаш од $7\,|\,111111$, следува дека $7\,|\,\overline{aaaaaa7}$, затоа што

$$\begin{aligned}\overline{aaaaaa7}&=\overline{aaaaaa}\cdot10+7=a\cdot111111\cdot10+7\\&=a\cdot7\cdot15873\cdot10+7=7\cdot(a\cdot15873\cdot10+1)\end{aligned},$$

па и дека $7\,|\,\overline{\underbrace{aa...a}_{6k}7}$, $k=1,2,...$, затоа што

$$\begin{aligned}\overline{\underset{6k}{aa...a}7} &= (\overline{aaaaaa}\cdot 10^{6(k-1)} + ... + \overline{aaaaaa}\cdot 10^6 + \overline{aaaaaa})\cdot 10 + 7\\ &= (10^{6(k-1)} + ... + 10^6 + 1)\cdot \overline{aaaaaa}\cdot 10 + 7\\ &= (10^{6(k-1)} + ... + 10^6 + 1)\cdot a\cdot 111111\cdot 10 + 7\\ &= (10^{6(k-1)} + ... + 10^6 + 1)\cdot a\cdot 7\cdot 15873\cdot 10 + 7\\ &= 7\cdot ((10^{6(k-1)} + ... + 10^6 + 1)\cdot a\cdot 15873\cdot 10 + 1)\end{aligned}$$

iv) Ако $b=1$, тогаш од принципот на Дирихле следува дека постои број од облик $11...1$ кој е делив со $\overline{a1}$, па имаме

$$\overline{a1}\,|\,\underset{k}{11...1} \;\Rightarrow\; \overline{a1}\,|\,\overline{\underset{k}{aa...a}} \;\Rightarrow\; \overline{a1}\,|\,\overline{\underbrace{aa...aa}_{k+1}1},$$

од каде пак слично како погоре се докажува дека

$$\overline{a1}\,|\,\overline{\underbrace{aa...aa}_{m\cdot k+1}1},\; m=1,2,3,\ldots .$$

Задача 3. На табла се напишани броевите 1,2,...,2008. Се бришат неколку од нив и наместо нив на таблата се запишува остатокот на збирот на избришаните броеви при делење со 13. По одреден број повторувања на оваа постапка на таблата останале само три броја од кои двата се 99 и 999. Да се определи збирот на броевите кои останале на таблата.

Решение. Нека третиот број е x. Јасно, по секој чекор, остатокот при делење на збирот на броевите на таблата со 13 не се менува. Имаме

$$1+2+3+...+2008 = \tfrac{2008\cdot 2009}{2} = 1004\cdot 2009 \equiv 3\cdot 7 \equiv 8 (\mathrm{mod}\, 13).$$

Значи бројот $99+999+x$ треба да има остаток 8 при делење со 13. Бидејќи бројот $99+999=1098$ дава остаток 6 при делење со 13, и поради тоа што 99 и 999 не се остатоци при делење со 13 следува дека $0\le x<13$. Од овде добиваме $x=2$, т.е. бараниот збир е $2+99+999=1100$.

Задача 4. Дали можат броевите $1^1, 2^2, ..., 2008^{2008}$ да се запишат еден по друг, во произволен редослед, така што добиениот број да биде точен квадрат. (Одговорот да се образложи?)

Решение. Ќе ги користиме следниве тврдења:

Лема 1. Ако $x\in\mathbb{N}$, тогаш $x^2\equiv 0$ или $1\,(\mathrm{mod}\,3)$.

Доказ. Нека $x\in\mathbb{N}$. Тогаш $x=3k, x=3k+1$ или $x=3k+2$, па затоа

$$\begin{aligned}x^2 &= 9k^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\,3),\\ x^2 &= 9k^2+6k+1 \equiv 1(\mathrm{mod}\,3),\;\;,\\ x^2 &= 9k^2+12k+4 \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)\end{aligned}$$

соодветно. Конечно, $x^2\equiv 0$ или $1\,(\mathrm{mod}\,3)$, за секој природен број $x\in\mathbb{N}$. ■

Лема 2. За секој природен број a, важи

$$a \equiv S(a) \pmod 3,$$

каде $S(a)$ е збирот на цифри на бројот a.

Доказ. Нека $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$. Тогаш

$$\begin{aligned} a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0} &= 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + ... + 10^1 a_1 + a_0 \\ &= (10^n - 1)a_n + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + ... + (10^1 - 1)a_1 + a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \\ &= (10^n - 1)a_n + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + ... + (10^1 - 1)a_1 + S(a). \end{aligned} \quad (1)$$

Од друга страна, за секој $k \in \mathbb{N}$ важи

$$10^k - 1 = (10-1)(10^{k-1} + 10^{k-2} + ... + 10^1 + 1) \equiv 0 \pmod 3. \quad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) имаме $a \equiv S(a) \pmod 3$. ■

Понатаму имаме

$$\begin{aligned} (6k+1)^{6k+1} &= [(6k+1)^k]^2 \cdot (6k+1) \equiv 1 \pmod 3 \\ (6k+2)^{6k+2} &= [(6k+2)^{3k+1}]^2 \equiv 1 \pmod 3 \\ (6k+3)^{6k+3} &\equiv 0 \pmod 3 \\ (6k+4)^{6k+4} &= [(6k+1)^{3k+2}]^2 \equiv 1 \pmod 3 \\ (6k+5)^{6k+5} &= [(6k+5)^{3k+2}]^2 \cdot (6k+5) \equiv 2 \pmod 3 \\ (6k+6)^{6k+6} &\equiv 0 \pmod 3, \end{aligned} \quad (3)$$

за секој $k = 1, 2, 3, ...$.

Броевите $1^1, 2^2, ..., 2008^{2008}$ да ги разделиме во групи од по шест броја

$(6k+1)^{6k+1}, (6k+2)^{6k+2}, (6k+3)^{6k+3}, (6k+4)^{6k+4}, (6k+5)^{6k+5}, (6k+6)^{6k+6}$, $k = 1, 2, 3, ...$,

и да ставиме

$$s_k = (6k+1)^{6k+1} + (6k+2)^{6k+2} + (6k+3)^{6k+3} + (6k+4)^{6k+4} + (6k+5)^{6k+5} + (6k+6)^{6k+6},$$

за $k = 1, 2, ...$. Од равенствата (3) и од својствата на конгруенциите следува

$$s_k \equiv 1 + 1 + 0 + 1 + 2 + 0 \equiv 2 \pmod 3. \quad (4)$$

за секој $k = 1, 2, 3, ...$.

Нека бројот A е добиен со запишување еден по друг, во произволен распоред, на броевите $1^1, 2^2, ..., 2008^{2008}$. Тогаш збирот на цифрите $S(A)$, на бројот A, е еднаков на збирот од збировите на цифрите $S(i^i)$ на броевите i^i, $i = 1, 2, ..., 2008$, па од лема 2 следува дека:

$$\begin{aligned} A \equiv S(A) &= S(1^1) + S(2^2) + ... + S(2008^{2008}) \\ &\equiv 1^1 + 2^2 + ... + 2008^{2008} \pmod 3 \end{aligned}.$$

Понатаму, $2008 = 334 \cdot 6 + 4$ и ако ги искористиме равенствата (3) и (4) од својствата на конгруенциите добиваме

$$\begin{aligned} A &\equiv 1^1 + 2^2 + \ldots + 2008^{2008} \\ &\equiv s_1 + s_2 + \ldots + s_{664} + 2005^{2005} + 2006^{2006} + 2007^{2007} + 2008^{2008} \\ &\equiv 334 \cdot 2 + 1 + 1 + 0 + 1 = 671 \equiv 2 \pmod 3). \end{aligned}$$

Конечно, од лема 1 следува дека A не е точен квадрат.

Задача 5. За природниот број n ќе велиме дека е совршен ако збирот од сите негови делители (вклучувајќи ги 1 и n) е еднаков на $2n$. Докажи, ако n е непарен совршен број, тогаш тој има најмалку три различни прости делители.

Решение. Нека n е непарен совршен број.

Ако n има точно еден прост делител p, тогаш $n = p^a$, $a \geq 1$. Сите делители на n се:

$$1, p, p^2, \ldots, p^a$$

па затоа нивниот збир е

$$\sigma(n) = \sigma(p^a) = 1 + p + \ldots + p^a = \frac{p^{a+1}-1}{p-1}.$$

Но, $\sigma(n) = 2n$, т.е.

$$\frac{p^{a+1}-1}{p-1} = 2p^a.$$

Последното равенство е еквивалентно на равенството

$$p^a(p-2)+1 = 0$$

кое не е можно бидејќи p е непарен прост број, т.е. $p \geq 3$, па затоа

$$p^a(p-2)+1 \geq 3 \cdot 1 + 1 = 4 > 0.$$

Нека n има точно два различни прости делители p и q. Тогаш $n = p^a q^b$, $a, b \geq 1$. Сите делители на n се

$$\begin{array}{llll} 1, & p, & p^2, \ldots, & p^a \\ q, & qp, & qp^2, \ldots, & qp^a \\ \multicolumn{4}{l}{q^2, q^2p, q^2p^2, \ldots, q^2p^a} \\ \multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \multicolumn{4}{l}{q^b, q^bp, q^bp^2, \ldots, q^bp^a} \end{array}$$

ра затоа нивниот збир е

$$\begin{aligned} \sigma(n) = \sigma(p^a q^b) &= (1 + p + p^2 + \ldots + p^a) + (q + qp + qp^2 + \ldots + qp^a) \\ &\quad + (q^2 + q^2p + q^2p^2 + \ldots + q^2p^a) + \ldots + (q^b + q^bp + q^bp^2 + \ldots + q^bp^a) \\ &= (1 + p + p^2 + \ldots + p^a) + q(1 + p + p^2 + \ldots + p^a) + \\ &\quad + q^2(1 + p + p^2 + \ldots + p^a) + \ldots + q^b(1 + p + p^2 + \ldots + p^a) \\ &= (1 + p + p^2 + \ldots + p^a)(1 + q + q^2 + \ldots + q^b) = \frac{p^{a+1}-1}{p-1} \cdot \frac{q^{b+1}-1}{q-1} \end{aligned}$$

Но, $\sigma(n)=2n$, т.е.

$$\frac{p^{a+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{b+1}-1}{q-1}=2p^a q^b .$$

Последното равенство е еквивалентно на равенството

$$p^a q^b[(p-2)(q-2)-2]+p^{a+1}+q^{b+1}=1$$

кое не е можно бидејќи p и q се различни непарни прости броеви, т.е. $p\geq 3$, $q\geq 5$, па затоа

$$p^a q^b[(p-2)(q-2)-2]+p^{a+1}+q^{b+1}>1 .$$

Конечно, од претходните разгледувања седува дека секој непарен совршен број мора да има најмалку три различни прости делители.

Забелешка. До сега е познато дека постојат само парни совршени броеви. Проблемот:

Дали постои непарен совршен број?

е еден од најстарите нерешени проблеми во теоријата на броеви.

Задача 6. Докажи дека равенката

$$x^{2006}-4y^{2006}-2006=4y^{2007}+2007y$$

нема решение во множеството природни броеви.

Решение. Најпрво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема 1. Ако $x\in\mathbb{N}$, тогаш x^2+1 има непарни прости делители само од видот $4k+1$.

Доказ. Нека p е непарен прост број и $p\mid x^2+1$. Тогаш

$$\begin{aligned}
&x^2+1\equiv 0\,(\text{mod } p)\\
&x^2\equiv -1\,(\text{mod } p)\\
&(x^2)^{\frac{p-1}{2}}\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}\,(\text{mod } p)\\
&x^{p-1}\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}\,(\text{mod } p)
\end{aligned}$$

Од друга страна, од $p\mid x^2+1$ следува $\text{NZD}(x,p)=\text{NZD}(x^2,p)=1$, па од Малата теорема на Ферма добиваме

$$x^{p-1}\equiv 1\,(\text{mod } p) .$$

Конечно, од последните две конгруенции следува

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\,(\text{mod } p) ,$$

од каде добиваме дека бројот $\frac{p-1}{2}$ мора да е парен, т.е. $\frac{p-1}{2}=2k$, односно $p=4k+1$, што и требаше да се докаже. ■

Да се вратиме на задачата. Имаме

$$x^{2006}=4y^{2007}+4y^{2007}+2007y+2006$$
$$x^{2006}+1=4y^{2006}(y+1)+2007(y+1)$$
$$x^{2006}+1=(4y^{2006}+2007)(y+1)$$

Имаме,

$$4y^{2006}+2007=4(y^{2006}+501)+3$$

што значи дека има барем еден прост делител од видот $4m+3$ (производ на два броја од видовите $4t+1$ и $4k+1$ е број од видот $4s+1$). Но, тоа значи дека и бројот

$$x^{2006}+1=(x^{1003})^2+1$$

има барем еден прост делител од истиот вид. Последното противречи на лема 1, што значи дека дадената равенка нема решенија во множеството природни броеви.

Задача 7. Нека функцијата $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, е таква што за секој природен број $n>1$, постои прост делител p на n така што

$$f(n)=f(\tfrac{n}{p})-f(p).$$

Ако

$$f(2^{2007})+f(3^{2008})+f(5^{2009})=2006.$$

пресметај

$$f(2007^2)+f(2008^3)+f(2009^5).$$

Решение. Ако $n=p$ е прост, тогаш

$$f(p)=f(\tfrac{p}{p})-f(p)=f(1)-f(p)$$

т.е

$$f(p)=\tfrac{f(1)}{2}. \qquad (1)$$

Ако $n=pq$, p и q се прости броеви, тогаш

$$f(n)=f(\tfrac{n}{p})-f(p)=f(q)-f(p)=\tfrac{f(1)}{2}-\tfrac{f(1)}{2}=0.$$

Ако n е производ од три прости броеви, тогаш

$$f(n)=f(\tfrac{n}{p})-f(p)=0-f(p)=-f(p)=-\tfrac{f(1)}{2}.$$

Со индукција по број на прости множители, лесно се покажува дека ако n е производ од k прости броеви, тогаш

$$f(n)=(2-k)\tfrac{f(1)}{2}. \qquad (2)$$

Понатаму од $f(2^{2007})+f(3^{2008})+f(5^{2009})=2006$ и (2) имаме

$$\begin{aligned}2006 &= f(2^{2007}) + f(3^{2008}) + f(5^{2009})\\ &= \tfrac{2-2007}{2} f(1) + \tfrac{2-2008}{2} f(1) + \tfrac{2-2009}{2} f(1)\\ &= -\tfrac{3\cdot 2006}{2} f(1),\end{aligned}$$

т.е

$$f(1) = -\tfrac{2}{3}. \qquad (3)$$

Сега од

$$2007 = 3^2 \cdot 223,\ 2008 = 2^3 \cdot 251,\ 2009 = 7^2 \cdot 41,$$

и од (2) и (3) добиваме

$$\begin{aligned}f(2007^2) + f(2008^3) + f(2009^5) &= \tfrac{2-6}{2} f(1) + \tfrac{2-12}{2} f(1) + \tfrac{2-15}{2} f(1)\\ &= -\tfrac{27}{2} f(1) = -\tfrac{27}{2}\cdot(-\tfrac{2}{3}) = 9.\end{aligned}$$

Задача 8. Низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е дефинирана на следниов начин $a_0 = 2008^{2008^{2008}}$, a_1 е збирот на цифри на бројот a_0, a_2 е збирот на цифри на бројот a_1, итн. Да се определи a_5.

Решение. Најпрво $2008 < 3000 = 3\cdot 10^3$. Сега имаме

$$2008^{2008} < (3\cdot 10^3)^{3\cdot 10^3} = 3^{3000}\cdot 10^{3000} = (3^2)^{1500}\cdot 10^{3000} < 10^{1500}\cdot 10^{3000} = 10^{4500},$$

па

$$\begin{aligned}2008^{2008^{2008}} &< (2008)^{10^{4500}} < (3\cdot 10^3)^{10^{4500}} = 3^{10^{4500}}\cdot 10^{3\cdot 10^{4500}} < 3^{2\cdot 5\cdot 10^{4499}}\cdot 10^{3\cdot 10^{4500}}\\ &< 10^{5\cdot 10^{4499}}\cdot 10^{3\cdot 10^{4500}} = 10^{35\cdot 10^{4499}} < 10^{100\cdot 10^{4499}} = 10^{10^{4501}}.\end{aligned}$$

Значи бројот $2008^{2008^{2008}}$ има најмногу 10^{4501} цифри, т.е. збирот на цифри a_1, на a_0 е најмногу $9\cdot 10^{4501}$, т.е. $a_1 \le 9\cdot 10^{4501} < 10\cdot 10^{4501} = 10^{4502}$.

Според тоа, a_1 има најмногу 4502 цифри, па збирот на цифри a_2 на a_1 е најмногу $9\cdot 4502$, т.е. $a_2 \le 9\cdot 4502 = 40518$. Понатаму, збирот на цифри на бројот a_2 е најмногу $3+9+9+9+9 = 39$, т.е. следува $a_3 \le 39$. Збирот на цифри на a_3 не е поголем од $3+9 = 12$, т.е. $a_4 \le 12$, од каде следува дека $a_5 \le 9$.

Важи $a_0 \equiv a_1 \equiv \dots \equiv a_k \pmod 9$, и од

$$a_0 = 2008^{2008^{2008}} \equiv 1 \pmod 9$$

следува $a_i \equiv 1 \pmod 9$, за $u = 0,1,2,\dots$. Конечно, од $a_5 \le 9$ и $a_5 \equiv 1 \pmod 9$, добиваме $a_5 = 1$.

Задача 9. Да се најдат сите природни броеви $n > 1$, за кои природниот број

$$N = n^5 - n^4 + 2n^3 - 2n^2 + 2n - 1$$

е степен на прост број.

Решение. Ќе го претставиме N како производ на два израза – едниот од трет степен пон n, а другиот од втор степен по n. Имаме:

$$\begin{aligned} N &= n^5 - n^4 + n^3 + n^3 - n^2 - n^2 + n + n - 1 \\ &= (n^5 - n^4 + n^3) + (n^3 - n^2 + n) - (n^2 - n + 1) \\ &= n^3(n^2 - n + 1) + n(n^2 - n + 1) - (n^2 - n + 1) \\ &= (n^2 - n + 1)(n^3 + n - 1). \end{aligned}$$

Од добиеното претставување следува, дека N е производ на два природни броја и овие природни броеви се поголеми од 1, бидејќи $n > 1$. Јасно, вредностите на n, за кои броевите $n^3 + n - 1$ и $n^2 - n + 1$ се заемно прости, не се решенија на задачата. Ќе го разгледаме случајот, кога тие се делат истовремено со некој прост број p. Притоа можеме да сметаме, дека ниту еден од нив нема прост делител, различен од p. Ќе искористиме дека:

1) $n^3 + n - 1 = (n^2 - n + 1)(n + 1) + (n - 2)$ и

2) $n^2 - n + 1 = (n + 1)(n - 2) + 3$.

От 1) следува, дека p е делител на $n - 2$, а оттука и од 2) следува, дека p е делител на 3. Заклучуваме, дека $p = 3$. Освен тоа, не е можно $n^3 + n - 1$ и $n^2 - n + 1$ да се делат истовремено со 9, бидејќи со аналогни размислувања се добива дека, дека 9 е делител на 3, што не е точно. Од досега изнесеното следува, дека $n^3 + n - 1 = 3$ или $n^2 - n + 1 = 3$. Но, при $n \geq 2$ имаме

$$n^3 + n - 1 \geq 8 + 2 - 1 = 9 > 3 .$$

Од равенката $n^2 - n + 1 = 3$ наоѓаме $n = 2$ и тоа е единственото решение на задачата. Во случајов $N = 27 = 3^3$.

Задача 10. Докажи дека броевите $1,2,3,...,23,24,25$ не може да се поделат во две групи: A од 2 броја и B од 23 броја, така што збирот од броевите во групата B да биде еднаков на производот од броевите во групата A.

Решение. Нека таква поделба е можна и нека A се состои од броевите x и y, $x < y$. Тогаш, збирот на броевите во B е еднаков на

$$1 + 2 + 3 + ... + 24 + 25 - x - y = \tfrac{25(25+1)}{2} - x - y = 325 - x - y .$$

Затоа $xy = 325 - x - y$, т.е. $(x+1)(y+1) = 326$. Единствени делители на бројот 326 се: 1, 2, 163 и 326, па затоа од последната равенка и фактот дека $x < y$ ги добиваме системите

$$\begin{cases} x+1=1 \\ y+1=326 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+1=2 \\ y+1=163 \end{cases}$$

од што наоѓаме $x=0, y=325$ или $x=1, y=162$, што не е можно бидејќи $1 \le x < y \le 25$.

Задача 11. Нека a,b и c се ненулти цели броеви такви што $a \ne c$ и $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$. Докажи дека $a^2+b^2+c^2$ не може да биде прост број.

Решение. Равенството $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$ е еквивалентно на равенството

$$(a-c)(b^2-ac)=0.$$

Бидејќи $a \ne c$, од последното равенство добиваме $b^2=ac$ и затоа

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= a^2+2b^2+c^2-b^2 = a^2+2ac+c^2-b^2 \\ &= (a+c)^2-b^2 = (a+c-b)(a+b+c) \end{aligned}$$

Според тоа, ако $a^2+b^2+c^2$ е прост број, тогаш можни се следните случаи:

i) $a+c-b=1$ и $a+b+c=a^2+b^2+c^2$

ii) $a+b+c=1$ и $a-b+c=a^2+b^2+c^2$

iii) $a+c-b=-1$ и $a+b+c=-(a^2+b^2+c^2)$

iv) $a+c+b=-1$ и $a-b+c=-(a^2+b^2+c^2)$

Во случаите *i)* и *ii),* со собирање на равенствата добиваме

$$a^2+b^2+c^2-2(a+c)+1=0,$$

т.е.

$$(a-1)^2+(c-1)^2+b^2=0$$

и како $b \ne 0$ наоѓаме $a=c=1$, што е противречност. Во случаите *iii)* и *iv),* со собирање на равенствата добиваме

$$a^2+b^2+c^2+2(a+c)+1=0,$$

т.е.

$$(a+1)^2+(c+1)^2+b^2=0$$

и како $b \ne 0$ наоѓаме $a=c=-1$, што е повторно е противречност.