ЖИВКО МАДЕВСКИ
АЛЕКСАНДАР САМАРЏИСКИ
НАУМ ЦЕЛАКОСКИ

ЗБИРКА ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИЈА

ЗА II КЛАС НА СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

„ПРОСВЕТНО ДЕЛО“
СКОПЈЕ, 1981

Уредник
КИРИЛ МИЛЧЕВ

Рецензенти:

д-р БРАНКО ТРПЕНОВСКИ,
редовен професор на Математичкиот факултет во Скопје

КИРО ГАЛЕВСКИ,
просветен советник од Градскиот завод за школство — Битола

ГРГУР МАРОЕВИЌ,
професор во ЕМУЦ „Никола Тесла" — Скопје

Со решение на Републичкиот педагошки совет број 03-116 од 7. VII. 1980 година се одобрува употребата на оваа книга.

ПРЕДГОВОР

Збиркава е работена според наставната програма по геометрија за втори клас на средното образование и во изнесувањето на материјалот, наполно го следи учебникот „ГЕОМЕТРИЈА ЗА II КЛАС" (Ж. Мадевски, А. Самарџиски, Н. Целакоски). Сите повикувања (на некои теореми) во неа се однесуваат само на тој учебник; затоа називот е изоставен, а е пишувано само: в. во „Учебникот". Притоа, на пример, Т. 2 од III. 5. 1 означува дека се повикуваме на теоремата 2 од првиот раздел на петтиот параграф од третата глава во Учебникот. Гледано во целост, збиркава може да се смета за составен дел на Учебникот.

Задачите се распоредени по глави и параграфи, чии наслови се идентични со тие во Учебникот. Единствената разлика е во тоа што секоја глава во збиркава е нумерирана со реден број што е за единица помал од редниот број на соодветната глава во Учебникот. Нумерацијата на задачите е непрекината за секоја глава посебно. При повикувањата често пишуваме три броја; на пример, 95.4.III означува: деведест и петтата задача во четвртиот параграф од третата глава; вториот број (во случајов 4.) покажува дека таа задача треба ученикот да може да ја реши врз основа на изучениот материјал од тој параграф.

Збиркава се состои од три дела:

I дел: ЗАДАЧИ

II дел: ОДГОВОРИ И УПАТСТВА

III дел: РЕШЕНИЈА

За секоја задача (за која е неопходен одговор) е даден одговор во вторит дел. Многу од задачите се снабдени со соодветно упатство за решавање, а некои покарактеристични или потешки задачи се решени детално во третиот дел.

Кон ученикот

Задачите по математика служат, главно, за увежбување на изучениот материјал и за проверка дали тој материјал си го совладал.

*Затоа обиди се да ја решиш сам секоја задача од збиркава. Ако не успееш, потпомогни се со упатството — повеќето од задачите имаат кратко упатство. Ако и тогаш „не оди", види го решението (задачите што се снабдени со решение се означени со ѕвездичка, на пример, 18_*3 во глава III). Сепак, тоа нека биде во краен случај; твојот одговор спореди го со тој во збиркава. Задачите што се означени со две ѕвездички или само со една ѕвездичка поставена одзади (на пример 42_*3_* или 47.3_* во гл. IV), можеш да ги изоставиш ако констатираш дека ти се многу тешки. Тоа важи и за задачите од оние параграфи, коишто се означени со ѕвездичка (на пример *§8 од гл. IV) — тој е незадолжителен материјал, т.е. надвор од програмата.*

При решавањето на задачите, секогаш потпомогнувај се со едноставен цртеж. Во решените задачи се употребени цртежи само таму каде што било неопходно. Но, на повеќе места треба сам да направиш цртеж или без цртеж да си створиш јасна претстава за ситуацијата.

Решенијата на повеќето решени задачи се детални. Сепак решението не може да се чита како расказ, „без молив в рака" и ќе биде потребен извесен напор од твоја страна за тоа да ти стане сосем јасно и твоја своина.

Авторите

ПРВ ДЕЛ

ЗАДАЧИ

ГЛАВА I

МЕЃУСЕБНИ ОДНОСИ НА ОСНОВНИТЕ ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

§1. I Права. Меѓусебен однос на точка и права

1_*1. Нека A е произволна точка. Да се докаже дека постојат точки B и C, такви што точките A, B и C да не се колинеарни.

2_*1. Нека A е произволна точка. Докажи дека постои барем една права a што не минува низ точката A.

3_*1. Докажи дека постојат барем три прави што не минуваат низ една иста точка.

4_*1. Да се докаже дека со четири точки се определени една, четири или шест прави.

5.1. Да се докаже дека пет различни точки определуваат: 1, 5, 6, 8 или 10 прави.

6_*1. Да се докаже дека две различни прави може да имаат најмногу една заедничка точка.

7.1. Во колку точки можат да се сечат четири прави?

8.1. Колку точки определуваат: а) 3, б) 4, в) 5 прави ако кои било три од нив не минуваат низ иста точка и кои било две од нив се сечат.

9_*1_* Нека е зададено множеството

$$\mathbf{P}=\mathbf{N}^0\times\mathbf{N}^0=\{(x,y)\mid x,\ y\in\mathbf{N}^0\},$$

чии елементи ќе ги викаме „точки" и нека секое негово подмножество од обликот

$$\{(x,\ kx+n)\mid x\in\mathbf{N}^0\}$$

каде што k, n се природни броеви, го викаме „права", т. е. за секој пар фиксирани броеви k, n, множеството $\{(x, kx+n)\mid x\in\mathbf{N}^0\}$ е една права.

Да се провери дали при така избрани „точки" и „прави" се задоволени аксиомите $A.1$ и $A.2$.

10_*1_* Нека $\mathbf{P}=\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, а прави нека се следниве подмножества од $\mathbf{P}$:

$$\{(p,y)\mid p \text{ е делител на } y\},$$

каде што p е прост број, т. е. за секој прост број p тоа множество е една права. Да се провери дали се исполнети аксиомите $A.1$ и $A.2$.

11.1$_*$ Нека $\mathbf{P}=\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, а прави нека се следниве подмножества од $\mathbf{P}$:

$$\{(x, \kappa x+n) \mid x\in\mathbf{N}\},\ \kappa,n\in\mathbf{N},$$

и

$$\{(\kappa,y) \mid y\in\mathbf{N}\},\ \kappa\in\mathbf{N}.$$

Да се провери дали се исполнети аксиомите $A.1$ и $A.2$. Дали постојат прави што немаат заедничка точка?

12$_*$1$_*$ Нека $\mathbf{P} = (\mathbf{Q}\times\mathbf{Q})\setminus\{(0,0)\}$, а прави нека се следниве подмножества од $\mathbf{P}$:

$$\{(x,\kappa x) \mid x\in\mathbf{Q}^*\},\ \kappa\in\mathbf{Q},$$

$$\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{Q},\ x^2+y^2\neq 0,\ x^2+y^2+ax+by=0\},\ a,b\in\mathbf{Q},\ a^2+b^2\neq 0.$$

Да се докаже дека, при така избрани точки и прави, се исполнети аксиомите $A.1$ и $A.2$. Дали постојат прави што немаат заедничка точка?

13$_*$1$_*$ Нека $\mathbf{P}=(\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R})\setminus\{(0,0,0)\}$ при што

$$(x_1,x_2,x_3)=(y_1,y_2,y_3)\Leftrightarrow(\exists\,\kappa\in\mathbf{R}\setminus\{0\})\,y_i=\kappa x_i,\ \ i=1,2,3,$$

а прави нека се следниве подмножества од $\mathbf{P}$:

$$\{(x_1,x_2,x_3)\}\mid x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R},\ x_1^2+x_2^2+x_3^2\neq 0,\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0\}.$$

каде што $a_1,a_2,a_3\in\mathbf{R}$, $a_1^2+a_2^2+a_3^2\neq 0$. Да се докаже дека, при така избрани точки и прави се задоволени аксиомите $A.1$ и $A.2$ при што кои било две прави имаат заедничка точка.

§2.1 Рамнина. Меѓусебен однос на точка и рамнина

14$_*$2. Нека A е произволна точка. Да се докаже дека постојат точки B, C и D, така што точките A, B, C и D да не лежат во иста рамнина.

15.2. Нека A е произволна точка. Да се докаже дека постои барем една рамнина Σ што не минува низ точката A.

16$_*$2. Да се докаже дека низ секоја точка A минуваат барем три различни рамнини.

17$_*$2. Нека A, B, C и D се четири точки, така што кои било три од нив не се колинеарни. Колку рамнини определуваат тие точки?

18$_*$2. Нека A, B, C, D и E се пет точки, така што кои било три од нив не се колинеарни. Да се докаже дека тие определуваат една, седум или десет рамнини.

§3.I Меѓусебен однос на права и рамнина

19$_*$3. Да се докаже дека во секоја рамнина лежат барем три различни прави.

20$_*$3. Нека точката A лежи во рамнината Σ. Да се докаже дека во рамнината Σ постојат точки B и C, така што точките A, B и C не се колинеарни.

21$_*$3. Нека точката A лежи во рамнината Σ. Да се докаже дека во рамнината Σ постои барем една права a што не минува низ точката A.

22.3. Нека правата a лежи во рамнината Σ. Да се докаже дека во рамнината Σ постои барем една точка A што не лежи на правата a.

23$_*$3. Нека точката A лежи во рамнината Σ. Да се докаже дека низ точката A минуваат бесконечно многу прави што лежат во рамнината Σ.

24$_*$3. Да се докаже дека за секоја рамнина Σ постои барем една права што ја прободува рамнината Σ.

25.3. Нека Σ е произволна рамнина. Да се докаже дека постојат бесконечно многу точки што не лежат во рамнината Σ.

26$_*$3. Да се докаже дека низ секоја права a минуваат бесконечно многу рамнини.

§4.I Меѓусебен однос на две рамнини

27$_*$4. Нека Σ_1 и Σ_2 се две различни рамнини и нека $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing$. Да се докаже дека постои барем една права што ги прободува и двете рамнини.

28.4. Нека Σ_1 и Σ_2 се две различни рамнини. Да се докаже дека постојат бесконечно многу точки што не лежат ни на Σ_1 ни на Σ_2.

§5.I Меѓусебен однос на две прави

29.5. Нека a, b, c се три прави што минуваат низ една иста точка. Да се докаже дека тие определуваат или една рамнина или, пак, три рамнини.

30.5. Нека a е права, а B и C точки што не лежат на a. Да се докаже дека тие определуваат една или две рамнини.

31.5. Нека A, B и C се три различни точки што лежат и во рамнината Σ_1 и во рамнината Σ_2. Дали $\Sigma_1 = \Sigma_2$?

32$_*$5. Нека правата a ја прободува рамнината Σ. Дали постои права што лежи во Σ и е паралелна со правата a?

33.5. Дадени се рамнината Σ и правите a, b. Ако правите a и b се сечат и ако правата a лежи во рамнината Σ, дали и правата b мора да лежи во рамнината Σ?

34.5. Нека правите a и b се сечат и нека лежат во рамнината Σ, а правата c нека ги сече и двете прави a и b. Дали правата c лежи во рамнината Σ?

§6.1 Растојание

35.6. Да се докаже дека за кои било три точки A, B и C важи:

$$d(AC) - d(BC) \leqslant d(AB),$$
$$d(BC) - d(AB) \leqslant d(AC),$$
$$d(AB) - d(AC) \leqslant d(BC),$$

36$_*$6. Да се докаже дека за кои било четири точки A_1, A_2, A_3, и A_4 важи:

$$d(A_1A_4) \leqslant d(A_1A_2) + d(A_2A_3) + d(A_3A_4).$$

37.6. За три различни точки A, B и C се знае дека $d(AB) = 12$, $d(BC) = 8$. Дали може $d(AC)$ да биде: а) 14, б) 16, в) 24, г) 4 д) 0?

38$_*$6. Нека A, B, C и D се четири точки за кои важат равенствата:

$$d(AC) = d(AB) + d(BC), \quad d(AD) = d(AC) + d(CD). \qquad (1)$$

Да се докаже дека во тој случај важат равенствата:

$$d(AD) = d(AB) + d(BD), \quad d(BD) = d(BC) + d(CD). \qquad (2)$$

39.6. Нека на секој пар точки A, B од просторот му е придружен бројот 1, ако $A \neq B$, а бројот 0 ако $A = B$. Дали на тој начин е дефинирано растојание во просторот?

40.6. Нека $\mathbf{P} = \mathbf{N}$ и нека за секој пар точки m, n ставиме:

а) $d(m, n) = m - n$;
б) $d(m, n) = n - m$;
в) $d(m, n) = |n - m|$;
г) $d(m, n) = \dfrac{m}{n}$;
д) $d(m, n) = m^n$.

Дали d е растојание во $\mathbf{P}$?

41$_*$6. Нека $\mathbf{P} = \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ и нека за секој пар точки $A\ (x_1, y_1)$, $B\ (x_2, y_2)$ ставиме:

а) $d\,(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;
б) $d\,(AB) = |\,x_2 - x_1\,|$;
в) $d\,(AB) = |\,x_2 - x_1\,| + |\,y_2 - y_1\,|$;
г) $d\,(AB) = \dfrac{|\,x_2 - x_1\,|}{1 + |\,y_2 - y_1\,|}$.

Дали d е растојание во $\mathbf{P}$?

§7.I Подредување на точките од една права

42.7. За точките A, B и C важи:

а) $d\,(AB) = 3$, $d\,(AC) = 5$, $d\,(BC) = 2$;
б) $d\,(AB) = 10$, $d\,(AC) = 25$, $d\,(BC) = 10$;
в) $d\,(AB) = 1$, $d\,(BC) = 30$, $d\,(AC) = 6$.
г) $d\,(AB) = 7$, $d\,(BC) = 10$, $d\,(AC) = 3$.

Дали точките A, B и C се колинеарни и која од нив лежи меѓу другите две?

43$_*$7. Нека точката C лежи меѓу A и B, а точката M лежи меѓу A и C. Дали точките A, B, C и M се колинеарни?

44$_*$7. Нека A и B се две дадени точки. Да се докаже дека постои барем една точка C, така што B да лежи меѓу A и C. Колку такви точки постојат?

45$_*$7. Нека A, B, C и D се четири точки, такви што B лежи меѓу A и C, а C лежи меѓу A и D. Да се докаже дека B лежи меѓу A и D, а C лежи меѓу B и D.

46$_*$7. Нека A, B, C и D се четири колинеарни точки. Да се докаже дека тие може да се означат со броевите 1, 2, 3 и 4, така што истовремено да важи: 2 лежи меѓу 1 и 3; 2 лежи меѓу 1 и 4; 3 лежи меѓу 1 и 4; 3 лежи меѓу 2 и 4.

47$_*$7. Да се докаже дека од четири колинеарни точки само две лежат меѓу другите две.

48.7. Дали полуправите AB и BA се исти?

49.7. Колку полуправи определуваат две точки A и B?

50.7. Со колку точки еднозначно е определена една полуправа?

51$_*$7. Нека A и B се две различни точки. Да се докаже дека множеството

$$\{X\,|\,X \text{ е меѓу } A \text{ и } B \text{ или } B \text{ е меѓу } A \text{ и } X\}$$

е полуправата AB.

§8.I Отсечка. Искршена линија

52.8. Колку отсечки определуваат четири различни точки?

53.8. Дали може неколку темиња, односно неколку страни од една искршена линија да лежат на иста права?

54.8. Избери права a и на неа две точки A и B. Најди го пресекот на полуправите AB и BA.

55.8. Избери права a и на неа три точки A, B и C. Најди го пресекот на полуправите: а) AC и AB, б) BA и BC, в) CA и CB, г) AB и BC.

56.8. На правата a дадени се три точки A, B и C. Колку отсечки и колку полуправи определуваат овие точки?

57.8. Наброј неколку геометриски фигури што може еднозначно да се определат со две различни точки.

ГЛАВА II

ПОВАЖНИ ФИГУРИ ВО РАМНИНАТА

§1. II Полурамнина. Агол

1.1. Отсечката AB нема заеднички точки со правата a. Каква е положбата на точките A и B спрема правата?

2.1. Правата a не минува низ точките A, B, C, D. Се знае дека отсечките AB и CD се сечат со правата, а отсечката BC не се сече. Каква е положбата на отсечките AC, AD и BD спрема правата?

3.1. Нека точките A и B се на различни страни од правата a. Докажи дека секоја искршена линија со крајни точки A и B има заедничка точка со правата a.

4.1. Нека точките A и B се на иста страна од правата a. Дали секоја искршена линија со крајни точки A и B има заеднички точки со правата a?

5.1. На колку дела ја разбиваат рамнината: а) две различни прави, б) три различни прави?

6.1. Зададени се четири точки A, B, C, D. Ако отсечките AB и CD се сечат, тогаш точките B и D лежат во една иста полурамнина чиј раб е правата AC. Докажи!

7.1. Дали а) отсечка, б) две отсечки, в) полуправа, г) две полуправи, д) права и полуправа ја разбиваат рамнината на составни делови?

8.1. Зададени се $\sphericalangle AOB = 120^0$ и $\sphericalangle AOC = 150^0$. Колкав е аголот BOC, ако полуправите OB и OC лежат во а) иста полурамнина, б) во различните полурамнини, определени со правата OA?

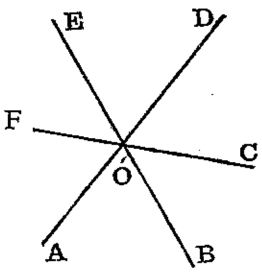
9.1. Избери три различни полуправи со заеднички почеток. Колку агли образуваат овие полуправи?

10.1. Може ли две прави што се сечат да образуваат само: а) остри агли, б) прави агли, в) тапи агли?

11.1. Колку агли има на цртежот II.1? Именувај ги (има повеќе од шест).

12$_*$1. Колку различни агли образуваат две прави што се сечат? Покажи ги на цртеж: а) напоредните агли, б) рамните агли.

13.1. Збирот на три агли изнесува 110^0. Најголемиот од овие агли е трипати поголем од најмалиот, а двапати поголем од средниот. Кои се тие агли?



Црт II. 1

14.1. Збирот на четири агли е прав агол. Секој од овие агли е за 1^0 поголем од претходниот. Кои се тие агли?

15.1. На правата a лежат точките A, M, N, при што A е меѓу точките M и N. Точките P и Q се од иста страна на правата a. Ако $\sphericalangle PAM = 85^0 20'$ и $\sphericalangle QAN = 38^0 35'$, да се најде аголот $\sphericalangle PAQ$.

16.1. Разликата на два напоредни агли е $20^0 30'$. Определи ги аглите.

17.1. Даден е аголот $\alpha = 63^0 15'$. Определи го неговиот: а) комплементен агол, б) суплементен агол.

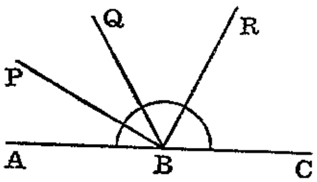
18.1. Колкав е аголот што е трипати поголем од својот а) комплемент, б) суплемент?

19*1. Аглите α и β се комплементни, а аглите α_1 и β_1 се нивните соодветни суплементни агли. Колку изнесува збирот $\alpha_1 + \beta_1$?

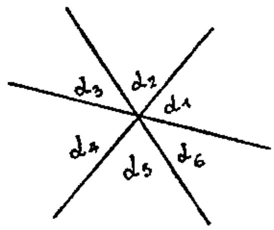
20.1. Правите a и b се сечат во точката P. Еден од аглите, определен со правите a и b е $28^0 20'$. Определи ги другите агли.

21.1. Какви можат да бидат аглите α, β и γ ако $\alpha + \beta + \gamma = 94^0$?

22*1. Дадени се аглите $\sphericalangle ABP = \sphericalangle PBQ$, $\sphericalangle QBR = \sphericalangle RBC$, како на црт. II.2. Да се најде $\sphericalangle PBR$.



Црт. II. 2


Црт. II. 3

23.1. Три прави што се сечат во една точка ги образуваат аглите: α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6 (црт. II.3). а) Докажи дека $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6$ б) Ако $\alpha_2 = 85^0$ и $\alpha_4 = 30^0$, најди ги другите агли.

24.1. Збирот од еден агол и неговите напоредни агли изнесува 235^0. Колкав е тој агол?

25.1. Избери права a и една точка A на неа. Конструирај ја правата што минува низ A и е нормална на a.

26.1. Правите a и b се сечат. Еден од аглите што ги образуваат правите a и b е прав. Колкави се другите агли? Дали правите a и b се заемно нормални?

§2.II Многуаголник

27.2. Колку страни има многуаголникот, ако од едно негово теме може да се повлечат точно k дијагонали?

28.2. Колку дијагонали има еден осумаголник?

29.2. Еден многуаголник има 35 дијагонали. Колку страни има тој многуаголник?

30.2. Бројот на дијагоналите на еден многуаголник е а) петпати, б) k-пати поголем од бројот на неговите страни. Колку страни има тој многуаголник?

31.2. Дали постои многуаголник за којшто бројот на дијагоналите е еднаков со бројот на страните?

32$_*$2. Покажи дека во секој многуаголник што не е триаголник, ни четириаголник, ни петаголник, бројот на дијагоналите е поголем од бројот на неговите страни.

33.2. Докажи дека во секој многуаголник (конвексен) внатрешните точки на секоја негова дијагонала се внатрешни точки на многуаголникот.

34.2. Докажи дека во секој многуаголник (конвексен) секоја точка на една отсечка, чии крајни точки се внатрешни точки на многуаголникот, лежи во многуаголникот.

§3.II Триаголник

35.3. Нека A, B, C, D се точки на една права и нека точката S лежи надвор од правата. Поврзи ја точката S со другите точки. Колку триаголници се добиени?

36$_*$3. Буквите A, B, C, D, E означуваат пет различни точки. Напиши ги сите можни комбинации од по три различни букви од зададените пет букви и провери колку најмногу триаголници можат да се формираат од пет точки.

37$_*$3. Ако правата a што не минува низ ниедно теме на $\triangle ABC$ ја сече страната AB, тогаш таа права ќе сече уште една и само една од другите две страни BC и AC.

38.3. Да се докаже: ако правата p не минува низ ниедно теме на триаголникот ABC и ако сече две страни на триаголникот во точките D и E, тогаш таа права не ја сече третата страна.

39.3. Покажи дека симетралата на еден надворешен агол на триаголникот е нормала на симетралата на напоредниот внатрешен агол.

40$_*$3. Да се докаже дека во секој триаголник два надворешни агли се тапи.

41$_*$3. Точката M е внатрешна точка на триаголникот ABC. Да се докаже дека аголот AMB е поголем од аголот ACB.

42$_*$3. Ако отсечките AB и CD имаат заедничка точка M и ако се преполовуваат со таа точка, т.е. $\overline{AM}=\overline{MB}$ и $\overline{CM}=\overline{MD}$, тогаш и $\overline{AC}=\overline{BD}$ и $\overline{AD}=\overline{BC}$. Докажи!

43$_*$3. Отсечките AB и CD се сечат во точката M, така што $\overline{AM}=\overline{CM}$ и $\overline{BM}=\overline{DM}$. Да се докаже дека $\sphericalangle DAM=\sphericalangle BCM$.

44$_*$3. Точките A, B, C, D се колинеарни и притоа B е меѓу A и C, а D е меѓу B и C. Точката M лежи надвор од правата AC и притоа $\overline{AM}=\overline{CM}$, $\overline{BM}=\overline{DM}$ и $\overline{AB}=\overline{DC}$. Да се докаже дека $\sphericalangle AMB=\sphericalangle DMC$.

45$_*$3. Полуправата AB ја сече отсечката CD и ја преполовува со пресечената точка. Да се докаже: Ако $\overline{AC}=\overline{AD}$, тогаш $AB\perp CD$.

46$_*$3. Ако во триаголникот ABC, $\overline{AB}=\overline{CB}$ и ако M лежи меѓу A и C, така што $\sphericalangle ABM=\sphericalangle CBM$, тогаш M е средина на страната AC. Докажи!

47.3. Отсечката CD е тежишна линија на триаголникот ABC. Да се докаже дека висините на триаголниците DAC и DBC спуштени од A, односно B, се еднакви меѓу себе.

48.3. Да се конструира триаголник ако се зададени:

а) страните a, b и тежишната линија t_a;

б) страната b, аголот γ и тежишната линија t_a.

49.3. Да се конструира правоаголен триаголник ако се зададени:

а) катетите a и b;

б) катетата a и хипотенузата c;

в) катетата a и остриот агол β што лежи на неа.

50.3. Да се конструира триаголник ако се зададени:

а) страните b и c и висината h_a;

б) b, h_a, t_a;

в) a, h_a, t_a.

51.3. Да се конструира триаголник ако се зададени:

а) a, h_a, β; б) a, c, h_a.

52.3. Да се покаже дека тежишните линии повлечени од крајните точки на основата на еден рамнокрак триаголник се еднакви меѓу себе.

53$_*$3. Да се докаже дека средините на страните на еден рамнокрак триаголник се темиња на еден друг рамнокрак триаголник.

54.3. Во триаголникот ABC, $\overline{AC}=\overline{BC}$. На страната AC е земена точката D, а на страната BC точката E и, притоа, $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CBA$, $\sphericalangle CED = \sphericalangle CAB$. Да се докаже дека ΔCDE е рамнокрак.

55.3. Точките A и B се на различни страни од правата p и се на еднакви растојанија од таа права. Отсечката AB ја сече правата p во точката M. Докажи дека M е средина на отсечката AB.

56.3. Дадена е отсечката AB и две точки C и D што лежат на: а) иста страна, б) различни страни од правата AB и, притоа, $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CBA$. Да се докаже дека $\overline{AC}=\overline{BD}$.

57.3. Точките M и N лежат соодветно на краците AC и BC на еден рамнокрак триаголник ABC и, притоа, $\sphericalangle CAN = \sphericalangle CBM$. Да се докаже дека $\overline{AN}=\overline{BM}$.

58$_*$3. Точките S и T, коишто лежат соодветно на страните AC и BC од еден триаголник ABC, ги задоволуваат условите: $\sphericalangle CST = \sphericalangle CTS$ и $\sphericalangle TSB = \sphericalangle STA$. Да се докаже дека триаголникот ABC е рамнокрак.

59$_*$3. Даден е $\sphericalangle AMB$ и, притоа, $\overline{AM}=\overline{BM}$. Нека точките P и Q лежат на краците од аголот, така што A е меѓу M и P, B е меѓу M и Q и, притоа, отсечките AQ и BP се сечат во точката T така што $\sphericalangle AMT = \sphericalangle BMT$. Да се докаже дека триаголниците APT и BQT се складни.

60$_*$3. Нека ABC е произволен триаголник. Нека точката D е таква што точките C и D да лежат на различни страни од правата AB и ΔABD да е рамностран; нека, потоа, точката E е таква што точките A и E да лежат на различни страни од правата BC и ΔBCE да е рамностран. Докажи дека $\overline{CD}=\overline{AE}$.

61$_*$3. На страната AB на триаголникот ABC е земена точка D. Да се покаже дека отсечката CD е помала барем од една од страните AC и BC.

62$_*$3. Отсечките AB и CD се сечат во точката E, така што $\sphericalangle ACE > \sphericalangle CAE$ и $\sphericalangle EDB > \sphericalangle DBE$. Да се докаже дека $\overline{AB} > \overline{CD}$.

63$_*$3. Да се докаже дека должината на секоја дијагонала на еден многуаголник е помала од полупериметарот на тој многуаголник.

64.3. Да се покаже дека во секој правоаголен триаголник, висината спуштена на хипотенузата е помала од катетите.

65$_*$3. Да се покаже дека од дадена точка M не може на дадена права p да се повлечат три наведнати отсечки со еднакви должини.

66.3. Да се докаже дека две прави, што се нормални на дадена права, не се сечат.

67$_*$3. Да се докаже дека еден триаголник не може да има два прави агли.

68$_*$3. Нека P е произволна внатрешна точка за триаголникот ABC. Да се докаже дека $\overline{PA}+\overline{PB}<\overline{CA}+\overline{CB}$.

69$_*$3. Да се докаже дека периметарот на секој триаголник е поголем од збирот на неговите висини.

§4.II Паралелни прави

70.4. Две непаралелни прави се сечат, така што нивната пресечна точка лежи надвор од листот на кој се нацртани тие прави. Како да се определи аголот меѓу тие прави?

71$_*$4. Дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ се сечат во точката O така што $\overline{AO}=\overline{OC}$, $\overline{BO}=\overline{OD}$. Да се докаже дека спротивните страни на четириаголникот се паралелни.

72.4. Дијагоналата AC на четириаголникот $ABCD$ зафаќа со сите страни на четириаголникот еднакви агли. Да се докаже дека спротивните страни на четириаголникот се паралелни.

73.4. Ако се знае дека во четириаголникот $ABCD$ аголот BAD има 64^0, а аголот BCD — 148^0 и ако $AB \parallel CD$, да се најдат другите агли на четириаголникот.

74$_*$4. Низ пресечната точка T на симетралите на аглите CAB и CBA на триаголникот ABC е повлечена права паралелна со страната AB, којашто страните AC и BC ги сече во точките P и Q. Докажи дека $\overline{PQ}=\overline{AP}+\overline{BQ}$.

75$_*$4. Докажи го тврдењето: ако две прави се паралелни, тогаш сите точки на која било од нив се на еднакво растојание од другата права.

76.4. Дали се точни исказите: а) $a \parallel a$; б) ако $a \parallel b$, тогаш $b \parallel a$; в) ако $a \parallel b$ и $b \parallel c$, тогаш $a \parallel c$?

77$_*$4. Да се пресмета збирот на аглите на произволен многуаголник.

78.4 Хипотенузата на еден правоаголен триаголник е двапати поголема од едната катета. Колкави се острите агли на тој триаголник?

79.4. Колкави се аглите на триаголникот ABC, ако тие се однесуваат како $1:2:3$?

80.4. Внатрешните агли на триаголникот се однесуваат како $2:3:4$. Најди ги аглите.

81.4. Надворешните агли на триаголникот се однесуваат како $6:7:5$. Најди ги аглите!

82.4. Најди ги надворешните агли на триаголникот ако се знае дека еден од нив е за 10^0 поголем од другиот, а за 40^0 помал од третиот.

83.4. Во триаголникот ABC се зададени $\sphericalangle CAB=\alpha$ и $\sphericalangle CBA=\beta$. Да се определи аголот меѓу висината и симетралата на внатрешниот агол при темето C.

84$_*$4. Со помош на аглите на правоаголниот триаголник ABC, да се изрази аголот меѓу висината и тежишната линија, повлечени од темето C на правиот агол.

85$_*$4. Нека ABC е правоаголен триаголник со нееднакви катети. Докажи дека симетралата на правиот агол е симетрала и на аголот меѓу висината и тежишната линија повлечени од темето на правиот агол.

86.4. Во триаголникот ABC, $\sphericalangle A=56^0$, $\sphericalangle C=48^0$. Колкав е аголот меѓу симетралите на аглите BAC и ABC?

87.4. Аголот меѓу краците на еден рамнокрак триаголник има 57^0. Што е поголемо: основата или кракот на тој триаголник?

88.4. Колкав е третиот агол на $\triangle ABC$ ако се зададени другите два: а) 90^0, κ^0; б) $60^0+\alpha^0$, $60^0-\alpha^0$ в) u, ν.

89$_*$4. Ако симетралата на еден надворешен агол на некој триаголник е паралелна со страната на тој триаголник, тогаш тој триаголник е рамнокрак.

90.4. Во $\triangle ABC$ аголот ACB е прав, а точката M од хипотенузата AB е таква што $\overline{AM}=\overline{MC}$. Да се докаже дека точката M е средина на хипотенузата.

91.4. Дали триаголникот е остроаголен, правоаголен или тапоаголен, ако еден од неговите агли е: а) еднаков на збирот на другите два агла, б) поголем од тој збир, в) помал од тој збир?

92.4. Ако тежишната линија, повлечена кон најголемата страна на еден триаголник е еднаква на половината од таа страна, тогаш тој триаголник е правоаголен. Да се докаже.

93$_*$4. Ако еден од надворешните агли на еден триаголник е двапати поголем од некој внатрешен агол што не е напореден со него, тогаш тој триаголник е рамнокрак. Докажи!

94$_*$4. Во крајните точки на една отсечка AB, земени како темиња, се нацртани остри агли α и β, чиј еден крак е полуправата AB односно полуправата BA. Само со ленир да се конструира:

а) збирот на α и β, ако тие се расположени на иста страна од правата AB.

б) разликата на α и β, ако тие се на различни страни од правата AB.

95.4. Големините на два агла со заемно паралелни краци се однесуваат како $2:7$. Кои се тие агли?

96$_*$4. Докажи дека два агла со заемно нормални краци се еднакви или се суплементни.

97.4. Големините на два агла со заемно нормални краци се однесуваат како 17 : 19. Кои се тие агли?

98.4. Дадени се два еднакви агли α и β со заемно нормални краци Докажи дека симетралите на овие агли меѓусебно се нормални.

99.4. Дадени се два остри агли, така што едниот пар краци да им се паралелни, а другиот пар краци да им се нормални. Докажи дека овие агли се комплементни.

100$_*$4. Дадени се два суплементни агли со заемно нормални краци. Докажи дека симетралите на овие агли меѓусебно се паралелни.

§5.II Слични многуаголници

101.5. Отсечката DF е паралелна со страната AC на триаголникот ABC и, притоа, точката D лежи на страната AB, а F на страната BC. Да се определи:

а) $\overline{AC}$, ако $\overline{AD}=5$ см, $\overline{DB}=3$ см, $\overline{DF}=4$ см;

б) $\overline{AB}$, ако $\overline{AD}=4$ см, $\overline{DF}=6$ см, $\overline{AC}=8$ см.

102.5. Низ точката D од страната AB на триаголникот ABC е поставена отсечката DF што е паралелна со страната AC. Да се најде $\overline{BF}$ ако. $\overline{AD} : \overline{DB} = 5:6$ и $\overline{BC}=22$ см.

103$_*$5. Основите на трапезот $ABCD$ се $\overline{AB}=20$ см и $\overline{CD} = 14$ см. Со точките P и Q кракот AD е поделен на три еднакви делови, а низ P и Q се повлечени прави што се паралелни со основите. Определи ги должините на отсечките од овие прави што се зафатени во трапезот.

104$_*$5. Симетралата AD на аголот BAC во триаголникот ABC ја дели страната BC на делови што се пропорционални на другите две страни, т.е. $\overline{AB}:\overline{BD}=\overline{AC}:\overline{CD}$. Да се докаже.

105.5. Да се конструира отсечка со должина: а) $x=a^2$; б) $x=\frac{ab}{c}$; в) $x=\frac{a}{b}$; г) $x=\frac{abc}{df}$; д) $x=a^3$.

106$_*$5. Отсечката AB да се подели на два дела што се однесуваат како $m:n$.

107.5. Отсечката $\overline{OM}=10$ см да се раздели на три дела што се однесуваат како $3:5:7$.

108.5. Периметарот на еден рамнокрак триаголник е 9 см, а основата се однесува спрема кракот како $3:4$. Да се конструира тој триаголник.

109.5. Дали може два триаголника да бидат слични ако:

а) два агла на едниот се 60^0 и 70^0, а два агла на другиот се 50^0 и 80^0;

б) два агла на едниот се 45^0 и 75^0, а два агла на другиот се 45^0 и 60^0;

в) едниот од нив има агол од 40^0 и две страни по 5 см, а другиот има агол од 70^0 и две страни по 8 см;

г) страните на едниот се 9 см, 6 см и 5 см, а периметарот на другиот е 8 420 000 см.

110.5. Отсечките AC и BD се сечат во точката E така што $\overline{AE}:\overline{EC} = \overline{BE}:\overline{ED}$. Да се докаже дека: а) $\triangle ABE \sim \triangle CDE$, б) $AB \parallel DC$.

111.5. Правите a и b кои имаат заедничка точка O се пресечени со паралелните прави AB и CD така што точката O да е меѓу A и D односно меѓу B и C.

а) Да се докаже дека $\overline{AO}:\overline{BO} = \overline{OD}:\overline{OC}$;

б) Ако $\overline{AD} = 10$ см, $\overline{OB} = 5$ см, $\overline{OC} = 3$ см да се најдат $\overline{AO}$ и $\overline{OD}$.

112$_*$5. Даден е триаголникот ABC и прави p и q, паралелни со правата AB, при што p минува низ C. Ако C се менува по правата p-тогаш отсечките од правата q, што ги зафаќаат триаголниците ABC, се еднакви. Докажи!

113$_*$5. Зададен е $\triangle ABC$ со $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ и $\sphericalangle BAC = 120^0$. Да се најде симетралата на $\sphericalangle BAC$.

114$_*$5. Да се конструира триаголникот ABC ако се зададени:

а) $c = 6$ см, $a:b = 2:5$, $\gamma = 35^0$; б) α, β, h_c; в) α, β, h_a.

115$_*$5. Да се докаже дека за секој правоаголен триаголник важи:

а) $h_c = \dfrac{ab}{c}$; б) $\dfrac{a^2}{p} = \dfrac{b^2}{q}$; в) $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{h_c^2}$.

116.5. Во правоаголниот триаголник ABC страната AB е хипотенуза, а отсечката CD е хипотенузината висина. Да се докаже дека $\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2$.

117.5. Дали може должините на сите страни на правоаголниот триаголник да се искажат со: а) парни броеви; б) непарни броеви?

118.5. Со кои три последователни природни броеви може да се искажат страните на правоаголниот триаголник?

119.5. Катетите на еден правоаголен триаголник се 24 и 32. Да се определи висината, спуштена на хипотенузата.

120_*5. Во правоаголниот триаголник ABC дадена е катетата $\overline{BC}=1$. На катетата AC земена е точка P, така што $\overline{CP}=\overline{BC}=1$ и $\overline{BP}=\overline{PA}$. Да се најде хипотенузата AB.

121_*5. Во правоаголниот триаголник ABC се знае дека $\alpha=30^0$, $\overline{AC}=4{,}5$, $\overline{AB}=3\sqrt{3}$. Да се докаже дека C е темето на правиот агол и да се најде $\overline{BC}$.

§6.II Четириаголник

122.6. Дали може еден четириаголник да има: а) два остри агла, б) два прави агли, в) три остри агли, г) три тапи агли?

123_*6. Покажи дека секој четириаголник, што не е правоаголник, има барем еден остар агол и барем еден тап агол.

124.6. Колку остри агли може да има еден четириаголник што не е правоаголник?

125.6. Отсечките BD и CE се висини на остроаголниот триаголник ABC што се сечат во точката H. Да се докаже дека $\sphericalangle CHD=\sphericalangle BAC$.

126_*6. Во четириаголникот $ABCD$, $\sphericalangle A=\sphericalangle C=90^0$. Да се докаже дека симетралите BB_1, DD_1 на другите два агла се паралелни. Во кој случај тие се совпаѓаат?

127.6. Даден е четириаголникот $ABCD$ и притоа $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$. Да се докаже дека дијагоналите AC и BD се преполовуваат со пресечната точка S.

128.6. Дали може да постои паралелограм ако:

а) неговите страни се 20 см и 34 см и една дијагонала 52 см;

б) една негова страна е 8 см, а дијагоналите 6 см и 10 см;

в) една негова дијагонала е 6 см, а страните 20 см и 38 см?

129.6. Два соседни агли на еден паралелограм се $x+30^0$ и $2x-60^0$. Да се определат аглите на паралелограмот.

130.6. Докажи дека симетралите на два соседни агли кај кој било паралелограм се заемно нормални.

131_*6. Даден е паралелограмот $ABCD$. Ако S_1 е точка во која се сечат симетралите на аглите CDA и DAC, а S_2 точка во која се сечат симетралите на аглите ABC и BCA, тогаш $\overline{DS_1}=\overline{BS_2}$, $\overline{AS_1}=\overline{CS_2}$. Да се докаже.

132$_*$6. Точката E ја дели страната AD на паралелограмот $ABCD$ така што $\overline{AE}=\kappa\cdot\overline{AD}$. а точката P е пресек на отсечките BE и AC. Да се најде $\overline{AP}:\overline{AC}$ и $\overline{BP}:\overline{BE}$.

133.6. Нека M е средина на страната CD од квадратот $ABCD$. Да се докаже дека триаголникот ABM е рамнокрак.

134.6. Колкави се аглите на ромбот во кој едната дијагонала е еднаква со страната на ромбот?

135.6. Четириаголникот $ABCD$ е трапез. Да се покаже дека: ако краците на трапезот се еднакви, т.е. $\overline{AD}=\overline{BC}$, тогаш $\sphericalangle A=\sphericalangle B$.

136$_*$6. Ако дијагоналите на еден трапез $ABCD$ се еднакви, тогаш тој е рамнокрак. Докажи!

137$_*$6. Ако дијагоналите на еден четириаголник $ABCD$ се преполовуваат со пресечната точка S, тогаш тој четириаголник е паралелограм. Докажи!

138.6. Да се докаже дека еден паралелограм $ABCD$ што има:

а) заемно нормални дијагонали е ромб;

б) еднакви дијагонали е правоаголник.

139.6. Нека A_1 и B_1 се средините на страните BC и CA соодветно на триаголникот ABC. Отсечката A_1B_1, се вика средна линија на триаголникот ABC. Да се докаже дека $A_1B_1 \parallel AB$ и $\overline{A_1B_1}=\frac{1}{2}\overline{AB}$.

140.6. Да се докаже дека средините на страните на произволен четириаголник се темиња на паралелограм.

141$_*$6. Да се докаже дека: а) Средините на страните на еден ромб се темиња на правоаголник. б) Средините на страните на еден правоаголник се темиња на ромб.

142$_*$6. Нека $ABCD$ е четириаголник што не е паралелограм. Да се докаже дека средините на дијагоналите и средините на две спротивни страни се темиња на паралелограм.

§7.II Кружница и круг

143$_*$7. Ако AB и CD се два дијаметра на една кружница, тогаш $\overline{AC}=\overline{BD}$ и $AC \parallel BD$. Докажи!

144.7. Ако AB и CD се два дијаметра на една кружница, тогаш четириаголникот со темиња во точките A, B, C, D е паралелограм.

145$_*$7. Да се докаже дека дијаметарот што е нормален на една тетива, ја располовува таа тетива.

146$_*$7. Тетивите AB и BC на една кружница се еднакво оддалечени од центарот на кружницата. Докажи дека триаголникот ABC е рамнокрак.

147.7. Една тетива со должина 16 см е оддалечена од центарот на кружницата за 15 см. Да се определи радиусот на кружницата.

148.7. Да се докаже дека правата што минува низ средината на една тетива и што е нормална на таа тетива (симетрала на тетивата), минува низ центарот.

149$_*$7. Да се нацрта кружница што минува низ точките A и B и со радиус еднаков на AB.

150$_*$7. Да се нацрта кружница со најмал радиус што минува низ две различни точки.

151.7. Да се докаже дека дијаметрите на една кружница се најголеми тетиви на таа кружница.

152.7. Точката A е надворешна точка за кружницата $k(O, r)$. Од точката A е повлечена тангента на кружницата што ја допира во точката B. Да се пресмета:

а) $\overline{AB}$, ако $\overline{AO}=13$, $r=5$;

б) r, ако $\overline{AO}=25$, $\overline{AB}=20$;

в) $\overline{AO}$, ако $\overline{AB}=24$, $r=7$.

153.7. Да се конструира тангента на дадена кружница така што таа да е: а) паралелна со дадена тетива, б) паралелна со дадена права што не ја сече кружницата, в) нормална на дадена права.

154.7. Конструирај тангента на дадена кружница што е паралелна на дадена права, ако центарот на кружницата е надвор од листот на цртежот.

155.7. Докажи дека тангентите што ја допираат една кружница во крајните точки во еден нејзин дијаметар, меѓусебно се паралелни.

156$_*$7. Докажи дека кои било три точки од една кружница не се колинеарни.

157$_*$7. Да се нацрта кружница со даден радиус, којашто минува низ дадена точка, а центарот ѝ лежи на дадена права.

158.7. Да се конструира кружница со даден радиус r што ја допира дадена права a во дадена точка A.

159.7. Да се конструира кружница со даден радиус r што ги допира краците на еден агол.

160$_*$7. Да се докаже: ако две кружници се допираат, тогаш нивните центри се колинеарни со нивната допирна точка.

161.7. Каква заемна положба имаат кружниците $\kappa_1(O_1, r_1)$ и $\kappa_2(O_2, r_2)$ ако: а) $\overline{O_1O_2}=15$ см, $r_1=3$ см, $r_2=8$ см; б) $\overline{O_1O_2}=200$ мм, $r_1=160$ мм, $r_2=40$ мм; в) $\overline{O_1O_2}=8$ см, $r_1=10$ см, $r_2=1$ см; г) $\overline{O_1O_2}=100$ мм, $r_1=420$ мм, $r_2=260$ мм.

162.7. Дадени се две кружници $\kappa_1(O_1, r_1)$ и $\kappa_2(O_2, r_2)$, така што:

а) тие се допираат однадвор, $r_1:r_2=2:3$ и $\overline{O_1O_2}=10$ см;

б) тие се допираат однатре, $r_1:r_2=5:2$ и $\overline{O_1O_2}=15$ см.

Да се пресметаат дијаметрите на кружниците.

163.7. Дадени се две кружници $\kappa_1(O_1, r_1)$ и $\kappa_2(O_2, r_2)$, така што:

а) тие се допираат однадвор, $r_1:r_2=3:4$ и $\overline{O_1O_2}=21$ см;

б) тие се допираат однатре, $r_1:r_2=7:2$ и $\overline{O_1O_2}=20$ см.

Да се пресметаат дијаметрите на кружниците.

164.7. Радиусите на две концентрични кружници се однесуваат како $5:3$, а ширината на кружниот прстен изнесува 6 см. Да се најдат дијаметрите на кружниците.

165.7. Три кружници со центри во точките A, B, C се допираат две по две, т.е. секоја кружница ги допира другите две, и притоа $\overline{AB}=10$, $\overline{BC}=18$ и $\overline{AC}=14$. Да се определат радиусите на овие кружници.

166.7. Дадени се две точки A, B и два позитивни броја a, b. Да се определи точката M, така што $\overline{AM}=a$, $\overline{BM}=b$.

167.7. Збирот на еден централен агол и периферискиот агол над истиот лак во една кружница изнесува 210^0. Колкав е централниот агол?

168.7. Ако периферискиот агол во една кружница се зголеми двапати, како ќе се промени соодветниот централен агол?

169.7. Ако AB и CD се два дијаметри на една кружница, тогаш: а) $\widehat{AD}=\widehat{BC}$, б) четириаголникот $ACBD$ е правоаголник. Да се докаже.

170$_*$7. Дадени се две тетиви AB и CD во една кружница при што $\widehat{AC}=\widehat{BD}$. Да се докаже дека $AB \parallel CD$ или $AD \parallel BC$.

171.7. Точките A, B, C лежат на кружница со центар во точката O и, притоа, аголот ABC има 45^0. Да се докаже дека правите AO и BO се нормални меѓу себе.

172.7. Отсечката AB е дијаметар на една кружница, а C и D се точки на кружницата што лежат од различни страни на AB и, притоа, $\widehat{BC}=\widehat{BD}$. Да се докаже дека триаголниците ABC и ABD се складни.

173$_*$7. Триаголникот ABC е вписан во една кружница. Тетивата $AE \perp BC$ и тетивата $CD \perp AB$. Да се докаже дека $\widehat{BD}=\widehat{BE}$.

174$_*$7. Отсечката AB е дијаметар на една кружница, а AP и BS се две нејзини тетиви такви што $AP \parallel BS$. Докажи дека $\overline{AP}=\overline{BS}$.

175$_*$7. Нека A е надворешна точка за кружницата $\kappa(O, r)$. Покажи дека постојат две тангенти на κ што минуваат низ A. Ако P и T се допирните точки на овие тангенти, да се докаже дека $\overline{AP}=\overline{AT}$ и дека правата OA е симетрала на аголот PAT.

176$_*$7. Нека B е внатрешна точка за една кружница. Да се покаже дека не постои тангента на кружницата што минува низ точката B.

177.7. Да се конструираат тангентите на кружницата $\kappa(O,r)$ што минуваат низ точката A.

178$_*$7. Да се конструираат заедничките тангенти на две дадени кружници $\kappa_1(O_1, r_1)$, $\kappa_2(O_2, r_2)$.

179$_*$7. За еден четириаголник велиме дека е тетивен, ако неговите темиња лежат на иста кружница.

Да се докаже дека кај секој тетивен четириаголник спротивните агли се суплементни.

180$_*$7. За еден четириаголник велиме дека е тангентен, ако постои кружница што ги допира сите негови страни.

Да се докаже дека збировите од спротивните страни на секој тангентен четириаголник се еднакви.

*§8.II Геометриски конструкции

181$_*$8. Да се најде геометриското место на точки што се еднакво оддалечени од две дадени точки A и B.

182$_*$8. Да се најде геометриското место на точки што се еднакво оддалечени од краците на $\sphericalangle AOB$.

183.8. Да се најде геометриското место на точките што се еднакво оддалечени од две дадени прави.

184$_*$8. Да се најде геометриското место Γ од средините на тетивите што ги отсечува дадена кружница $\kappa(O, r)$ од правите што минуваат низ дадена точка A.

185$_*$8. Даден е квадрат $ABCD$ со страна a. Да се најде геометриското место на точките M, така што збирот на растојанијата од M до правите AB, BC, CD и DA е еднаков на даден број s.

186$_*$8. Да се најде геометриското место на точки, за кои односот на растојанијата до две дадени точки A и B е еднаков на даден позитивен број $\lambda \neq 1$.

Да се разгледа и случајат $\lambda = 1$.

187$_*$8. Да се најде геометриското место на точки од кои две дадени кружници $\kappa_1(O_1, r_1)$ и $\kappa_2(O_2, r_2)$ се гледаат под ист агол.

188.8. Да се најде геометриското место Γ на центрите на кружниците со даден радиус r, коишто допираат:

а) дадена права p;

б) дадена кружница $\kappa_1(O_1,r_1)$.

189$_*$8. Да се конструира кружница со даден радиус r, којашто допира две дадени прави p_1 и p_2.

190.8. Да се конструира кружница со даден радиус r, којашто допира дадена права p и дадена кружница $\kappa_1(O_1, r_1)$.

191.8. Да се конструира кружница со даден радиус r, којашто допира две дадени кружници $\kappa_1(O_1, r_1)$ и $\kappa_2(O_2, r_2)$.

192.8. Да се конструира кружница, којашто допира две дадени паралелни прави p_1, p_2 и дадена кружница $\kappa_1(O_1, r_1)$.

193.8. Да се конструира права, еднакво оддалечена од три дадени точки A, B и C.

194*8. Точката A е надворешна за кружницата $\kappa(O, r)$. Низ точката A да се повлече права p, така што $\overline{AM} = \overline{MN}$, каде што M, N се пресечните точки на p и κ.

195*8. Да се конструира права p што минува низ дадена точка A, а кружницата $\kappa(O, r)$ ја сече под даден агол α, $0^0 \leqslant \alpha \leqslant 90^0$.

196.8. Да се конструира права p, којашто две дадени кружници $\kappa_1(O_1, r_1)$ и $\kappa_2(O_2, r_2)$ ги сече под даден агол α, $0^0 \leqslant \alpha \leqslant 90^0$.

197.8. Да се конструира триаголник ABC за кој се познати:

а) b, c, t_a;

б) a, t_a, t_b;

в) a, t_b, t_c;

г) t_a, t_b, t_c.

198.8. Да се конструира ртиаголник ABC за кој се познати:

а) a, c, h_a;

б) a, h_b, h_c;

в) a, t_a, h_a.

199.8. Да се конструира триаголник ABC за кој се познати:

а) a, h_a, α;

б) h_a, s_a, α;

в) a, $b+c$, α.

ГЛАВА III

ВЕКТОРИ

§1.III Поим за вектор

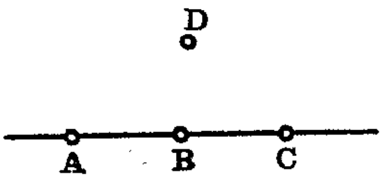
1.1. а) Избери три различни точки A, B, C. Колку вектори може да се формираат со почеток во една, а крајот во друга од дадените точки? Колку отсечки може да се формираат од дадените точки?

б) Избери четири различни точки и одговори на истите прашања од а).

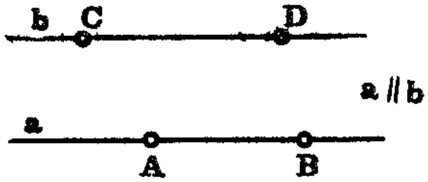
2.1. Каква врска постои меѓу должините на векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$?

3.1. На секоја страна од паралелограмот $ABCD$ може да се положат по два вектора. Кои од така формираните осум вектори се колинеарни со иста насока, а кои се колинеарни со спротивна насока?

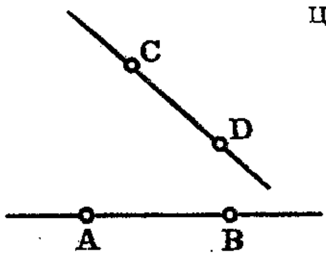
4.1. Дадени се четири точки A, B, C, D во рамнината, како на: а) црт. III. 1, б) црт. III. 2, в) црт. III. 3. Од сите можни вектори со почеток од една, а со крај во друга точка, наведи кои вектори се: колинеарни, со спротивна насока, спротивни.



Црт. III. 1



Црт. III. 2



Црт. III. 3

5*1. Покажи дека три точки A, B и C се колинеарни (т.е. лежат на иста права) ако и само векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ се колинеарни.

6.1. Нека $ABCD$ е паралелограм и S е пресекот на неговите дијагонали. Да се провери кои од следниве парови вектори се еднакви, а кои се колинеарни, но не еднакви: а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, б) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$; г) $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{CS}$.

7.1. Покажи дека $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

8.1. Дали исказот во претходната задача е точен ако наместо вектори се земат отсечки, т.е. дали $\overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{BD}$?

9$_*$1. Нека $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{CT}$. Докажи дека $\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{DT}$.

10$_*$1. Докажи дека два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ што не лежат на иста права се еднакви ако и само ако средините на отсечките AD и BC се совпаѓаат.

Разгледај го и случајот кога $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на иста права.

§2. III Собирање и одземање на вектори

11.2. Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни вектори со иста насока. Да се одреди правецот, насоката и должината на векторот $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

12.2. Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни вектори со спротивни насоки. Да се одреди правецот, насоката и должината на векторот $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

13.2. Векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни и притоа $a = 3$, $b=5$. Да се најде должината на векторот $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се: а) исто насочени, б) спротивно насочени.

14.2. Дали може должината на векторот $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ да биде помала од должината на $\mathbf{a}$ или од должината на $\mathbf{b}$?

15.2. Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се дадени вактори. Да се конструира паралелограм $ABCD$, за кој $\overrightarrow{AC}=\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{BD}=\mathbf{b}$. Што се случува ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни?

16.2. Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$. Да се изразат векторите $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{ED}$ и $\overrightarrow{FE}$ со помош на векторите $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{AF}$.

17.2. Дадени се три точки A, B, C. Да се најде векторот $\overrightarrow{AB}+$ $+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$.

18.2. Нека $ABCD$ е паралелограм и S е пресекот на неговите дијагонали. Да се упростат изразите:

а) $(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{SA})+\overrightarrow{SC}$; б) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DS})+\overrightarrow{SA}$;

б) $\overrightarrow{DS}+(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{BC})$; г) $\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}$.

19$_*$2. а) Докажи дека три ненулти вектори **a**, **b**, **c** може да формираат триаголник ако и само ако $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$.

б) Да се формулира и да се докаже обопштувањето на а) за n ненулти вектори и n-аголник.

20.2. Нека S е центарот на еден правилен шестаголник $ABCDEF$. Да се пресмета збирот $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{SE}+\overrightarrow{SF}$.

21$_*$2. Да се *разложи* еден вектор **a** на два ненулти собироци значи да се најдат два вектора **p** и **q**, такви што $\mathbf{a}=\mathbf{p}+\mathbf{q}$.

Даден вектор **a** да се разложи графички на два собироци ако се познати:

а) должината и правецот на еден собирок;

б) правецот на секој од двата собироци;

в) должините на двата собироци.

22.2. Да се изразат векторите, положени на страните од паралелограмот $ABCD$, со помош на векторите $\overrightarrow{SA}$ и $\overrightarrow{SB}$, каде што S е пресекот на дијагоналите.

23.2. Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$.

а) Со помош на векторите $\mathbf{a}=\overrightarrow{AF}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{BC}$, да се изразат векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{EF}$.

б) Со помош на векторите $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{BC}$, да се изразат векторите $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AE}$.

24.2. Под *агол меѓу два ненулти вектори* $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ го подразбираме помалиот агол AOB.

Ако аголот меѓу векторите $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ не е поголем одправиот, тогаш должината $a+b$ не е помала од a или од b. Докажи!

25$_*$2. Ако должината на збирот од два вектора **a**, **b** не е поголема од должината на некој од собироците, тогаш аголот меѓу **a** и **b** е поголем од правиот агол. Докажи!

26$_*$2. Покажи дека должината од збирот на два ненулти вектори $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ со еднакви должини не е поголема од $\overline{OA}$ ако и само ако аголот меѓу $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ не е помал од 120^0.

27.2. Каков услов треба да задоволуваат два вектора **a** и **b** за векторот $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ да го дели аголот меѓу нив на половина?

28.2. Во кој случај важи следново равенство:

а) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=a+b$; б) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=a-b$;

в) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=a+b$; г) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$?

29.2. Покажи дека

а) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leqslant a+b$; б) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \geqslant a-b$;

в) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}| \leqslant a+b+c$

за кои било вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$,

30.2. Ако $ABCD$ е четириаголник, а P, Q, R, S се средините на неговите страни, тогаш:

а) $PQRS$ е паралелограм;

б) периметарот на $PQRS$ е еднаков на збирот од должините на дијагоналите.

31$_*$2. Дијагоналите на еден (конвексен) четириаголник $ABCD$ се сечат во точката S. Да се докаже дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм ако и само ако постои четириаголник, чии страни се еднакви и паралелни со отсечките SA, SB, SC, SD.

32.2. Над страните од еден триаголник ABC се конструирани произволни паралелограми ABB_1A_2, BCC_1B_2 и ACC_2A_1. Да се покаже дека постои триаголник чии страни се паралелни и еднакви со отсечките A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2.

33.2. Да се докаже дека еден четириаголник $ABCD$ е паралелограм ако и само ако за произволна точка O важи равенството $\vec{OA}+\vec{OC}=\vec{OB}+\vec{OD}$.

34$_*$2. Двете темиња A, B на паралелограмот $ABCD$ се фиксни, а третото теме C, се движи по дадена права p. Да се најде геометриското место на четвртото теме D.

§3.III Множење на вектор со број

35.3. Избери четири вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ и конструирај ги векторите: $\mathbf{p}=2\mathbf{a}-3\mathbf{b}-(\mathbf{c}-2\mathbf{d})$, $\mathbf{q}=\mathbf{a}+2(\mathbf{b}-3\mathbf{c})-\mathbf{d}$, $\mathbf{r}=\mathbf{b}-(2\mathbf{a}-\mathbf{b})+\mathbf{c}$.

36.3. Избери произволен (ненулти) вектор $\mathbf{a}$ и конструирај ги векторите: $2\mathbf{a}$, $-3\mathbf{a}$, $\frac{3}{2}\mathbf{a}$, $\sqrt{2}\,\mathbf{a}$, $-\sqrt{3}\,\mathbf{a}$.

37.3. Избери два неколинеарни вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и конструирај ги векторите $2\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\frac{1}{2}\mathbf{b}$, $-\frac{2}{3}\mathbf{a}+\sqrt{2}\,\mathbf{b}$.

38.3. Користејќи се со паралелограмот, конструиран над векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, да се проверат следниве равенства:

а) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+(\mathbf{a}-\mathbf{b})=2\mathbf{a}$; б) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})-(\mathbf{a}-\mathbf{b})=2\mathbf{b}$;

в) $\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$;

г) $\left(\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}\right)-\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}+\mathbf{b}\right)=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$.

39.3. Даден е паралелограм $ABCD$ и точка O. Да се определат векторите $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OS}$, каде што S е пресекот на дијагоналите, со помош на векторите $\mathbf{p}=\overrightarrow{OA}$, $\mathbf{q}=\overrightarrow{OB}$ и $\mathbf{r}=\overrightarrow{OC}$.

40.3. Даден е ромбот $ABCD$. Да се изразат векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$ со помош на векторите $\mathbf{a}=\overrightarrow{AC}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{BD}$.

41.3. Докажи дека:

а) $(x-y)\,\mathbf{a}=x\mathbf{a}-y\mathbf{a}$; б) $x(\mathbf{a}-\mathbf{b})=x\mathbf{a}-x\mathbf{b}$

за кои било реални броеви x, y и за кои било вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

42.3. Да се упростат изразите:

а) $3(\mathbf{a}-2\mathbf{b})-2(3\mathbf{a}-\mathbf{b})+4(\mathbf{a}-\mathbf{b})$;

б) $2(\mathbf{a}-3\mathbf{b}+2\mathbf{c})+4\mathbf{b}-2(\mathbf{a}-\mathbf{b}+3\mathbf{c})$

43*.3. Да се најде непознатиот вектор $\mathbf{x}$ од равенката:

а) $2\mathbf{x}-\mathbf{a}+\mathbf{b}=2(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{x}$;

б) $3\mathbf{a}-\mathbf{b}-2\mathbf{x}=\mathbf{c}-3\mathbf{x}+2\mathbf{a}$;

в) $2(\mathbf{a}-\mathbf{x})+3\mathbf{b}+\mathbf{a}-\mathbf{x}=3(\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{x})$;

г) $\mathbf{a}-\mathbf{x}+3\mathbf{b}=2\mathbf{b}-(\mathbf{a}+\mathbf{x})$.

44.3. Да се реши системот векторски равенки (по непознатите $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$).

а) $2\mathbf{x}+3\mathbf{y}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$,
$\mathbf{x}+2\mathbf{y}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$;

б) $2\mathbf{x}-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{y}=\mathbf{a}+\mathbf{x}+\mathbf{y}$,
$\mathbf{a}+\mathbf{x}-\mathbf{b}=\mathbf{b}-\mathbf{x}-\mathbf{y}$;

в) $2\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{b}-2\mathbf{a}$,
$4\mathbf{x}-2\mathbf{y}=2\mathbf{a}$;

г) $\mathbf{a}+2(\mathbf{x}-\mathbf{y})=4\mathbf{y}+\mathbf{a}$,
$3(\mathbf{y}-\mathbf{b})=-\mathbf{x}-3\mathbf{b}$.

45$_*$3. Да се конструираат векторите $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, ако:

а) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{a}$, $\quad\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{b}$;

б) $2\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\quad\mathbf{x}+\mathbf{y}=2\mathbf{a}-\mathbf{b}$;

в) $\sqrt{2}\,\mathbf{x}+\mathbf{a}=\mathbf{y}-\mathbf{b}$, $\quad\mathbf{x}-\mathbf{a}=\mathbf{y}+\mathbf{b}$,

каде што $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се два дадени вектори.

46.3. Со помош на векторите $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, каде што $\mathbf{u}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{v}=2\mathbf{a}+\mathbf{b}$, да се изразат векторите:

а) $4\mathbf{a}-3\mathbf{b}$; б) $2\mathbf{b}-\mathbf{a}$; в) $\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{2}{3}\mathbf{b}$.

47$_*$3. Дадени се три пар по пар неколинеарни вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Во кој случај векторите

а) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{c}-\mathbf{a}$;

б) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{c}+\mathbf{a}$

формираат триаголник?

48.3. Дадени се векторите $\mathbf{a}=\mathbf{p}-3\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{q}-2\mathbf{p}$. Да се најде вектор $\mathbf{c}$, таков што $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ да формираат триаголник,

49.3. Дадени се три пар по пар неколинеарни вектори $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$. Да се провери дали векторите

а) $\mathbf{a}=\mathbf{p}-\mathbf{q}-\mathbf{r}$, $\mathbf{b}=\mathbf{q}-\mathbf{r}-\mathbf{p}$, $\mathbf{c}=\mathbf{r}-\mathbf{p}-\mathbf{q}$, $\mathbf{d}=\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}$;

б) $\mathbf{a}=\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{r}$, $\mathbf{b}=\mathbf{q}+\mathbf{r}-\mathbf{p}$, $\mathbf{c}=\mathbf{r}+\mathbf{p}-\mathbf{q}$, $\mathbf{d}=\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}$;

формираат четириаголник.

50.3. Дадени се векторите $\mathbf{a}=\mathbf{p}+\mathbf{q}-2\mathbf{s}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}-2\mathbf{q}-\mathbf{s}$, $\mathbf{c}=-\mathbf{p}-\mathbf{q}+3\mathbf{s}$.

Да се определи вектор $\mathbf{d}$, таков што $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ да формираат четириаголник.

51.3. Еден вектор $\mathbf{e}$ се вика *единичен вектор* ако $|\mathbf{e}|=1$.

Да се покаже дека, ако $\mathbf{a}$ е ненулти вектор, тогаш $\frac{1}{a}\mathbf{a}$ е единичен вектор.

52.3. На краците од еден (конвексен) агол AOB, дадени се векторите $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$. Да се определи:

а) вектор $\mathbf{c}$; б) единичен вектор $\mathbf{e}$

што лежи на симетралата од тој агол.

53.3. За кои вредности на x и y важи равенството $x\mathbf{a}=y\mathbf{b}$, ако векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не се колинеарни?

54.3. За кои вредности на x и y е можно равенството $x\mathbf{a}=y\mathbf{a}$?

55.3. За кои вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ важи равенството $x\mathbf{a}=x\mathbf{b}$?

56.3. Нека векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се неколинеарни. Да се определат броевите x и y ако:

а) $(2x-y)\ \mathbf{a}+(x-2y-5)\ \mathbf{b}=\mathbf{o}$;

б) $(3x+y)\ (\mathbf{a}+\mathbf{b})-(y+5)\ \mathbf{b}=(x-1)\mathbf{a}-(x+2y)\mathbf{b}$;

в) $(x-2y)\ (\mathbf{a}-\mathbf{b})+(5y-2x)\ (\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{a}+(3-2y)\mathbf{b}$.

57.3. Точките M, N, P и Q ги разделуваат страните BC, CD, DA и AB соодветно, од четириаголникот $ABCD$ во еден ист однос. Да се најде збирот на векторите $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$ и $\overrightarrow{DQ}$.

58$_*$3. Нека точките A, B, C и D се колинеарни, а M и N се средините на отсечките AB и CD соодветно. Да се покаже дека $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

59.3. Нека AB е дијаметар на една кружница со центар O и нека S е произволна точка. Покажи дека $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}=2\overrightarrow{SO}$.

60$_*$3. Две тетиви A_1A_2 и B_1B_2 од една кружница (O, r) се заемно нормални и се сечат во точката S. Покажи дека $\overrightarrow{SA_1}+\overrightarrow{SA_2}+\overrightarrow{SB_1}+\overrightarrow{SB_2}=2\overrightarrow{SO}$.

61.3. Нека $ABCD$ е паралелограм, S пресекот на неговите дијагонали, а O произволна точка. Да се покаже дека $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OS}$.

62$_*$3. Дадени се два квадрата $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$ со центри (т.е. пресеци на дијагоналите) S и T соодветно. Покажи дека $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\overrightarrow{A_3B_3}+\overrightarrow{A_4B_4}=4\overrightarrow{ST}$.

63$_*$3. Дадени се три точки O, A, B. Да се покаже дека една точка M е колинеарна со A и B ако и само ако постои реален број t, таков што $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$.

64$_*$3. Нека O, A, B и P се произволни точки. Да се покаже дека точката P лежи на правата AB ако и само ако постојат броеви x и y, такви што $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ и $x+y=1$.

65$_*$3. Нека E е средината на страната AB од паралелограмот $ABCD$ и нека M е пресекот на правите AC и DE. Да се најдат односите $\overline{AM}:\overline{MC}$ и $\overline{DM}:\overline{ME}$.

66$_*$3. На страната AD од еден паралелограм $ABCD$ е земена точка E, така што $\overline{AE} = \kappa \overline{AD}$. Да се најде односот $\overline{AP}:\overline{AC}$ и $\overline{BP}:\overline{BE}$, каде што P е заедничката точка на правите AC и BE.

67.3. Нека E е средината на страната AB, а F средината на страната BC од паралелограмот $ABCD$ и нека $S = AF \cap DE$, $T = EF \cap BD$. Да се најдат односите:

$$\overline{ES}:\overline{SD},\ \overline{AS}:\overline{SF},\ \overline{BT}:\overline{TD},\ \overline{ET}:\overline{TF}.$$

68$_*$3. Даден е трапез $ABCD$ при кој основата AB е κ пати поголема од основата DC, потоа — точка O и векторите $\mathbf{p} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{q} = \overrightarrow{OB}$ и $\mathbf{r} = \overrightarrow{OC}$. Да се најде: $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OS}$ и $\overrightarrow{OP}$, каде што S е пресекот на дијагоналите, а P е пресекот на краците.

Еден систем вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ се вика *линеарно зависен* ако постојат реални броеви (скалари) $x_1, x_2, \ldots, x_k$, од кои барем еден не е нула, така што

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + x_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Во спротивниот случај, т.е. ако

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + x_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0, \tag{2}$$

системот вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ се вика *линеарно независен.*

69$_*$3. Покажи дека, ако векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ формираат триаголник, тогаш системот вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ е линеарно зависен.

70$_*$3. Ако во еден систем вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ некој од векторите е нултиот вектор, тогаш тој систем е линеарно зависен. Докажи!

71$_*$3. Ако два вектора во еден систем вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ се еднакви, тогаш тој систем е линеарно зависен. Докажи!

72.3. Во кој случај системот составен од еден вектор $\mathbf{a}$ е линеарно независен?

73$_*$3. Покажи дека еден систем од два вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, е линеарно зависен ако и само ако векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни.

(Притоа, нултиот вектор го сметаме за колинеарен со секој вектор).

74.3. Ако во еден систем вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ $(\kappa \geqslant 2)$ два вектора се колинеарни, тогаш системот е линеарно зависен.

75$_*$3. Дадени се два неколинеарни вектори $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Да се провери дали е линеарно зависен следниов систем вектори:

а) $\mathbf{p} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{q} = 3\mathbf{a} - \dfrac{3}{2}\mathbf{b}$;

б) $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{q} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$;

в) $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{q} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{r} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

76$_*$3. Нека **a**, **b** е линеарно независен систем вектори. Системот вектори $\mathbf{p} = \alpha_1\mathbf{a} + \beta_1\mathbf{b}$, $\mathbf{q} = \alpha_2\mathbf{a} + \beta_2\mathbf{b}$ е линеарно независен ако и само ако $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$. Докажи!

Примени го овој резултат за да извршиш проверка на системите вектори од задачата 75.3 а) и б).

77$_*$3. Еден систем вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ $(k \geqslant 2)$ е линеарно зависен ако и само ако некој од дадените вектори може да се претстави како линеарна комбинација на другите.

(Еден вектор **c** е *линеарна комбинација* од $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ ако постојат скалари $y_1, \ldots y_n$, така што $\mathbf{c} = y_1\mathbf{c}_1 + \ldots + y_n\mathbf{c}_n$).

78$_*$3$_*$ За три или повеќе вектори велиме дека се *компланарни*, ако тие вектори лежат во една (или во паралелни) рамнина. (Кои било два вектора се компланарни.)

Еден систем од три вектори **a**, **b**, **c** е линеарно зависен ако и само ако векторите **a**, **b**, **c** се компланарни.

79.3. Нека **a**, **b**, **c** се три некомпланарни вектори и нека $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a} - 4\mathbf{b} - 6\mathbf{c}$, $\mathbf{q} = -3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}$. Да се определат α и β, така што векторите **p** и **q** да се линеарно независни.

80.3. Нека **a**, **b**, **c** е линеарно независен систем вектори. Да се провери дали е линеарно зависен следниов систем вектори:

а) $\mathbf{p} = 4\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\mathbf{q} = \mathbf{o}$;

б) $\mathbf{p} = -\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{q} = -\mathbf{a} + 4\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$;

в) $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$, $\mathbf{q} = \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$, $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$;

г) $\mathbf{p} = 4\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{q} = 3\mathbf{a} - \frac{3}{2}\mathbf{b}$, $\mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

81$_*$3$_*$ Нека **a**, **b**, **c** се кои било вектори, а α, β, γ се кои било скалари (т.е. реални броеви). Покажи дека системот вектори $\mathbf{p} = \alpha\,\mathbf{a} - \beta\,\mathbf{b}$, $\mathbf{q} = \gamma\mathbf{b} - \alpha\mathbf{c}$, $\mathbf{r} = \beta\mathbf{c} - \gamma\mathbf{a}$ е линеарно зависен.

82$_*$3$_*$ Докажи дека системот вектори **a**, **b**, **c** е линеарно зависен ако и само ако системот $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{c} + \mathbf{a}$ е линеарно зависен.

83$_*$3$_*$ Ако во еден систем вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ $(k \geqslant 3)$ три вектори се компланарни, тогаш системот е линеарно зависен.

84$_*$3$_*$ Докажи дека систем од кои било четири вектори **a**, **b**, **c**, **d** е линеарно зависен.

§4.III. Примена на векторите

85.4. Точките M_1 и M_2 ја делат отсечката AB на три еднакви делови. Да се изразат векторите $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ со помош на векторите $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$, каде што O е произволна точка.

86.4. Точките M_1 и M_2 ја делат отсечката AB на три еднакви делови. Да се изрази векторот $\overrightarrow{OB}$ со помош на векторите:

а) $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OM_1}$;

б) $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OM_2}$.

87.4. Точките M_1, M_2 и M_3 ја делат отсечката AB на четири еднакви делови. Да се изразат векторите $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ и $\overrightarrow{OM_3}$ со помош на векторите $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$, при што O е произволна точка.

88_*4. Нека точката C ја дели отсечката AB во однос $m:n$. Да се пресмета $\overrightarrow{AC}:\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}:\overrightarrow{AB}$.

89_*4. Дадени се четири точки P_1, P_2, P_3, P_4 од една права. Да се најде онаа точка M којашто отсечката P_1P_2 ја дели во ист однос како и отсечката P_3P_4.

90_*4. Нека страните AC и BC од триаголникот ABC се поделени со точките M и N во ист однос $m:n$. Да се докаже дека правата MN е паралелна со страната AB и да се најде должината на отсечката MN ако $\overline{AB}=c$.

91_*4. Нека M и N се точки на страните AC и BC од триаголникот ABC, такви што правата MN да е паралелна со AB. Да се докаже дека M и N ги делат страните AC и BC во ист однос.

92.4. На две спротивни страни од еден четириаголник се положени векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Да се определи векторот $\mathbf{s}$ што ги сврзува средините на другите две спротивни страни. Каков резултат се добива во случајот: а) $\mathbf{a}=\mathbf{o}$ (т.е. четириаголникот е дегенериран); б) $\mathbf{a}\,||\,\mathbf{b}$?

93_*4. Во еден триаголник ABC повлечена е симетралата $\mathbf{s}_a$ (на аголот при темето A). Да се изрази векторот $\mathbf{s}_a$ со помош на векторите $\mathbf{c}=\overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{AC}$.

94_*4. Нека AA_2 е симетралата на аголот α од триаголникот ABC Да се докаже дека $\overline{BA_2}:\overline{A_2C}=\overline{AB}:\overline{AC}$.

95_*4. Да се покаже дека постои триаголник чии страни се паралелни и еднакви со тежишните линии AA_1, BB_1 и CC_1 на триаголникот ABC.

96$_*$4. Нека A_1, B_1 и C_1 се средините на страните BC, CA и AB на триаголникот ABC и нека O е произволна точка. Докажи дека

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

97$_*$4. Нека T е тежиштето на триаголникот ABC. Докажи дека

$$\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\mathbf{0}.$$

98$_*$4. Нека T е тежиштето на триаголникот ABC и нека O е произволна точка. Докажи дека

$$\overrightarrow{OT}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

99$_*$4. Нека ABC е триаголник и M е точка со својството: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$. Докажи дека M е тежиштето на $\triangle ABC$.

100$_*$4. Нека ABC и $A'B'C'$ се два (произволни) триаголника со тежишта T и T'. Да се докаже дека $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{TT'}$.

101$_*$4. Нека M, N и P ги делат страните AB, BC и CA од триаголникот ABC во ист однос. Докажи дека тежиштата на триаголниците ABC и MNP се совпаѓаат.

102$_*$4. Нека A_1 B_1 и C_1 се средините на страните BC, CA и AB од триаголникот ABC, T е неговото тежиште, а A_2, B_2 и C_2 се средините на отсечките AT, BT и CT соодветно. Докажи дека триаголниците $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ се складни и дека имаат заедничко тежиште што се совпаѓа со тежиштето T на триаголникот ABC.

103$_*$4. Нека A, B и C се точки од една права. Дали постои точка од таа права, така што $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$?

104$_*$4. Дали постои точка M во рамнината на триаголникот ABC така што $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$?

105$_*$4. Нека $A_1, A_2, \ldots, A_n$ се произволни n точки. Да се покаже дека постои една и само една точка T, таква што $\overrightarrow{TA_1}+\overrightarrow{TA_2}+\ldots+\overrightarrow{TA_n}=\mathbf{0}$. (Точката T се вика *центроид* за системот точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$.)

106.4. Што претставува центроидот за системот од две точки A, B?

107.4. Што претставува центроидот на систем од три точки A, B, C?

108$_*$4. Нека T_1 е центроид за системот точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, а T_2 центроидот за $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Да се покаже дека $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\ldots+\overrightarrow{A_nB_n}=n\overrightarrow{T_1T_2}$.

109$_*$4. Нека точките B_1, B_2 и B_3 ги делат страните A_2A_3, A_3A_1 и A_1A_2 на триаголникот $A_1A_2A_3$ во ист однос $m:n$. Потоа нека O е произволна точка и нека $\mathbf{p}_1=\overrightarrow{OB_1}$, $\mathbf{p}_2=\overrightarrow{OB_2}$, $\mathbf{p}_3=\overrightarrow{OB_3}$.

а) Да се докаже дека $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3$.

б) Да се претстави секој од векторите $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$ со помош на $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$.

в) Да се конструира триаголник $A_1A_2A_3$, ако се дадени точките B_1, B_2 и B_3 при што $m=1$, $n=2$.

110$_*$4. Дадени се четири точки O, A, B, C за кои се знае дека

$$x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\mathbf{0} \text{ и } x+y+z=0,$$

при што барем еден од броевите x, y, z не е нула. Што може да се каже за точките A, B, C?

111$_*$4. Нека M е средината на отсечката AB, а M' средината на отсечката $A'B'$. Докажи дека средините на отсечките AA', BB' и MM' се колинеарни.

112$_*$4. Докажи дека средните линии во произволен четириаголник се преполовуваат.

113$_*$4. Еден четириаголник $ABCD$ е паралелограм ако и само ако средните линии минуваат низ пресекот на дијагоналите. Докажи!

114$_*$4. Нека S_1, S_2 се средини на дијагоналите од трапезот $ABCD$. Докажи дека $\overline{S_1S_2}$ е полуразлика од основите.

115$_*$4. Нека S_1 и S_2 се средините на дијагоналите од произволен четириаголник $ABCD$. Да се докаже дека пресекот P на средните лини од $ABCD$ е средина на отсечката S_1S_2.

116$_*$4. Дадена е права p и две точки A, B од кои барем едната не лежи на p. Да се најде геометриското место на тежиштето T од триаголниците ABC, каде што $C\in p$.

ГЛАВА IV

ДВИЖЕЊА

§1.IV Пресликувања

1.1. Нека **A** е множеството двоцифрени броеви што се помали од 17 и **B** е множеството природни броеви што се помали од 7. На секој елемент од **A** му го придружуваме бројот на неговите делители.

а) Да се претстават таблично изворот **A** и целта **B** на тоа придружување.

б) Да се покаже дека тоа придружување, да го означиме со φ, е пресликување од **A** во **B**. Колку е $\varphi(10)$, $\varphi(12)$, $\varphi(16)$?

в) Да се најде досегот **V** (т. е. множеството вредности) на φ и да се уочи дека тој не е еднаков со целта **B**.

2.1. Нека **B** е множеството од сите едноцифрени парни броеви, а **A** и φ се како во 1.1. Дали придружувањето φ е пресликување од **A** во **B**?

Едно пресликување $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ е определено *таблично* кога правилото φ на придружувањето е дадено со таблица, т. е. со шема, којашто се состои од две редици, напишани една под друга: горната ги содржи сите елементи од доменот **A**, а под секој елемент од доменот (т. е. во втората редица) се запишува неговата слика.

3.1. На секој број од 5 до 9 (заклучно) му е придружен бројот на неговите делители. Ова придружување ќе го означиме со φ. Зошто φ е пресликување? Да се најде: $\varphi(5)$, $\varphi(6)$, $\varphi(8)$. Да се претстават таблично доменот **A** и досегот **V** на φ.

Граф или *дијаграм* на едно придружување φ од едно множество **A** во некое множество **B** е цртеж на кој елементите од **A** и **B** се претставени со точки, а правилото φ на тој цртеж е определено со стрелки, коишто тргнуваат од точките на **A** (од некои или од сите) и стигнуваат до некои точки од **B**.

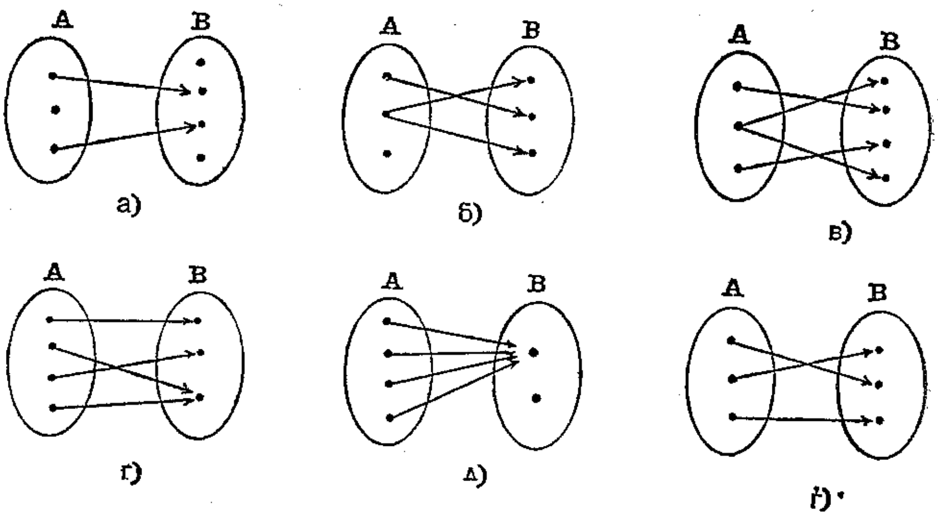
Ако $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ е пресликување, тогаш од секоја точка на доменот **A** тргнува една и само една стрелка и стигнува до некоја точка од целта.

4.1. Да се нацрта дијаграмот на:

а) придружувањето од задачата 2. 1.IV.

б) пресликувањето $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ од задачата 3. 1.IV.

5.1 Да се утврди дали со некој од приложените дијаграми на црт. IV.1, а)—ѓ), е дефинирано пресликување од множеството **A** во множеството **B**. Одговорот да се образложи.



Црт. IV. 1

6.1. Нека **A** е множеството имиња на главните градови (на држави) што лежат на Балканскиот Полуостров, а **B** е множеството од првите пет букви на кирилицата. На секој елемент од **A** му ја придружуваме последната буква од неговото име. Да се покаже дека тоа придружување е пресликување од **A** во **B**. Да се нацрта графот на тоа придружување.

7.1. Ако **A** и правилото на придружување се како во задачата 6.1, а **B** е множеството самогласки од кирилицата, да се нацрта графот на тоа придружување. Дали тоа придружување е пресликување?

8.1. Нека **A** е како во задачата 6.1, **B** е множеството самогласки од кирилицата и φ е правило според кое на секој главен град му се придружуваат самогласките што се содржани во неговото име.

а) Да се нацрта графот на тоа придружување.

б) Да се установи дали тоа придружување е пресликување.

9.1. Да се претстави таблично пресликувањето од задачата 3.1.

10.1. Да се претстави таблично прописот на пресликувањето $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, каде што $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ако;

а) $\varphi: 1 \to 4,\ 2 \to 3,\ 3 \to 4,\ 4 \to 2,\ 5 \to 3,\ 6 \to 4,$

б) $\varphi(x) = x + 1$ за $x \neq 6$, $\varphi(6) = 1$.

Да се запише досегот **V** на φ.

11.1. На секој двоцифрен број, којшто му припаѓа на множеството $\mathbf{A}=\{15, 26, 43, 60, 71\}$, му ја придружуваме сумата на неговите цифри. Да се направи таблица и да се нацрта графот на тоа придружување од $\mathbf{A}$ во множеството $\mathbf{B}$ чии елементи се сумите од цифрите на зададените броеви.

12.1. Нека $\mathbf{A}=\{4, 26, 40, 43, 86\}$, $\mathbf{B}=\{0, 2, 4, 6, 8\}$ и φ е следново правило: „Ако $x \in \mathbf{A}$, тогаш $\varphi(x)$ е бројот на десетките од x".

а) Нацртај го графот на тоа придружување и увери се дека тоа е пресликување.

б) Претстави го таблично пресликувањето φ.

13.1. Нека $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ се како во задачата 12. 1, а φ е прописот: „Ако $x \in \mathbf{A}$, тогаш $\varphi(x)$ е цифрата на единиците на x".

а) Нацртај го графот на тоа придружување.

б) Дали тоа придружување е пресликување?

14.1. Нека $\mathbf{A}$ е множеството едноцифрени природни броеви, а $\mathbf{B}$ е множеството $\{0, 1\}$. На секој $x \in \mathbf{A}$ му го придружуваме неговиот остаток од делењето со 2. Да се установи дека ова придружување е пресликување, да се претстави таблично и со граф.

Нека $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ е множеството од сите подредени парови елементи од множествата $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Секое подмножество $\Phi \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ се вика *релација* од $\mathbf{A}$ во $\mathbf{B}$.

15*1. а) На кој начин едно пресликување $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ можеме да го разгледуваме како релација Φ од $\mathbf{A}$ во $\mathbf{B}$?

б) Во кој случај една релација $\Phi \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ определува пресликување $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$?

16.1. Нека $\mathbf{A}=\{a, b, в, г\}$, $\mathbf{B}=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ и нека Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 се следниве релации од $\mathbf{A}$ во $\mathbf{B}$:

а) $\Phi_1=\{(a, 1), (в, 2), (г, 3)\}$,

б) $\Phi_2=\{(a, 1), (б, 3), (в, 3), (a, 4), (г, 2)\}$,

в) $\Phi_3=\{(a, 2), (б, 3), (в, 3), (г, 2)\}$,

г) $\Phi_4=\{(a, 2), (б, 2), (в, 2), (г, 2)\}$.

Со која од тие релации е определено пресликување од $\mathbf{A}$ во $\mathbf{B}$? Секое од тие пресликувања да се претстави таблично и со граф, а потоа да се најде досегот $\mathbf{V}$ на тоа пресликување.

17.1. За кои множества $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, множеството од подредени парови:

$$\Phi=\{(a, 2), (b, 3), (c, 1), (d, 2)\}$$

определува пресликување $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$?

18.1. Пресликувањето φ е определено со помош на парови:

$$\Phi=\{(a, 1), (e, 7), (u, 11), (o, 19), (y, 25)\}.$$

Напиши ги таблично доменот $\mathbf{A}$ и досегот $\mathbf{V}$ на φ. Најди $\varphi(a)$ и $\varphi(u)$.

19.1. Нека $\varphi = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ е пресликување од множеството $\{a, b, c, d, e\}$ во множеството $\{1, 2, 3, 4\}$.

а) Кој од следниве искази е точен:

$$(a, 2) \in \Phi, \ (c, 3) \in \Phi, \ \varphi(1) = b,$$

при што Φ е релацијата што е определена со φ.

б) Дали φ го има својсвото

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$$

за сите x и y коишто се елементи на множеството $\{a, b, c, d, e\}$?

20.1. Нека $\mathbf{A} = \{A, B, C, T\}$, $\mathbf{B} = \{$а, е, и, о, у$\}$ и φ е правилото на придружување од задачата 8.1 (елементите од $\mathbf{A}$ се почетните букви на имињата од градовите што се наведени во 6.1). Да се прикаже тоа придружување со помош на парови, т. е. како релација Φ од $\mathbf{A}$ во $\mathbf{B}$. Колку елементи има Φ?

21.1. Дали релацијата $\Phi \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$: „бројот x е за 3 поголем од бројот y" (т. е. $(x, y) \in \Phi \Leftrightarrow x = y + 3$ определува пресликување од $\mathbf{N}$ во $\mathbf{N}$? Напиши најмалку три елементи од Φ.

22.1. Нека $\mathbf{A} = \{7, 23, 53, 67, 83\}$, $\mathbf{B}$ е множеството арапски цифри и $\Phi = \{(7, 7), (23, 3), (53, 3), (67, 7), (83, 3)\}$. Да се увиди дека со релацијата Φ е определено пресликување φ од $\mathbf{A}$ во $\mathbf{B}$. Дали можеш да го покажеш правилото со кое е определено пресликувањето φ?

23.1. Нека $\mathbf{A} = \{-3, -1, 3, 5\}$ и $\mathbf{B} = \{3, 11, 19\}$. Дали со формулата:

а) $\varphi(x) = x^2 + 2$; б) $\varphi(x) = 4|x| - 1$

е зададено пресликување од $\mathbf{A}$ во $\mathbf{B}$?

24.1. Нека $\mathbf{A} = \{-2, -1, 1, 2\}$ и $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{Z}$ е пресликувањето определено со формулата $\varphi(x) = x^2$.

а) Да се искаже со зборови правилото на придружувањето.

б) Да се нацрта графот на φ.

в) Да се напише таблицата со која е определено φ.

г) Да се напише таблично релацијата Φ што е определена со φ.

д) Да се напише досегот $\mathbf{V}$ на φ.

25.1. Нека $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{Z}$ е определено со формулата $\varphi(x) = |x| + 1$, при што $\mathbf{A}$ е како во задачата 24. 1. Да се одговори на истите барања а) — д) како во 24. 1.

26.1. Истото од задачата 24. 1. за пресликувањето $\varphi: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ определено со формулата $\varphi(x) = 2x - 1$.

27.1. Едно пресликување е зададено со таблицата:

а) $\begin{array}{c|cccc} x & -25 & -2 & 0 & 4 \\ \hline y & -50 & -4 & 0 & 8 \end{array}$; б) $\begin{array}{c|ccccc} x & -3 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ \hline y & -27 & -8 & 0 & 1 & 64 \end{array}$.

Определете го тоа пресликување со формула.

28.1. Нека φ: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ е пресликување, определено со таблицата:

$$\text{а) } \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 & \ldots \end{pmatrix}$$

Да се најде прописот на придружувањето во вид на формула.

29_*1. Кое пресликување $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ се вика сурјекција?

Да се покаже дека е сурјекција следново пресликување:

а) $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $\mathbf{A} = \{-2, -1, 0, 1\}$, $\mathbf{B} = \{-1, 0, 3\}$, $\varphi(x) = x^2 - 1$;

б) $\varphi: \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$, $\varphi(x) = |x| + 1$.

30. 1. Да се провери дали е сурјекција следново пресликување:

а) $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$,

б) $\varphi: \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$, $\varphi(x) = |x| + 3$,

в) $\varphi: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $\varphi(x) = x + 3$,

г) $\varphi: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $\varphi(x) = x + 3$.

31.1. Дадени се две множества $\mathbf{A} = \{-15, -3, 4, 13, 33\}$ и $\mathbf{B} = \{0,1\}$. Да се определат барем две пресликувања од $\mathbf{A}$ во $\mathbf{B}$, искажани со зборови а потоа зададени со таблица, коишто се сурјекции.

32.1. Да се наведат барем две пресликувања од множеството $\mathbf{R}$ во множеството $\{-1, 0, 1\}$, коишто се сурјекции.

33.1. Нека $\mathbf{A}$ е множеството од сите искази, а $\mathbf{B} = \{0, 1\}$. Да се дефинира барем едно пресликување τ од $\mathbf{A}$ на $\mathbf{B}$ (т. е. барем една сурјекција).

34_*1. а) Покажи дека со прописот $\varphi(x) = \dfrac{x}{2}$ за x парен, $\varphi(x) = -\dfrac{x+1}{2}$ за x непарен и $\varphi(0) = 0$ е определено пресликување од $\mathbf{N}^0$ во $\mathbf{Z}$ и дека тоа пресликување е сурјекција. Уочи дека $\mathbf{N}^0$ е стриктно подмножество на $\mathbf{Z}$.

б) Дали е можно да постои сурјекција $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ако $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ и барем едното од множествата $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ е конечно?

35.1. Какво (карактеристично) својство има а) графот, б) табелата, в) релацијата, на едно пресликување $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ коешто е сурјекција?

Испитај дали тоа својство го имаат пресликувањата определени во задачите:

а) 5.1, 14.1, 26.1;

б) 10.1, 14.1, 24.1;

в) 16.1, 19.1, 22.1.

36*1. Кое пресликување $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ се вика инјекција?

Покажи дека пресликувањето $\varphi: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, определено со формулата $\varphi(x) = 2x - 1$ (види зад. 26.1) е инјекција.

37.1. Да се провери дали е инјекцијата следново пресликување $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$:

а) $\mathbf{A} = \{10, 11\ 12, 13, 15\}$, $\mathbf{B} = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \mid 12\}$ и φ е определено со: $\Phi = \{(10, 1), (11, 2), (12, 3), (13, 3), (15, 6)$;

б) **A** и **B** се како во а), а $\varphi(x)$ е збирот на цифрите од бројот x;

в) $\mathbf{A} = \mathbf{N} = \mathbf{B}$, $\varphi(x) = x$ ако x е прост број или 1, а $\varphi(x) = 4$ ако x е сложен број.

38.1. Какво (карактеристично) својство има: а) графот, б) табелата, в) релацијата, на едно пресликување $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ коешто е инјекција?

Испитај дали тоа својство го имаат пресликувањата од задачите:

а) 5. 1, 12. 1, 26. 1; б) 10. 1, 28. 1; в) 18. 1, 37. 1.

39*1* Нека $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ е пресликување. Утврди кое од следниве својства определува инјекција:

а) $x = y \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$; б) $x \neq y \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y)$;

в) $\varphi(x) \neq \varphi(y) \Rightarrow x \neq y$; г) $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$.

40*1. Што е биекција?

Да се покаже дека пресликувањето $\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, определено со формулата $\varphi(x) = 2x + 1$ е биекција.

41.1. Дадено е множество $\mathbf{A} = \{-2, -1, 0, 2, 3\}$ и правило φ со формулата $\varphi(x) = 3 - 2x$, со кое е определено пресликување од **A** во некое множество **B**. Да се определи **B** така што $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ да биде: а) биекција; б) инјекција.

42.1. Да се покаже дека $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ е пресликување, да се најде неговиот досег **V** и да се утврди дали е сурјекција, инјекција или биекција, ако:

а) $\mathbf{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\mathbf{B} = \{$а, е, и, о, у$\}$,

$\Phi = \{(1,$ а$), (3,$ е$), (5,$ и$), (7,$ о$), (9,$ у$)$;

б) **A** и φ се како во а), а **B** е множеството букви од кирилицата;

в) $\mathbf{A} = \mathbf{N}$, $\mathbf{B} = \{0, 1\}$, $\varphi(x) = 0$ ако x е парен, $\varphi(x) = 1$ ако x е непарен;

г) $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{Z}$, $\varphi(x) = |x|$,

д) $\mathbf{A} = \mathbf{Z}$, $\mathbf{B} = \mathbf{N}^0$, $\varphi(x) = |x|$.

43.1. Во задачите а) — г) е определен пропис φ со кој се врши придружување на елементите од дадено множество **A** кон елементи од истото множество. Да се провери:

1^0 дали φ е пресликување,

2^0 дали пресликувањето φ е сурјекција, инјекција или биекција.

а) $\mathbf{A} = \mathbf{N}$, $\varphi(x)$ е 1 за секој x,

б) $\mathbf{A} = \mathbf{N}$, $\varphi(x)$ е следбеник на x,

в) $\mathbf{A} = \mathbf{N}$, $\varphi(x)$ е делител на x,

г) $\mathbf{A} = \mathbf{Z}$, $\varphi(x)$ е спротивен на x.

Пресликувањето $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, дефинирано со:

$$(\forall x \in \mathbf{A}) \quad \varphi(x) = c,$$

каде што c е фиксиран елемент од **B**, се вика *константно пресликување.*

44.1. Во кој случај едно константно пресликување е: а) сурјекција, б) инјекција, в) биекција?

45.1. Нека **A** е множеството парови од природни броеви, **B** е множеството природни броеви (т. е. $\mathbf{A} = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $\mathbf{B} = \mathbf{N}$) и нека φ е прописот: „на секој пар $(x, y) \in \mathbf{A}$ му се придружува збирот на x и y".

а) Да се покаже дека ова придружување е пресликување.

б) Да се напише прописот φ во вид на формула.

в) Кои елементи од **A** се пресликуваат во бројот: 1) 2; 2) 6; 3) 1?

г) Дали ова пресликување е сурјекција или инјекција?

46.1. Нека **A** и **B** се како во задачата 45. 1, а φ е прописот: „на секој елемент $(x, y) \in \mathbf{A}$ му се придружува производот на x и y". Да се одговори на истите барања а)—г) од 45. 1.

47.1. Наведи барем едно пресликување чиј домен е множеството од сите зборови на нашиот јазик, а сликите припаѓаат на множеството од природните броеви. Дали пресликувањето (што го наведуваш) е сурјекција или инјекција?

48.1. Да се наведе барем едно пресликување чии оригинали се триаголници што припаѓаат на една рамнина, а сликите се точки од истата рамнина. Дали наведеното пресликување е сурјекција или инјекција?

49.1. Наведи барем едно пресликување:

а) од множеството на сите кружници од една рамнина во множеството на реалните броеви.

б) од множеството на сите вектори во множеството на ненегативните реални броеви.

в) од множеството на сите ученици во множеството на сите училишта од нашата земја.

Дали некое од наведените пресликувања е сурјекција или инјекција?

50.1. Во задачите а) — ѓ), избери множества **A** и **B** (раководејќи се од наведениот пропис φ), провери дали тој пропис определува пресликување од **A** во **B** и установи дали тоа пресликување е сурјекција, инјекција или биекција.

а) На секоја буква од ќирилицата да ѝ се придружи нејзиниот реден број.

б) На секој тим од Првата сојузна фудбалска лига да му се придружи неговиот капитен.

в) На секој тим од Првата сојузна фудбалска лига да му се придружи бројот на бодовите што ги освоил на првенството во сезоната 1976/77 година.

г) На секоја планета од Сончевиот систем да ѝ се придружи самогласка од нејзиното име.

д) На секој човек (од Земјата) да му се придружи бројот на неговите години.

ѓ) На секоја мајка (од Земјата) да ѝ се придружи нејзиниот син.

51.1. Нека **F** е еден исполнет триаголник (т.е. триаголник со неговата внатрешност), а **G** е множеството точки од неговите страни. Нека φ е следниов пропис: на секоја точка X од **F** да ѝ се придружи најблиската точка од **G**.

Дали φ е пресликување? Зошто?

52*.1. Нека **F** е еден исполнет правоаголен триаголник, **G** е множеството точки од неговите страни, а φ е ортогонално проектирање врз хипотенузата. Покажи дека φ е пресликување од **F** во **G**. Дали φ е инјекција или сурјекција?

53.1. Нека **F** е исполнет триаголник ABC, чиј агол кај темето A изнесува 120^0, **G** е множеството точки од страната AB и нека φ е ортогонално проектирање врз правата AB. Дали φ е пресликување од **F** во **G**?

54.1. Нека $k = k(O, r)$ е кружница со центар O и радиус r. На секоја точка X од рамнината Π ѝ ја придружуваме пресечната точка на кружницата со полуправата OX. Дали тоа придружување дефинира пресликување:

а) од Π во k?

б) од $\Pi \setminus \{O\}$ во k?

в) од k во k?

Во потврден случај да се установи дали тоа пресликување е инјекција или сурјекција.

55. 1. Нека O е фиксирана точка во рамнината П. На произволна точка A ѝ ја придружуваме онаа точка A' од полуправата OA, којашто го задоволува условот $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = 1$. Дали со тој пропис φ е дефинирано пресликување:

а) од П во П? б) од П во $П \setminus \{O\}$?

в) од $П \setminus \{O\}$ во П? г) од $П \setminus \{O\}$ во $П \setminus \{O\}$?

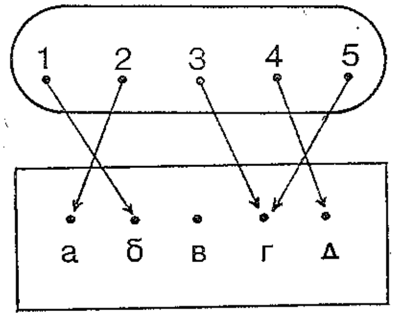
Во потврден случај да се установи дали тоа пресликување е биекција.

56.1. Што е инверзна биекција на дадена биекција $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$?

Да се провери дали некои од следниве пресликувања φ_1, φ_2, φ од $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ во $\mathbf{B} = \{а, б, в, г, д\}$ е биекција и, во потврден случај, да се најде инверзната биекција.

а) $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ а & б & в & г & д \end{pmatrix}$,

б) φ_2 :



Црт. IV. 2

в) $\varphi: \Phi = \{(1, б), (2, а), (3, г), (4, д), (5, в)\}$.

54$_*$1. Кои од следниве пресликувања се биекции од $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ во $\mathbf{A}$:

а) $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

в) $\varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, г) $\varphi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$?

Да се најде инверзната биекција на секоја од тие биекции.

58.$_*$1. Да се најде инверзната биекција на биекцијата $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, определена со формулата $\varphi(x) = 2x + 1$ (в. зад. 48. 1).

Секое пресликување $\varphi: \mathbf{D} \to \mathbf{R}$, каде што $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}$, се вика *реално пресликување* (или *реална функција*).

59.1. Кое од следниве реални пресликувања

а) $\varphi(x)=3x$, б) $\varphi(x)=|x|$,

в) $\varphi(x)=x^2+1$, г) $\varphi(x)=2-5x$

е биекција? За секоја од биекциите да се најде инверзната биекција.

60.1. Да се покаже дека е биекција следново пресликување:

а) $\varphi: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $\varphi(x)=3-x$,

б) $\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $\varphi(x) = \begin{cases} 2x \text{ за } x<0, \\ x^2 \text{ за } x \geqslant 0, \end{cases}$

и да се најде инверзната биекција φ^{-1}. Да се нацрта графот на φ (земајќи ги како оригинали само елементите од -2 до 3), а потоа и графот на φ^{-1}.

61.1. Пресликувањето $\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, определено со:

а) $\varphi(x)=3x-2$; б) $\varphi(x)=x^3$.

е биекција. Да се најде формулата со која е определена инверзната биекција φ^{-1}.

62.1. Да се најде реалната функција φ којашто ја задоволува равенката $\varphi(x+1)=2x-1$. Потоа да се установи дека φ е биекција од $\mathbf{R}$ во $\mathbf{R}$ и да се дајде инверзната биекција.

63.1. Прописот за едно пресликување φ е зададено со формулате $\varphi(x)=3x^2$.

Во кои случаи пресликувањето е биекција од доменот на φ во опсегот $\mathbf{V}$ ако доменот е:

а) $\mathbf{Z}$; б) $\mathbf{N}$; в) $\mathbf{Q}^+$; г) $\mathbf{R}$;

д) $\{-2, 2, 3, 5\}$; ѓ) $\{-2, 1, 3, 5\}$?

Во потврдните случаи да се најде инверзната биекција од $\mathbf{V}$ во доменот

Нека $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ е пресликување и нека ψ е пропис определен на следниов начин: „На кој било елемент од $\mathbf{B}$ што е слика (при φ) на елементи од $\mathbf{A}$ му ги придружуваме тие елементи од $\mathbf{A}$“. Прописот ψ се вика *инверзно* (или *обратно*) *придружување* на придружувањето φ (односно *инверзна релација* на релацијата определена со φ).

64.1. Најди го обратното придружување ψ на пресликувањето $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $\mathbf{A}=\{1, 2, 3, 4\}$, $\mathbf{B}=\{a, c, e\}$, определено со:

а) $\varphi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & c & e & c \end{pmatrix}$, б) $\Phi = \{(1, a), (2, e), (3, e), (4, e)\}$,

и утврди дека ψ е пресликување од $\mathbf{B}$ во $\mathbf{A}$.

65.1. Покажи дека инверзното придружување ψ на едно пресликување $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ е пресликување од $\mathbf{B}$ во $\mathbf{A}$ ако и само ако φ е биекција.

66.1. Што е трансформација на едно множество $\mathbf{F}$?

Нека $\mathbf{F}$ е множеството темиња на еден четириаголник $ABCD$, т. е. $\mathbf{F}=\{A, B, C, D\}$. Да се провери дали е трансформација на $\mathbf{F}$ следново придружување φ:

а) на секое теме му се придружува пресекот S на дијагоналите од четириаголникот;

б) на секое теме му се придружува спротивно теме;

в) на секое теме му се придружува соседно теме.

67.1. Нека $\mathbf{F}$ е множеството точки од една кружница и нека на секоја точка ѝ ја придружиме нејзината дијаметрално спротивна точка. Покажи дека со тоа е дефинирана трансформација на $\mathbf{F}$ и дека е таа биекција.

68.1. Нека $\mathbf{F}$ е множеството точки од еден исполнет квадрат $ABCD$. Да се провери дали е дефинирана трансформација на $\mathbf{F}$ со следниов пропис φ:

а) ако $X\in\mathbf{F}$, тогаш $\varphi(X)$ е ортогоналната проекција на X врз дијагоналата AC?

б) ако $X\in\mathbf{F}$, тогаш $\varphi(X)$ е ортогоналната проекција на X врз најблиската страна на квадратот:

в) ако $X\in\mathbf{F}$, тогаш $\varphi(X)$ е симетричната точка на X во однос на дијагоналата AC.

Во потврден случај да се установи дали таа трансформација е сурјекција или инјекција.

69.1. Нека $\mathbf{F}$ е множеството точки од еден квадрат $ABCD$. Да се провери дали е определена трансформација на $\mathbf{F}$ со следниов пропис φ:

а) на секој елемент од $\mathbf{F}$ да му се придружи ортогоналната проекција врз дијагоналата AC;

б) ако $X\in\mathbf{F}$, тогаш $\varphi(X)$ е симетрична точка на X во однос на пресекот S на дијагоналите.

70.1. Нека $\mathbf{F}$ е множеството точки од една отсечка AB. Провери дали следново придружување φ е трансформација на $\mathbf{F}$ и, во потврден случај, утврди дали φ е: сурјекција, инјекција или константно пресликување, а потоа најди ги: неподвижните точки и досегот $\mathbf{V}$ на φ.

а) На $X\in\mathbf{F}$ ѝ се придружува точката X', којашто е средина на отсечката XB.

б) На $X\in\mathbf{F}$ ѝ се придружува оној крај на отсечките AB, што е поблиску до X.

в) На $X\in\mathbf{F}$ ѝ се придружува $X'\in\mathbf{F}$, којашто го има својството: $\overline{AX}=\overline{X'B}$.

г) Истото од в) за сите $X\in\mathbf{F}$ што се различни од средината S на AB, а $\varphi(X)=X$ за $X=S$.

д) На секој $X \in \mathbf{F}$ му се придружува средината S на отсечката AB.

ѓ) На секој $X \in \mathbf{F}$ му се придружува точка X', за која важи: $\overline{AX'} = 2\overline{AX}$.

71.1. Нека $\mathbf{F}$ е множеството точки од една права p и нека на p се избрани две различни точки, O и E. Да се провери дали е трансформацијата на $\mathbf{F}$ следново придружување φ:

а) На $X \in \mathbf{F}$ ѝ се придружува $X' \in \mathbf{F}$, таква што $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{OE}$.

б) На $X \in \mathbf{F}$ ѝ се придружува $X' \in \mathbf{F}$, таква што $\overline{XX'} = \overline{OE}$.

в) На $X \in \mathbf{F}$ ѝ се придружува $X' \in \mathbf{F}$, таква што $\overrightarrow{OX'} = -\overrightarrow{OX}$.

Дали некоја од тие трансформации е биекција и дали има неподвижни точки?

72.1. Да се најдат сите трансформации на множеството $\mathbf{F} = \{A\}$. Кои од нив се биекции?

73.1. Да се најдат сите трансформации на множеството $\mathbf{F} = \{A, B\}$. Кои од нив се биекции?

74*1. Да се најдат сите биекции од множеството $\mathbf{F} = \{A, B, C\}$ во себе.

75.1. Ако $\varphi : A \to B$ е пресликување и $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{A}$, тогаш со $\varphi(\mathbf{S})$ го означуваме множеството на сите елементи од $\mathbf{B}$ што се слики на елементите од $\mathbf{S}$ при φ, т. е.

$$\varphi(\mathbf{S}) = \{y \in \mathbf{B} \mid (\exists s \in \mathbf{S})\ y = \varphi(s)\}.$$

Нека $\mathbf{F} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathbf{S} = \{1, 2\}$, $\mathbf{T} = \{1, 4, 5\}$ и $\varphi : \mathbf{F} \to \mathbf{F}$ е определена со табелата $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

а) Да се најде: $\varphi(\mathbf{S})$, $\varphi(\mathbf{T})$, $\varphi(\mathbf{S} \cup \mathbf{T})$, $\varphi(\mathbf{S} \cap \mathbf{T})$.

б) Уочи дека: $\varphi(\mathbf{S} \cup \mathbf{T}) = \varphi(\mathbf{S}) \cup \varphi(\mathbf{T})$ и $\varphi(\mathbf{S} \cap \mathbf{T}) = \varphi(\mathbf{S}) \cap \varphi(\mathbf{T})$

в) Дали равенствата во б) се исполнети, ако $\mathbf{S} = \{1, 4\}$ и $\mathbf{T} = \{2, 4, 5\}$?

76.1. Нека $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ е пресликување. Во кој случај: а) $\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$, б) $\varphi(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{B}$, в) $\varphi(\mathbf{A}) \supset \mathbf{B}$?

77*1. Нека $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ се непразни множества и нека $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ и $\psi : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ се пресликувања. Да се покаже дека прописот τ:

$$(\forall x \in \mathbf{F})\ \tau(x) = \psi(\varphi(x)) \qquad (*)$$

дефинира пресликување од $\mathbf{A}$ во $\mathbf{C}$.

(Пресликувањето τ се вика *состав* на пресликувањата φ и ψ; се означува со $\varphi \circ \psi$; $\varphi \circ \varphi$ се означува со φ^2.)

78.1. Дадени се множествата $\mathbf{A}=\{а, е, у\}$, $\mathbf{B}=\{1, 2, 3, 4\}$, $\mathbf{C}=\{K, P, M\}$ и пресликувањата $\varphi:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$, $\psi:\mathbf{B}\to\mathbf{C}$, определени со таблиците:

$$\varphi=\begin{pmatrix} а & е & у \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \psi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ K & K & P & K \end{pmatrix}.$$

Да се најде составот $\varphi \circ \psi$, претставен таблично и со граф.

79.1. Нека $\mathbf{F}$ е множеството темиња на еден рамностран триаголник ABC и нека φ и ψ се трансформации на $\mathbf{F}$, определени со таблиците:

$$\varphi=\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}, \qquad \psi=\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & A \end{pmatrix}.$$

а) Да се најде: $\varphi\circ\varphi(A)$, $\varphi\circ\psi(A)$, $\psi\circ\varphi(A)$, $\psi\circ\psi(A)$, $(\varphi\circ\psi)\circ\varphi(A)$.

б) Да се одредат сите вредности на X за кои $\varphi(X)=\psi(X)$.

в) Да се покаже дека $(\varphi\circ\psi)\circ\varphi=\varphi\circ(\psi\circ\varphi)$.

г) Да се нацртаат графовите на: $\varphi\circ\psi$, $\psi\circ\varphi$ и $(\varphi\circ\psi)\circ\psi$.

80.1. Нека $\mathbf{F}=\{A, B, C, D\}$ каде што A, B, C и D се темиња на еден квадрат и нека трансформациите φ и ψ на $\mathbf{F}$ се определени со:

$$\varphi=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}, \qquad \psi=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix}.$$

а) Најди ги составите $\varphi\circ\psi$ и $\psi\circ\varphi$.

б) Уочи дека φ и ψ се биекции, најди ги инверзните биекции φ^{-1}, ψ^{-1} и покажи дека $\varphi\circ\varphi^{-1}=\varphi^{-1}\circ\varphi=\varepsilon$, $\psi\circ\psi^{-1}=\psi^{-1}\circ\psi=\varepsilon$, каде што ε е идентичната трансформација на $\mathbf{F}$.

81.1. Нека $\mathbf{F}=\{A, B, C, D\}$, каде што A, B, C, D се темиња на еден квадрат и нека трансформациите φ и ψ на $\mathbf{F}$ се определени со:

$$\varphi=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{pmatrix}, \qquad \psi=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}.$$

а) Најди ги составите φ^2, ψ^2, $\varphi\circ\psi$, $\psi\circ\varphi$. Дали $\varphi\circ\psi=\psi\circ\varphi$?

б) Уочи дека φ,ψ и $\varphi\circ\psi$ се биекции, најди ги φ^{-1}, ψ^{-1} и покажи дека $(\varphi\circ\psi)^{-1}=\psi^{-1}\circ\varphi^{-1}$.

в) Провери дали $(\varphi^{-1})^3=(\varphi^3)^{-1}$.

82.1. Две трансформации φ, $\psi:\mathbf{F}\to\mathbf{F}$, $\mathbf{F}=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, се определени со релациите:

$$\Phi=\{(1,2),\ (2,3),\ (3,3),\ (4,1),\ (5,3)\},$$
$$\Psi=\{(1,1),\ (2,2),\ (3,4),\ (4,1),\ (5,2)\}.$$

а) Да се најде досегот $V\varphi$ и $V\psi$.

б) Да се најдат составите $\varphi \circ \psi$, $\psi \circ \varphi$, претставени таблично.

в) Да се напише релацијата Γ што е определена од трансформацијата $\varphi \circ \psi$.

83.1. Нека **F** е рамностраниот триаголник ABC и φ е ортогонално проектирање врз основата AB. Да се покаже дека φ е трансформација на **F** и да се најде: а) составот φ^2, б) $\varphi^2(\mathbf{F})$.

84.1. Дадена е точка O од рамнината Π и правило φ според кое на точката O ѝ се придружува самата точка, а на која било друга точка $X \in \Pi$ ѝ се придружува точка $X' \in \Pi$, таква што O е средина на отсечката XX'. Да се покаже дека тоа придружување:

а) определува трансформација на Π,

б) $\varphi^2 = \varepsilon$ (ε е идентично пресликување на Π)

в) φ е биекција.

85.1. Нека **F** е правоаголниот триаголник ABC и нека φ е ортогонално проектирање врз катетата AB, а ψ е ортогонално проектирање врз катетата BC.

а) Да се покаже дека φ и ψ се трансформации на **F**.

б) Да се најдат составите $\varphi \circ \psi$ и $\psi \circ \varphi$. Дали $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$?

в) Да се најде $\varphi^2(\mathbf{F})$ и $(\varphi \circ \psi)(\mathbf{F})$.

г) Кои се неподвижни точки за трансформацијата φ; $\varphi \circ \psi$?

86.1. Дадени се реалните трансформации $\varphi(x) = 4 - 3x$ и $\psi(x) = x^2 - 1$. Да се најдат формулите на следниве трансформации на **R**:

а) $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$; б) $\varphi \circ \psi$; в) $\psi \circ \varphi$;

г) $\psi \circ \psi = \psi^2$; д) φ^{-1}; ѓ) $(\varphi^{-1})^{-1}$.

87.1. Нека φ е трансформација на **R**, зададена со формулата $\varphi(x) = 3x + 2$ (линеарна функција).

а) Да се пресмета $\varphi(0)$, $\varphi^2(0)$, $\varphi(1 + \varphi(0))$, $\varphi^3(x)$.

б) Утврди дека φ е биекција, најди ја инверзната биекција φ^{-1} и покажи дека $(\varphi^{-1} \circ \varphi^2)(x) = \varphi(x)$.

88$_*$1. Нека φ и ψ се трансформации на едно множество **F**. Покажи дека, ако φ и ψ се биекции, тогаш:

а) составите $\varphi \circ \psi$ и $\psi \circ \varphi$ се биекции;

б) $(\varphi \circ \psi)^{-1} = \psi^{-1} \circ \varphi^{-1}$;

в) $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$.

§2.IV Транслација

89.2. Избери точка A и вектор **a**, а потоа најди ја точката $A' = \tau_{\mathbf{a}}(A)$

90.2. Избери триаголник ABC и најди ги сликите на темињата A, B и C при транслацијата за векторот $\overrightarrow{AB}$.

91$_*$**2.** Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се два неколинеарни вектори и A дадена точка. Да се најдат точките $A_1 = \tau_{\mathbf{a}} \circ \tau_{\mathbf{b}}\ (A)$ и $A_2 = \tau_{\mathbf{b}} \circ \tau_{\mathbf{a}}\ (A)$. Дали $A_1 = A_2$?

92.2. Дадени се две точки A, B и транслацијата $\tau_{\mathbf{a}}$. Ако $A' = \tau_{\mathbf{a}}\ (A)$, $B' = \tau_{\mathbf{a}}\ (B)$, тогаш $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. Докажи!

93$_*$**2.** Дадени се точките A, B, C и D. Да се покаже дека постои транслација $\tau_{\mathbf{a}}$, така што $\tau_{\mathbf{a}}(A) = C$, $\tau_{\mathbf{a}}(B) = D$ ако и само ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

94.2. Нека $\mathbf{a}$ е ненулти вектор. Дали постои точка A со својството $\tau_{\mathbf{a}}(A) = A$?

95$_*$**2.** Дадена е права p и вектор $\mathbf{a}$. Конструирај ја правата $p' = \tau_{\mathbf{a}}(p)$.

96$_*$**2.** Нека $\mathbf{a}$ е ненулти вектор и p права паралелна со $\mathbf{a}$. Докажи дека $\tau_{\mathbf{a}}\ (p) = p$. Дали постои права q што не е паралелна со $\mathbf{a}$, така што $\tau_{\mathbf{a}}\ (q) = q$?

97.2. Конструирај ја сликата на една кружница (O,r) при транслацијата $\tau_{\mathbf{a}}$.

98$_*$**2.** Конструирај ја сликата на еден агол $\sphericalangle AOB$ при транслацијата $\tau_{\mathbf{a}}$ и докажи дека двата агли се еднакви.

99$_*$**2.** Нека ABC е триаголник, $\tau_{\mathbf{a}}$ транслација и нека $A' = \tau_{\mathbf{a}}\ (A)$, $B' = \tau_{\mathbf{a}}\ (B)$, $C' = \tau_{\mathbf{a}}\ (C)$. Докажи дека триаголниците ABC и $A'B'C'$ се складни.

100.2. Ако правите p и q се заемно нормални и ако $p' = \tau_{\mathbf{a}}(p)$, $q' = \tau_{\mathbf{a}}\ (q)$, тогаш правите p' и q', се исто така, заемно нормални. Докажи!

101.2. Триаголникот $A'B'C'$ е слика на триаголникот ABC при некоја транслација.

Да се докаже дека соодветните тежишни линии на двата триаголника се паралелни.

102.2. Нека T е тежиштето, а H ортоцентарот, на триаголникот ABC. Ако $\tau_{\mathbf{a}}: A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$, $T \to T'$, $H \to H'$, тогаш T' е тежиштето, а H ортоцентарот на триаголникот $A'\,B'\,C'$. Докажи!

103$_*$**2.** Да се конструира трапез, ако му се познати основите и дијагоналите.

104$_*$**2.** Да се конструира трапез, ако му се познати дијагоналите, аголот меѓу нив и едниот крак.

105.2. Да се конструира трапез ако му се познати сите негови страни.

106$_*$**2.** Да се конструира четириаголник, ако се познати три негови агли и две спротивни страни.

107$_*$**2.** Да се конструира кружница која минува низ дадена точка и допира две паралелни прави.

108$_*$2. Дадени се кружниците $\kappa_1(O_1, r_1)$, $\kappa_2(O_2, r_2)$ и една права p. Да се конструира права q паралелна со p, така што кружниците κ_1 и κ_2 да отсечуваат на неа еднакви отсечки.

109$_*$2. Дадени се две кружници κ_1 и κ_2 и отсечка AB. Да се конструира отсечка CD паралелна и еднаква на AB, така што $C \in \kappa_1$, $D \in \kappa_2$.

110.2. Дадени се права p, кружница κ и отсечка AB. Да се конструира отсечка CD паралелна и еднаква на AB, така што $C \in p$, $D \in \kappa$.

111.2. Дадени се две прави p и q и отсечка AB. Да се конструира отсечка CD паралелна и еднаква на AB, така што $C \in p$, $D \in q$.

112$_*$2. Над страните AB и DC од паралелограмот $ABCD$ се конструирани складни триаголници ABM и DCN, така што векторите $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AD}$ се исто насочени. Да се најде растојанието меѓу точките M и N.

113$_*$2. Над страните AB и CD од паралелограмот $ABCD$ се конструирани квадрати $AA'B'B$ и $DD'C'C$, така што векторите $\overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{DD'}$ се исто насочени. Ако S_1 и S_2 се центрите на квадратите, докажи дека $\overline{S_1S_2} = \overline{BC}$.

§3.IV Централна симетрија

114.3. Дадена е точка O. Избери неколку точки $A, B, C, \ldots$, а потоа најди ги точките $A' = \sigma_O(A)$, $B' = \sigma_O(B)$, $C' = \sigma_O(C), \ldots$

115.3. Дадена е права p и точка O. Конструирај ја правата $p' = \sigma_O(p)$. Во кој случај $p' = p$?

116.3. Нацртај произволна фигура $\mathbf{F}$ и избери една точка O. Потоа, конструирај ја фигурата што е симетрична со $\mathbf{F}$ во однос на точката O, т.е. фигурата $\mathbf{F}' = \sigma_O(\mathbf{F})$.

117.3. Даден е триаголник ABC. Да се конструира триаголникот $A'B'C'$ што е симетричен со триаголникот ABC во однос на:

а) темето A;

б) средината A_1 на страната BC;

в) тежиштето T на триаголникот ABC.

118.3. Избери една кружница $\kappa(S, r)$ и една точка O, а потоа нацртај ја кружницата $\kappa' = \sigma_O(\kappa)$. Во кој случај $\kappa' = \kappa$?

119$_*$3. Нека p е тангента на пружницата $\kappa(S, r)$ и нека $p' = \sigma_O(p)$, $\kappa' = \sigma_O(\kappa)$. Докажи дека p' е тангента на кружницата κ. Дали може да биде:

а) $p' = p$;

б) $\kappa' = \kappa$;

в) $p' = p$ и $\kappa' = \kappa$?

120.3. Дадени се две точки A и B. Дали постои централна симетрија σ_O, така што да важи $\sigma_O(A)=B$ и $\sigma_O(B)=A$?

121$_*$3. Нека A, B, C и D се четири точки, така што $\overline{AB}=\overline{CD}$ и $AB \parallel CD$. Дали постои централна симетрија σ_O, таква што $\sigma_O(A)=C$, $\sigma_O(B)=D$?

122$_*$3. Нека A, B се две дадени точки и нека $\sigma_O(A)=A'$, $\sigma_O(B)=B'$. Докажи дека $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B'A'}$.

123.3. Нека A, B, C и D се четири точки. Докажи дека постои централна симетрија σ_O, така што $\sigma_O(A)=C$, $\sigma_O(B)=D$, ако и само ако $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

124.3. Даден е четириаголник $ABCD$. Докажи дека постои централна симетрија σ_O, така што $\sigma_O(A)=C$, $\sigma_O(B)=D$, ако и само ако четириаголникот $ABCD$ е паралелограм.

125.3. Дадени се две прави p и q. Дали постои централна симетрија σ_O, така што $\sigma_O(p)=q$ и $\sigma_O(q)=p$?

126.3. Дадени се две полуправи h_1 и h_2 со ист почеток. Дали постои централна симетрија σ_O, таква што $\sigma_O(h_1)=h_2$ и $\sigma_O(h_2)=h_1$?

127$_*$3. Нека σ_1 и σ_2 се централни симетрии со центри O_1 и O_2 соодветно. Избери точка A и најди ги точките $A'=\sigma_1(A)$ и $A''=\sigma_2(A')$. Докажи дека $\overrightarrow{AA''}=2\overrightarrow{O_1O_2}$.

Што може да се заклучи од тоа за составот $\sigma_1 \circ \sigma_2$?

128$_*$3. Нека A, B, C и M се четири дадени точки и нека:

$$\sigma_A(M)=M_1 \qquad \sigma_B(M_1)=M_2, \qquad \sigma_C(M_2)=M_3,$$
$$\sigma_A(M_3)=M_4, \qquad \sigma_B(M_4)=M_5, \qquad \sigma_C(M_5)=M_6.$$

Докажи дека $M_6=M$.

129$_*$3. Дадени се точките O_1, O_2, O_3, O_4 и отсечката A_0B_0. Нека, σ_i $i=1, 2, 3, 4$, е централна симетрија со центар O_i, $i=1, 2, 3, 4$, и нека

$$A_1B_1=\sigma_1(A_0B_0), \qquad A_2B_2=\sigma_2(A_1B_1),$$
$$A_3B_3=\sigma_3(A_2B_2), \qquad A_4B_4=\sigma_4(A_3B_3)$$

Докажи дека $\overline{A_0A_4}=\overline{B_0B_4}$.

130$_*$3. Дадена е транслација $\tau_{\mathbf{a}}$, $\mathbf{a}\neq\mathbf{o}$, и централна симетрија σ_O. Нека A е произволна точка и нека:

$$A'=\sigma_O(A), \qquad A''=\tau_{\mathbf{a}}(A'),$$
$$A_1=\tau_{\mathbf{a}}(A), \qquad A_2=\sigma_O(A_1).$$

Дали $A_2=A''$? Што може да се заклучи од тоа?

131.3. Дали фигурата $\mathbf{F}$, образувана од две точки A и B, т.е. $\mathbf{F}=\{A,B\}$, е централно симетрична?

132$_*$3. Дали фигурата $\mathbf{F}=\{A,B,C\}$ може да има центар на симетрија?

133.3. Фигурата $\mathbf{F}=\{A,B,C,D\}$ е централно симетрична. Што може да се каже за положбата на точките A, B, C и D?

134.3. Кои од следниве фигури имаат центар на симетрија: а) отсечка; б) полуправа; в) права?

Кои од тие фигури имаат повеќе од еден центар на симетрија?

135.3. Дали фигурата образувана од:

а) две прави што се сечат;

б) две паралелни прави;

в) три неколинеарни точки,

има центри на симетрија? Која од нив има повеќе од еден центар на симетрија?

136.3. Дали постои агол што е централно симетрична фигура?

137$_*$3. Во кој случај фигурата составена од две полуправи е централно симетрична?

138.3. Која од следниве фигури е централно симетрична: а) кружница, б) круг, в) кружен исечок, г) кружен отсечок?

139.3. Која од следниве фигури е централно симетрична: а) кружен прстен, б) пресекот на два круга со еднакви радиуси; в) пресекот на два круга со различни радиуси?

140$_*$3. Дадени се кружниците $k_1(S_1,r_1)$ и $k_2(S_2,r_2)$. Во кој случај фигурата составена од кружниците k_1 и k_2 е централно симетрична?

141.3. Дадена е кружницата $k(S,r)$, точка A и права p. Во кој случај фигурата, формирана од:

а) кружницата и точката,

б) кружницата и правата,

в) кружницата, правата и точката,

е централно симетрична?

142$_*$3. Ако O_1 и O_2 се центри на симетрија на фигурата $\mathbf{F}$, докажи дека $O_3=\sigma_{O_2}(O_1)$ е, исто така, центар на симетрија на фигурата $\mathbf{F}$.

143$_*$.3. Ако една фигура $\mathbf{F}$ е централно симетрична, тогаш таа има или само еден центар на симетрија или, пак, бесконечно многу.

144$_*$3. Може ли една ограничена фигура да има два центра на симетрија?

145.3. Може ли една неограничена фигура да има само еден центар на симетрија? А само два?

146$_*$3. Правата p минува низ пресекот O на дијагоналите од паралелограмот $ABCD$ и ги сече страните AB и CD во точките E и F. Да се докаже дека $\overline{AE}=\overline{CF}$.

147$_*$3. На страните AB и CD од паралелограмот $ABCD$ се положени две еднакви отсечки AM и CN. Да се докаже дека правата MN минува низ пресекот O на дијагоналите од паралелограмот.

148$_*$3. Над спротивните страни AB и CD од паралелограмот $ABCD$, надвор од него, конструирани се два складни триаголника ABE и CDF, при што $\overline{AE}=\overline{CF}$, $\overline{BE}=\overline{DF}$. Да се докаже дека правата EF минува низ центарот O на паралелограмот $ABCD$ и дека O е средина на отсечката EF.

149$_*$3. Над страните AB и CD од паралелограмот $ABCD$, надвор од него, конструирани се рамнострани триаголници ABE и CDF, а над страните AD и BC, надвор од паралелограмот, конструирани се квадрати со центри G и H. Да се докаже дека четириаголникот $EGFH$ е паралелограм.

150.3. Низ пресекот O на дијагоналите од паралелограмот $ABCD$ спуштени се нормали OM, ON, OP и OQ на неговите страни AB, BC, CD и DA соодветно. Да се докаже дека четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм и дека неговите дијагонали се сечат во точката O.

151$_*$3. Паралелограмот $A_1B_1C_1D_1$ е впишан во паралелограмот $ABCD$. Да се докаже дека нивните центри се совпаѓаат.

152$_*$3. Нека $ABCD$ е паралелограм и нека S_1 и S_2 се центрите на впишаните кружници во триаголниците ABC и ADC соодветно. Да се докаже дека правите AC, BD, и S_1S_2 минуваат низ една иста точка.

153$_*$3. Нека A_1, B_1, C_1 се средини на страните BC, CA и AB, а T е тежиштето на триаголникот ABC и нека A_2, B_2, C_2 се средините на отсечките AT, BT, CT соодветно. Да се докаже дека триаголниците $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ се складни.

154.3. Нека T е тежиштето на триаголникот ABC, а A_2, B_2 и C_2 средини на отсечките TA, TB и TC соодветно. Низ точките A_2, B_2 и C_2 повлечени се прави паралелни со страните BC, CA и AB соодветно. Да се докаже дека триаголникот образуван од овие три прави е складен со триаголникот ABC.

155$_*$3. Докажи дека средините на страните на произволен четириаголник $ABCD$ се темиња на паралелограм.

156$_*$3. Дадени се две прави p и q и една точка A. Низ точката A да се повлече права a, така што A да биде средина на отсечката MN, каде што $M=a\cap p$, $N=a\cap q$.

157.3. Дадени се права p, кружница $k(S,r)$ и точка A. Низ точката A повлечи права a, така што A да биде средина на отсечката MN, каде што $M=p\cap a$, $N\in k\cap a$.

158.3. Дадени се две кружници $\kappa_1(S_1,r_1)$, $\kappa_2(S_2,r_2)$ и една точка A. Низ точката A да се повлече права a, така што A да биде средина на отсечката MN каде што $M \in \kappa_1 \cap a$, $N \in \kappa_2 \cap a$.

159$_*$3. Нека кружниците $\kappa_1(S_1,r_1)$ и $\kappa_2(S_2,r_2)$ се сечат во точката A. Низ точката A да се повлече права a на која кружниците κ_1 и κ_2 отсечуваат еднакви отсечки.

160.3. Да се конструира паралелограм на кој му се познати две соседни темиња и пресекот на дијагоналите.

161.3. Дадени се точките M, N, P, Q и O. Да се конструира паралелограм со центар во O, така што две негови спротивни страни или нивните продолженија да минуваат низ M и N соодветно, а другите две спротивни страни низ P и Q соодветно.

162$_*$3. Да се конструира триаголник ABC ако се познати: темето A, тежиштето T и правите p и q на кои лежат страните AB и AC.

163.3. На кружницата κ дадени се четири точки A, B, C, D, а на тетивата CD една точка M. На кружницата κ да се најде точка X, така што правите AX и BX да отсечуваат на тетивата CD отсечка ST чија средина е точката M.

§4.IV Осна симетрија

164.4. Избери неколку точки $A, B, C, ..$ и една права a, а потоа најди ги точките $A' = \sigma_a(A)$, $B' = \sigma_a(B)$, $C' = \sigma_a(C), \ldots$. Кои точки X го задоволуваат условот $\sigma_a(X) = X$?

165.4. Избери две прави a и p, а потоа конструирај ја правата $p' = \sigma_a(p)$. Во кој случај $p' = p$?

166.4. Избери произволна фигура $\mathbf{F}$ и една права a, а потоа најди ја сликата на $\mathbf{F}$ при осната симетрија σ_a, т.е. фигурата $\mathbf{F}' = \sigma_a(\mathbf{F})$.

167.4. Даден е триаголник ABC. Да се конструира триаголникот $A'B'C'$ што е симетричен на триаголникот ABC во однос на:

а) правата AB;

б) тежишната линија AA_1.

168.4. Даден е рамностран триаголник ABC. Да се конструира триаголникот $A'B'C'$ симетричен со триаголникот ABC во однос на тежишната линија CC_1.

169.4. Избери една кружница $\kappa(S, r)$ и една права a, а потоа нацртај ја кружницата $\kappa' = \sigma_a(\kappa)$. Во кој случај $\kappa' = \kappa$?

170.4. Дадени се две точки A и B. Дали постои осна симетрија σ_a, така што $\sigma_a(A) = B$, $\sigma_a(B) = A$?

171.4. Дадени се две прави p и q. Дали постои осна симетрија σ_a така што $\sigma_a(p)=q$, $\sigma_a(q)=p$?

172.4. Дадени се две полуправи h_1 и h_2. Дали постои осна симетрија σ_a, така што $\sigma_a(h_1)=h_2$. Дали во тој случај $\sigma_a(h_2)=h_1$?

173.4. Дадени се две кружници $\kappa_1(S_1,r_1)$ и $\kappa_2(S_2,r_2)$. Дали постои осна симетрија σ_a, така што $\sigma_a(\kappa_1)=\kappa_2$? Дали во тој случај $\sigma_a(\kappa_2)=\kappa_1$?

174$_*$4. Избери права a и две точки A и B надвор од неа, а потоа најди ги точките $A'=\sigma_a(A)$ и $B'=\sigma_a(B)$. Докажи дека точките A, B, A' и B' се или колинеарни или, пак, лежат на кружница.

175.4. Дадени се две отсечки AB и CD. Дали постои осна симетрија σ_a при која отсечката AB се пресликува во отсечката CD?

176.4. Дадени се две еднакви отсечки AB и CD. Дали постои осна симетрија σ_a при која отсечката AB се пресликува во отсечката CD?

177$_*$4. Дадени се две отсечки AB и CD. Да се докаже дека постои осна симетрија σ_a при која отсечката AB се пресликува во отсечката CD ако и само ако се исполнети условите:

(i) $\overline{AB}=\overline{CD}$

(ii) точките A, B, C, D се колинеарни или лежат на една кружница.

178$_*$4. Нека правите a и b се паралелни и нека d е нивното растојание. Избери една точка A и најди ги точките $A'=\sigma_a(A)$, $A''=\sigma_b(A')$ а потоа докажи дека $\overline{AA''}=2d$.

179.4. Нека правите a и b се заемно нормални. Избери точка A и најди ги точките $A'=\sigma_a(A)$, $A''=\sigma_b(A')$, $A_1=\sigma_b(A)$, $A_2=\sigma_a(A_1)$, а потоа докажи дека $A''=A_2$. Што може да се заклучи од ова?

180$_*$4. Нека правите a и b се заемно нормални и нека $O=a\cap b$. Избери точка A и најди ги точките $A'=\sigma_a(A)$, $A''=\sigma_b(A')$, а потоа докажи дека $A''=\sigma_O(A)$. Што може да се заклучи од ова?

181.4. Дали фигурата $\mathbf{F}=\{A, B\}$ е основиметрична? Колку оски на симетрија има таа фигура?

182.4. Нека A, B и C се три колинеарни точки. Покажи дека фигурата $\mathbf{F}=\{A, B, C\}$ е основиметрична. Колку оски на симетрија може да има таа фигура?

183.4. Нека A, B, C, D се четири колинеарни точки. Покажи дека фигурата $\mathbf{F}=\{A, B, C, D\}$ е основиметрична. Колку оски на симетрија може да има таа фигура?

184.4. Кои од следниве фигури имаат оска на симетрија: а) отсечка; б) полуправа; в) права?

Кои од тие фигури имаат повеќе од една оска на симетрија?

185.4. Дали фигурата образувана од:

а) две прави што се сечат,

б) две паралелни прави,

има оска на симетрија? Која од нив има повеќе од една оска на симетрија?

186.4. Докажи дека секој агол е оносиметричен.

187.4. Во кој случај фигурата **F** составена од две полуправи O_1A и O_2B е оносиметрична?

188.4. Која од следниве фигури е оносиметрична: а) кружница, б) круг, в) кружен исечок, г) кружен отсечок?

Која од тие фигури има повеќе од една оска на симетрија?

189.4. Која од следниве фигури е оносиметрична: а) кружен прстен, б) пресекот на два круга со еднакви радиуси, в) пресекот на два круга со различни радиуси?

190.4. Во кој случај фигурата составена од две кружници $\kappa_1(S_1,r_1)$ и $\kappa_2(S_2,r_2)$ е оносиметрична? Колку оски на симетрија може да има таа фигура?

191.4. Колку оски на симетрија има квадратот?

192.4. Покажи дека еден рамнокрак триаголник (што не е рамностран) има само една оска на симетрија.

193$_*$4. Ако еден триаголник има две оски на симетрија, тогаш тој триаголник е рамностран. Докажи!

194.4. Дали еден триаголник може да има само две оски на симетрија?

195$_*$4. Нека фигурата **F** има две оски на симетрија p и q. Да се докаже дека и правата $r=\sigma_p(q)$ е, исто така, оска на симетрија на фигурата **F**.

196$_*$4. Ако една фигура **F** има само две оски на симетрија, тогаш тие се заемно нормални. Докажи!

197.4. Ако една фигура **F** има две заемно нормални оски на симетрија, тогаш таа фигура е централно симетрична.

198.4. Нека фигурата **F** има само две оски на симетрија. Докажи дека **F** има центар на симетрија.

199.4. Нека p и q се оски на симетрија на фигурата **F**. Дали точката $O=p\cap q$ мора да биде центар на симетрија на фигурата **F**?

200.4. Нека p е оска на симетрија, а O центар на симетрија на фигурата **F**, при што $O\in p$. Да се докаже дека правата q што минува низ O и е нормална на p е оска на симетрија на фигурата **F**.

201$_*$4. Нека O е центар на симетрија, а p оска на симетрија на фигурата **F**. Да се докаже дека:

а) правата $q = \sigma_O(p)$ е оска на симетрија на фигурата **F**;

б) точката $S = \sigma_p(O)$ е центар на симетрија на фигурата **F**.

202$_*$4. Ако една фигура има конечно многу оски на симетрија, тогаш сите тие минуваат низ една иста точка. Докажи!

203$_*$4. Ако една ограничена фигура **F** има повеќе од една оска на симетрија, тогаш сите тие минуваат низ една иста точка. Докажи!

Дали тоа тврдење е точно и за неограничени фигури?

§5.IV Примена на осната симетрија

204$_*$5. Нека r е симетралата на страната AB од триаголникот ABC. Ако r минува низ темето C, што можеме да кажеме за триаголникот ABC?

205.5. Ако симетралите на две страни од триаголникот ABC минуваат низ спротивните темиња, тогаш триаголникот е рамностран. Докажи!

206$_*$5. Даден е триаголникот ABC, чија симетрала s_c е нормална на страната AB. Што може да се каже за триаголникот ABC?

207.5. Ако симетралите на два агла од триаголникот ABC се нормални на спротивните страни, тогаш триаголникот е рамностран. Докажи!

208$_*$5. Во кој случај симетралата s_c се совпаѓа со симетралата на страната AB од триаголникот ABC?

209$_*$5. Покажи дека никои две од симетралите на аглите во еден триаголник не се заемно нормални!

210$_*$5. Докажи дека секоја од симетралите на аглите во еден триаголник минува низ поголемиот од аглите образувани од другите две!

211$_*$5. Точките P и Q, што лежат од краците од аголот AOB, на еднакви растојанија од темето O, се сврзани со произволна точка S од симетралата на аголот AOB. Да се докаже дека:

а) $\sphericalangle PSO = \sphericalangle QSO$;

б) $\overline{PS} = \overline{QS}$.

212$_*$5. На краците од аголот AOB положени се две еднакви отсечки OM и ON; во точките M и N се повлечени нормали m и n на краците од аголот. Да се докаже дека:

а) точката $S = m \cap n$ лежи на симетралата од аголот AOB.

б) $\overline{SM} = \overline{SN}$.

в) правите m и n ги сечат краците OB и OA соодветно во точки E и F што се на еднакви растојанија од темето O.

213$_*$5. На краците AC и BC од рамнокракиот триаголник ABC положени се еднакви отсечки AM и BN. Да се докаже дека:

а) $\overline{BM} = \overline{AN}$.

б) правите BM и AN се сечат во точка што лежи на симетралата на аголот кај темето C.

214$_*$5. Над краците AC и BC од рамнокракиот триаголник ABC, надвор од него, конструирани се квадрати со центри S_1 и S_2 соодветно. Да се докаже дека:

а) правите S_1A и S_2B, S_1B и S_2A се сечат во точки што лежат на симетралата на аголот кај C.

б) правата S_1S_2 е нормална на симетралата на аголот кај темето C.

в) $\overline{S_1A} = \overline{S_2B}$, $\overline{S_1B} = \overline{S_2A}$.

215$_*$5. Нека q и r се симетралите на аглите кај темињата B и C од триаголникот ABC соодветно и нека $A_1 = \sigma_q(A)$, $A_2 = \sigma_r(A)$. Да се докаже дека правите A_1A_2 и BC се совпаѓаат.

216$_*$5$_*$ Ако спротивните агли на еден четириаголник се суплементни, тогаш четириаголникот е тетивен. Докажи!

217$_*$5$_*$ Ако за еден четириаголник збирот на двете спротивни страни е еднаков со збирот на другите две спротивни страни, тогаш тој четириаголник е тангентен. Докажи!

218.5. Наброј ги сите четириаголници што имаат:

а) само една оска на симетрија.

б) барем една оска на симетрија.

219.5. Наброј ги сите четириаголници што имаат:

а) само две оски на симетрија.

б) барем две оски на симетрија.

220.5. Колку оски на симетрија може да има еден четириаголник?

221$_*$5. Ако еден четириаголник има барем три оски на симетрија, тогаш тој е квадрат. Докажи!

222.5. Дали постои четириаголник што има само три оски на симетрија?

223$_*$5. Ако еден четириаголник има оска на симетрија што не минува низ ниедно од темињата и оска на симетрија што минува низ некое од темињата, тогаш четириаголникот е квадрат. Докажи!

224$_*$5. Над краците од рамнокракиот трапез $ABCD$, надвор од него, конструирани се рамнострани триаголници ADM и BCN. Да се докаже дека:

а) $\overline{MB}=\overline{NA}$, $\overline{MC}=\overline{ND}$.

б) правата MN е паралелна со основите на трапезот.

225.5. Докажи дека правата p што минува низ средината на основата AB од рамнокракиот трапез $ABCD$ и е нормална на неа, минува и низ средината на основата CD.

226$_*$5. Нека M и N се средините на основите AB и CD од трапезот $ABCD$. Да се докаже дека трапезот $ABCD$ е рамнокрак ако и само ако правите AB и MN се заемно нормални.

227.5. Нека O е пресекот на дијагоналите од рамнокракиот трапез $ABCD$ со основи AB и CD. Докажи дека $\triangle ADO \cong \triangle BCO$.

228.5. Докажи дека правата p што ги сврзува средините на основите на еден рамнокрак трапез $ABCD$ минува низ пресекот од дијагоналите и низ пресекот од продолженијата на краците.

229.5. Докажи дека правата што ги сврзува пресекот на дијагоналите и пресекот од продолженијата на краците на еден рамнокрак трапез $ABCD$ е нормална на основите и ги дели на половина.

230.5. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез со основи AB и CD и нека T_1 и T_2 се тежиштата на триаголниците ABC и ABD. Да се докаже дека $\overline{T_1D}=\overline{T_2C}$.

231.5. Нека M и N се средините на основите AB и CD од рамнокракиот трапез $ABCD$. Да се докаже дека:

а) центрите O_1 и O_2 на кружниците опишани околу триаголниците ADN и BCN се еднакво оддалечени од точката M.

б) центрите S_1 и S_2 на кружниците вписани во триаголниците ADM и BCM се еднакво оддалечени од точката N.

232$_*$5. Нека центарот O на кружницата k лежи на симетралата s на даден агол ABC. Ако кружницата k ги сече краците BA и BC во точките M, N и P, Q соодветно, докажи дека:

а) $\overline{MN}=\overline{PQ}$.

б) тетивите MP и NQ (MQ и NP) се или паралелни или еднакви.

233$_*$5. На тангентата t од кружницата $k(O,r)$, со допирна точка T, се нанесени две еднакви отсечки TA и TB. Од точките A и B се повлечени тангенти $AC=a$ и $BD=b$ на кружницата. Докажи дека:

а) $\sphericalangle TAC=\sphericalangle TBD$.

б) правата CD е паралелна со тангентата t.

в) $\overline{AD}=\overline{BC}$.

234.5. Нека кружниците κ_1 и κ_2 се сечат во точките A и B. Докажи дека тангентите на κ_1 и κ_2 во точките A и B зафаќаат еднакви агли.

235.5. Избери две концентрични кружници κ_1, κ_2 и една права p што ги сече κ_1 и κ_2 во точките A, B и C, D соодветно. Докажи дека $\overline{AC}=\overline{BD}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$.

236_*5. Кружницата κ ги сече концентричните кружници κ_1 и κ_2 во точките A, B и C, D соодветно. Докажи дека $\overline{AC}=\overline{BD}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$ и дека $AB \parallel CD$.

237.5. Пресечните точки A и B на две кружници κ_1 и κ_2 се сврзани со произволна точка S од централната линија. Да се докаже дека:

а) $\overline{SA}=\overline{SB}$.

б) правите SA и SB образуваат еднакви агли со централната линија.

238_*5. Дадена е права p и две точки A и B. На правата p да се најде точка X, така што збирот $\overline{XA}+\overline{XB}$ да биде најмал.

239_* 5. Дадена е права p и две точки A и B на разни страни од неа. На правата p да се најде точка X така што разликата на $\overline{MA}$ и $\overline{MB}$ да бида најголема.

240_*5. Дадена е правата $p=MN$ и точките A,B на иста страна од неа. На правата MN да се најде точката X, така што:

а) $\sphericalangle AXM = \sphericalangle BXN$.

б) $\sphericalangle AXM = 2\sphericalangle BXN$.

в) $\sphericalangle AXM = \sphericalangle AXB$.

241.5. Дадена е права p и две кружници κ_1 и κ_2 на иста страна од неа. На правата p да се најде точка X, така што тангентите повлечени од X на κ_1 и κ_2 да образуваат еднакви агли со правата p.

242_*5. Да се конструира квадрат, така што две негови спротивни темиња да лежат на дадена права p, а другите соодветно на две дадени кружници κ_1 и κ_2.

243_*5. Дадени се две прави p, q и кружницата $\kappa(O,r)$. Да се конструира ромб, така што $\sphericalangle BAD=60^0$, $A,C\in p$, $B\in q$, $D\in k$.

244.5. Дадени се три прави p, q, r што минуваат низ иста точка O и на правата p точка $A\neq O$. Да се конструира триаголник ABC, така што правите p, q и r да се симетрали на неговите внатрешни или надворешни агли.

245.5. Дадена е кружницата $\kappa(O,r)$ и три прави p, q, r низ точката O. Околу кружницата κ да се опише триаголник ABC, така што правите p, q и r да се симетрали на неговите внатрешни или надворешни агли.

246$_*$5. Дадени се три прави p, q, r што минуваат низ иста точка O и, на правата p, точка A_1. Да се конструира триаголник ABC, така што A_1 да е средина на страната BC, а p, q и r да се симетрали на страните BC, CA и AB соодветно.

247.5. Да се конструира триаголник ABC ако е познато: $b, c - a$ и α.

248$_*$5. Да се конструира триаголник ABC ако е познато: a, b, $\alpha - \beta$.

§ 6.IV Ротација

249.6. Да се докаже дека $\sphericalangle \overrightarrow{AOB} + \sphericalangle \overrightarrow{BOC} = \sphericalangle \overrightarrow{AOC}$.

250$_*$6. Нека AOC е произволен агол помал од 180^0 и B една внатрешна точка. Да се докаже дека $\sphericalangle \overrightarrow{AOB} + \sphericalangle \overrightarrow{BOC} + \sphericalangle \overrightarrow{COA} = 0$.

251.6. Нека A, B, M и N се четири произволни точки од една кружница. Каква врска постои меѓу насочените агли $\sphericalangle \overrightarrow{AMB}$ и $\sphericalangle \overrightarrow{ANB}$?

252$_*$6. Низ краевите A и B на една отсечка AB се повлечени две прави AM и BN, така што:

а) $\sphericalangle \overrightarrow{BAM} = \sphericalangle \overrightarrow{ABN}$.

б) $\sphericalangle \overrightarrow{BAM} = - \sphericalangle \overrightarrow{ABN}$.

Што може да се каже за тие прави?

253.6. Даден е триаголникот ABC. Ако $C_1 = \sigma_{AB}(C)$, докажи дека: $\sphericalangle \overrightarrow{ABC} = - \sphericalangle \overrightarrow{ABC_1}$, $\sphericalangle \overrightarrow{BAC} = - \sphericalangle \overrightarrow{BAC_1}$, $\sphericalangle \overrightarrow{ACB} = - \sphericalangle \overrightarrow{AC_1B}$.

254.6. Нека C_1 е средината на страната AB од триаголникот ABC и нека $C' = \sigma_{C_1}(C)$. Докажи дека $\sphericalangle \overrightarrow{ABC} = \sphericalangle \overrightarrow{BAC'}$, $\sphericalangle \overrightarrow{BAC} = \sphericalangle \overrightarrow{ABC'}$, $\sphericalangle \overrightarrow{ACB} = \sphericalangle \overrightarrow{BC'A}$.

255.6. Дадени се точките O, A и насочениот агол α. Најди ги точките $A' = \rho_{O,\alpha}(A)$, $A'' = \rho_{O,-\alpha}(A)$. Докажи дека $\sigma_{OA}(A') = A''$.

256$_*$6. Дадена е ротацијата ρ со центар O и агол α, при што $\alpha \neq 0^0$. Да се докаже дека O е единствена неподвижна точка за таа ротација.

257$_*$6. Дадени се три точки O, A и B. Во кој случај постои ротација ρ со центар во точката O, така што $\rho(A) = B$?

258$_*$6. Даден е насочен агол α и две точки A и B. Дали постои ротација ρ за агол α, таква што $\rho(A) = B$?

259.6. Дадени се две точки A и B. Дали постои ротација ρ, така што $\rho(A)=B$?

260$_*$6. Дадени се четири точки A, B, C и D, такви што постои ротација ρ со својството $\rho(A)=C$, $\rho(B)=D$. Да се покаже дека $\overline{AB}=\overline{CD}$, но $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{CD}$.

261$_*$6. Дадени се четири точки A, B, C, D, така што $\overline{AB}=\overline{CD}$, но $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{CD}$. Да се докаже дека постои ротација ρ, така што $\rho(A)=C$, $\rho(B)=D$. Колку такви ротации постојат? Разгледај го случајот кога $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$!

262$_*$6. Избери две точки O, A и најди ги точките $A_1=\rho_{O,90^\circ}(A)$ и $A_2=\rho_{O,-90^\circ}(A)$. Покажи дека $\sigma_O(A_1)=A_2$.

263$_*$6. Избери две прави p и q што се сечат. Потоа избери точка $A\neq O=p\cap q$ и најди ги точките $A'=\sigma_p(A)$, $A''=\sigma_q(A')$. Докажи дека $A''=\rho_{O,2\alpha}(A)$, каде што α е помалиот од аглите меѓу правите p и q, насочен од p кон q.

264.6. Избери права p, точка $O\notin p$ и насочен агол α, а потоа конструирај ја сликата p' на правата p при ротацијата $\rho_{O,\alpha}$. Ако $S=p\cap q'$, докажи дека $\sigma_{os}(p)=p'$.

265.6. Избери произволна фигура (на пример, произволен триаголник) $\mathbf{F}$, точка O и насочен агол α. Ако ρ е ротацијата со центар O и агол α, конструирај ја фигурата $\rho(\mathbf{F})$.

266.6. Избери триаголник ABC и најди ја неговата слика при ротациите

а) ρ_1, со центар A и агол $\sphericalangle \overrightarrow{BAC}$,

б) ρ_2, со центар A и агол $\sphericalangle \overrightarrow{CAB}$.

267.6. Нека O е центарот на опишаната кружница на триаголникот ABC. Најди ја сликата на триаголникот ABC при ротацијата со центар O и агол $\sphericalangle \overrightarrow{AOB}$.

268.6. Нека O е центарот на рамностраниот триаголник ABC. Најди ја сликата на триаголникот ABC при ротациите ρ_1, ρ_2, ρ_3 со центар O и насочен агол: $\sphericalangle \overrightarrow{AOB}$, $\sphericalangle \overrightarrow{BOC}$, $\sphericalangle \overrightarrow{COA}$ соодветно.

269$_*$6. Дадена е ротацијата $\rho_{O,\alpha}$, $\alpha\neq 0^0, 180^0$. Дали постојат прави кои се неподвижни за оваа ротација? А за $\alpha=180^0$?

270.6. Дадена е ротацијата $\rho_{O,\alpha}$. Избери кружница (S,r) и најди ја нејзината слика при оваа ротација. Во кој случај кружницата (S,r) се пресликува во себе?

271$_*$6. Дадени се правите p и q. Во кој случај постои ротација ρ, таква што $\rho(p)=q$?

272.6. Дадени се две кружници $k_1(O_1,r_1)$ и $k_2(O_2,r_2)$. Дали постои ротација ρ, така што $\rho(k_1)=k_2$?

273$_*$6. Нека кружниците κ_1 и κ_2 се со еднакви радиуси и нека се сечат во точките A и B. Докажи дека постои ротација ρ со центар во точката A, така што $\rho(\kappa_1)=\kappa_2$. Притоа, ако $X\in\kappa_1$, и $\rho(X)=X'$, тогаш правата XX' минува низ точката B.

274.6. Нацртај рамностран триаголник ABC со центар O и конструирај ја неговата слика $A'B'C'$ при ротацијата $\rho_{O,60°}$. Дали шестаголникот $AA'BB'CC'$ е централно или основиметричен?

275$_*$6. Дадени се три точки A, B и C од правата p, така што B да е меѓу A и C. Над отсечките AB и BC, од иста страна на правата p, конструирани се рамнострани триаголници ABE и BCF. Ако M е средина на AF, а N средина на CE, докажи дека триаголникот BMN е рамностран.

276$_*$6. Избери еден триаголник ABC. Над страните AB и BC конструирај квадрати $ABMN$ и $BCPQ$, но така што квадратот $ABMN$ и триаголникот ABC да се на различни страни од правата AB, а квадратот $BCPQ$ и триаголникот ABC да се наоѓаат на иста страна од правата BC. Да се докаже дека $\overline{MQ}=\overline{AC}$ и дека правата MQ е нормална на правата AC.

277$_*$6. Дадени се прави p и q и точка A. Конструирај рамностран триаголник ABC, така што $B\in p$, $C\in q$.

278.6. Дадени се права p, кружница κ и точка A. Да се конструира рамностран триаголник ABC, така што $B\in p$, $C\in\kappa$.

279.6. Дадени се две кружници κ_1 и κ_2 и точка A. Да се конструира рамностран триаголник ABC, така што $B\in\kappa_1$, $C\in\kappa_2$.

280$_*$6. Дадени се три паралелни прави p, q и r. Да се конструира рамностран триаголник ABC, така што $A\in p$, $B\in q$, $C\in r$.

281.6. Дадени се три концентрични кружници $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$. Да се конструира рамностран триаголник ABC, така што $A\in\kappa_1$, $B\in\kappa_2$, $C\in\kappa_3$.

282$_*$6. Дадени се правите p, q и точката O. Да се конструира квадрат $ABCD$ со центар во точката O, така што две соседни темиња да лежат на правите p и q соодветно.

283.6. Дадени се права p, кружница κ и точка A. Да се конструира квадрат $ABCD$ со центар во точката O, така што две соседни темиња да лежат на p и κ соодветно.

284.6. Дадени се две кружници κ_1, κ_2 и една точка O. Да се конструира квадрат $ABCD$ со центар во точката O, така што две негови соседни темиња да лежат на κ_1 и κ_2 соодветно.

285$_*$6. Дадени се правите p, q и точка O. Да се конструира рамностран триаголник ABC со центар O, така што две негови темиња да лежат на p и q соодветно.

286.6. Дадени се права p, кружница κ и точка O. Да се конструира рамностран триаголник ABC со центар O, така што две негови темиња да лежат на p и κ соодветно.

287.6. Дадени се две кружници κ_1, κ_2 и точка O. Да се конструира рамностран триаголник ABC со центар O, така што две негови темиња да лежат на κ_1 и κ_2 соодветно.

§7.IV Правилни многуаголници

288$_*$7. Докажи дека секој рамностран триаголник има симетрија со ред 3.

289$_*$7. Еден триаголник е рамностран ако и само ако има симетрија со ред 3. Докажи!

290.7. Дали постои триаголник којшто има симетрија со ред 2?

291.7. Да се докаже дека еден четириаголник е паралелограм ако и само ако има симетрија со ред 2.

292.7. Да се докаже дека секој квадрат има симетрија со ред 4.

293.7. Да се докаже дека еден четириаголник е квадрат ако и само ако има симетрија со ред 4.

294$_*$7. Нацртај фигура **F** составена од три кружници со ист радиус, така што секоја од нив да ги допира другите две. Докажи дека **F** има симетрија со ред 3.

295.7. Нацртај три кружници со ист радиус, така што секоја од нив да минува низ центрите на другите две и исшрафирај го заедничкиот дел на соодветните кругови. Дали исшрафираната фигура има центар на симетрија и, ако има, со кој ред е?

296$_*$7$_*$ Ако една ограничена фигура **F** има точно n оски на симетрија, тогаш таа има симетрија со ред n. Докажи!

297$_*$7$_*$ Нека **F** е таква фигура за која постои најмал агол α, така што при ротацијата за агол α и при некој центар O таа се пресликува во себе. Додажи дека фигурата **F** има симетрија со ред n, за некој природен број n.

298.7. Може ли еден тетивен n-аголник да има еднакви агли но нееднакви страни?

299.7. Може ли еден тетивен n-аголник да има еднакви страни но нееднакви агли?

300.7. Може ли еден тангентен n-аголник да има еднакви страни, но нееднакви агли?

301$_*$7. Може ли еден тангентен n-аголник да има еднакви агли, но нееднакви страни?

302$_*$7. Страните AB, BC и CA на рамностраниот триаголник ABC се поделени со точките K, L и M во однос $2:1$. Докажи дека триаголникот KLM е рамностран.

303.7. Страните AB, BC и CA на рамностраниот триаголник ABC се поделени со точките K, L и M во ист однос λ. Докажи дека триаголникот KLM е рамностран.

304.7. Над страните од еден квадрат, надвор од него, конструирани се рамнострани триаголници. Докажи дека нивните центри се темиња на квадрат.

305.7. Над страните од еден паралелограм, надвор од него, конструирани се квадрати. Докажи дека нивните центри се темиња на квадрат.

306.7. Докажи дека средините на дијагоналите на еден правилен шестаголник, што не минуваат низ центарот, се темиња на правилен шестаголник.

307.7. Докажи дека секој правилен n-аголник е оснoсиметрична фигура. Колку оски на симетрија има?

308.7. Дали мора еден:

а) оснoсиметричен,

б) централносиметричен

n-аголник да биде правилен?

309.7. На страните A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 од правилниот n-аголник $A_1A_2 \ldots A_n$ положени се еднакви отсечки A_1B_1, A_2B_2, ..., $A_{n-1}B_{n-1}$, A_nB_n. Докажи дека n-аголникот $B_1B_2 \ldots B_n$ е правилен.

310$_*$7. Нека $A_1A_2 \ldots A_n$ е правилен n-аголник со центар O. Докажи дека $\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \ldots + \vec{OA_n} = \mathbf{o}$.

*§8.IV Движења и складност

311$_*$8. Да се докаже дека секое движење е биекција.

312.8. Докажи дека состав на две движења е движење.

313.8. Докажи дека, ако φ е движење, тогаш постои φ^{-1} и, притоа, φ^{-1} е движење.

314$_*$8. При секое движење три колинеарни точки се пресликуваат во три колинеарни точки, а три неколинеарни точки—во три неколинеарни точки.

315$_*$8. Да се докаже дека при секое движење права се пресликува во права.

316$_*$8. При секое движење кружница се пресликува во кружница со ист радиус. Докажи!

317.8. При секое движење агол се пресликува во нему еднаков агол. Докажи!

318$_*$8. Докажи дека состав на две транслации е транслација и дека важи комутитативниот закон за составување на транслации.

319$_*$8. Докажи дека состав на две централни симетрии е транслација. Дали важи комутативниот закон?

320$_*$8. Докажи дека состав на централна симетрија и транслација (транслација и централна симетрија) е централна симетрија.

321.8. Докажи дека состав на три централни симетрии е централна симетрија. Поопшто, докажи дека состав од парен број централни симетрии е транслација, а состав од непарен број централни симетрии е централна симетрија.

322$_*$8. Нека ρ_1 и ρ_2 се ротации со центар O и агли α и β. Докажи дека составот $\rho_1 \circ \rho_2$ е ротација со центар O и агол $\alpha+\beta$.

323$_*$8. Нека ρ_1, и ρ_2 се ротации со центри O_1, O_2 и агли α, β соодветно, при што $O_1 \neq O_2$. Докажи дека:

а) ако $\alpha+\beta \neq 0^0$, тогаш $\rho_1 \circ \rho_2$ е ротација;

б) ако $\alpha+\beta = 0^0$, тогаш $\rho_1 \circ \rho_2$ е транслација.

324.8. Докажи дека состав на две осни симетрии е или транслација или ротација.

325$_*$8. Докажи дека секоја транслација може да се претстави како состав од две осни симетрии.

326$_*$8. Докажи дека секоја ротација може да се претстави како состав на две осни симетрии.

327$_*$8. Нека a, b и c се три паралелни прави. Докажи дека составот $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ е осна симетрија.

328$_*$8. Нека a, b и c се три прави што минуваат низ иста точка O. Докажи дека составот $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ е осна симетрија.

Нека p е права и $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ вектор, паралелен со правата p. Составот $\sigma_p \circ \tau_a$ ($\tau_a \circ \sigma_p$) е движење, коешто се вика *коса симетрија*. Притоа важи $\sigma_p \circ \tau_a = \tau_a \circ \sigma_p$. Косата симетрија нема неподвижни точки, а правата p е единствена неподвижна права.

329$_*$8. Нека a, b и c се три прави што не се паралелни и не минуваат низ една иста точка. Докажи дека составот $\sigma_a \circ \sigma_a \circ \sigma_c$ е коса симетрија.

330.8. Докажи дека:

а) состав на парен број осни симетрии е транслација или ротација;

б) состав на непарен број осни симетрии е осна симетрија или коса симетрија.

331$_*$8. Нека A и B се две различни точки и нека φ е движење, такво што $\varphi(A)=A$, $\varphi(B)=B$. Докажи дека секоја точка од правата AB е неподвижна за φ, т. е.

$$(\forall X \in AB)\ \varphi(X)=X.$$

332.8. Нека A, B и C се три неколинеарни точки и нека φ е движење со својството $\varphi(A)=A$, $\varphi(B)=B$, $\varphi(C)=C$. Докажи дека $\varphi=\varepsilon$.

333$_*$8. Нека триаголниците ABC и $A'B'C'$ се складни. Докажи дека постои единствено движење φ, така што $\varphi(A)=A'$, $\varphi(B)=B'$, $\varphi(C)=C'$.

334$_*$8. Докажи дека не постои друго движење. освен следниве движења: транслација, централна симетрија, ротација, осна симетрија и коса симетрија.

335$_*$8. Дадени се три точки S_1, S_2 и S_3. Да се конструира триаголник $A_1A_2A_3$, така што дадените точки S_1, S_2 и S_3 да се средини на неговите страни A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_1 соодветно.

336$_*$8 Дадени се пет точки S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. Конструирај петаголник $A_1A_2A_3A_4A_5$, (ако таков постои) така што S_1, S_2, S_3, S_4 и S_5 да се средини на неговите страни A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 и A_5A_1 соодветно.

337.8. Дадени се точките S_1, S_2, ... S_n, n-непарен број. Докажи дека постои единствен n-аголник A_1A_2 ... A_n, така што S_1, S_2, ... S_n се средини на неговите страни A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_n A_1$ соодветно и конструирај го тој n-аголник.

338$_*$8. Дадени се четири точки S_1, S_2, S_3 и S_4. Дали постои четириаголник $A_1A_2A_3A_4$, така што S_1, S_2, S_3 и S_4 се средини на неговите страни A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и A_4A_1 соодветно?

339.8. Дадени се точките S_1, S_2, ..., S_{2n}. Докажи дека постои $2n$-аголник $A_1A_2 \dots A_{2n}$ таков што S_1, S_2, ..., S_{2n} се средини на неговите страни A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{2n} A_1$ соодветно ако и само ако $\overrightarrow{S_1S_2} + \overrightarrow{S_3S_4} + \dots + \overrightarrow{S_{2n-1}S_{2n}} = \mathbf{o}$.

340$_*$8. Во дадена кружница да се впише триаголник чии страни се паралелни соодветно со три зададени прави.

341.8. Во дадена кружница да се впише петаголник чии страни се паралелни со пет дадени прави.

342$_*$8. Над страните од произволен триаголник ABC, надвор од него (или, пак на иста страна на која е триаголникот ABC), конструирани се рамнострани триаголници ABC_1, BCA_1 и CAB_1. Докажи дека нивните центри O_1, O_2 и O_3 се темиња на рамностран триаголник.

ГЛАВА V

ТРАНСФОРМАЦИИ НА СЛИЧНОСТ

§1.V Хомотетија

1.1. Избери точки O и A и најди ги точките:

а) $A_1 = \chi_{O,3}(A)$, $A_2 = \chi_{O,-1}(A)$, $A_3 = \chi_{O,2/3}(A)$.

б) $B_1 = \chi_{O,2}(A)$, $B_2 = \chi_{O,-2}(A)$;

согледај дека $B_2 = \sigma_O(B_1)$.

2$_*$1. Нека O, A и A' се три колинеарни точки и нека $\overrightarrow{OA'} = \kappa\,\overrightarrow{OA}$. Најди ја сликата на произволна точка B при хомотетијата $\chi_{O,k}$.

3.1. Избери точки O, A_1, B_1, C_1 и најди ги точките A, B, C, D, E, такви што: $\chi_{O,3}(A) = A'_1$, $\chi_{O,1/2}(B) = B_1$, $\chi_{O,-2}(C) = C_1$, $\chi_{O,1}(D) = A_1$, $\chi_{O,3/2}(E) = A_1$.

4$_*$1. Ако $\kappa \neq 1$, тогаш точката O е единствената неподвижна точка за хомотетијата $\chi_{O,\kappa}$. Докажи!

5$_*$1. Дадени се три произволни и различни точки O, A и A'. Во кој случај постои хомотетија χ со центар O, таква што $\chi(A) = A'$? Колку такви хомотетии постојат?

6.1. Дадени се две точки A, A' и реален број $\kappa \neq 0$. Дали постои хомотетија χ со коефициент κ, така што $\chi(A) = A'$?

7.1. Дадени се две точки A и A'. Дали постои хомотетија χ, таква што $\chi(A) = A'$?

8$_*$1. Дадени се четири точки A, B, C и D. Докажи дека постои хомотетија χ, таква што $\chi(A) = C$, $\chi(B) = D$, ако и само ако векторите $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB}$ се колинеарни но различни, т.е. $\overrightarrow{CD} = \kappa\overrightarrow{AB}$ за некој реален број $\kappa \neq 1{,}0$. Разгледај го случајот кога $\kappa = 1$.

9$_*$1. Избери точки O, A и најди ги точките $A_1 = \chi_1(A)$ и $A_2 = \chi_2(A_1)$, каде што χ_1 и χ_2 се хомотетии со центар O и коефициенти κ_1 и κ_2 соодветно. Потоа, докажи дека $A_2 = \chi(A)$, при што χ е хомотетија со центар O и коефициент $\kappa_1\kappa_2$. Што може да се заклучи од тоа?

10$_*$1. Нека χ_1 е хомотетија со центар O_1 и коефициент κ_1, а χ_2, хомотетија со центар O_2 и коефициентот κ_2, при што $O_1 \neq O_2$ и $\kappa_1\kappa_2 \neq 1$. Избери точки A, B и најди ги точките $A_1 = \chi_1(A)$, $B_1 = \chi_1(B)$, $A_2 = \chi_2(A_1)$, $B_2 = \chi_2(B_1)$. Покажи дека $\overrightarrow{A_2B_2} = \kappa_1\kappa_2\,\overrightarrow{AB}$. Што може да се заклучи од ова?

11.1. Нека χ_1 е хомотетија со центар O_1 и коефициент κ_1, а χ_2 е хомотетија со центар O_2 и коефициент κ_2, при што $O_1 \neq O_2$ и $\kappa_1\kappa_2 = 1$. Избери точки A,B и најди ги точките $A_1 = \chi_1(A)$, $B_1 = \chi_1(B)$, $A_2 = \chi_2(A_1)$, $B_2 = \chi_2(B_1)$. Докажи дека $\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{AB}$. Што може да се заклучи од ова?

12.1. Дадена е хомотетија χ со центар O и коефициент **2**. Избери права a и конструирај ја правата

а) $a' = \chi(a)$; разгледај ги двата случаја кога $O \in a$ и кога $O \notin a$.

б) b, така што $\chi(b) = a$.

13.1. Избери произволна искршена линија $\mathbf{F}$, точка O и реален број $\kappa \neq 0,1$. Потоа конструирај ја фигурата $\mathbf{F}' = \chi_{O,\kappa}(\mathbf{F})$.

14.1. Избери триаголник ABC и конструирај ја сликата на тој триаголник при хомотетијата χ со центар во тежиштето T на триаголникот ABC и со коефициент $-\frac{1}{2}$.

15.1. За фигурите $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}_1$ велиме дека се *хомотетични* ако постои хомотетија χ, така што $\chi(\mathbf{F}) = \mathbf{F}_1$.

Во кој случај фигурите $\mathbf{F} = \{A,B\}$ и $\mathbf{F}_1 = \{C,D\}$ се хомотетични?

16.1. Дадени се две прави p и q. Во кој случај овие прави се хомотетични?

17.1. Дадени се две паралелни прави p и q. Каде може да се наоѓа центарот на хомотетијата χ, така што $\chi(p) = q$? Што претставува множеството од центрите на сите такви хомотетии?

18.1. Во кој случај фигурите $\mathbf{F} = \{A,B,C\}$ и $\mathbf{F}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ се хомотетични, каде што A,B,C се точки од дадена права p, а A_1, B_1, C_1—од дадена права q.

19.1. Дали две концентрични кружници се хомотетични?

20.1. Докажи дека кои било две кружници се хомотетични.

21.1. Во кој случај две кружници имаат само еден центар на сличност?

22.1. Колку центри на сличност имаат две дадени кружници ако кружниците:

а) се допираат однатре,

б) се допираат однадвор,

в) немаат заеднички точки?

23.1. Во кој случај надворешниот центар на сличност на две кружници се совпаѓа со нивниот внатрешен центар на сличност?

24.1. Колку заеднички тангенти може да имаат две дадени кружници? Разгледај ги сите можни случаи!

25$_*$1. Избери две кружници што се сечат и конструирај ги нивните заеднички тангенти.

26.1. Избери две кружници што се допираат и конструирај ги нивните заеднички тангенти. Колку заеднички тангенти имаат тие кружници?

27.1. Избери две кружници што немаат заеднички точки и конструирај ги нивните заеднички тангенти. Колку заеднички тангенти може да имаат тие кружници?

28.1. Дадени се кружници κ_1, κ_2 што се допираат во точката T. Низ точката T се повлечени две прави a и b кои кружницата κ_1 ја сечат во точките A и B, а кружницата κ_2 во точките C и D, соодветно. Докажи дека:

а) правите AB и CD се паралелни.

б) тангентите на κ_1 и κ_2 соодветно во точките A и C, односно B и D, се паралелни.

29.1. Нека Q е пресечната точка на продолженијата од краците AD и BC на трапезот $ABCD$, а P пресекот на неговите дијагонали. Докажи дека кружниците опишани околу триаголниците: а) ABQ и CDQ, б) ABP и CDP се допираат.

30$_*$1. Дадена е кружницата (O, r) и точка A на неа. Да се определи геометриското место на средините од тетивите повлечени од A.

31.1. Дадена е кружница (O, r) и точки A,B,C на неа. На кружницата (O, r) да се најде точка X, така што тетивата BC ја дели на половина тетивата AX.

32$_*$1. Над основите AB и DC од трапезот $ABCD$ на иста страна од нив, конструирани се рамнострани триаголници ABM и DCN. Докажи дека правата MN минува низ пресечната точка O од продолженијата на краците.

33.1. Над основите AB и DC на трапезот $ABCD$, надвор од него, конструирани се квадрати. Докажи дека правата што ги поврзува центрите на квадратите минува низ пресекот P од дијагоналите на трапезот.

34$_*$1. Нека $ABCD$ е трапез со основа AB и CD и нека M е средината на AB, N средината на CD, P пресекот на дијагоналите и Q пресекот од продолженијата на краците. Докажи дека точките M, N, P, Q се колинеарни.

35.1. Правата p, паралелна со страната AB на триаголникот ABC, ги сече страните AC и BC во точките M и N соодветно. Нека S_1 и S_2 се центрите на кружниците опишани соодветно околу триаголниците ABC и MNC. Докажи дека точките S_1, S_2 и C се колинеарни.

36.1. На страната AB од триаголникот ABC положени се две еднакви отсечки AM и BN; низ точките M и N повлечени се прави p и q паралелни со AC и BC соодветно. Докажи дека точката $P = p \cap q$ лежи на тежишната линија t_c.

37.1. Нека C, D и E се три колинеарни точки, а T_1, T_2 и T_3 тежиштата на триаголниците ABC, ABD и ABE. Докажи дека точките T_1, T_2 и T_3 се, исто така, колинеарни.

38$_*$1. Дадени се две концентрични кружници $k_1(O, r_1)$ и $k_2(O, r_2)$, $r_1 > r_2$. Да се повлече права p која ги сече тие кружници последователно во точките A, B, C и D, така што $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$.

39.1. Дадени се три концентрични кружници k_1, k_2 и k_3. Да се повлече права p, којашто ги сече кружниците последователно во точките A, B, C, D, E, F така што $\overline{AB} = \overline{BC}$.

40$_*$1. Да се конструира триаголник ABC ако се дадени α, β и h_c.

41.1. Да се конструира правоаголен триаголник, ако е позната висината, спуштена од темето на правиот агол и ако едната катета е двапати поголема од другата.

42.1. Да се конструира триаголник ABC ако е дадена симетралата на најмалиот од неговите агли, а неговите страни се однесуваат како $m:n:p$ $(m<n<p)$.

43.1. Да се конструира триаголник ABC, ако се познати: темето A, ортоцентарот H и центарот O на опишаната кружница.

44$_*$1 Во триаголникот ABC да се впише триаголник PQR чии страни се нормални на страните од триаголникот ABC.

45.1. Во даден триаголник ABC да се впише ромб со остар агол $\alpha = 60^0$, така што две негови соседни темиња да лежат на AB, а другите две соодветно на BC и CA.

46.1. Нека AB е дијаметар на кружницата (O, r). Да се конструира квадрат $KLMN$, така што K и L да лежат на дијаметарот AB, а M и N на кружницата (O, r).

47$_*$1. Во дадена кружница $k(O, r)$ да се впише триаголник ABC, сличен со даден триаголник PQR.

48.1. Дадена е точка A и две прави p и q, кои се сечат надвор од листот на кој цртаме. Да се конструира правата AM, каде што $M = p \cap q$.

49$_*$1. Правите a и b односно c и d се сечат надвор од листот на кој цртаме. Низ дадена точка S да се повлече права p паралелна со правата MN, каде што $M = a \cap b$, $N = c \cap d$.

50$_*$1. Дадени се две прави p, q што се сечат и точка A што не лежи на ниедна од нив. Да се конструира кружница што ги допира правите p и q и минува низ точката A.

Разгледај ги случаите кога $p \parallel q$ или, пак, A лежи на една од правите p, q.

51$_*$1. Дадена е правата p и две точки A, B. Да се конструира кружница k што минува низ точките A, B и ја допира правата p.

52$_*$1. Дадени се две прави p и q што се сечат и кружницата $\overline{k}(\overline{S}, \overline{r})$. Да се конструира кружница k што ги допира правите p, q и кружницата $\overline{k}$.

Разгледај го случајот, кога $p \parallel q$!

*§2.V Сличности и слични фигури

53.2. Докажи дека секоја сличност е биекција.

54.2. Докажи дека при секоја сличност три колинеарни точки се пресликуваат во три колинеарни точки, а три неколинеарни точки во три неколинеарни точки.

55.2. Докажи дека при секоја сличност права се пресликува во права.

56.2. Докажи дека при секоја сличност кружница се пресликува во кружница.

57.2. Докажи дека при секоја сличност агол се пресликува во нему еднаков агол.

58$_*$2. Докажи дека состав на две сличности е пак сличност. Во кој случај составот на две сличности е движење?

59.2. Ако ψ е сличност, тогаш постои ψ^{-1} и, притоа, ψ^{-1} е исто така сличност.

60.2. Нека χ_1, χ_2 се хомотетии со ист центар O и коефициент κ_1, κ_2 соодветно. Докажи дека составот $\chi_1 \circ \chi_2$ е хомотетија со центар O и коефициент $\kappa_1 \kappa_2$ и дека важи $\chi_1 \circ \chi_2 = \chi_2 \circ \chi_1$.

61.2. Нека χ_1, χ_2 се хомотети со центри O_1, O_2 $(O_1 \neq O_2)$ и коефициенти κ_1, κ_2 соодветно. Докажи дека:

а) ако $\kappa_1 \kappa_2 = 1$, тогаш $\chi_1 \circ \chi_2$ е транслација;

б) ако $\kappa_1 \kappa_2 \neq 1$, тогаш $\chi_1 \circ \chi_2$ е хомотетија.

62.2. Нека составот $\chi_1 \circ \chi_2$ на хомотетите χ_1 и χ_2 е хомотетија χ_3. Докажи дека центрите на овие три хомотетии се колинеарни.

63.2. Докажи дека состав на централна симетрија и хомотетија со коефициент $\kappa \neq -1$ (хомотетија со коефициент $\kappa \neq -1$ и централна симетрија) е хомотетија. Разгледај го случајот $\kappa = -1$.

64.2. Докажи дека состав на транслација и хомотетија (хомотетија и транслација) е хомотетија.

65.2. Докажи дека состав на ротација ρ за агол $\alpha \neq 0^0$, 180^0 и хомотетија χ е сличност што не е хомотетија. Разгледај го случајот $\alpha = 0^0$ и $\alpha = 180^0$!

66.2. Докажи дека состав на осна симетрија σ_a и хомотетија χ е сличност што не е хомотетија.

67$_*$2. Нека ABC и $A'B'C'$ се два слични триаголника. Докажи дека постои единствена сличност ψ, таква што $\psi(A) = A'$, $\psi(B) = B'$, $\psi(C) = C'$:

68$_*$2. Докажи дека не постои друга сличност освен: движење, хомотетија, состав на ротација и хомотетија, состав на осна симетрија и хомотетија.

69$_*$2. Нека A_1, B_1 и C_1 се средините на страните BC, CA и AB на триаголникот ABC, P произволна точка и нека A_2, B_2 и C_2 се точките симетрични со P во однос на A_1, B_1 и C_1. Докажи дека отсечките AA_2, BB_2 и CC_2 минуваат низ иста точка M, којашто ги преполовува.

70$_*$2. Дадени се правата p, точката A од p и кружниците κ_1, κ_2. Да се конструира триаголник ABC, за кој: правата p е симетрала на аголот $\alpha = \sphericalangle A$, познат е односот $\overline{AB} : \overline{AC}$, а темињата B и C лежат на кружниците κ_1, κ_2 соодветно.

71$_*$2. Дадени се точката A, аголот α и кружниците κ_1, κ_2. Да се конструира триаголник ABC за кој е познат односот $\overline{AB} : \overline{AC}$, $\sphericalangle A = \alpha$, а темињата B и C лежат на кружниците κ_1 и κ_2 соодветно.

72.2. Во триаголникот ABC да се впише триаголник PXT, сличен со даден триаголник KLM, ако точката P е дадена на страната AB.

ГЛАВА VI

КОШЕ И ПОЛИЕДРИ

§1.VI Точка и рамнина

1.1. Нацртај (со слободна рака) рамнина и возможните положби на две точки спрема таа рамнина.

2.1. Колку рамнини се определени со:

а) една точка б) две точки,

в) три точки, г) четири точки?

3.1. Ако две рамнини имаат заедничка точка, тогаш тие се сечат по права што минува низ таа точка. Докажи!

4.1. Докажи дека. ако две рамнини имаат заедничка права и заедничка точка, надвор од таа права, тогаш тие рамнини се совпаѓаат.

5_*1. Да се докаже: ако кои било четири точки од некоја фигура лежат во една рамнина, тогаш таа фигура е рамнинска, т.е. сите нејзини точки лежат во една рамнина.

6.1. Нека точките A и B се на различни страни од рамнината Σ. Да се докаже дека секоја искршена линија со крајни точки A и B има барем една заедничка точка со рамнината Σ.

7.1. Дадени се четири точки A, B, C и D што не лежат во иста рамнина. Да се докаже дека средините на отсечките AB, BC, CD и DA лежат во иста рамнина.

8_*1. Три прави a, b, c минуваат низ иста точка M од просторот. Четврта права p ги сече сите три прави. Докажи дека тие четири прави лежат во иста рамнина или минуваат низ иста точка.

§2.VI Права и рамнина

9_*2. Докажи дека постои единствена рамнина Σ којашто минува низ дадена точка A и е нормална на дадена права a.

10_*2. Докажи дека постои единствена права a што минува низ дадена точка A и е нормална на дадена рамнина Σ.

11.2. Дадена е правата a и на неа точка A. Да се најде геометриското место на правите кои минуваат низ точката A и се нормални на правата a.

12$_*$2. Да се најде геометриското место на точки во просторот, коишто се еднакво оддалечени од две дадени точки A и B.

13.2. Дадена е рамнина Σ и на неа две прави a и b што се сечат во точката O. На правата a нанесуваме две еднакви отсечки OA и OB, а на правата b две еднакви отсечки OC и OD. Нека M е точка од просторот, така што $\overline{MA}=\overline{MB}$ и $\overline{MC}=\overline{MD}$. Да се докаже дека правата MO е нормална на рамнината Σ.

14$_*$2. Нека O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC и нека p е права низ O нормална на рамнината $\Sigma=ABC$. Да се докаже дека секоја точка P од правата p е еднакво оддалечена од точките A, B и C.

15$_*$2. Низ средините A_1, B_1 и C_1 од страните BC, CA и AB на триаголникот ABC повлечени се рамнини Σ_1, Σ_2 и Σ_3 нормални на соодветните страни. Да се докажи дека рамнините Σ_1, Σ_2 и Σ_3 минуваат низ една права.

16.2. Да се најде геометриското место на точки еднакво оддалечени од три дадени точки A, B и C.

17.2. Правите AB и AC лежат во рамнината Σ. Во точката A поставени се две рамнини Π_1 и Π_2, нормални на правите AB и AC соодветно. Да се докаже дека правата $a=\Pi_1\cap\Pi_2$ е нормална на рамнината Σ.

18.2. Нека точките A, B се на различни страни од рамнината Σ и на исти растојанија од неа и нека A', B' се проекциите од A и B врз Σ. Да се докаже дека отсечките AB и $A'B'$ имаат заедничка точка и дека таа точка ги преполовува.

19.2. Нека точките A и B се на иста страна од рамнината Σ, и нека A' и B' се нивните проекции врз Σ. Докажи дека правите AB' и $A'B$ се сечат.

20$_*$2. Нека правата a ја прободува рамнината Σ во точката P, а правата b нека лежи во Σ и минува низ P. Да се докаже дека аголот α меѓу a и Σ е помал или еднаков од аголот β меѓу a и b, т.е $\alpha\leqslant\beta$.

21.2. Дадена е рамнината Σ и точките A, B, C, D, така што $A,B\in\Sigma$, $C,D\notin\Sigma$, $\overline{AC}=\overline{BD}$ и C, D се еднакво оддалечени од рамнината Σ. Да се докаже дека правите AC и BD зафаќаат еднакви агли со рамнината Σ.

22.2. Дадена е рамнина Σ и точка A надвор од неа. Нека x е права низ точката A што зафаќа даден агол α со рамнината Σ. Да се најде геометриското место на точките $x\cap\Sigma$.

23$_*$2. Дадена е рамнина Σ, права b во Σ и точка A надвор од Σ. Низ точката A повлечи права a, којашто зафаќа даден агол α со Σ и ја сече дадената права b од Σ.

24$_*$2. Нека a е права наведната кон рамнината Σ и нека a' е проекцијата на a врз рамнината Σ. Докажи дека една права b од Σ што минува низ точката $A = a \cap \Sigma$, е нормална на a' ако и само ако b е нормална на a.

25.2. Дадена е права a и точка B надвор од неа. Да се докаже дека низ точката B минува единствена права b што е паралелна со правата a.

26$_*$2. Ако две прави a и b се нормални на една иста рамнина Σ, тогаш тие се паралелни. Докажи!

27$_*$2. Нека правите a и b се паралелни и нека рамнината Σ е нормална на правата a. Да се докаже дека рамнината Σ е нормална и на правата b.

28.2. Може ли две непаралелни прави да се нормални на иста рамнина?

29.2 Како може во просторот да се повлечат n прави кои се паралелни меѓу себе, а кои биле три од нив да не лежат во иста рамнина?

30$_*$2. Дадени се три меѓусебно паралелни прави a, b и c. Да се најде права x еднакво оддалечена од правите a, b и c.

31.2. Да се докаже дека две паралелни прави a и b зафаќаат еднакви агли со рамнината Σ.

32.2. Ако едната од две паралелни прави a, b прободува дадена рамнина Σ, тогаш и другата права ја прободува Σ.

Нека a и b се разминувачки прави и нека O е произволна точка од просторот Низ О да повлечеме прави a' и b' паралелни со a и b соодветно. Аголот меѓу a' и b, се вика *агол меѓу разминувачките прави* a и b. Ако $a \parallel b$, тогаш аголот меѓу нив се зема да е $0°$.

33$_*$2. Докажи дека аголот меѓу две разминувачки прави a и b не зависи од изборот на точката O.

34.2. Ако a_1, a_2, b_1, b_2 се прави, така што $a_1 \parallel a_2$, $b_1 \parallel b_2$, тогаш аголот α_1 меѓу a_1 и b_1 е еднаков со аголот α_2 меѓу a_2 и b_2. Докажи!

35$_*$2. Докажи дека кои било разминувачки прави a и b имаат само една заедничка нормала n.

36$_*$2. Должината на отсечката од заедничката нормала на две разминувачки прави a и b е најкусото растојание меѓу тие прави. Докажи!

37.2. Дадени се две разминувачки прави со најкусо растојание 5 см и агол меѓу нив од 30^0. Да се постави отсечка од 7 см така што нејзините краеви да лежат на дадените прави и со секоја од нив да гради ист агол.

38.2. Дадени се две разминувачки прави a и b. Да се конструира права s којашто минува низ средината на отсечката со најкусо растојание и со секоја од нив гради агол, еднаков со половината од аголот меѓу a и b.

39$_*$2. Нека правата a и рамнината Σ се нормални на една иста права b. Да се докаже дека $a \parallel \Sigma$.

40$_*$2. Нека правата a. што не лежи во рамнината Σ, е паралелна со некоја права b од Σ. Докажи дека $a \parallel \Sigma$!

41.2. Нека рамнината Σ_1 и Σ_2 се сечат во правата b и нека правата a е паралелна со правата b. Да се докаже дека $a \parallel \Sigma_1$ и $a \parallel \Sigma_2$.

42.2. Нека правата a е паралелна со рамнината Σ и нека Π е произволна рамнина низ правата a. Да се докаже дека правата a е паралелна со правата $b = \Sigma \cap \Pi$.

43.2. Нека правата a е пералелна со рамнината Σ и нека b е права што минува низ некоја точка B од Σ и е паралелна со правата a. Да се докаже дека правата b лежи во рамнината Σ.

44.2. Нека правата a е паралелна на две рамнини Σ_1 и Σ_2 што се сечат во правата b. Да се докажи дека $a \parallel b$.

45.2. Ако правата a е паралелна на рамнината Σ, тогаш кои било две точки од a се еднакво оддалечени од Σ.

46$_*$2. Низ точката A што не лежи во рамнината Σ да се повлече права паралелна со Σ. Колку решенија има задачата?

47$_*$2. Наз точката A што не лежи на правата a да се повлече рамнина Σ паралелна со правата a. Колку решенија има задачата?

48$_*$2. Низ дадена права a постави рамнина Σ, којашто е паралелна на друга права b.

49.2. Низ точка A што не лежи на ниедна од рамнините Σ_1 и Σ_2, што се сечат, повлечи права a паралелна се двете рамнини.

50$_*$2. Низ точка A што не лежи на ниедна од правите a и b повлечи рамнина Σ паралелна на двете прави.

51$_*$2. Дадени се рамнина Σ, права a што ја прободува и точка A надвор од нив. Низ точката A да се повлече права b што ја сече правата a и е паралелна на рамнината Σ.

52.2. Каква положба може да имаат правите од една рамнина Σ спрема права a што е паралелна со рамнината Σ и $a \not\subset \Sigma$.

53.2. Ако две точки A и B од правата a се еднакво оддалечени од рамнината Σ и лежат на истата страна од Σ, тогаш $a \parallel \Sigma$. Докажи!

54.2. Да се најде геометриското место на правите кои ја сечат дадената права a и се паралелни на дадена права b.

55.2. Дадена е правата p, рамнина Σ и права a што е паралелна со Σ. Да се најде геометриското место на прободите на Σ со права x што ја сече a и е паралелна со p.

§3.VI Две рамнини. Диедар

56$_*$3. Нека p е права, а Σ_1 и Σ_2 две различни рамнини нормални на правата p. Да се докаже дека $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$.

57$_*$3. Да се докаже дека постојат различни паралелни рамнини, т.е. две рамнини Σ_1 и Σ_2, така што $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$.

58$_*$3. Нека правите a_1, a_2 од рамнината Σ_1 се паралелни соодветно на правите b_1, b_2 од рамнината Σ_2. Дали рамнините Σ_1 и Σ_2 се паралелни?

59.3. Нека рамнината Π ги сече паралелните рамнини Σ_1 и Σ_2 во правите a_1 и a_2. Да се докаже дека $a_1 \parallel a_2$.

60$_*$3. Низ која било точка A минува единствена рамнина Σ паралелна на дадена рамнина Π. Докажи!

61.3. Да се најде геометриското место на прави коишто минуваат низ дадена точка A и се паралелни на дадена рамнина Σ.

62.3. Да се најде геометриското место на точки, кои што се на дадено растојание од дадена рамнина Σ.

63$_*$3. Дадени се две разминувачки прави a и b. Низ a и b да се повлечат соодветно рамнини Σ_1 и Σ_2, така што $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$.

64$_*$3. Даден е аголот $\alpha = \sphericalangle (h, k)$. Да се конструира диедар, така што α да е негов агол.

65.3. Точката A лежи на едниот, а точката B на другиот ѕид од еден диедар и тие се еднакво оддалечени од работ на диедарот, сметано од иста точка O. Да се докаже дека правата AB зафаќа еднакви агли со ѕидовите на диедарот.

66.3. На едниот ѕид од прав диедар е земена точка A на растојание $\overline{AA'} = 16$ см од работ, а на другиот ѕид е земена точка B на растојание $\overline{BB'} = 12$ см. Растојанието меѓу A' и B' е 21 см. Да се пресмета $\overline{AB}$.

67.3. Од две точки A и B на еден ѕид од даден диедар, коишто од работ се оддалечени 18 см и 27 см соодветно, подигнати се нормали до пресекот со другиот ѕид. Должината на првата нормала $\overline{AA''} = 6$ см. Колкава е должината на другата нормала?

68$_*$3. Ако една рамнина Σ_1 содржи права a, нормална на рамнината Σ_2, тогаш $\Sigma_1 \perp \Sigma_2$. Докажи!

69.3. Нека рамнината Σ е нормална на правата $a = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Да се докаже дека $\Sigma \perp \Sigma_1$ и $\Sigma \perp \Sigma_2$.

70$_*$3. Нека рамнините Σ_1 и Σ_2 се заемно нормални и нека $A \in \Sigma_1$. Ако a е права низ A и нормална на Σ_2, тогаш a лежи во Σ_1. Докажи!

71.3. Нека рамнините Σ_1 и Σ_2 се сечат и се нормални на рамнината Σ. Докажи дека правата $a = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ е, исто така, нормална на рамнината Σ.

72.3. Дадени се права a и рамнина Σ_1. Низ правата a да се повлече рамнина Σ што е нормална на рамнината Σ_1.

73.3. Дадена е точка A и рамнина П. Низ точката A да се повлече рамнина Σ што е нормална на рамнината П.

74.3. Низ дадена точка A да се повлечат три заемно нормални рамнини.

75.3. Низ дадена точка A да се постави рамнина Σ што е нормална на две рамнини Σ_1 и Σ_2.

§4.VI Ќоше

76_*4. Секој рабен агол на трирабно ќоше е поголем од разликата на другите два рабни агли. Докажи!

77_*4. Збирот на рабните агли на едно повеќерабно ќоше е помал од 360^0.

78.4. Дали постои трирабно ќоше, на кое рабните агли се:

а) 30^0, 90^0, 50^0;

б) 80^0, 160^0, 90^0;

в) 150^0, 60, 35^0;

г) 50^0, 50^0, 90^0.

79_*4. Сите рабни агли на едно повеќерабно ќоше се по 60^0. Колку рабови може да има тоа ќоше?

80.4. Два рабни агли на трирабно ќоше се: а) 70^0 и 80^0, б) 100^0 и 90^0. Во кои граници се движи третиот рабен агол?

81_*4. Сите рабни агли на едно трирабно ќоше се прави. Да се најдат диедрите на тоа трирабно ќоше.

82.4. Ако збирот на рабните агли од едно трирабно ќоше е 180^0, тогаш тие се остри. Докажи!

83.4. Триаголниците ABC и ABD не лежат во иста рамнина. Да се докаже дека $\sphericalangle ACB + \sphericalangle CBD + BDA + \sphericalangle DAC < 360^0$.

84.4. Во дадено трирабно ќоше два рабни агла се по 45^0, а диедарот меѓу нив е 90^0. Да се најде третиот рабен агол.

85.4. Нека A, B, C се три произволно замени точки од рабовите на трирабно ќоше чии рабни агли се прави. Да се докаже дека триаголникот ABC е остроаголен.

86_*4. Дадено е четирирабно ќоше. Да се докаже дека постои рамнина која ги сече ѕидовите на ќошето во паралелограм.

§5.VI Геометриско тело

87.5. Да ставиме $\mathbf{A} = T[O,R]$, $\mathbf{B} = S(O,R)$, $\mathbf{C} = T(O,R)$. Кои фигури се множествата: $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \cup \mathbf{C}$, $\mathbf{A} \cap \mathbf{C}$, $\mathbf{B} \cap \mathbf{C}$, $\mathbf{A} \setminus \mathbf{C}$, $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$?

88*5. Нека $r < R$. Да се докаже дека $T[O,r]$, $S(O,r)$ и $T(O,r)$ се подмножества од $T[O,R]$. Дали: а) $S(O,r) \subseteq S(O,R)$, б) $T(O,r) \subseteq T(O,R)$?

89*5. Нека $M \in T(O,R)$ и нека $0 < r < R - \overline{OM}$. Да се докаже дека $T[M,r]$, $S(M,r)$ и $T(M,r)$ се подмножества од $T(O,R)$.

90*5. Нека M е која било точка од отворената топка $T(O,R)$. Да се покаже дека постои реален број r, така што $T(M,r) \subset T(O,R)$.

91.5. Нека O_1 и O_2 се две различни точки и нека $R = \frac{1}{2}\overline{O_1 O_2}$. Да се најде: $T(O_1,R) \cap T(O_2,R)$, $T(O_1R) \cap T[O_2,R]$, $T[O_1,R] \cap T[O_2,R]$.

92.5. Нека O_1 и O_2 се две различни точки. Да се покаже дека постојат броеви R_1 и R_2, така што:

а) $T(O_1,R_1) \cap T(O_2,R_2) = \varnothing$,

б) $T[O_1,R_1] \cap T[O_2,R_2] = \varnothing$.

93*5. Да се покаже дека секоја точка од отворената топка $T(O,R)$ е внатрешна за $T(O,R)$.

94.5. Да се покаже дека ниедна точка на сферата $S(O,R)$ не е внатрешна за $S(O,R)$.

95.5. Кои се внатрешни точки за топката $T[O,R]$?

96.5. Која од следниве фигури е сврзлива: а) агол, б) n-аголник, в) полукружница, г) кружен прстен?

97.5. Која од фигурите претставени со цртежите VI. 1 — VI. 7 е сврзлива?

98*5. Да се покаже дека секој круг (отворен или затворен) и секоја топка (отворена или затворена) е сврзлива фигура.

99.5. Нека кружниците $\kappa_1(O_1,r_1)$ и $\kappa_2(O_2,r_2)$ се допираат во точката M. Која од следниве фигури е сврзлива:

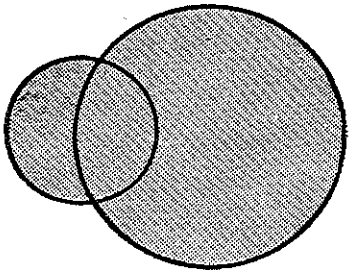
а) $\kappa_1[O_1,r_1) \cup \kappa_2[O_2,r_2)$,

б) $\kappa_1[O_1,r_1] \cup \kappa_2[O_2,r_2)$,

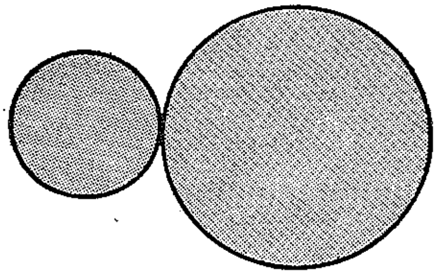
в) $\kappa_1[O_1,r_1) \cup \kappa_2[O_2,r_2]$,

г) $\kappa_1[O_1,r_1] \cup \kappa_2[O_2,r_2]$?

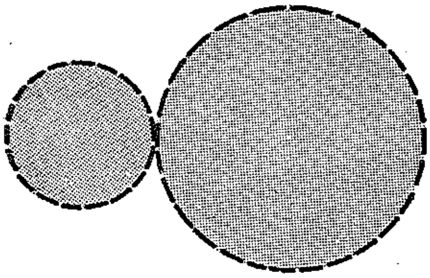
100.5. Која од следниве фигури е линеарна област: а) полуправа, б) полуправа без почетната точка, в) права, г) унијата од две отворени отсечки без заеднички точки, д) три колинеарни точки.



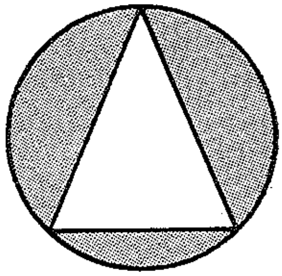
Црт. VI. 1



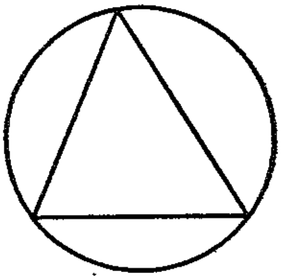
Црт. VI. 2



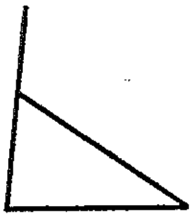
ЦРт. VI. 3



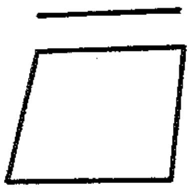
Црт. VI. 4



Црт. VI. 5



Црт. VI. 6



Црт. VI. 7

101.5. Дали некоја од фигурите на црт. VII. 1 — VII 7. е рамнинска област?

102.5. Докажи дека секој отворен круг е рамнинска област.

103.5. Докажи дека ниеден круг и ниедна кружница не е рамнинска област.

104$_*$5. Дадени се два отворени круга κ_1 и κ_2 со непразен пресек. Да се докаже дека фигурата $\kappa_1 \cup \kappa_2$ е рамнинска област.

105$_*$5. Нека $\kappa_1\,[O_1, r_1)$ и $\kappa_2\,[O_2, r_2)$ се два отворени круга со непразен пресек. Да се докаже дека $\kappa_1 \cup \kappa_2 = \mathbf{G}$ е рамнинска област.

106.5. Да се докаже дека секоја отворена топка е просторна област.

107.5. Да се докаже дека ниедна топка и ниедна сфера не е просторна област.

108.5. Во кој случај унијата од две отворени топки е просторна област?

109.5. Внатрешноста на секој диедар односно на секое ќоше е просторна област. Образложи!

110$_*$5. Нека $\mathbf{G}_1$ и $\mathbf{G}_2$ се области од ист вид и $\mathbf{G}_1 \cap \mathbf{G}_2 \neq \varnothing$.

а) Докажи дека фигурата $\mathbf{G}_1 \cup \mathbf{G}_2$ е област.

б) Дали и $\mathbf{G}_1 \cap \mathbf{G}_2$ е област?

111.5. Нацртај една фигура **F** што содржи:

а) само внатрешни точки,

б) само гранични точки,

в) и внатрешни и гранични точки.

112$_*$5. Да се докаже дека секоја точка од кружницата $\kappa(O,R)$ е гранична точка за секоја од фигурите: $\kappa(O,R)$, $\kappa\,[O,R)$ и $\kappa\,[O,R]$.

113.5. Да се докаже дека секоја точка од сферата $S(O,R)$ е гранична за секоја од фигурите: $S(O,R)$ $T(O,R)$ $T[O,R]$.

114.5. Кои се границите на фигурите од црт. VI. 1—VI. 7.

115.5. Кои од следниве фигури се линеарни затворени области: права, отсечка, отворена отсечка, полуправа, полуправа без почетната точка, искршена линија?

116.5. Кои од следниве фигури се рамнински затворени области: круг, кружница, отворен круг, триаголник, исполнет триаголник?

117.5. Кои од фигурите на црт. VI. 1—VI. 7 се затворени области?

118.5. Секоја затворена област $\overline{\mathbf{G}}$ е унија од соодветната област **G** и границата на **G**. Докажи!

119.5. Во кој случај унија од две затворени области е затворена област?

120.5. Докажи дека секоја топка е тело.

121.5. Докажи дека ниедна отворена топка и ниедна сфера не е тело.

122.5. Во кој случај унијата на две тела е тело?

§6.VI Полиедри

123.6. Дали постои полиедар чии ѕидови се:

а) 7 триаголници,

б) 9 петаголници?

124$_*$6. Да се докаже дека не постои полиедар што има непарен број ѕидови, секој од кои е со непарен број страни.

125$_*$6. Да се докаже дека еден полиедар не може да има помалку од 6 рабови?

126.6. Дали постои полиедар што има точно 6 рабови?

127.6. Да се докаже дека не постои полиедар што има 7 рабови.

128.6. Нека $r \geqslant 8$. Да се се докаже дека постои полиедар што има точно r рабови.

129.6. Колку дијагонали (просторни) може да се повлечат од едно теме на една n-страна призма?

130.6. Да се најде бројот на сите дијагонали (просторни) на една n-страна призма.

Ако ја пресечеме една дадена призма со рамнина Σ, тогаш добиваме еден многуаголник, којшто ќе го викаме *пресек*. Ако рамнината Σ:

— е паралелна со основите на призмата, тогаш соодветниот пресек ќе го викаме *паралелен пресек*;

— е нормална на бочните рабови на призмата, тогаш соодветниот пресек ќе го викаме *нормален пресек*;

— минува низ два несоседни бочни рабови на призмата, тогаш соодветниот пресек ќе го викаме *дијагонален пресек*.

131.6. Да се докаже дека:

а) Секој паралелен пресек е складен со основите на призмата.

б) Кои било два нормални пресека на една призма се паралелни и складни меѓу себе.

в) Секој дијагонален пресек на една призма е паралелограм.

132.6. Ако од дадена n-страна призма со дијагонален пресек отсечеме една триаголна призма, за колку ќе се намали бројот на:

а) ѕидовите;

б) темињата;

в) рабовите?

133.6. Ако го удвоиме бројот на бочните ѕидови на една n-страна призма, што ќе стане со бројот на темињата и со бројот на рабовите?

134$_*$6. Ако два соседни бочни ѕида на една призма се правоаголници, тогаш таа е права призма. Докажи!

135.6. Бочната површина на една права призма е составена од складни правоаголници. Дали таа призма е правилна?

136.7. Може ли бочните ѕидови на една призма да се нескладни квадрати?

137.6. Да се докаже дека дијагоналните пресеци на правилна петстрана призма се складни. Дали важи истото и за правилна n-страна призма, $n > 5$?

138$_*$6. Да се докаже дека дијагоналите во кој било паралелопипед се сечат во една точка и се преполовуваат.

139.6. Отсечката што ги сврзува средините на два несоседни бочни рабови на еден паралелопипед минува низ пресекот на неговите дијагонали. Докажи!

140.6. Да се докаже дека дијагоналите во кој било квадар (правоаголен паралелопипед) се еднакви.

141.6. Ако дијагоналите на еден паралелопипед се еднакви, тогаш тој е квадар. Докажи!

142*.6. Може ли бочните рабови на една пирамида да се еднакви?

143.6. Основата на една пирамида е: а) триаголник, б) трапез, в) паралелограм. Дали може бочните рабови на таа пирамида да се еднакви?

144*.6. Бочните рабови на една пирамида, чија основа е правоаголен триаголник, се еднакви. Да се докаже дека еден од бочните ѕидови е нормален на основата.

145*.6. Може ли бочните ѕидови на една n-страна пирамида да се:
а) рамнострани триаголници;
б) правоаголни триаголници со прави агли кај врвот на пирамидата.

Ако една пирамида ја пресечеме со рамнина Σ, тогаш добиваме еден многуаголник, којшто го викаме *пресек*. Разликуваме:

— *бочен пресек*, ако рамнината сече бочни рабови на пирамидата, но не минува низ врвот; специјално. ако рамнината е паралелна со основата, пресекот се вика *паралелен пресек*;

— *врвен пресек*, ако рамнината минува низ врвот на пирамидата; специјално, ако рамнината минува низ два несоседни бочни рабови, пресекот се вика *дијагонален пресек*.

146*.6. Да се докаже дека секоја тристрана пирамида има бочен пресек во форма на ромб.

147.6. Да се докаже дека секоја четиристрана пирамида има бочен пресек во форма на паралелограм.

148.6. Дадена е четиристрана пирамида со еднакви бочни рабови. Да се докаже дека дијагоналните пресеци се нормални на основата.

149.6. Во кој случај дијагоналните пресеци на една четиристрана пирамида се нормални на основата и се меѓусебно нормални?

150.6. Нацртај еден полиедар и провери ја теоремата на Ојлер.

151*.6. Провери ја теоремата на Ојлер на:

а) n-страна призма;

б) n-страна пирамида.

152.6. Наведи пример на полиедар при кој во секое теме се среќаваат по ист број рабови, а тој да не е правилен полиедар.

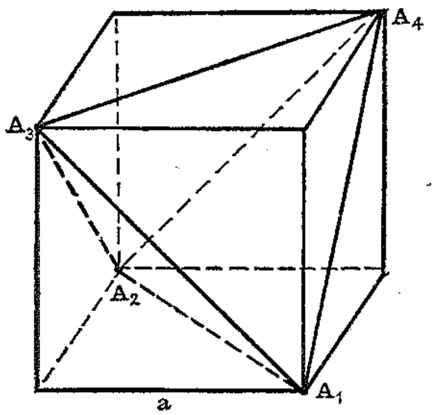
153.6. Дали постои конвексен полиедар чии ѕидови се правилни и складни многуаголници, а тој да не е правилен?

154.6. Дали постои (конвексен) полиедар чии ѕидови се складни многуаголници, и при кој во секое теме се среќаваат по ист број рабови, а тој да не е правилен?

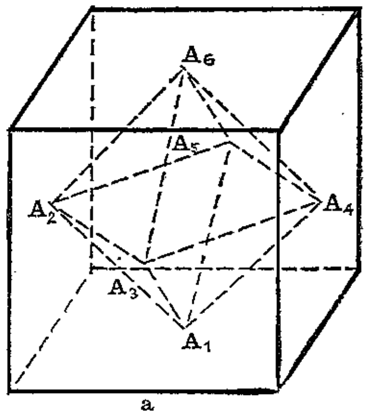
155.6. Дадена е коцка (правилен хексаедар) со раб a.

а) Повлекувајќи ги дијагоналите на ѕидовите од коцката како на црт. VI. 8 се добива тетраедар. Докажи дека тој тетраедар е правилен и најди ја должината на неговиот раб.

б) Сврзувајќи ги центрите на ѕидовите од коцката како на црт. VI. 9 се добива октаедар. Докажи дека тој е правилен и најди ја должината на неговиот раб.



Црт. VI. 8



Црт. VI. 9

156.6. Докажи дека средините на рабовите на еден правилен тетраедар се темиња на еден правилен октаедар. Најди го работ на октаедарот ако работ на тетраедарот е a.

157.6. Докажи дека осумте ѕидови на правилен октаедар лежат на четири парови паралелни рамнини.

158.6. Докажи дека трите отсечки што ги сврзуваат спротивните темиња на правилен октаедар се заемно нормални и еднакви. Најди ја нивната должина ако работ на октаедарот е a.

159.6. Докажи дека центрите на ѕидовите од еден правилен полиедар се темиња на правилен полиедар. На кој?

160.6. Работ на еден правилен октаедар е a. Да се најде растојанието меѓу центрите на два:

а) соседни ѕидови,

б) паралелни ѕидови,

в) несоседни непаралелни ѕидови.

161.6. Докажи дека сите четири висини на правилен тетраедар се сечат во иста точка O. Таа точка ги дели висините во однос $1:3$, така што поголемиот дел е од темето.

162.6. Докажи дека на правилен тетраедар може да му се впише и да му се опише сфера и дека тие се концентрични. Како се определува нивниот центар?

163.6. Која рамнина го сече правилниот тетраедар по квадрат? Најди го периметарот s на тој квадрат, ако работ на тетраедарот е a.

164.6. Докажи дека на секој правилен полиедар може да му се впише и да му се опише сфера и дека тие сфери се концентрични.

165$_*$6. Користејќи ја Ојлеровата теорема за врската меѓу темињата, ѕидовите и рабовите на еден полиедар, докажи дека има точно пет правилни полиедри.

ВТОР ДЕЛ

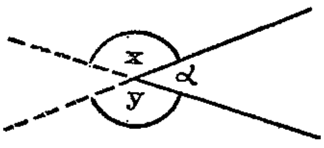
ОДГОВОРИ И УПАТСТВА

Гл. I. МЕЃУСЕБНИ ОДНОСИ НА ОСНОВНИТЕ ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

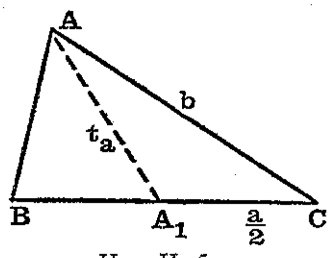
2.1. Уп. Да се искористи претходната задача. **5.1** .Уп. Како во претходната задача, разгледај ги сите можни случаи на меѓусебната положба на петте произволно земени точки. **7.1.** Една, две, три, четири, пет или шест. **8.1.** а) Три, б) Шест в) Десет. **9.1.** А. 1 е задоволена, а А. 2 не е задоволена. На пример, низ точките (1, 0) и (1, 1) не минува ни една права. **10.1.** А. 1 да; А. 2 не. **11.1.** Да, задоволени се и двете аксиоми. Исто така, постојат прави што немаат заедничка точка. На пример, тоа се правите $\{(x,\ kx + n_1)|x \in \mathbf{N}\}$ и $\{(x, kx + n_2) \mid x \in \mathbf{N}\}$, $n_1 \neq n_2$, $\{(k_1, y) \mid y \in \mathbf{N}\}$ и $\{(k_2, y) \mid y \in \mathbf{N}\}$, $k_1 \neq k_2$. Уп. Види го решението на 9. 1. I. **12.1.** Да. Кои било две прави од обликот $\{(x, kx) \mid x \in \mathbf{Q}\}$ немаат заедничка точка. И од вториот облик постојат прави што немаат заедничка точка. На пример, такви се правите $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Q},\ x^2 + y^2 + x = 0\}$ и $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Q},\ x^2 + y^2 + 2x = 0\}$. **15.2.** Уп. Да се искористи претходната задача. **17.2.** Една или четири. **21.3.** Уп. Искористи ја 20. 3. I. **22.3.** Уп. Да се искористи тоа што правата a и рамнината Σ се различни како множества точки. **25.3.** Уп. Да се искористи 24. 3. I. **27.4.** Уп. Согледај дека рамнините имаат заедничка права и искористи ја задачата 22. 3. I. **28.4.** Уп. Искористи ја аксиомата А. 3, така што ќе формираш права која ги прободува дадените рамнини. **29.5.** Уп. Разгледај ги двата можни случаи: правите лежат во иста рамнина или, пак, не лежат во иста рамнина. **30.5.** Уп. Согледај дека низ правата a и низ точката B минува една рамнина и потоа разгледај ги двете можности: C да лежи на рамнината и C да не лежи на рамнината. **31.5.** Не секогаш, зашто ако точките A, B и C се колинеарни, тогаш не мора рамнините да се совпаѓаат. **32.5.** Не. Секоја права што лежи во рамнината Σ или ја сече правата a или, пак, е разминувачка со неа. **33.5.** Не мора. **34.5.** Не мора. Ако c минува низ пресекот на a и b, тогаш c не мора да лежи во Σ; ако, пак, c ги сече a и b во две различни точки, тогаш c лежи во Σ. **35.6.** Уп. Искористи ја аксиомата за растојание. **37.6.** а) Да. б) Да. в) Не. г) Да. д) Не. **39.6.** Да. Уп. Провери ја точноста на аксиомата за растојание во овој случај. **40.6.** а) Не. б) Не. в) Да. г) Не. д) Не. **41.6.** а) Да. б) Не. в) Да. г) Не. **42.7.** а) Да; B лежи меѓу A и C. б) Не. в) Не. г) Да; A лежи меѓу B и C. **43.7.** Да. **44.7.** Постојат бесконечно многу такви точки. **45.7.** Уп. Да се искористи 38. 6. I. **48.7.** Не. **49.7.** 4. **50.7.** Со две; со почетокот и со една друга точка. **52.8.** 6; ако точките ги означиме со A, B, C и D, тогаш тоа се отсечките: AB, AC, AD, BC, BD и CD. **53.8.** Може; на пример, ако три темиња лежат на иста права, тогаш тие не може да бидат соседни; ако две страни лежат на иста права, тогаш тие не може да се соседни. **54.8.** Отсечката AB. **55.8.** а) $\{A\}$ или една од полуправите AB, AC. б) $\{B\}$ или една од полуправите AB, BC. в) $\{C\}$ или една од полуправите AC, BC. г) Отсечката AB или полуправата BC. **56.8.** Три отсечки и шест полуправи. **57.8.** $\{A, B\}$, правата AB, отсечката AB, полуправите AB и BA, итн.

Гл. II. ПОВАЖНИ ФИГУРИ ВО РАМНИНАТА

1.1. Точките A и B лежат на иста страна од правата a. **2.1.** Отсечките AC и BD се сечат со правата a, а отсечката AD не се сече. Уп. Согледај ги положбите на точките A, C, односно B и D, односно A и D спрема правата. **4.1.** Не. Уп. Земи една точка C што е на иста страна од правата a со точките A и B. **5.1.** а) Три (ако правите се паралелни), односно четири (ако правите се сечат). б) Четири (ако правите се паралелни), шест (ако правите имаат заедничка точка или ако две од нив се паралелни и се пресечени со третата), или седум (ако две по две се сечат во различни точки). Уп. Направи цртеж и земи ги предвид нивните меѓусебни положби. **6.1.** Уп. Согледај дека отсечки што се сечат не може да лежат во различни полурамнини, определени со правата што минува низ една крајна точка на едната и низ една крајна точка на другата отсечка. **7.1.** а) Не. б) Не. в) Не. г) Не, ако полуправите имаат заедничка точка; да - на два дела, ако имаат заедничка точка, д) Да - на три дела, ако имаат заедничка точка; да - на два дела, ако немаат заедничка точка. **8.1.** а) 30°: б) 90°. **9.1.** Три: $\sphericalangle (ab)$, $\sphericalangle (ac)$, $\sphericalangle (bc)$, каде што a, b, c се дадените полуправи. **10.1.** а) Не. б) Да. в) Не. **11.1.** На црт. III. 1 има 18 агли; тоа се аглите: AOB, AOC, AOD, BOC, BOD, BOE, COD, COE, COF, DOE, DOF, DOA, EOF, EOA, EOB, FOA, FOB, FOC. **12.1.** Три. **13.1.** 20°, 30°, 60°, **14.1.** 21°, 22°, 23°, 24°. **15.1.** 56°5'. **16.1.** 79°45' и 100°15'. **17.1.** Неговиот комплементен агол $\beta = 26°45'$; неговиот суплементен агол $\gamma = 116°45'$. **18.1.** а) 67°30', б) 135°. **19.1.** 270°. **20.1.** Трите различни агли што се добиваат се: 20°30', 159°30', 180°. **21.1.** Ако α, β и γ се различни од аголот нула, тогаш тие може да се: сите три остри, еден прав а два остри, и еден тап а два остри. **22.1.** 90°. **23.1.** а) Уп. Согледај ги паровите накрсни агли. б) $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_3 = 65°$, $\alpha_5 = 85°$, $\alpha_6 = 65°$. **24.1.** 125°. Уп. Продолжи ги краците на аголот α (црт. II. 4); така ги добиваш неговите напоредни агли x и y. Потсети се на својствата на напоредните и накрсните агли. **25.1.** Уп. Конструирај прав агол со теме во A и еден крак да е на правата a. Правата што го содржи другиот крак е нормална на правата a. **26.1.** И другите агли се прави. Правите a и b се заемно нормални. **27.2.** $k + 3$. **28.2.** 20. **29.2.** 10. Уп. Од $\dfrac{n(n-3)}{2} = 35$ се добива квадратната равенка $n^2 - 3n - 70 = 0$, чиешто позитивно решение е одговорот на задачата. **30.2.** а) 13, б) $2k + 3$. **31.2.** Да; петаголник. **32.2.** Уп. Согледај дека за $n > 5$ точно е $n - 3 > 2$. **33.2.** Уп. Согледај дека внатрешниот дел на многуаголникот, ако тој е конвексен, е пресек (заеднички дел) на внатрешните делови на неговите агли. Потоа, потсети се на дефиницијата за внатрешен дел на еден агол и согледај дека крајните точки на која било дијагонала (две темиња на многуаголникот) лежат на краците на некој агол на многуаголникот. **34.2.** Уп. Согледај дека секој многуаголник (ако е конвексен) е дел од внатрешноста на кој било негов агол. Потоа, потсети се кој дел од рамнината го викаме внатрешност на еден агол. **35.3.** 6. **36.3.** 10. **37.3.** Уп. Точките A и B лежат на различни страни од правата a. Направи цртеж и дискутирај ја положбата на точките A и C, односно B и C во однос на правата a. **38.3.** Уп. Ако $D \in AB$ и $E \in AC$, тогаш согледај дека точките B и C лежат од иста страна на правата p. **39.3.** Уп. Аголот φ меѓу симетралата s на внатрешниот агол α и симетралата s_1 на соодветниот напореден надворешен агол α_1 може де се определи со $\varphi = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\alpha_1}{2} = \dfrac{1}{2}(\alpha + \alpha_1) = 90°$. **40.3.** Уп. Искористи го фактот што секој надворешен агол на еден триаголник е поголем од кој било несоседен внатрешен агол на тој триаголник. **41.3.** Уп. Направи цртеж и потсети се на Т. 1 од III. 3. **42.3.** Уп. Направи цртеж и разгледај ги триаголниците AMC и

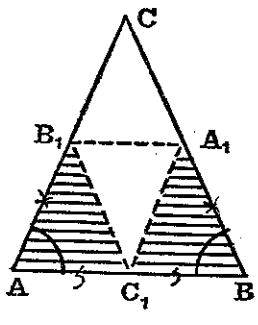


Црт. II. 4



Црт. II. 5

BMD, односно AMD и BMC. **43.3.** Уп. Направи цртеж и разгледај ги триаголниците AMD и BMC. **44.3.** Уп. Направи цртеж и разгледај ги триаголниците AMB и CMD. **45.3.** Уп. Направи цртеж. Нека M е средина на отсечката CD. Разгледај ги триаголниците AMC и AMD. **46.3.** Уп. Направи цртеж и разгледај ги триаголниците ABM и CBM. **47.3.** Уп. Нека A_1, односно B_1, се подножја на висините спуштени од A, односно B, на правата CD. Согледај дека триаголниците ADA_1 и BDB_1 се складни. **48.3.** Уп. а) Од цртежот II. 5 се гледа дека со дадените елементи $\dfrac{a}{2}$, b, t_a може да се конструира $\triangle CAA_1$, а потоа и бараниот триаголник. б) Погледај ја решената задача 2 во учебникот, во III, 3. Нацртај го аголот γ со теме C и, на едниот крак, нанеси ја отсечката CA со должина b. Потоа, од А спушти ја отсечката AA_1, со должина t_a, до другиот крак на аголот γ; точката A_1 ќе биде средина на страната AB. Дали секогаш задачата има решение? **49.3.** Уп. а) На краците на еден прав агол со теме C нанеси ги отсечките CA и CB со должини a и b. б) Нацртај прав агол со теме C и на едниот крак нанеси ја отсечката CB со должина a. Потоа, од точката B, нацртај отсечка BA со должина c, така што A да лежи на другиот крак на правиот агол. Задачата има само едно решение, зашто мора да е $c > a$. **50.3.** Уп. а) Нацртај права p и во една нејзина точка D нацртај прав агол чиј еден крак да лежи на оваа права, а на другиот - нанеси отсечката DA со должина h_a. Потоа, од точката A спушти две отсечки AB и AC, така што B и C да лежат на p и $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$. Задачата има само едно решение, зашто мора да е $h_a < b$ и $h_a < c$. б) Со дадените h_a (како катета) и t_a (како хипотенуза) може да се конструира правоаголниот триаголник ADA_1, со прав агол во D, и притоа темато A_1 е средина на страната BC на бараниот триаголник. Потоа, од точката A спуштаме отсечка AC чија друга крајна точка C лежи на правата DA_1 и чија должина е b, т.е. $\overline{AC} = b$. Третото теме B лежи на правата DA_1, така што $\overline{BA_1} = \overline{CA_1}$ и A_1 е меѓу B и C. Задачата има само едно решение, зашто мора да е $b > h_a$. в) Нацртај права p и во една нејзина точка D нанеси прав агол чиј еден крак да лежи на оваа права, а на другиот нанеси отсечка DA со должина h_a. Потоа, од точката A спушти отсечка AA_1 чија друга крајна точка A_1 лежи на правата p и чија должина е t_a, т.е. $\overline{AA_1} = t_a$. Темињата B и C на $\triangle ABC$ се одредуваат така што на правата p од точката A_1, на едната и на другата страна од A_1, се нанесуваат отсечки со должина $\frac{a}{2}$, т.е. $\overline{A_1B} = \overline{A_1C} = \frac{a}{2}$. **51.3.** Уп. а) Конструирај правоаголен триаголник со катета $\overline{CD} = h_a$, остар агол $CAD = \alpha$ и $\sphericalangle ADC = 90°$. Потоа, лесно се добива и темето B како крајна точка на отсечката AB, нанесена од A на полуправата AD и со должина c. б) Конструирај правоаголен триаголник ADB со катета $\overline{AD} = h_a$ и хипотенуза $\overline{AB} = c$. Потоа, на полуправата BD нанеси отсечка $\overline{BC} = a$. **52.3.** Уп. Докажи дека се складни триаголниците ABA_1 и BAB_1, каде што A_1 и B_1 се средини на страните BC и AC соодветно. **53.3.** Уп. Нацртај рамнокрак триаголник ABC со $\overline{AC} = \overline{BC}$, означи ги со A_1, B_1, C_1 средините на страните BC, CA, AB соодветно (црт. II. 6) и докажи дека триаголниците AB_1C_1 и BA_1C_1 се складни. **54.3.** Уп. Согледај дека триаголникот ABC е рамнокрак и дека $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CED$. **55.3.** Уп. Нека A_1 и B_1 се ортогоналните проекции од точките A и B на правата p. Докажи дека триаголниците AMA_1 и BMB_1 се складни. **56.3.** Уп. Направи цртеж и докажи дека триаголниците ABC и ABD се складни. **57.3.** Уп. Направи цртеж и докажи дека триаголниците ANC и BMC се складни. **58.3.** Уп. Направи цртеж. Докажи дека $\triangle CST$ е рамнокрак и дека триаголниците ACT и BCS се складни. **59.3.** Уп. Направи цртеж и согледај дека $\overline{AT} = \overline{BT}$ и $\sphericalangle MAT = \sphericalangle MBT$ (покажи дека $\triangle AMT \cong \Delta BMT$). **60.3.** Уп. Направи цртеж и докажи дека триаголниците BCD и ABE се складни (според признакот САС). **61.3.** Уп. Направи цртеж. Разгледај ги триаголниците ACD и BCD и аглите ADC и BDC во нив. **62.3.** Уп. Направи цртеж и согледај ги односите меѓу страните и аглите во $\triangle ACE$, односно во $\triangle BED$. **63.3.** Уп. Дијагоналите што излегуваат од едно теме на еден n-аголник, заедно со неговите страни, образуваат n—2 триаголници. Формирај ги неравенствата што следуваат од својството - признакот за постоење на секој од овие триаголници. Избери една дијагонала, па користејќи ја низата неравенства, елиминирај ги другите дијагонали. **64.3.** Уп. Земи во обзир дека хипотенузната висина е отсечка што е нормална, а катетите се отсечки што се наведнати кон хипотенузата. **65.3.** Уп. Потсети се дека еден рамнокрак триаголник е еднозначно определен со својот крак и висина на основата. **66.3.** Уп. Ако a и b се прави, нормални на правата p и ако a и b се сечат во M, тогаш од точката M се спуштени две нормали на правата p, што не е можно. **68.3.** Уп. Нека D е пресечна точка на правата BP и страната AC на $\triangle ABC$. Разгледај ги односите меѓу страните на $\triangle BCD$ и меѓу страните на $\triangle APD$. **69.3.** Уп. Потсети се дека растојанието од дадена точка до дадена права е помало од должината на која било наведната отсечка од таа точка. **70.4.** Уп. Низ произволна точка на едната права



Црт. II. 6

повлечи права што е паралелна со другата права. Аголот што притоа се добива е бараниот агол. **71.4.** Уп. Направи цртеж. Согледај дека триаголниците AOD и BOC, односно AOB и COD, се складни, а потоа искористи ја теоремата за аглите на трансверзалата на две прави (Т. 2, III. 4, стр. 54). **72.4.** Уп. Земи дека дијагоналата AC е трансверзалата што ги сече спротивните страни на четириаголникот и потсети се на Т. 2 од III. 4. **73.4.** $\sphericalangle ADC = 116°$, $\sphericalangle ABC = 32°$. **74.4.** Уп. Направи цртеж и докажи дека триаголниците APT и BQT се рамнокраки триаголници. **75.4.** Уп. Доволно ќе биде да покажеме дека две различни точки од едната права се на еднакви растојанија од другата права. Нека $a \parallel b$ и нека $A, B \in a$. Растојанијата од A, односно B, до правата b нека се $\overline{AA_1}$ односно $\overline{BB_1}$ (направи цртеж). Докажи дека триаголниците AA_1B и BB_1A_1 се складни, па, оттука изведи го бараниот заклучок. **77.4.** $(n-2)\ 180°$. Уп. Повлечи ги сите дијагонали што излегуваат од едно теме на многуаголникот. На колку составни триаголници е поделен многуаголникот? **78.4.** 60°, 30°. **79.4.** 30°, 60°, 90°. Уп. Реши го системот равенки $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 3$, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. **80.4.** 40°, 60°, 80°. **81.4.** 120°, 140°, 100°. **82.4.** 130°, 140°, 90°. **83.4.** $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, ако $\alpha \geqslant \beta$. **84.4.** $|\alpha - \beta|$. **86.4.** 66°. **87.4.** Кракот. Уп. Пресметај ги аглите на основата и потсети се на Т. 4. од § 3. **88.4.** а) $90° - k°$; б) 60°; в) $180° - (u + v)$. **89.4.** Уп. Нека во темето C е повлечена симетрала на надворешниот агол што е паралелна со страната AB. Страните AC и BC земи ги како трансверзали што ги сечат овие паралелни прави. **90.4.** Уп. Триаголникот AMC е рамнокрак, и притоа, $\sphericalangle MCA = \sphericalangle MAC$. Покажи дека и триаголникот BMC е рамнокрак при што $\overline{MC} = \overline{MB}$. **91.4.** а) Правоаголен. б) Тапоаголен. в) Остроаголен. Уп. Ако, на пример, $\alpha > \beta + \gamma$, тогаш $180° = \alpha + \beta + \gamma < \alpha + \alpha = 2\alpha$, од каде што следува дека $\alpha > 90°$, т.е. триаголникот е тапоаголен. **92.4.** Уп. Согледај дека тежишната линија го дели триаголникот на два рамнокраки триаголници. **94.4.** Уп. Потсети се дека секој надворешен агол на еден триаголник е еднаков со збирот на двата внатрешни агли на триаголникот што не се соседни со тој агол. **95.4.** 40° и 140°. **97.4.** 85° и 95°. **98.4.** Уп. Согледај дека еднаквите агли $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$ имаат еден пар нормални краци. **99.4.** Уп. Направи цртеж и земи погоден помошен агол чии краци да се паралелни со краците на еден од дадените агли. **101.5.** а) $\frac{32}{3}$ см, б) 16 см. Уп. Потсети се дека, ако краците на еден агол се пресечат со две различни паралелни прави, тогаш отсечките, што ги отсечуваат овие прави од краците на аголот, се пропорционални меѓу себе (Т. 1, III. 5, стр. 58). **102.5.** 12 см. **103.5.** 16 см, 18 см. **104.5.** Уп. Низ темето C (или B) повлечи права што е паралелна со симетралата на $\sphericalangle BAC$, која ќе го сече продолжението на страната AB (односно AC); на цртежот согледај еден рамнокрак триаголник и примени ја Т. 1 од III. 5. за краците на $\sphericalangle B$ (односно $\sphericalangle C$). **105.5.** Уп. Избери единична отсечка e (со должина еден). Направи конструкција на отсечката x од пропорцијата: а) $e : a = a : x$; б) $c : b = a : x$; в) $b : a = a : x$; г) $d : b = a : y$ и $c : f = y : x$; д) $y = a^2$ и $e : a = y : x$. **107.5.** Уп. Нацртај произволен агол со теме O; на едниот крак одбележи отсечка $\overline{OM} = 10$ см, а на другиот одбележи три отсечки $\overline{OA} = 3$ см, $\overline{AB} = 5$ см и $\overline{BC} = 7$ см, а потоа повлечи ги правите a и b што минуваат низ A и B соодветно и се паралелни со правата CM. Бараните точки се $A_1 = a \cap OM$ и $B_1 = b \cap OM$. **108.5.** Уп. Искористи 7. 5. III. **109.5.** а) Не, зашто имаат само еден еднаков агол од 50°. б) Не, зашто имаат само по еден еднаков агол од 45°. в) Може, ако аголот при врвот и на двата рамнокраки триаголници е 40°. г) Може, ако страните на другиот триаголник се 3. 789. 000 см, 2. 526. 000 см и 2. 105. 000 см. **110.5.** Уп. а) Потсети се дека накрсните агли се еднакви. б) Потсети се на Т. 2 од III. 4. **111.5.** б) 6,25 см, 3,75 см. Уп. Согледај дека триаголниците OAB и OCD се слични. **112.5.** Уп. Земи две положби на темето C; со пресечување на правата q се добиваат два пара слични триаголници со ист коефициент на сличност. **113.5.** $\frac{ab}{a+b}$. Уп. Низ темето C (или B) постави права што е паралелна со симетралата на $\sphericalangle BAC$. На добиениот цртеж согледај еден рамностран триаголник и други два слични триаголници. **116.5.** Уп. Примени ја Питагоровата теорема на правоаголните триаголници чија една заедничка катета е хипотенузната висина. **117.5.** а) Да. б) Не. Уп. а) Провери дека збирот од квадратите на два парни броеви е пак парен број. б) Провери дека квадрат на непарен број е пак непарен број и дека збир од два непарни броја е парен број. **118.5.** 3, 4, 5. Уп. Земи страните на правоаголниот триаголник да имаат должини $k - 1$, k, $k + 1$ и искористи ја Питагоровата теорема. **119.5.** $h = \frac{ab}{c} = 19{,}2$. **120.5.**

$\sqrt{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}$ **121.5.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **122.6.** а) Да. б) Да. в) Да, но барем еден од нив мора да е поголем од 60°. г) Да, но барем еден од нив да е помал од 120°. Уп. Потсети се дека збирот на аглите во четириаголникот е 360°. **124.6.** Еден, два или три. **125.6.** Уп. Согледај дека споменатите агли се остри и имаат заемно нормални краци. **126.6.** Уп. Покажи дека $\sphericalangle DD_1C = \sphericalangle B_1BC$ (или $\sphericalangle DD_1A = \sphericalangle B_1BA$), а тие се наизменични. **127.6.** Уп. Обиди се да докажеш дека триаголниците ABC и ACD се складни и изведи заклучок за еднаквост на некои агли што ќе ти помогне да докажеш дека и триаголниците ABS и CDS (или ADS и BCS) се складни, од каде што следува исказот во задачата. **128.6.** а) Да. б) Не. в) Не. Уп. Ако S е пресечната точка на дијагоналите на паралелограмот, согледај дали може да се конструира триаголникот ABC, односно триаголникот SAB. **129.6.** 100°, 80°. Уп. $(x+30°)+(2x-60°)=180°$. **130.6.** Уп. Разгледај го триаголникот ABP, каде што A и B се темиња на два соседни агли а P — пресекот на симетралите. Искористи ги својствата: 1° соседните агли во паралелограмот се суплементни, и 2° збирот на аглите во триаголникот изнесува 180°. **131.6.** Уп. Направи цртеж. Лесно се покажува дека триаголниците ADS_1 и BCS_2 се складни (според признакот АСА) од каде што следуваат релациите во задачата. **132.6.** $\overline{AP}:\overline{AC}=\frac{k}{k+1}$, $\overline{BP}:\overline{BF}=\frac{1}{k+1}$. Уп. Направи цртеж и докажи дека триаголниците APE и BPC се слични, со коефициент на сличноста k. **133.6.** Уп. Докажи дека триаголниците ADM и BCM се складни, од каде што следува дека $\overline{AM}=\overline{BM}$, т.е. триаголникот ABM е рамнокрак. **134.6.** 60°, 120°. **135.6.** Уп. Низ темето C повлечи права $p \parallel AD$ и докажи дека $\triangle PBC$, каде што $P=p\cap AB$, е рамнокрак, $\overline{PC}=\overline{BC}$. **136.6.** Уп. Нека S е пресекот на дијагоналите. Докажи дека $\triangle ASB \sim \triangle CSD$ и $\triangle ASD \cong \triangle BSC$. **137.6.** Уп. Докажи дека $\triangle ABS \cong \triangle CDS$ (па $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACD$, т.е. $AB \parallel DC$) и, аналогно, $\triangle ASD \cong BSD$. **138.6.** Уп. Направи цртеж. Нека S е пресекот на дијагоналите. а) Покажи дека $\triangle ABS \cong \triangle ASD$, т.е. $\overline{AB}=\overline{AD}$. б) Покажи дека $\triangle ABC \cong \triangle ABD$, т.е. $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$, па бидејќи тие агли се и суплементни, ќе следува дека се по 90°. **139.6.** Уп. Докажи дека триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ се слични со коефициент 2. **140.6.** Уп. Со една дијагонала подели го четириаголникот на два триаголника и искористи ја задачата 139.6. II. **141.6.** Уп. Искористи ја 18. 6. III и фактот дека: а) дијагоналите во секој ромб се заемно нормални, б) дијагоналите во секој правоаголник се еднакви. **142.6.** Уп. Да се искористи 139. 6. II. **143.7.** Уп. Нека O е центар на кружницата. Покажи дека триаголниците AOC и BOD се складни. **144.7.** Уп. Искористи ја претходната задача, за да докажеш дека четириаголникот $ACBD$ е паралелограм. **145.7.** Уп. Нека O е центарот на кружницата и AB е нејзина тетива. Согледај дека триаголникот OAB е рамнокрак. **146.7.** Уп. Направи цртеж. Согледај дека тетивите на една кружница што се еднакво оддалечени од центарот се еднакви меѓу себе. **147.7.** 17. **148.7.** Уп. Потсети се дека секоја точка од симетралата на една отсечка е еднакво оддалечена од крајните точки на таа отсечка. **149.7.** Уп. Центарот O на бараната кружница е третото теме на рамностраниот триаголник OAB. **150.7.** Уп. Центарот на бараната кружница ќе лежи на симетралата на отсечката чии крајни точки се дадените точки. Најблиску до дадените точки ќе биде заедничката точка на отсечката и нејзината симетрала. **151.7.** Уп. Формирај триаголник чии темиња ќе се центарот на кружницата и крајните точки на една нејзина тетива; потоа искористи го односот на една страна од триаголникот спрема збирот на другите две страни. **152.7.** а) $\overline{AB}=12$. б) $r=15$. в) $\overline{OA}=25$. Уп. Согледај дека триаголникот AOB е правоаголен. **153.7.** Уп. а) и б) Низ центарот на кружницата повлечи права што е нормална на тетивата, односно на правата; тангентите, повлечени во пресечните точки на оваа права и кружницата се паралелни со тетивата, односно правата. в) Низ центарот повлечи права што е паралелна со дадена права; тангентите повлечени во пресечните точки на оваа права и кружницата се нормални на дадената права. (Во сите три случаи задачата има по две решенија). **154.7.** Уп. Нацртај произволна тетива што е паралелна со дадената права. Симетралата на оваа тетива ќе ја сече кружницата во допирната точка на бараната тангента. **155.7.** Уп. Согледај дека дијаметарот можеме да го сметаме како составен дел на трансверзалата што ги сече двете тангенти и притоа наизменичните (и согласните) агли се еднакви (како прави агли). **156.7.** Уп. Претпостави дека постојат три точки на кружницата што се колинеарни и согледај го односот на правата на која тие лежат со кружницата. **157.7.** Уп. На дадената права најди ги точките што од дадената точка се на растојание еднакво на дадениот радиус. **158.7.** Уп. Во точката A повлечи права p нормална на правата a, а потоа на p нанеси отсечки AO со должина $\overline{AO}=r$; точката O е центар на бараната кружница. **159.7.** Уп. Искористи го фактот дека која било точка од симетралата на аголот е еднакво оддалечена од неговите краци. Центарот на кружницата е пресекот на симетралата со права, паралелна на еден од краците и на растојание r од него. **160.7.** Уп. Согледај дека од односот помеѓу радиусите на зададените кружници и нивното централно растојание, може да се заклучи дека една од овие точки е меѓу другите две. **161.7.** а), в), г). Немаат заедничка точка. б) Се допираат однадвор. **162.7.** а) 8 см, 12 см, б) 50 см, 20 см. **163.7.** а) 9 см и 12 см. б) 56 см и 16 см. **164.7.** $R = 30$ см, $r = 18$ см. Уп. $R : r = 5 : 3$, $R - r = 6$. **165.7.** 3,7 и 11. Уп. Реши го системот равенки: $r_1 + r_2 = 10$, $r_2 + r_3 = 18$, $r_3 + r_1 = 14$. **166.7.** Бараната точка M е пресек на кружниците $k_1(A, a)$ и $k_2(B, b)$. Задачата: нема решение ако $a + b < \overline{AB}$, има едно решение ако $a + b = \overline{AB}$, има две решенија ако $a + b > \overline{AB}$. **167.7.** 140°. **168.7.** Ќе се зголеми двапати. **169.7.** Уп. Направи цртеж. а) Согледај дека триаголниците AOD и BOC се складни. б) Согледај дека дијагоналите на тој четириаголник (дијаметрите AB и CD) се преполовуваат со центарот на кружницата. **170.7.** Уп. Потсети се дека два периферисни агли што се над еднакви лаци се еднакви меѓу себе. **171.7.** Уп. Согледај дека аглите ABC и AOC се над ист лак. **172.7.** Уп. Согледај дека триаголниците се правоаголни со заедничка хипотенуза и еден пар еднакви катети. **173.7.** Уп. Направи цртеж и согледај дека аглите BAE и BCD имаат заемно нормални краци. **174.7.** Уп. Согледај дека триаголниците ABP и ABS се складни. **175.7.** Уп. Докажи дека допирните точки P и T лежат на кружницата $k_1\left(M, \frac{1}{2}\overline{OA}\right)$, каде што M е средина на отсечката OA, а потоа и дека триаголниците OTA и OPA се складни. **176.7.** Уп. Проследи го и во овој случај размислувањето од решението на претходната задача. **177.7.** Уп. Според 175. 7. II, ако M е средината на отсечката OA и ако $T_1, T_2 \in \left(M, \frac{\overline{OA}}{2}\right) \cap k$, тогаш AT_1 и AT_2 се бараните тангенти. **181.8.** Права што минува низ средината C на отсечката AB и е нормална на правата AB (*симетрала* на отсечката AB). **182.8.** Симетралата на $\sphericalangle AOB$. **183.8.** Симетралите на аглите образувани од дадените прави. Уп. Да се искористи 182. 8. II. **184.8.** Ако $A = O$, тогаш $\Gamma = \{O\}$; ако $A \neq O$ е внатрешна точка за кружницата k или $A \in k$, тогаш Γ е кружницата со дијаметар OA; ако A е надворешна за кружницата k, тогаш Γ е делот од кружницата со дијаметар OA, што е внатрешен за кружницата k. **188.8.** а) Две прави p_1 и p_2 што се паралелни со правата p и на растојание r од неа. б) Ако $r < r_1$, тогаш $\Gamma = (O_1, r_1 - r) \cup (O_1, r_1 + r)$; ако $r = r_1$, тогаш $\Gamma = \{O_1\} \cup (O_1, r_1 + r)$; ако $r > r_1$, тогаш $\Gamma = (O_1, r_1 + r)$. **189.8.** Уп. Ако a_1 и b_1 се прави, паралелни со p_1 и на растојание r од неа, а a_2 и b_2 паралелни со p_2 и на растојание r од неа, тогаш центарот O на бараната кружница $k(O, r)$ е една од точките $a_1 \cap a_2$, $a_1 \cap b_2$, $b_1 \cap a_2$, $b_1 \cap b_2$ (види 188. 8. II). Задачата или има бесконечно многу решенија $\left(p_1 \parallel p_2 \text{ и на растојание } \frac{r}{2}\right)$ или четири решенија ($p_1 \nparallel p_2$) или, пак, нема решение $\left(p_1 \parallel p_2 \text{ и на растојание} \neq \frac{r}{2}\right)$. **190.8.** Уп. Ако a и b се правите паралелни со p и на растојание r од неа, тогаш центарот O на бараната кружница $k(O, r)$ ќе биде точка од $a \cap (O_1, r_1 + r)$, $b \cap (O_1, r_1 + r)$, $a \cap (O_1, r_1 - r)$, $b \cap (O_1, r_1 - r)$ (види 188. 8. II). Задачата има најмногу осум решенија. **191.8.** Уп. Центарот O на бараната кружници $k(O, r)$ е точка од $(O_1, r_1 + r) \cap (O_2, r_2 + r)$, $(O_1, r_1 - r) \cap (O_2, r_2 + r)$, $(O_1, r_1 - r) \cap (O_2, r_2 - r)$ или $(O_1, r_1 + r) \cap (O_2, r_2 - r)$. Задачата има најмногу осум решенија. **192.8.** Уп. Ако s е права, паралелна со p_1, p_2 и еднакво оддалечена од нив, тогаш центарот O на бараната кружница k е точка од $s \cap \left(O_1, r_1 + \frac{d}{2}\right)$ или од $s \cap \left(O_1, r_1 - \frac{d}{2}\right)$, каде, што d е растојанието меѓу p_1 и p_2. Задачата има најмногу четири решенија. **193.8.** Ако точките A, B и C се колинеарни, бараната права е секоја права паралелна со правата на која лежат точките A, B и C; ако точките A, B и C не се колинеарни, тогаш на бараната права лежи една средна линија од триаголникот ABC. Задачата има или бесконечно многу решенија или, пак, три решенија. **195.8.** Ако $\alpha = 0°$, тогаш p е тангента на кружницата k; ако $\alpha = 90°$, тогаш $p = AO$; ако $\alpha \neq 0°, 90°$, тогаш p е тангента на кружницата $(O, r\cos\alpha)$. **196.8.** Ако $\alpha = 0°$, p е заедничка тангента на k_1 и k_2; ако $\alpha = 90°$, тогаш $p = O_1O_2$; ако $0° < \alpha < 90°$, тогаш p е заедничка тангента на кружниците $\overline{k_1}(O_1, r_1\cos\alpha)$ и $\overline{k_2}(O_2, r_2\cos\alpha)$. Уп. Да се искористи решението на 195. 8. II. **197.8.** Уп. а) Ако A_1 и B_1 се средините на страните BC и CA соодветно, тогаш триаголникот AA_1B_1 може да се конструира, зашто $\overline{AA_1} = t_a$, $\overline{AB_1} = \frac{b}{2}$, $\overline{A_1B_1} = \frac{c}{2}$. б) Ако A_1 е средината на страната BC, а T тежиштето на триаголникот ABC, тогаш триаголникот BA_1T може да се конструира, зашто $\overline{BT} =$

$= \frac{2}{3} t_b, \overline{TA_1} = \frac{1}{3} t_a, \overline{BA_1} = \frac{1}{2} a$. в) Ако T е тежиштето на триаголникот ABC, тогаш триаголникот BCT може да се конструира, зашто $\overline{BC} = a$, $\overline{CT} = \frac{2}{3} t_c$, $\overline{BT} = \frac{2}{3} t_b$. г) Ако T е тежиштето на $\triangle ABC$ конструирај го прво триаголникот ATT_1 со страни $\overline{AT} = \frac{2}{3} t_a$, $\overline{AT_1} = \frac{2}{3} t_b$, $\overline{TT_1} = \frac{2}{3} t_c$ и согледај дека средината C_1 на страната AB е средина и на отсечката TT_1. **198.8.** Уп. а). Ако C_2 е подножјето на висината h_c, тогаш триаголникот AC_2C е правоаголен со хипотенуза $\overline{AC} = b$ и катета $\overline{CC_2} = h_c$, па тој може да се конструира. б) Подножјата B_2 и C_2 на висините h_b и h_c соодветно, лежат на кружницата k со дијаметар $\overline{BC} = a$, па, значи, $B_2 \in k \cap (B, h_b)$, $C_2 \in k \cap (C, h_c)$. в) Ако A_1 е средината на страната BC, а A_2 подножјето на висината h_a, тогаш триаголникот AA_2A_1 е правоаголен со хипотенуза $\overline{AA_1} = t_a$ и една катета $\overline{AA_2} = h_a$, па тој може да се конструира. **199.8.** Уп. а) Од точката A отсечката $\overline{BC} = a$ се гледа под агол α и е на растојание h_a од правата BC. б) Да избереме две паралелни прави p_1, p_2 на растојание h_a и на p_1 точка A. Тогаш подножјето на симетралата s_a лежи на правата p_2 и кружницата (A, s_a). в) Конструирај го прво триаголникот BCD за кој $\overline{BD} = b + c, \overline{BC} = a$ и $\measuredangle BDC = \frac{\alpha}{2}$.

Гл. III. ВЕКТОРИ

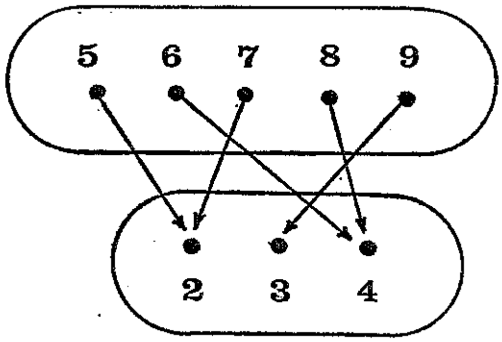
1.1. а) 6; 3. б) 12; 6. **2.1.** $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$. **3.1.** Со иста насока: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{CB}$; со спротивна насока: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CB}$. **4.1.** а) Колинеарни: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DC}$. Со спротивна насока: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DC}$. Спротивни: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DC}$. б) Колинеарни: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{DB}$. Со спротивна насока: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DC}$. Спротивни: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DC}$. в) Колинеарни, со спротивна насока и спротивни: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DC}$. **5.1.** Уп. Искористи ја дефиницијата за колинеарни вектори. **6.1.** Еднакви: б), д); колинеарни, но не еднакви: а), в). **7.1.** Уп. Ако $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ не лежат на иста права, тогаш точноста на тврдењето следува од теоремата: Ако два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не лежат на иста права, тогаш тие се еднакви ако и само ако четириаголникот $ABDC$ е паралелограм. Ако $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на иста права, тогаш се зема вектор $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{CD}$ којшто не лежи на таа права. **8.1.** Не; на пример, кај рамнокрак трапез основите не се еднакви. **9.1.** Уп. Направи цртеж и покажи дека $BSTD$ е паралелограм. **11.2.** Правецот и насоката на $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ се како на $\mathbf{a}$, а должината му е $a + b$. **12.2.** Правецот е како на $\mathbf{a}$ (т.е. $\mathbf{b}$), насоката како на оној од векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ што има поголема должина и $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|| = |a - b|$. **13.2.** а) 8. б) 2. **14.2.** Може; на пример, ако векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни со спротивни насоки. **15.2.** Уп. Векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ да се пренесат паралелно, така што нивните средни точки да се совпаднат. Ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни, тогаш паралелограмот $ABCD$ ќе биде „дегенериран“, т.е. ќе претставува една отсечка. **16.2.** $\overrightarrow{ED} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{b}$,

$\overrightarrow{BC} = \mathbf{b} + \mathbf{a} = \overrightarrow{FE}$. **17.2.** $\mathbf{0}$. **18.2.** а) $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{DB}$; в) $\mathbf{0}$; г) $\overrightarrow{AB}$. **19.2.** а) Уп. Искористи го правилото на триаголник за собирање вектори. б) n ненулти вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ може да формираат n-аголник ако и само ако $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$. **20.2.** $\mathbf{0}$. **22.2.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{BC}$. **23.2.** а) $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = -\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF} = -\mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{a}$. б) $\overrightarrow{CD} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\overrightarrow{EF} = -\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AE} = \mathbf{b} + \mathbf{b} - \mathbf{a}$. **24.2.** Уп. Нека $\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Уочи дека страната OC во триаголникот OAC лежи спроти најголемиот од аглите во $\triangle ABC$ (тој агол не е помал од правиот агол). **25.2,** Уп. Потпомогни се со цртеж: земи вектор $\mathbf{a}$ и друг векто $\mathbf{c}$ со помала должина отколку a и потоа обиди се да најдеш вектор $\mathbf{b}$, таков што $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$. (Уочи дека тврдењето во оваа задача може да се добие од тврдењете во задачата 24. 2. III со помош на законот за контрапозиција). **26.2.** Уп. Нека $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ (направи цртеж). Ако $\overline{OC} < \overline{OA}$, тогаш и $\overline{OC} < \overline{AB}$, па $\measuredangle A$ во $\triangle OAC$ не е поголем од $60°$; аголот AOB е суплементен на $\measuredangle A$. Обратно, ако аголот меѓу $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ не е помал од $120°$, тогаш дијагоналата OC на ромбот $OACB$ не е поголема од страната OA. **27.2.** $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$. Уп. Согледај дека дијагоналата на еден паралелограм е симетрала на аглите ако и само ако тој е ромб. **28.2.** а) Колинеарни со иста насока. б) Колинеарни, со спротивни насоки и $a > b$. в) Колинеарни, со спротивни насоки. г) Ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се ненулти вектори, тогаш тие се заемно нормални. **29.2.** Уп. а) и б) Направи цртеж и, во случајот кога $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не се колинеарни, согледај дека, во триаголник, едната страна е помала од збирот на другите две, а е поголема од нивната разлика. в) Примени го неравенството а). **30.2.** Уп. а) Решена е во учебникот (IV. 4, зад. 2). б) Согледај дека $\overline{PQ}$ и $\overline{RS}$ се средни линии на триаголниците ABC, ACD. **32.2.** Уп. Тврдењето следува од: $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = (\overrightarrow{AA_2} - \overrightarrow{AA_1}) + (\overrightarrow{BB_2} - \overrightarrow{BB_1}) + (\overrightarrow{CC_2} - \overrightarrow{CC_1}) = (\overrightarrow{AA_2} - \overrightarrow{BB_1}) + (\overrightarrow{BB_2} - \overrightarrow{CC_1}) + (\overrightarrow{CC_2} - \overrightarrow{AA_1}) = \mathbf{0}$. **23.2.** Уп. Бидејќи: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC})$, равенството ќе важи ако и само ако $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \mathbf{0}$, односно $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC}$, коешто е потребен и доволен услов четириаголникот $ABCD$ да е паралелограм. **34.2.** Права, паралелна со p. **36.3.** Уп. Должината на векторот $\sqrt{2}\,\mathbf{a}$ односно $-\sqrt{3}\,\mathbf{a}$ е хипотенузата на правоаголен триаголник со катети a и a, односно со катети a и $a\sqrt{2}$. **39.3.** $\overrightarrow{OD} = \mathbf{p} + \mathbf{r} - \mathbf{q}$; $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{r})$. **40.3.** $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = -\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\overrightarrow{DA}$. **41.3.** Уп. Да се искористат својствата: $(k + m)\,\mathbf{a} = k\mathbf{a} + m\mathbf{a}$, $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ и $(-1)\,\mathbf{a} = -\mathbf{a}$. **42.3.** а) $\mathbf{a}$. б) $-2\mathbf{c}$. **43.3.** а) $3\mathbf{a} + \mathbf{b}$. б) $\mathbf{c} + \mathbf{b} - \mathbf{a}$. в) секој вектор $\mathbf{x}$ е решение на равенката. г) ако $2\mathbf{a} - \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, тогаш равенката нема решение, а ако $2\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, тогаш решение е секој вектор $\mathbf{x}$. **44.3.** а) $\mathbf{x} = -\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$, $\mathbf{y} = \mathbf{a} - 3\mathbf{b}$. б) $\mathbf{x} = \frac{3}{5}\mathbf{b}$, $\mathbf{y} = \frac{4}{5}\mathbf{b} - \mathbf{a}$. в) ако $\mathbf{b} \neq 3\mathbf{a}$, тогаш системот нема решение; ако $\mathbf{b} = 3\mathbf{a}$ тогаш решение на системот е $\mathbf{x} = \mathbf{u}$, $\mathbf{y} = 2\mathbf{u} - \mathbf{a}$ за кој било вектор $\mathbf{u}$. г) решение е секој пар вектори $\mathbf{x} = \mathbf{u}$, $\mathbf{y} = \mathbf{v}$. **45.3.** $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $\mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$. б) $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, $\mathbf{y} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$. в) $\mathbf{x} = 2(1 - \sqrt{2})\,(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $\mathbf{y} = (1 - 2\sqrt{2})\,(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. Уп. а) Ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не се колинеарни, тогаш $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ќе бидат положени на половините од дијагоналите на паралелограмот, конструиран над векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. **46.3.** а) $\frac{1}{3}(10\mathbf{u} - \mathbf{v})$. б) $-\mathbf{u} + \frac{1}{3}\mathbf{v}$. в) $-\frac{5}{18}\mathbf{u} + \frac{7}{18}\mathbf{v}$. **47.3.** а) Во секој случај. б) Ако (и само ако) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ формираат триаголник. **48.3.** $\mathbf{c} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}$. **49.3.** а) Да. б) Не, ако $\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r} \neq \mathbf{0}$; да, ако $\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r} = \mathbf{0}$.

Уп. Согласно со решението на 19. 2. III, четири вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ формираат четириаголник ако и само ако $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$ (при што некои од страните може да се сечат во некоја своја внатрешна точка). **50.3.** $\mathbf{d}=-\mathbf{p}+2\mathbf{q}$. **51.3.** Уп. Искористи ја дефиницијата за множење на вектор со број. **52.3.** г) $\mathbf{c}=\frac{1}{a}\mathbf{a}+\frac{1}{b}\mathbf{b}$. б) $\mathbf{e}=\frac{1}{c}\mathbf{c}$, каде што $\mathbf{c}$ е како во а). Уп. Паралелограмот конструиран над единичните вектори $\frac{1}{a}\mathbf{a}$ и $\frac{1}{b}\mathbf{b}$ е ромб, па неговите дијагонали се симетрали на аглите. **53.3.** Само за $x=y=0$. **54.3.** Ако $\mathbf{a}=\mathbf{0}$, тогаш $x\mathbf{a}=y\mathbf{a}$ за секој пар x, y. Ако $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, тогаш $x\mathbf{a}=y\mathbf{a}$ само за $x=y$. **55.3.** Ако $x=0$, тогаш $x\mathbf{a}=x\mathbf{b}$ за кои било вектори $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Ако $x\neq 0$, тогаш $x\mathbf{a}=x\mathbf{b}$ е исполнето само за $\mathbf{a}=\mathbf{b}$. **56.3.** а) $x=1$, $y=2$. б) Не постојат такви броеви x, y. в) $x=3t-1$, $y=t$ за кој било број t. **57.3.** $\mathbf{0}$. Уп. Направи цртеж, изрази ги векторите $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$ и $\overrightarrow{DQ}$ со помош на $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$, а потоа искористи го фактот што $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0}$. **58.3.** Уп. Искористи го правилото на три точки (со точките B и C) и фактот што M односно N е средина на отсечката AB (т.е. $2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$) односно на отсечката CD за да го претставиш $2\overrightarrow{MN}$ како збир на $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$, односно на $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$. **60.3.** Направи цртеж. Земи ги средините A, B на дадените тетиви и искористи го правилото на три точки за претставување на: векторот $\overrightarrow{SA_1}$ како збир од $\overrightarrow{SA}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ итн. **61.3.** Уп. Направи цртеж; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=(\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SA})+(\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SB})+(\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SC})+(\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SD})$. **62.3.** Уп. Направи цртеж и согледај дека $\overrightarrow{A_kB_k}=\overrightarrow{A_kS}+\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{TB_k}$ $(k=1,\dots,4)$. Потоа собери ги добиените четири равенства. **63.3.** Уп. Направи цртеж и согледај дека векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}$ се колинеарни. **64.3.** Уп. Направи цртеж и искористи го фактот што векторот $\overrightarrow{AP}$ е колинеарен со $\overrightarrow{AB}$. **65.3.** $1:2$ и $2:1$. **67.3.** $1:4$, $2:3$, $1:3$, 1. Уп. Направи цртеж и постапи слично како при решавањето на задачата 66.3.III. **68.3.** $\overrightarrow{OD}=r+\frac{1}{k}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$, $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{k-1}(k\mathbf{r}-\mathbf{q})$, $\overrightarrow{OS}=\frac{1}{k+1}(\mathbf{p}+k\mathbf{r})$. **69.3.** Уп. Потсети се дека три вектори формираат триаголник кога нивниот збир е нула-вектор. **72.3.** Ако и само ако $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$. **75.3.** а) Линеарно зависен. б) Линеарно независен. в) Линеарно зависен. **78.3.** $\alpha=6$, $\beta=3$. **80.3.** а) Линеарно зависен. б) Линеарно зависен. в) Линеарно независен. г) Линеарно зависен. **85.4.** $\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{3}(2\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $\overrightarrow{OM_2}=\frac{1}{3}(\mathbf{a}+2\mathbf{b})$. **86.4.** а) $3\overrightarrow{OM_1}-2\overrightarrow{OA}$. б) $\frac{1}{2}(3\overrightarrow{OM_2}-\mathbf{a})$. **87.4.** $\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{4}(3\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $\overrightarrow{OM_2}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $\overrightarrow{OM_3}=\frac{1}{4}(\mathbf{a}+3\mathbf{b})$. **88.4.** m: (m + n); n: (m +n). Уп. Векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ изрази ги со помош на векторот $\overrightarrow{AB}$. **89.4.** Ако O е произволна точка, тогаш, M е определена со $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{a+b}(b\overrightarrow{OP_1}+a\overrightarrow{OP_2})$, каде што $a=\overline{P_1P_3}$, $b=\overline{P_2P_4}$. **90.4.** $\overline{MN}=\frac{n}{m+n}c$. Уп. Докажи дека $\overrightarrow{MN}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}$. **91.4.** Уп. Уочи дека $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{AB}$ за секој $\lambda\in\mathbf{R}$. Ако μ е односот во ко M ја дели отсечката AB, а ν е односот во кој N ја дели BC, тогаш $\overrightarrow{MC}=(1-\mu)\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{NC}=(1-\nu)\overrightarrow{BC}$. Натаму, искористи ја неколинеарноста на векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. **92.4.** $\mathbf{s}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. а) $\mathbf{s}=\frac{1}{2}\mathbf{b}$. б) $\mathbf{s}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ и $s=\frac{1}{2}(a+b)$. **93.4.** $\mathbf{s}_a=\frac{c}{b+c}\mathbf{b}+\frac{b}{b+c}\mathbf{c}$. **94.4.** Уп. Искористи ја 93. 4. III. **95.4.** Уп. Покажи дека $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\mathbf{0}$ и искористи ја задачата 19. 2. III. **96.4.** Уп. Изрази ги векторите

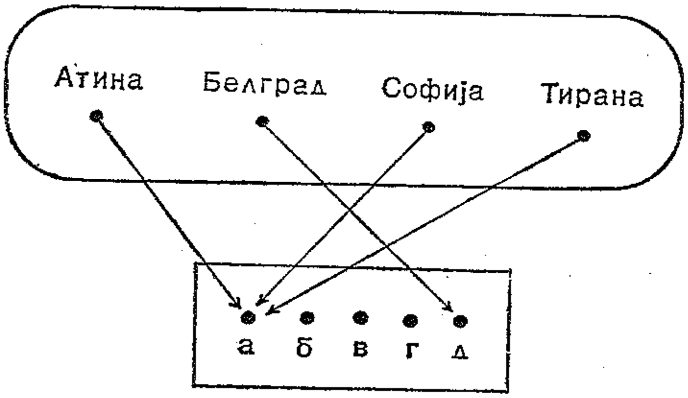
$\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OC_1}$ со помош на $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. **97.4.** Уп. Искористи го фактот дека тежиштето T ги дели тежишните линии AA_1, BB_1 и CC_1 во однос $2:1$ **98.4.** Уп. Изрази го векторот $\overrightarrow{OT}$ на три начини, со: $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{BT}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{CT}$ и искористи ја задачата 97. 4. III. **99.4.** Уп. Изрази ги векторите $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ со помош на векторите $\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, а потоа искористи ја задачата 98. 4. III. **100.4.** Уп. Направи цртеж. Изрази ги векторите $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ и $\overrightarrow{CC'}$ со $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{TT'}$, $\overrightarrow{T'A'}$ итн., а потоа искористи ја задачата 97. 4. III. **101.4.** Уп. Избери (произволно) точка O, изрази го векторот $\overrightarrow{OT_1}$ со $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OP}$, а потоа искористи го фактот што $\overrightarrow{OM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$ и, слично за $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$. **102.4.** Уп. Докажи дека $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$, $\overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{B_2C_2}$ и $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{C_2A_2}$, од каде што ќе следува дека триаголниците $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ се складни. **103.4.** Постои (единствена) таква точка M. Ако A_1 е средината на BC, тогаш M ја дели отсечката AA_1 во однос $2:1$ **104.4.** Да. **105.4.** Уп. Избери произволна точка O и точката T со својството $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n})$. Потоа стави $\overrightarrow{TA_k} = \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OA_k}$, $k = 1, 2, \ldots n$. **106.4.** Средината на отсечката AB. **107.4.** Ако точките A, B и C се колинеарни, тогаш центроидот е точката што ја дели отсечката AA_1 во однос $2:1$, каде што A_1 е средината на BC; ако A, B и C не се колинеарни, тоа е тежиштето на триаголникот ABC. Уп. Види 103. 4. III и 98. 4. III. **108.4.** Уп. Стави $\overrightarrow{A_kB_k} = \overrightarrow{OB_k} - \overrightarrow{OA_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. **109.4.** а) Уп. Види 96. 4. III. **110.4.** A, B, C се колинеарни. **116.4.** Права, паралелна со p. Уп. Направи цртеж; избирајќи две точки C_1 и C_2 на правата p покажи дека $\overrightarrow{C_1C_2}$ е колинеарен со $\overrightarrow{T_1T_2}$, каде што T_1 и T_2 се тежиштата на триаголниците ABC_1 и ABC_2 соодветно. Направи споредба и со задачата 31. 2. III.

Гл. IV. ДВИЖЕЊА

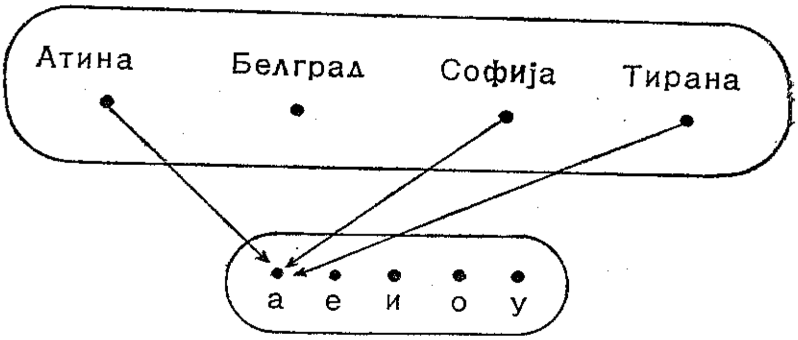


Црт. IV. 2а

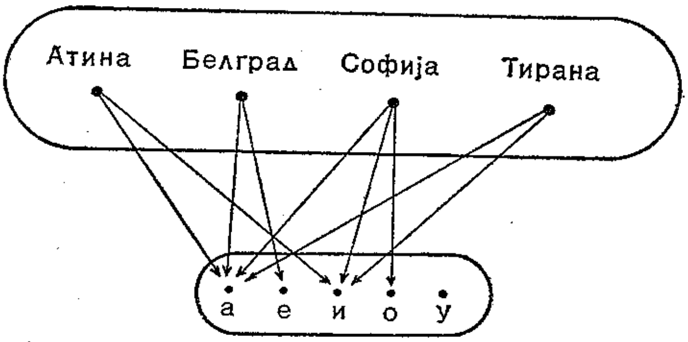
1.1. а) $\mathbf{A} = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$, $\mathbf{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. б) $\varphi(10) = 4$, $\varphi(12) = 6$, $\varphi(16) = 5$. в) $\mathbf{V} = \{2, 4, 5, 6\}$. **2.1.** Не; бројот 16 има пет делители, а $5 \notin \mathbf{B}$, па значи, на бројот 16 не му се придружува елемент од **B**. **3.1.** Бидејќи бројот на делителите на еден природен број е еднозначно определен, следува дека φ е пресликување. $\varphi(5) = 2$, $\varphi(6) = 4$, $\varphi(8) = 4$. $\mathbf{A} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $\mathbf{V} = \{2, 3, 4\}$. **4.1.** з), б) Црт. IV. 2а. **5.1.** а), б) Не, зашто има точка во **A** од која не тргнува стрелка. в) Не, зашто во А има точка од која тргнуваат две стрелки. г), д), ѓ) Да. **6.1.** Црт. IV. 3. **7.1.** Црт. IV. 4. Придружувањето не е пресликување, зашто на елементот Белград од **A** не може да му се придружи елемент од **B**. **8.1.** а) Црт. IV. 5. б) Не е пресликување.



Црт. IV. 3

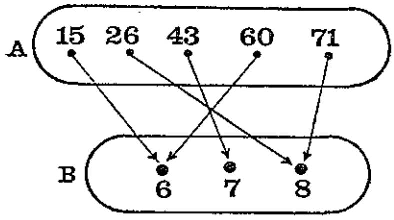


Црт. IV. 4

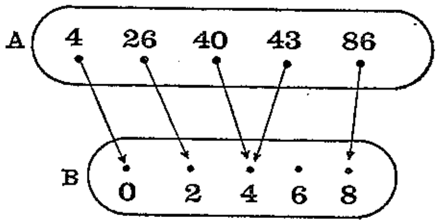


Црт. IV. 5

9.1. $\begin{array}{r|ccccc} x & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \varphi(x) & 2 & 4 & 2 & 4 & 3 \end{array}$ или $\varphi = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. **10.1.** а) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $V = \{2, 3, 4\}$. б) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $V = A$. **11.1.** $\varphi = \begin{pmatrix} 15 & 26 & 43 & 60 & 71 \\ 6 & 8 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, Црт. IV. 6. **12.1.** а) Црт. IV. 7.

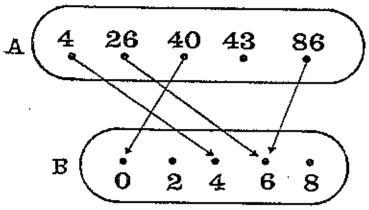


Црт. IV. 6

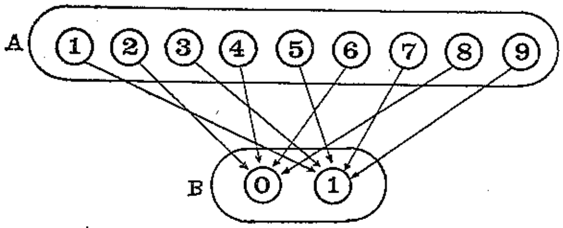


Црт. IV. 7

б) $\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 26 & 40 & 43 & 86 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$. **13.1.** а) Црт. IV. 8. б) Не е пресликување, **14.1.** $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Црт. IV. 9. **16.1.** а) Φ_1 не определува пресликување од **A** во **B**, зашто множеството први компоненти на Φ_1 е {а, в, г}, а тоа не е еднакво на множе-

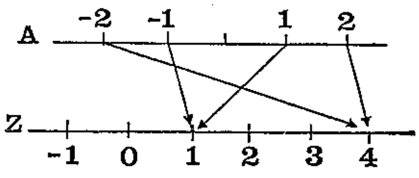


Црт. IV. 8

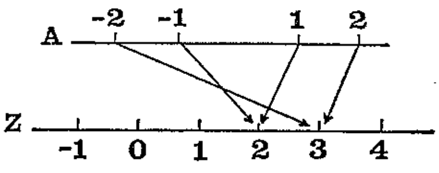


Црт. IV. 9

ството **A**. б) Φ_2 не определува пресликување од **A** во **B** зашто $(a, 1)$ и $(a, 4)$ се елементи на Φ_2, а вторите компоненти не им се исти, $1 \neq 4$. в) $\varphi_3 = \begin{pmatrix} а & б & в & г \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{V} = \{2, 3\}$. г) $\varphi_4 = \begin{pmatrix} а & б & в & г \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{V} = \{2\}$. **17.1.** $\mathbf{A} = \{a, b, c, d\}$, $\mathbf{B} \supseteq \{1, 2, 3\}$, **18.1.** $\mathbf{A} = \{а, е, и, о, у\}$ (множеството самогласки од кирилицата), $\mathbf{V} = \{1, 7, 11, 19, 25\}$; $\varphi(а) = 1$, $\varphi(и) = 11$. **19.1.** а) $(a, 2) \in \Phi$ е точен исказ, а другите два се неточни. б) Не. **20.1.** $\Phi = \{(A, a), (A, u), (B, a)\ (B, e), (C, a), (C, u), (C, o), (T, a), (T, u)\}$. Φ има девет елементи. **21.1.** Не, зашто 1, 2 и 3 не се поголеми за 3 од ниеден природен број, т.е. 1, 2 и 3 не се први компоненти на ниеден елемент (пар) од Φ. На пример: (4, 1), (5, 2), (9, 6), $(17, 14) \in \Phi$. **22.1.** Ако $x \in \mathbf{A}$, тогаш $\varphi(x)$ е цифрата на која завршува x. **23.1.** а) Не. б) Да. **24.1.** а) На секој број од **A** му се придружува со φ неговиот квадрат. б) Црт. IV. 10. в) $\varphi = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. г) $\Phi = \{(-2, 4), (-1, 1), (1, 1), (2, 4)\}$. д) $\mathbf{V} = \{1, 4\}$

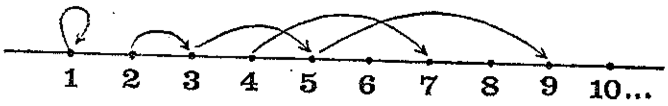


Црт. IV. 10



Црт. IV. 11

25.1. а) На секој број од **A** му се придружува апсолутната вредност на тој број зголемен за единица. б) Црт. IV. 11. в) $\varphi = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. г) $\Phi = \{(-2, 3), (-1, 2), (1, 2), (2, 3)\}$. д) $\mathbf{V} = \{2, 3\}$. **26.1.** *а*) На секој природен број да му се придружи неговиот



Црт. IV. 12

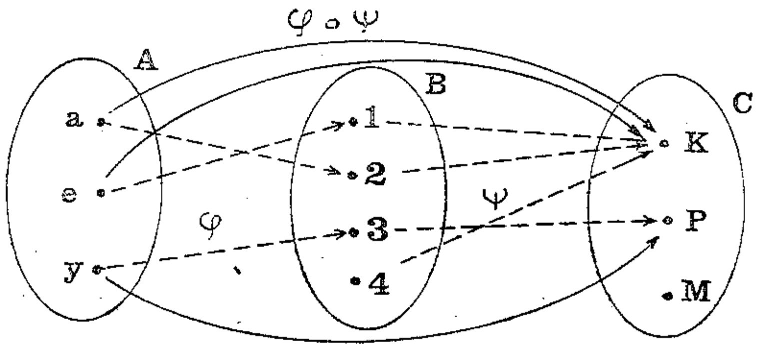
удвоен производ намален за единица. б) Црт. IV. 12. (Се разбира, ова е само дел од графот на φ; тој не може да се претстави целосно, зашто **N** е бесконечно множество). в) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ldots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11\ldots \end{pmatrix}$ г) $\Phi = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), \ldots\}$. д) $\mathbf{V} = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$. **27.1.** а) $y = 2x$. б) $y = x^3$. **28.1.** а) $\varphi(x) = x^2$. б) $\varphi(x) = 3x + 1$. **29.1.** Едно пресликување $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ се вика *сурјекција* од **A** на **B** ако секој елемент $b \in \mathbf{B}$ е слика барем на еден елемент $a \in \mathbf{A}$ (т.е. ако досегот **V** на φ се совпаѓа со целта **B** на φ). **30.1.** а) Не, зашто $4 \in A$, но не е слика на ниеден елемент од **A**. б) Не, зашто, на пример, $1 \in \mathbf{N}$ не е слика на ниеден елемент од **Z**. в) Да. г) Не, зашто $1, 2, 3 \in \mathbf{N}$ не се слики на ниеден елемент од **N**. **31.1.** На пример, $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ определено со правилото: на секој негативен број од **A** му се придружува $0 \in \mathbf{B}$, а на секој позитивен број од **A** му се придружува $1 \in \mathbf{B}$; $\psi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, определено со правилото: на секој број од **A** чиј збир на цифрите е парен број му се придружува $0 \in \mathbf{B}$, а на преостанатите — бројот $1 \in \mathbf{B}$. Значи: $\varphi = \begin{pmatrix} -15 & -3 & 4 & 13 & 33 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\psi = \begin{pmatrix} -15 & -3 & 4 & 13 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **32.1.** Едно такво пресликување е следново: $\varphi(x) = -1$ за $x < 0$, $\varphi(x) = 0$ за $x = 0$, $\varphi(x) = 1$ за $x > 0$. Друго такво пресликување е определено со: $\psi(x) = -1$ ако x е ирационален број, $\psi(x) = 0$ ако $x = 0$, $\psi(x) = 1$ ако x е рационален број, различен од 0. **33.1.** Ако p е точен исказ, ставаме $\tau(p) = 1$, ако p е неточен $-\tau(p) = 0$; тогаш τ е пресликување од **A** на **B**. **34.1.** б) Ако $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ и некое од нив е конечно, тогаш не постои пресликување $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ што би било сурјекција. Уп. Уочи дека, ако **A** има k елементи, тогаш досегот **V** на φ не може да има повеќе од k елементи. **35.1.** а) До с е к о ј а точка од **B** стигнува барем една стрелка. Тоа својство го имаат пресликувањата од 5.1 г), ѓ) и 14.1, а го немаат тие од 5.1 д) и 26.1. б) Секој елемент од **B** се јавува барем еднаш во втората редица на табелата. Тоа својство го имаат пресликувањата од 10.1 б) и 14.1, а го немаат тие од 10.1 а) и 24.1. в) Секој елемент од **B** се јавува како втора компонента барем во еден елемент (т.е. пар) од Φ. Тоа својство го има пресликувањето од 19.1, а го немаат тие од 16.1 в), г) и 22.1. **36.1.** За едно пресликување $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ велиме дека е инјекција ако секој пар различни елементи од **A** се пресликува со φ во пар различни елементи од **B**, т.е.

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2). \tag{1}$$

Исказот (1) е еквивалентен со исказот

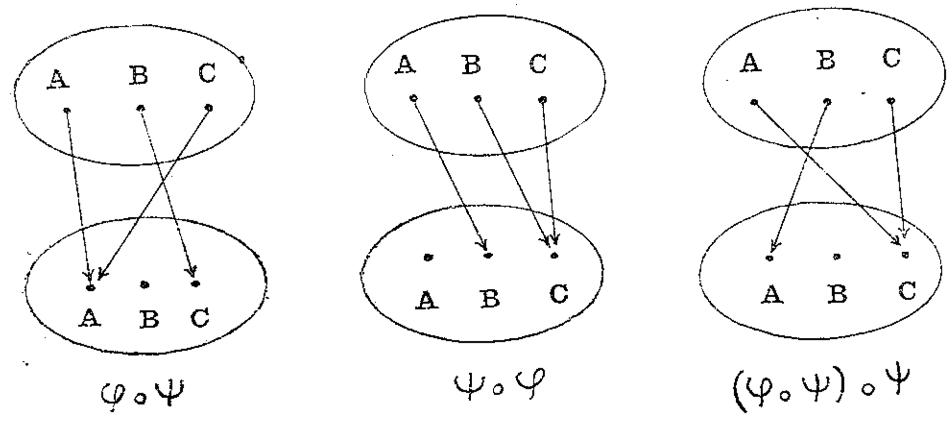
$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

37.1. а) Не е инјекција, зашто $12 \neq 13$, но $\varphi(12) = 3 = \varphi(13)$. б) Да. в) Не, зашто, на пример, $\varphi(6) = \varphi(8) = 4$. **38.1.** а) До секој елемент од досегот на φ стигнува една и само една стрелка. Тоа својство го имаат пресликувањата од 5.1. ѓ) и 26.1, а го немаат тие од 5.1. г), д) и 12.1. б) Секој елемент од втората редица на таблицата се јавува на едно и само на едно место. Тоа својство го имаат пресликувањата од 10.1 б) и 28.1 а), б), а не го има тоа од 10.1 а). в) Ако некој елемент $y \in \mathbf{B}$ се јавува како втора компонента на некој пар, тогаш y се јавува само во тој пар. Тоа својство го има пресликувањето во 18.1, а го нема тоа од 37.1 а). **39.1.** а) и б) Не. б) и г) Да. **40.1.** Пресликување што е сурјекција и инјекција. **41.1.** а) $\mathbf{B} = \{-3, -1, 3, 5, 7\}$. б) $\mathbf{B} = \{-3, -1, 3, 5, 7\} \cup \mathbf{C}$, каде што **C** е произволно множество. **42.1.** а) $\mathbf{V} = \mathbf{B}$; φ е биекција. б) $\mathbf{V} = \{a, e, u, o, y\}$; φ е инјекција, но не е сурјекција. е) $\mathbf{V} = \mathbf{B}$; φ е сурјекција, а не е инјекција. г) $\mathbf{V} = \mathbf{N}^\circ$; φ не е ни сурјекција ни инјекција. д) $\mathbf{V} = \mathbf{N}^\circ$; φ е сурјекција, а не е биекција, зашто φ не е инјекција. **43.1.** а) 1° Да. 2° Не. б) 1° Да. 2° Инјекција но не е сурјекција, зашто 1 не е слика. в) Не е пресликување; на пример, 1, 2, 4 се делители на 4, т.е. на 4 со φ се придружуваат 1, 2 и 4. г) 1° Да. 2° Биекција. **44.1.** а) Кога $\mathbf{B} = \{c\}$. б) Кога **A** е едноелементно множество. в) Кога **A** и **B** се едноелементни множества. **45.1.** б) $\varphi(x, y) = x+y$. в) 1) (1, 1); 2) (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1); 3) 1 не е слика на ниеден елемент од **A**. г) Не. **46.1.** б) $\varphi(x, y) = xy$. в) 1) (1, 2), (2, 1); 2) (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1); 3) (1, 1) .г) Сурјекција, не е инјекција. **47.1.** Едно такво пресликување, да го означиме со φ, е следново: „сликата на кој било збор е должината на тој збор, т.е. бројот на сите негови букви". Ова пресликување не е инјекција (зашто постојат различни зборови со ист број букви), а не е ни сурјекција (зашто не постои збор со, на пример, илјада букви). **48.1.** Едно такво пресликување е определено на следниов начин: сликата на еден триаголник е неговото тежиште. Пресликувањето е сурјекција, а не е инјекција **49.1.** а) „На секоја кружница да ѝ се придружи должината на нејзиниот радиус". Не е сурјекција ни инјекција. б) „На секој вектор да му се придружи неговата должина". Ова пресликување е сурјекција, а не е инјекција. в) „Секој ученик да му се придружи на училиштето во кое учи". Ова пресликување е сурјекција, а не е инјекција. **50.1.** а) Ако **A** е множеството букви од кирилицата, а **B** е множеството редни броеви од 1 до 31, тогаш $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ е биекција. б) Ако **A** е множеството тимови од Првата лига (сојузна), а **B** е множеството капитени на тие тимови, тогаш $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ е биекција. (Ако **A** е како погоре, а **B** е множеството капитени на сите тимови на Сојузните лиги (I, II) тогаш $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ е инјекција, а не е сурјекција). в) Ако **A** е множеството тимови од Првата сојузна лига, а $\mathbf{B} = \mathbf{N}°$, тогаш $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ е пресликување. Тоа пресликување не е сурјекција ни инјекција. г) Ако **A** е множеството планети од Сончевиот систем, а **B** е множеството самогласки, тогаш придружувањето φ не е пресликување. (Зашто, на пример, на Венера ќе ѝ се придружени два елемента од **B**). д) Ако **A** е множеството луѓе од Земјава, а $\mathbf{B} = \mathbf{N}$, тогаш $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ е пресликување; тоа не е инјекција и не е сурјекција. ѓ) Ако **A** е множеството мајки, а **B** е множеството луѓе на Земјава, тогаш φ не е пресликување (Зошто)? **51.1.** Не, зашто на центарот од впишаната кружница (како и на многу точки од симетралите на аглите) не може да ѝ се придружи точка од **G** на еднозначен начин. **52.1.** Пресликувањето не е ни сурјекција ни инјекција. **53.1.** Не. **54.1.** а) Не. Уп. На точката O, според ова правило, не можеме да ѝ придружиме точка од k. б) Да; пресликувањето не е инјекција, а е сурјекција Уп. Потпомогни се со цртеж. в) Да; биекција (тоа е идентичното пресликување. од k на k). **55.1.** а), б) Не. в) Да; инјекција, не е сурјекција. г) Да; биекција. Уп. а), б) Со φ, на точката O не ѝ се придружува никаква точка од П. в) Не е сурјекција, зашто точката O не е слика на ниедна точка од $\Pi \setminus \{O\}$. **56.1.** Ако $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ е биекција, тогаш пресликувањето $\psi : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ определено со следниов пропис: $\psi : \psi(b) = a \Leftrightarrow b = \varphi(a)$ се вика *инверзна биекција* на φ; се означува со φ^{-1}. Пресликувањата φ_1 и φ_2 не се биекции (зашто не се сурјекции), а пресликувањето φ, определено со релацијата Φ, е биекција. Инверзната биекција φ^{-1} е определена со релацијата $\Phi^{-1} = \{(б, 1), (а, 2), (г, 3), (д, 4), (в, 5)\}$. **57.1.** Биекции се φ_3 и φ_4; $\varphi_3^{-1} = \varphi_4$, $\varphi_4^{-1} = \varphi_3$. **58.1.** $\varphi^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$. **59.1.** Биекции се $\varphi(x) = 3x$ и $\varphi(x) = 2 - 5x$. Инверзни биекции се: $\varphi^{-1}(x) = \dfrac{x}{3}$ и $\varphi^{-1}(x) = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}x$ соодветно. **60.1.** а) $\varphi^{-1}(x) = 3 - x$. б) $\psi^{-1}(x) = \begin{cases} x/2 & \text{за } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{за } x \geqslant 0. \end{cases}$ **61.1.** а) $\varphi^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3}$. б) $\varphi^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. **62.1.** $\varphi(x) = 2x - 3$; $\varphi^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$. Уп. Стави $x + 1 = t$, т.е. $x = t - 1$, па уочи дека од $\varphi(x+1) = 2x - 1$ се добива $\varphi(t) = 2(t-1) - 1 = 2t - 3$. **63.1.** б), в) ѓ); $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x/3}$. Уп. б) $\mathbf{V} = \{3x^2 \mid x \in \mathbf{N}\} = \{3 \cdot 1^2, 3 \cdot 2^2, \dots\} = \{3, 12, 27, 48, \dots\}$; в) $\mathbf{V} = \{3x^2 \mid x \in \mathbf{Q}^+\}$; ѓ) $\mathbf{V} = \{12, 3, 27, 125\}$. **64.1.** а) $\psi = \begin{pmatrix} а & с & с & е \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. б) $\Psi = \{(a, 1), (e, 2), (e, 3), (e, 4)\}$. ψ не е пресликување од **B** во **A** (зашто, на пример, на $e \in \mathbf{B}$ му се придружуваат три елементи: 2, 3, 4 од **A**). **66.1.** Секое пресликување $\varphi : \mathbf{F} \to \mathbf{F}$ (т.е. пресликување при кое целта се совпаѓа со доменот) се вика *трансформација* на множеството **F**). а) Не. б) Да. в) Не. **68.1.** а) Да; не е ни сурјекција ни инјекција. б) Не. в) Да, биекција. **69.1.** а) Не. б) Да. **70.1.** а) φ е инјекција, не е сурјекција и не е константно пресликување; B е единствената неподвижна точка на φ (т.е. $\varphi(B) = B$), а досегот **V** е множеството од сите точки на отсечката SB, каде што S е средината на AB. б) φ е биекција; средината S на AB е неподвижна точка; $\mathbf{V} = \mathbf{F}$. в) Не е трансформација на **F**, зашто за средината S на AB може да бидат придружени и A и B. г) φ е трансформација на $\mathbf{F}$; не е инјекција, ни сурјекција, ни константно пресликување; неподвижни точки се A, B и S, а $\mathbf{V} = \{A, B, S\}$. д) φ е трансформација на $\mathbf{F}$; константно пресликување; не е инјекција ни сурјекција; S е неподвижна точка на φ и $\mathbf{V} = \{S\}$. ѓ) Не е трансформација на $\mathbf{F}$. **71.1.** а) Биекција; нема неподвижни точки. б) Не е трансформација на $\mathbf{F}$. в) Биекција; O е единствената неподвижна точка. **72.1.** $\varepsilon=\begin{pmatrix}A\\A\end{pmatrix}$; ε е биекција; нема други. **73.1.** $\varepsilon=\begin{pmatrix}A & B\\A & B\end{pmatrix}$, $\varphi_1=\begin{pmatrix}A & B\\B & A\end{pmatrix}$, $\varphi_2 = \begin{pmatrix}A & B\\A & A\end{pmatrix}$, $\varphi_3 = \begin{pmatrix}A & B\\B & B\end{pmatrix}$; биекции се ε и φ_1. **74.1.** $\varepsilon=\begin{pmatrix}A & B & C\\A & B & C\end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix}A & B & C\\A & C & B\end{pmatrix}$, $\sigma_2=\begin{pmatrix}A & B & C\\C & B & A\end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix}A & B & C\\B & A & C\end{pmatrix}$, $\rho_1 = \begin{pmatrix}A & B & C\\B & C & A\end{pmatrix}$, $\rho_2 = \begin{pmatrix}A & B & C\\C & A & B\end{pmatrix}$. **75.1.** а) $\varphi(\mathbf{S})=\{2\}$, $\varphi(\mathbf{T})=\{2, 3, 4\}$, $\varphi(\mathbf{S}\cup\mathbf{T}) = \{2, 3, 4\} = \varphi(\mathbf{S}) \cup \varphi(\mathbf{T})$. б) $\varphi(\mathbf{S} \cup \mathbf{T}) = \varphi(\mathbf{S}) \cup \varphi(\mathbf{T})$, $\varphi(\mathbf{S} \cap \mathbf{T}) = \{2, 4\} \subset \{2, 3, 4\} = \varphi(\mathbf{S}) \cap \varphi(\mathbf{T})$. **76.1.** а) Кога φ е сурјекција. б) Секогаш. в) Никогаш. **77.1.** Уп. В. стр. 114 од Учебникот. **78.1.** $\varphi\circ\psi = \begin{pmatrix}a & e & y\\K & K & P\end{pmatrix}$; Црт. IV. 13. **79.1.** а) B, A, B, A, C соодветно. Уп. $(\varphi\circ\psi)\circ\varphi\,(A)$ се добива „патувајќи“ по табелите $A \xrightarrow{\varphi} C \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\varphi} C$. б) $X=A, B$. в) Уп.



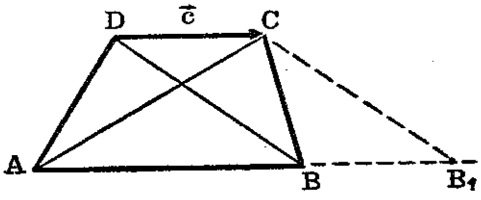
Црт. IV. 13

Равенството важи поради асоцијативноста на операцијата состав на трансформации; види во Учебникот, стр. 115. г) Црт. IV. 14. **80.1.** а) $\varphi\circ\psi = \begin{pmatrix}A & B & C & D\\D & A & B & C\end{pmatrix} = \psi\circ\varphi$, б) $\varphi^{-1}=$



Црт. IV. 14

$= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix} = \varphi$, $\psi^{-1} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} = \psi$. **81.1.** а) $\varphi^2 = \varepsilon = \psi^2$, $\varphi\circ\psi = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix} \neq$ $\neq \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix} = \psi\circ\varphi$. б) $\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{pmatrix}$, $\psi^{-1} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$; $(\varphi\circ\psi)^{-1} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix} =$ $= \psi^{-1}\circ\varphi^{-1}$. в) Да. **82.1.** а) $\mathbf{V}_\varphi = \{1, 2, 3\}$, $\mathbf{V}_\psi = \{1, 2, 4\}$. б) $\varphi\circ\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\psi\circ\varphi =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. в) $\mathbf{\Gamma} = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (5, 4)\}$. **83.1.** а) $\varphi\circ\varphi = \varphi$. б) $\varphi^2(\mathbf{F}) = \mathbf{S}$, каде што $\mathbf{S}$ е множеството точки од страната AB. **84.1.** Уп. Види ја теоремата од разделот V.1.2. **85.1.** б) $(\varphi\circ\psi)(X) = B$, $(\psi\circ\varphi)(X) = B$ за секој $X \in \mathbf{F}$ (тие се константни пресликувања); $\varphi\circ\psi = \psi\circ\varphi$. в) $\varphi^2(\mathbf{F}) = \mathbf{S}$, $(\varphi\circ\psi)(\mathbf{F}) = \{\mathbf{B}\}$, каде што $\mathbf{S}$ е множеството точки од катетата AB. г) Неподвижни точки за φ се точките од катетата AB, а за $\varphi\circ\psi$ само точката B. **86.1.** а) $\varphi^2(x) = 9x - 8$. б) $9x^2 - 24x + 15$. в) $7 - 3x^2$. г) $x^4 - 2x$. д) $\frac{4}{3} - \frac{y}{3}$. ѓ) $(\varphi^{-1})^{-1}(x) =$ $= 4 - 3x = \varphi(x)$. **87.1.** а) $\varphi(0) = 2$, $\varphi^2(0) = 8$, $\varphi(1 + \varphi(0)) = 11$, $\varphi^2(x) = 9x + 8$. б) $\varphi^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$. **89.2.** Уп. Низ точката A повлечи права, паралелна со векторот $\mathbf{a}$. Ако $\mathbf{a} = \overrightarrow{CD}$, тогаш конструирај го паралелограмот $AA'DC$. **91.2.** Да. **92.2.** Уп. Искористи го фактот што $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, т.е. четириаголникот $AA'B'B$ е паралелограм. **93.2.** Уп. Искористи го фактот што $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ако и само ако четириаголникот $ABDC$ е паралелограм, т.е. ако и само ако $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. **94.2.** Не; за секоја точка A, имаме $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, што значи дека $A' \neq A$. **96.2.** Не. **97.2.** Уп. Најди ја точката $O' = \tau_{\mathbf{a}}(O)$, а потоа конструирај ја кружницата (O', r). **100.2.** Уп. Искористи ја 98. 2. IV, т.е. фактот што, при транслација, агол се пресликува во нему еднаков агол. **101.2.** Уп. Искористи го фактот што, права при транслација се пресликува во права, при што двете прави се паралелни, и средина на отсечка се пресликува со средината на сликата од отсечката. **103.2.** Уп. Ако CD е помалата од основите на трапезот $ABCD$, најди ја сликата на едната од дијагоналите при транслацијата за вектор $\overrightarrow{CD}$ или за вектор $\overrightarrow{DC}$ и разгледај го добиениот цртеж. **104.2.** Уп. Ако е познат кракот $b = \overline{BC}$, разгледај го црт. IV. 17 и заклучи дека триаголникот AB_1C може да конструира и дека темето B може да се најде. **107.2.** Уп. Избери произволна кружница $\bar{k}$ што ги допира паралелните прави; потоа низ дадената точка A повлечи права a, паралелна на дадените прави; ако A_1 и A_2 се пресечните



Црт. IV. 17

точки на a и $\bar{k}$, конструирај ги сликите k_1 и k_2 на кружницата $\bar{k}$ при транслациите τ_1 и τ_2 за вектор $\overrightarrow{A_1A}$ и $\overrightarrow{A_2A}$ соодветно; k_1 и k_2 се бараните кружници. **108.2.** Уп. Повлечи права a низ O_2 нормална на p, а потоа права b низ O_1 нормална на a. Ако $O = a \cap b$ изврши транслација на k_1 за вектор $\overrightarrow{O_1O}$. **109.2.** Уп. Примени ја транслацијата за вектор $\overrightarrow{AB}$ односно за вектор $\overrightarrow{BA}$. **110.2.** Уп. Проследи го решението на 109. 2. IV, земајќи ја правата p наместо кружницата k_1. Задачата може да има најмногу четири решенија. **112.2.** $\overline{BC}$. **115.3.** Ако и само ако $O \in p$ **118.3.** Ако и само ако $S = O$. **119.3.** а) Да. б) Да. в) Не. **120.3.** Да; точката O е средина на отсечката AB. **121.3.** Не мора да постои. Уп. Направи цртеж кога $ABCD$ е паралелограм и кога $ABDC$ е паралелограм. **122.3.** Уп. Векторот $\overrightarrow{AB}$ напиши го во обликот $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, а потоа искористи ја дефиницијата на централна симетрија. **123.3.** Уп. Следува од 121. 3. IV и 122. 3. IV. **124.3.** Уп. Види 123. 3. IV и потсети се дека $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ е потребен и доволен услов за четириаголникот $ABCD$ да биде паралелограм. **125.3.** Не мора да постои; постои ако и само ако $p\|q$; во тој случај постојат бесконечно многу такви централни симетрии. **126.3.** Не мора да постои; постои ако и само ако полуправите се комплементарни, т.е. се дополнуваат до права. **127.3.** Може да се заклучи дека составот $\sigma_1\circ\sigma_2$ е транслација за вектор $2\overrightarrow{O_1O_2}$. Уп. Векторот $\overrightarrow{AA''}$ претстави го во обликот $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'A''}=$ $=(\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_1A'})+(\overrightarrow{A'O_2}+\overrightarrow{O_2A''})$, а потоа искористи ја дефиницијата на централна симетрија. **128.3.** Уп. Векторот $\overrightarrow{MM_6}$ напиши го во обликот $\overrightarrow{MM_2}+\overrightarrow{M_2M_4}+\overrightarrow{M_4M_6}$, а потоа користејќи ја 127. 3. IV, ќе добиеш $\overrightarrow{MM_6}=\mathbf{0}$, од каде што следува тврдењето. **129.3.** Уп. Користејќи ја 127. 3. IV, докажи дека $\overrightarrow{A_0A_4}=2(\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_3O_4})=\overrightarrow{B_0B_4}$, од каде што следува тврдењето. **130.3.** Не. Од тоа може да се заклучи дека $\sigma_o\circ\tau_a\neq\tau_a\circ\sigma_o$. Уп. Направи цртеж и покажи дека $\overrightarrow{A_2A''}=2\mathbf{a}$, од каде што следува $A_2\neq A''$. **131.3.** Да; центарот на симетрија е средината на отсечката AB. **132.3.** Може, ако и само ако едната од нив, на пример B, е меѓу другите две, A и C, и $d(AB)=d(BC)$. **133.3.** Исполнет е еден од следниве случаи: 1) точките A, B, C и D се темиња на паралелограм; 2) точките A, B, C и D се колинеарни и, ако B и C лежат меѓу A и D, при што B е меѓу A и C, тогаш $\overline{AB}=\overline{CD}$, т.е. средината на отсечката AD е средина и на отсечката BC. **134.3.** а) Да; само еден. б) Не. в) Да; бесконечно многу. **135.3.** а) Да; само еден. б) Да бесконечно многу. в) Не; b. 132. 3. IV. **136.3.** Да; рамниот агол, со центар на симетрија темето на аголот. **137.3.** Ако и само ако полуправите лежат на паралелни прави и се спротивно насочени. **138.3.** а) Да. б) Да. в) Не. г) Не. **139.3.** а) Да. б) Да. в) Не. **140.3.** Ако и само ако е исполнет еден од следниве случаи: 1) $S_1=S_2$; 2) $S_1\neq S_2$, $r_1=r_2$. **141.3.** а) Ако и само ако $A=S$. б) Ако и само ако $S\in p$. в) Ако и само ако $A=S\in p$. **142.3.** Уп. Избери произволна точка $A\in\mathbf{F}$ и најди ги точките: $A_1=\sigma_{o_2}(A)$, $A_2=\sigma_{o_1}(A_1)$ и $A_3=\sigma_{o_2}(A_2)$, а потоа докажи дека $A_3=\sigma_{o_3}(A)$, од каде што ќе следува дека $A_3\in\mathbf{F}$, т.е. O_3 е центар на симетрија на $\mathbf{F}$. **143.3.** Уп. Искористи ја 142. 3. **144.3.** Не може; ако фигурата е централно симетрична, тогаш таа може да има само еден центар на симетрија. **145.3.** Да; на пример, фигурата составена од две прави што се сечат. Не, в. 143. 3. IV. **146.3.** Уп. Заклучи дека $\sigma_o(A)=C$, $\sigma_o(E)=F$, од каде што следува тврдењето. **147.3.** Уп. Докажи дека $\sigma_o(M)=N$ од каде што следува тврдењето. **148.3.** Уп. Направи цртеж и согледај дека $\sigma_o(E)=F$. **149.3.** Уп. Докажи дека четириаголникот е централно симетричен. **150.3.** Уп. Користејќи ја 146. 3. IV, докажи дека $\sigma_o(M)=P$, $\sigma_o(N)=Q$, од каде што следува дека четириаголникот $MNPQ$ е централно симетричен со центар на симетрија точката O. Потоа, потсети се дека еден четириаголник е централно симетричен ако и само ако тој е паралелограм. **152.3.** Уп. Ако O е центарот на паралелограмот $ABCD$, докажи дека $\sigma_o(S_1)=S_2$. **153.3.** Уп. Докажи дека $\sigma_T(A_1)=A_2$, $\sigma_T(B_1)=B_2$ и $\sigma_T(C_1)=$ $=C_2$, од каде што следува тврдењето. **154.3.** Уп. Направи цртеж и согледај дека триаголникот ABC со σ_T се пресликува во другиот триаголник, од каде што следува тврдењето. **156.3.** Уп. Претпостави дека задачата е решена и согледај дека $N=$ $=\sigma_A(p)\cap q$. Бараната права ќе биде правата NA. **158.3.** Уп. Претпостави дека задачата е решена и согледај дека $N=\sigma_A(M)$. Потоа ако $k_1'=\sigma_A(k_1)$, тогаш $N\in k'_1\cap k_2$, а бараната права ќе биде правата NA. Задачата може да има најмногу две решенија. Види го решението на 157. 3. IV. **159.3.** Уп. Претпостави дека задачата е решена и a бараната права. Ако a ги сече кружниците k_1 и k_2, покрај во A, уште и во B и C соодветно, согледај дека $C=\sigma_A(B)$. Значи, $C\in k_1'\cap k_2$, каде што $k_1'=\sigma_A(k_1)$. **160.3.** Уп. Ако $ABCD$ е бараниот паралелограм на кој се познати темињата A, B и пресекот O на дијагоналите, тогаш $C=\sigma_o(A)$, $D=\sigma_o(B)$. **161.3.** Уп. Ако $M'=\sigma_o(M)$, $N'=\sigma_o(N)$, $P'=\sigma_o(P)$ и $Q'=\sigma_o(Q)$, тогаш страните на паралелограмот лежат на правите MN', NM', PQ' и $P'Q$. **162.3.** Уп. При претпоставка дека задачата е решена, согледај дека средината A_1 на страната BC може да се најде; таа го задоволува условот $\overrightarrow{AA_1}=$

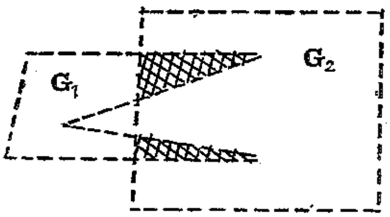
$=\frac{3}{2}\overrightarrow{AT}$; потоа согледај дека задачата се сведува на 156. 3. IV. **163.3.** Уп. Ако $A'=$ $=\sigma_M(A)$, тогаш $\sphericalangle A'TB=\ldots$, така што триаголникот $A'TB$ може да се конструира На крајот $X=BT\cap k$. **164.4.** $\sigma_a(X)=X\Leftrightarrow X\in a$. **165.4.** Ако и само ако $p=a$ или $p\perp a$. **169.4.** Ако и само ако $S\in a$. **170.4.** Да; правата a е симетралата на отсечката AB. **171.4.** Да. Ако правите се сечат, тогаш постојат две такви осни симетрии, а ако се паралелни, постои само една. **172.4.** Не мора да постои. Да. **173.4.** Ако и само ако $r_1=r_2$. Да. **174.4.** Уп. Согледај дека точките A, A', B, B', ако не се колинеарни, се темиња на рамнокрак трапез. **175.4.** Не постои; на пример, ако $\overline{AB}\neq\overline{CD}$, тогаш таква осна симетрија не постои **176.4.** Не мора да постои; на пример, ако $\overline{AC}\neq\overline{BD}$ и $AC\nparallel BD$. **179.4.** $\sigma_a\circ\sigma_b=\sigma_b\circ\sigma_a$. Уп. Направи цртеж и докажи дека четириаголниците $AA'A''A_1$ и AA_1A_2A' се правоаголници со три исти темиња, од каде што ќе следува $A_2=A''$. **180.4.** $\sigma_a\circ\sigma_b=\sigma_o$. **181.4.** Да. Две; правата AB и симетралата на отсечката AB. **182.4.** Една или две. Ако една од точките е средина на отсечката образувана од другите две точки, фигурата $\mathbf{F}=\{A, B, C\}$ има две оски на симетрија, а во спротивниот случај само една. **183.4.** Една или две. **184.4.** а) Да; две. б) Да; само една. в) Да; бесконечно многу. **185.4.** а) Да; две. б) Да; бесконечно многу. **187.4.** Ако $O_1=O_2$ или, пак, правата O_1O_2 е нормална на симетралата на аголот AOB, каде што O е пресек на правите O_1A и O_2B. **188.4.** а) Да; бесконечно многу. б) Да; бесконечно многу. в) Да; само една. г) Да; само една. **189.4.** а), б), в) Да. **190.4.** Секогаш; една, две или бесконечно многу и тоа: ако $S_1\neq S_2$ и $r_1\neq r_2$ само една (правата S_1S_2); ако $S_1\neq S_2$, $r_1=r_2$, две (правата S_1S_2 и симетралата на отсечката S_1S_2); ако $S_1=S_2$ — бесконечно многу (секоја права низ центарот $S_1=S_2$). **191.4.** Четири. **194.4.** Не. Уп. Види 193. 4. IV. **196.4.** Уп. Да се искориси 195. 4. IV. **197.4.** Уп. Докажи дека пресекот на оските на симетрија на фигурата $\mathbf{F}$ е центар на симетрија на таа фигура. Види 174. 4. IV. **198.4.** Уп. Види 196. 4. IV и 197. 4. IV. **199.4.** Не. На пример, рамностран триаголник има три оски на симетрија, но нема центар на симетрија. **200.4.** Уп. Види 180. 4. IV. **203.4.** Не. На пример, една права има бесконечно многу оски на симетрија, но тие не минуваат низ иста точка. **204.5.** Триаголникот е рамнокрак или рамностран. **205.5.** Уп. Искористи ја 204. 5. IV. **206.5.** Триаголникот е рамнокрак или рамностран. **207.5.** Уп. Искористи ја 206. 5. IV. **208.5.** Ако $\overline{AC}=\overline{BC}$, т.е. ако триаголникот ABC е рамнокрак или рамностран. **215.5.** Уп. Искористи го следново: Ако s е симетрала на еден агол чии краци лежат на правите a и b, тогаш $\sigma_s(a)=b$. **218.5.** а) Делтоид и рамнокрак трапез. б) Делтоид, рамнокрак трапез, ромб, правоаголник и квадрат. **219.5.** а) Ромб (што не е квадрат) и правоаголник (што не е квадрат). б) Ромб, правоаголник и квадрат. **220.5.** Ниедна, една, две или четири. **222.5.** Не; ако еден четириаголник има три оски на симетрија, тогаш тој е квадрат (221. 5. IV), а квадратот има четири оски на симетрија. **225.5.** Уп. Докажи дека правата p е оска на симетрија на рамнокракиот трапез $ABCD$. **228.5.** Уп. Правата p е оска на симетрија на рамнокракиот трапез $ABCD$, па правата AD со σ_p се пресликува во права BC, т.е. пресекот на AD и BC е неподвижна точка за σ_p, па таа припаѓа на оската p. Исто така, пресекот на дијагоналите е неподвижна точка за σ_p, па и таа припаѓа на p. **229.5.** Уп. Ако P е пресекот на дијагоналите, а Q пресекот од продолженијата на краците, докажи дека триаголниците ABD и ABQ се се рамнокраки и правата $p=PQ$ е нивна оска на симетрија. **230.5.** Уп. Ако p е оската на симетрија на рамнокракиот трапез $ABCD$, докажи дека $\sigma_p(T_1)=T_2$, од каде ќе следува тврдењето. **231.5.** Уп. Ако p е оската на симетрија на рамнокракиот трапез $ABCD$, докажи дека $\sigma_p(O_1)=O_2$ и $\sigma_p(S_1)=S_2$. **234.5.** Уп. Ако p е централната линија на кружниците k_1 и k_2, тогаш имаме $\sigma_p(k_1)=k_1$, $\sigma_p(k_2)=k_2$, па значи, $\sigma_p(A)=B$. Според тоа, тангентите на k_1 и k_2 во A се пресликуваат со σ_p во тангентите на k_1 и k_2 во B од каде што следува тврдењето. **235.5.** Уп. Правата s што минува низ центарот O на кружниците k_1, k_2 и е нормална на p е оска на симетрија за двете кружници. **238.5.** Уп. Ако $B'=\sigma_p(B)$, тогаш $X=p\cap AB'$. **239.5.** Замени ја точката B со точката $B'=\sigma_p(B)$. **240.5.** Уп. а) точката B замени ја со точката $B'=\sigma_p(B)$. б) Ако $B'=\sigma_p(B)$ тогаш правата AX е тангента на кружницата со центар во B' и радиус растојанието од B до првата p. в) Искористи го тоа што точката $B'=\sigma_{AX}(B)$ лежи на правата p и кружницата $(A, \overline{AB})$. **241.5.** Уп. Ако $k'_2=\sigma_p(k_2)$ и t е заедничка тангента на k_1 и k'_2, тогаш $X=t\cap p$. **242.5.** Уп. Искористи го тоа што правата p е оска на симетрија на бараниот квадрат. **243.5.** Уп. Правата p е оска на симетрија на ромбот, па $D\in\sigma_p(q)\cap k$, а $B=\sigma_p(D)$. Од темето A дијагоналата BD се гледа под агол 60°. **244.5.** Уп. Види ја зад. 2, стр. 145. (Учебникот). **245.5.** Уп. На правата p избери точка A_1 и конструирај триаголник $A_1B_1C_1$, за кој правите p, q и r се симетрали на неговите внатрешни или надворешни агли (244. 5. IV), а потоа искористи го фактот што страните на бараниот триаголник се паралелни со соодветните страни на триаголникот $A_1B_1C_1$. **246.5.** Уп. Докажи дека $A = \sigma_q(s) \cap \sigma_r(s)$, каде што s е правата што минува низ точката A_1 и е нормална на правата p. **247.5.** Уп. Конструирај триаголник ACB_1 со страни $\overline{AC} = b$, $\overline{AB_1} = c - a$ и агол α кај темето A. Потоа ако s е симетралата на отсечката CB_1, тогаш $B = s \cap AB_1$. **248.5.** Уп. Земи ја правата p низ C и паралелна на AB, а потоа точката $B' = \sigma_p(B)$. Докажи дека триаголникот ACB' може да се конструира и дека правата p е тежишната линија на ACB' повлечена од темето C. **249.6.** Уп. Разгледај ги случаите кога: 1) $\sphericalangle \overrightarrow{BOC}$ е исто насочен како $\sphericalangle \overrightarrow{AOB}$ и 2) $\sphericalangle \overrightarrow{BOC}$ е спротивно насочен од $\sphericalangle \overrightarrow{AOB}$. **250.6.** Уп. Искористи ја претходната задача и фактот што $\sphericalangle \overrightarrow{XTY} + \sphericalangle \overrightarrow{YTX} = 0$. **251.6.** $\sphericalangle \overrightarrow{AMB} = \sphericalangle \overrightarrow{ANB}$ или $\sphericalangle \overrightarrow{AMB} - \sphericalangle \overrightarrow{ANB} = 180°$. **252.6.** а) Правите се паралелни. б) Правите AM и BN се сечат во точка C, така што $\overline{AC} = \overline{BC}$. **253.6.** Уп. Направи цртеж и согледај дека $\triangle ABC \cong \triangle ABC_1$. **254.6.** Уп. Согледај дека $\triangle AC_1C' \cong \triangle BC_1C$, дека $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC'$ и дека двата, како насочени агли, имаат негативна насока; слично за другите две еднаквости. **255.6.** Уп. Направи цртеж и согледај дека правата OA е нормална на правата $A'A''$ и ја располовува отсечката $A'A''$. **257.6.** Ако и само како точката O е еднакво оддалечена од A и B. **258.6.** Да, постои и тоа само една; центарот O на таа ротација лежи на симетралата s од отсечката AB, така што $\sphericalangle \overrightarrow{AOB} = \alpha$. **259.6.** Да, постои и тоа бесконечно многу. Ако s е симетралата на отсечката AB, тогаш произволна точка O од s е центар на ротација ρ, така што $\rho(A) = B$. **261.6.** Постои само една таква ротација. Во случајот $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, таква ротација не постои (а постои транслација τ со својството $\tau(A) = C$, $\tau(B) = D$). **263.6.** Уп. Направи цртеж и согледај дека $\sphericalangle \overrightarrow{AOA''} = 2\alpha$. **264.6.** Уп. Направи цртеж. Избери две точки A, B на p и покажи дека нивните слики $A'B'$ при σ_{os} лежат на правата p'. **269.6.** Не постојат. За $\alpha' = 180°$ имаме $\rho = \sigma_o$, па неподвижни се правите што минуваат низ точката O. **270.6.** Кога $S = O$. **271.6.** Секогаш. **272.6.** Постои ако и само ако $r_1 = r_2$. Ако $r_1 = r_2$, тогаш постојат бесконечно многу такви ротации, зашто секоја точка O од симетралата на отсечката O_1O_2 $(O_1 \neq O_2)$ е центар на ротација ρ при која k_1 се пресликува во k_2. **274.6.** Да, и централно и осно симетричен. **275.6.** Уп. Разгледај ја ротацијата ρ со центар B и агол 60° (или агол —60°). **276.6.** Уп. Разгледај ја ротацијата ρ со центар B и агол 90° (или агол —90°). **277.6.** Уп. При претпоставката дека триаголникот е конструиран, установи дека при ротацијата ρ со центар A и агол 60° (или агол —60°) точката B се пресликува во C, од каде што ќе следува дека $C = \rho(p) \cap q$. **278.6.** Уп. Проследи го решението на 277. 6. IV, заменувајќи ја правата q со кружницата k. Задачата може да има најмногу четири решенија, а може и да нема решение. **279.6.** Уп. Проследи го решението на 277. 6. IV, заменувајќи ја правата p со кружницата k_1, а правата q со кружницата k_2. **280.6.** Уп. Избери произволна точка B од правата q и разгледај ги ротациите ρ_1 и ρ_2 со центар A и агол 60° и —60° соодветно. **281.6.** Уп. Проследи го решението на 280. 6. IV, заменувајќи ги правите p, q и r со кружниците k_1, k_2 и k_3 соодветно. **282.6.** Уп. Разгледај ја ротацијата со центар O и агол 90° (агол —90°). **283.6.** Уп. Проследи го решението на 282. 6. IV, заменувајќи ја правата q со кружницата k. Задачата може да има најмногу четири решенија. **284.6.** Уп. Проследи го решението на 282. 6. IV, заменувајќи ги правите p и q со кружниците k_1 и k_2 соодветно. Задачата може да има најмногу четири решенија. **285.6.** Уп. Разгледај ја ротацијата со центар O и агол 120° (агол —120°). **286.6.** Уп. Проследи го решението на 285. 6. IV, заменувајќи ја правата q со кружница k. Задачата може да има најмногу четири решенија. **287.6.** Уп. Проследи го решението на 285. 6. IV, заменувајќи ги правите p и q со кружниците k_1 и k_2 соодветно. Задачата може да има најмногу четири решенија. **290.7.** Не, ниеден триаголник не е централно симетричен. **291.7.** Уп. Потсети се дека еден четириаголник е централно симетричен ако и само ако е паралелограм (стр. 128 од Учебникот). **295.7.** Да, со ред 3. Уп. Триаголникот $O_1O_2O_3$ е рамностран, па разгледај ја ротацијата ρ со центар O (центарот на триаголникот $O_1O_2O_3$) и агол 120°. **296.7.** Уп. Да се искористи 202. 4. IV. **298.7.** Може; на пример, секој правоаголник е тетивен, има еднакви агли но не мора да има еднакви страни. **299.7.** Не може; секој тетивен n-аголник што има еднакви страни е правилен (види деф. на правилен n-аголник, Учебник стр. 154). **300.7.** Може; на пример, секој ромб е тангентен, но не мора да има еднакви агли (еден ромб не мора биде квадрат). **301.7.** Не може; секој тангентен n-аголник што има еднакви агли е правилен. **307.7.** n. **308.7.** а), б) Не мора; на пример, секој паралелограм е и оскосиметрична и центросиметрична фигура. **311.8.** Уп. Докажи дека секое движење е инјекција и сурјекција. **317.8.** Уп. Ако φ е движење, $\alpha = \measuredangle AOB$ е даден агол и ако $\varphi(A) = A'$, $\varphi(O) = O'$, $\varphi(B) = B'$, докажи дека триаголниците AOB и $A'O'B'$ се складни. **319.8.** Не важи. **321.8.** Уп. Ако σ_R, σ_S и σ_T се три централни симетрии, тогаш составот $\sigma_R \circ \sigma_S \circ \sigma_T$ напиши го во обликот $\sigma_R \circ (\sigma_S \circ \sigma_T)$ и искористи ја 319. 8. IV и 320. 8. IV. **323.8.** Уп. Искористи ја задачата 261. 6. IV. **324.8.** Уп. Разгледај ги случаите кога оските на осните симетрии се паралелни и кога се сечат (Учебникот, стр. 158). **332.8.** Уп. Користејќи ја 331. 8. IV, докажи дека секоја точка од правите AB, BC и CA е неподвижна за φ. Потоа, ако X е точка што не лежи на ниедна од правите AB, BC и CA, избери права x што ги сече правите AB, BC и CA во две различни точки P и Q и искористи ја пак 331. 8. IV. **337.8.** Уп. Проследи го решението на 336. 8. IV. **338.8.** Ако $\overrightarrow{S_1S_2} + \overrightarrow{S_3S_4} = \mathbf{0}$, постојат бесконечно многу такви четириаголници; ако $\overrightarrow{S_1S_2} + \overrightarrow{S_3S_4} \neq \mathbf{0}$, таков четириаголник не постои. Уп. Искористи го тоа што A_1 е неподвижна точка за составот $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4$, каде што σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 се централни симетрии со центри S_1, S_2, S_3 и S_4 соодветно, а тој состав е транслација за вектор $2(\overrightarrow{S_1S_2} + \overrightarrow{S_3S_4})$. **339.8.** Уп. Обопшти го решението 338. 8. IV. **341.8.** Уп. Проследи го решението на 340. 8. IV.

Гл. V. ТРАНСФОРМАЦИИ НА СЛИЧНОСТ

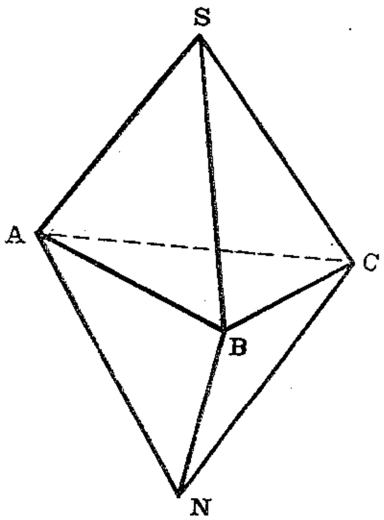
2.1. Уп. Разгледај ги можностите: а) B не е колинеарна, б) B е колинеарна со O, A, A'. Искористи ја теоремата за пропорционални отсечки. **5.1.** Постои χ ако и само ако точките O, A и A' се колинеарни; во тој случај постои единствена таква хомотетија. **6.1.** Постои, и тоа само една; центарот O на таа хомотетија го задоволува условот $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$. **7.1.** Постои, и тоа бесконечно многу; која било точка O од правата AA', $O \neq A, A'$, може да биде центар на таква хомотетија. **10.1.** Составот $\chi_1 \circ \chi_2$ е хомотетија. **11.1.** Составот $\chi_1 \circ \chi_2$ е транслација. **15.1.** Ако и само ако векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се колинеарни, но различни (види 10. 1. V). **16.1.** Ако и само ако $p \parallel q$. **17.1.** Секоја точка што не припаѓа на ниедна од правите p, q. **18.1.** Ако и само ако $p \parallel q$ и правите што ги сврзуваат соодветните елементи од $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}_1$ минуваат низ иста точка. **19.1.** Да; при хомотетија со центар во центарот на кружниците и коефициент $k = \frac{r_2}{r_1}$ кружницата со радиус r_1 се пресликува во кружницата со радиус r_2. **21.2.** Ако кружниците се концентрични или, пак, неконцентрични, но со еднакви радиуси. **22.1.** а) Два. б) и в) Еден (ако радиусите им се еднакви) или два (ако радиусите им се различни). **23.1.** Во случај кога кружниците се концентрични. **24.1.** Четири, три, две, една или ниедна. **26.1.** Три или една. **27.1.** Четири или ниедна. **28.1.** Уп. Искористи го тоа што T е центар на сличност за двете кружници, т.е. при хомотетија со центар T и коефициент $\frac{r_2}{r_1}$ или $-\frac{r_2}{r_1}$, кружницата k_1 се пресликува во кружницата k_2. **29.1.** Уп. Искористи го тоа што триаголниците ABQ и CDQ се хомотетични со центар на сличност Q, а триаголниците ABP и CDP се хомотетични со центар на сличност P. **30.1.** Кружница со дијаметар OA. **31.1.** Уп. Искористи ја 30. 1. V. **32.1.** Уп. Примени ја хомотетијата со центар Q и коефициент $\overline{AB} : \overline{CD}$. **35.1.** Уп. Примени ја хомотетијата со центар C и коефициент $\overline{AB} : \overline{MN}$. **36.1.** Уп. Примени ја хомотетијата χ со коефициент $\overline{MN} : \overline{AB}$ и центар C_1, каде што C_1 е средината на страната AB. **37.1.** Уп. Ако A_1 е средината на AB и χ е хомотетија со центар A_1 и коефициент $1:3$, тогаш $\chi(C) = T_1$, $\chi(D) = T_2$, $\chi(E) = T_3$, од каде што ќе следува тврдењето. **38.1.** Уп. Фиксирај точка A на кружницата k_1; тогаш $B \in \chi_{A, 1/3}(k_1) \cap k_2$. **39.1.** Уп. Фиксирај точка A на кружницата k_1; тогаш $B \in \chi_{A, 1/2}(k_3) \cap k_2$. **40.1.** Уп. Конструирај произволен триаголник $A_1B_1C_1$ со агли α и β; триаголникот ABC е хомотетичен со $A_1B_1C_1$ со центар подножјето на висината спуштена од темето C_1. **41.1.** Уп. Конструирај произволен правоаголен триаголник A_1B_1C, на кој едната катета е двапати поголема од другата. Бараниот триаголник ABC е хомотетичен со A_1B_1C со центар C. **42.1.** Уп. Конструирај триаголник $A_1B_1C_1$ со страни $\overline{B_1C_1} = m$, $\overline{C_1A_1} = n$ и $\overline{A_1B_1} = p$; ако A_1D е симетралата на аголот кај A_1, тогаш бараниот триаголник ABC е хомотетичен со $A_1B_1C_1$ со центар D и коефициент $s_a : \overline{A_1D}$. **43.1.** Уп. Искористи го тоа што тежиштето T, ортоцентарот H и центарот O на опишаната кружница за произволен триаголник се колинеарни при што T ја дели отсечката HO во однос $2:1$. **47.1.** Уп. Ако k_1 е кружницата опишана околу триаголникот PQR и ако S е центар на сличност на кружниците k и k_1, разгледај ја хомотетијата со центар S и коефициент $r : r_1$. **48.1.** Уп. Види задача 2 од Учебникот, стр. 172. **51.1.** Уп. Ако s е симетралата на отсечката AB и $q = \sigma_s(p)$, тогаш кружницата k ја допира и правата q, па задачата се сведува на 50.1. **53.2.** Уп. Слично како 311. 8. IV. **54.2.** Уп. Слично како 314. 8. IV. **55.2.** Уп. Слично како 315. 8. IV. **56.2.** Уп. Слично како 316. 8. IV. **57.2.** Уп. Ако $\alpha = \sphericalangle AOB$, ψ сличност и ако $\psi(A) = A'$, $\psi(O) = O'$, $\psi(B) = B'$, докажи дека триаголниците AOB и $A'O'B'$ се слични. **58.2.** Ако производот од нивните коефициенти е 1. **60.2.** Уп. Види го решението на 10. 1. V. **62.2.** Уп. Види го решението на 10. 1. V. **63.2.** Уп. Централната симетрија σ со центар O_1 е сличност со коефициент -1, па ако χ е хомотетија со центар O_2 и коефициент $k \neq -1$, тогаш бидејќи $k(-1) = -k \neq 1$, според 61. 2. V, следува дека составите $\sigma\circ\chi$ и $\chi\circ\sigma$ се хомотетии. Ако $k = -1$, тогаш χ е централна симетрија, па составите $\sigma\circ\chi$ и $\chi\circ\sigma$ се транслации. **64.2.** Уп. Нека τ е транслација за вектор **a**, а χ хомотетија со центар O и коефициент k. Ако A, B се произволни точки и $\tau(A) = A'$, $\tau(B) = B'$, $\chi(A') = A''$, $\chi(B') = B''$, докажи дека $\overrightarrow{A''B''} = k\overrightarrow{AB}$, од каде, според 8. 1. V, ќе следува дека составот $\tau\circ\chi$ е хомотетија. **65.2.** Уп. Ако A, B се две произволни точки и $\rho(A) = A'$, $\rho(B) = B'$, $\chi(A') = A''$, $\chi(B') = B''$, докажи дека правите AB и $A''B''$ не се паралелни, од каде што следува дека составот $\rho\circ\chi$ не е хомотетија. За $\alpha = 0°$ ρ е ε, па $\rho\circ\chi = \chi$; за $\alpha = 180°$, ρ е σ_o, па составот $\rho\circ\chi$ е хомотетија или транслација. **66.2.** Уп. Ако A, B се произволни точки и $\sigma_a(A) = A'$, $\sigma_a(B) = B'$, $\chi(A') = A''$, $\chi(B') = B''$ докажи дека правите AB и $A''B''$ не се паралелни, од каде што следува дека составот $\sigma_a\circ\chi$ не е хомотетија. **69.2.** Уп. Разгледај ги хомотетите χ_1, χ_2 со центри T, P (T е тежиштето на триаголникот ABC) и коефициенти $-1/2$, 2 соодветно. Докажи дека $(\chi_1\circ\chi_2)(A) = A_2$, $(\chi_1\circ\chi_2)(B) = B_2$, $(\chi_1\circ\chi_2)(C) = C_2$ и дека составот $\chi_1\circ\chi_2$ е централна симетрија. **70.2.** Уп. Ако χ е хомотетијата со центар A и коефициент $\overline{AB} : \overline{AC}$, тогаш $B \in (\sigma_p\circ\chi)(k_2) \cap k_1$. **71.2.** Уп. Ако ρ е ротација со центар A и агол α или $-\alpha$ и ако χ е хомотетија со центар A и коефициент $\overline{AB} : \overline{AC}$, тогаш $B \in (\rho\circ\chi)(k_2) \cap k_1$. **72.2.** Уп. Претпостави дека $X \in BC$, $Y \in CA$. Ако ρ е ротација со центар P и агол $\alpha = \sphericalangle LKM$, а χ хомотетија со центар P и коефициент $\overline{KM} : \overline{KL}$, тогаш $Y \in CA \cap (\rho\circ\chi)(BC)$.

Гл. VI. КОШЕ И ПОЛИЕДРИ

2.1. а) и б) Безброј многу. в) Само една, ако точките не се колинеарни. г) Една или ниедна. **3.1.** Уп. Директна последица од аксиомата A. 6 (во Учебникот, стр. 21). **4.1.** Уп. Избери две различни точки од правата и искористи ја аксиомата A. 4 (стр. 18 во Учебникот). **6.1.** Уп. Аналогно на решението на задачата 3. 1. II. **7.1.** Уп. Согледај ја заемната положба на средните линии на триаголниците ABC и ACD што се паралелни со AC. **11.2.** Рамнина што минува низ точката A и е нормална на правата a. **13.2.** Уп. Согледај дека M лежи на симетралната рамнина на отсечката AB и на симетралната рамнина на отсечката CD (види 4. 2. VI). **14.2.** Уп. Докажи дека триаголниците AOP, BOP и COP се складни. **15.2.** Уп. Покажи дека која било точка од правата $p = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ лежи и во Σ_3. **16.2.** Празно множество или права; ако точките A, B и C се колинеарни, тогаш не постои точка еднакво оддалечена од нив, а ако не се колинеарни, тогаш геометриското место е права што минува низ центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC и е нормална на рамнината ABC. **17.2.** Уп. Согледај дека правата a е нормална на две прави од Σ, $p_1 = \Sigma \cap \Pi_1$ и $p_2 = \Sigma \cap \Pi_2$, коишто минуваат низ точката A. **18.2.** Уп. Докажи дека четириаголникот $AA'BB'$ е паралелограм, па неговите дијагонали AB и $A'B'$ се сечат и се преполовуваат. **19.2.** Уп. Докажи дека четириаголникот $AA'B'B$ е рамнински, од каде што ќе следува дека неговите дијагонали се сечат. **20.2.** Уп. Направи цртеж, така што A е произволна точка од a, A' проекцијата A врз Σ и B точка од правата b, $\overline{PB} = \overline{PA'}$, и разгледај ги триаголниците APA' и APB. **21.2.** Уп. Ако C' и D' се проекциите од C и D врз рамнината Σ, тогаш триаголниците ACC' и BDD' се складни. **22.2.** Кружница со центар во проекцијата A' на точката A врз рамнината Σ. **23.2.** Уп. Искористи ја 22. 2. VI. **24.2.** Уп. Направи цртеж, така што $M \in a$, M' проекцијата од M врз Σ, B, $C \in b$, $\overline{AB} = \overline{AC}$; потоа докажи дека триаголникот $M'BC$ е рамнокрак ако и само ако триаголникот MBC е рамнокрак. **25.2.** Уп. Разгледај ја рамнината Σ определена со правата a и точката B, а потоа искористи ја аксиомата за паралелност. **26.2.** Докажи дека правите a и b лежат во иста рамнина и не се сечат. **27.2** Уп. Претпостави дека Σ не е нормална на b и разгледај ја правата b_1 што минува низ $B=b\cap\Sigma$ и е нормална на Σ. **28.2.** Не може. **29.2.** Уп. Избери рамнина Σ и во неа n-аголник $A_1A_2\ldots A_n$, а потоа правите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ што минуваат низ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ соодветно и се нормални на Σ. **30.2.** Правата x е паралелна со дадените прави и минува низ центарот на опишаната кружница на триаголникот ABC, каде што A, B, C се прободите на правите a, b, c на рамнина Σ што е нормална на тие прави. **31.2.** Уп. Направи цртеж, така што $A = a\cap\Sigma$, $B = b\cap\Sigma$, $M\in a$, $N\in b$, $\overline{AM}=\overline{BN'}$, M' и N' се проекциите од M и N врз Σ, а потоа докажи дека триаголниците AMM' и BNN' се складни. **32.2.** Уп. Разгледај ја рамнината Σ_1, во која лежат правите a и b, а потоа согледај дека правата $p=\Sigma\cap\Sigma_1$ ги сече двете прави a, b. **34.2.** Уп. Тврдењето е јасно кога a_1 и b_1 се паралелни или се совпаѓаат, како и во случајот кога a_1 и b_1 се сечат, а кога a_1 и b_1 се разминуваат, тоа следува од дефиницијата за агол меѓу разминувачки прави. **41.2.** Уп. Следува од 40. 2. VI. **42.2.** Уп. Согледај дека правите a и b лежат во иста рамнина (П) и немаат заедничка точка. **43.2.** Уп. Постави рамнина П низ a, b и и согледај дека $b=\Pi\cap\Sigma$. **45.2.** Уп. Избери произволно две точки A и B на правата a, најди ги нивните проекции A' и B' врз Σ и согледај дека четириаголникот $ABB'A'$ е правоаголник. **46.2.** Бесконечно многу. **47.2.** Бесконечно многу. **48.2.** Уп. Низ произволна точка $A\in a$ повлечи права $p\parallel b$. Рамнината определена со a и p е бараната рамнина. Разгледај ги случаите кога: 1° $a\parallel b$ и 2° $a\nparallel b$. **49.2.** Тоа е правата што минува низ A и е паралелна на правата $b=\Sigma_1\cap\Sigma_2$. **50.2.** Уп. Низ A, повлечи прави a_1 и b_1, паралелни со a и b соодветно. Рамнината, определена со тие прави е паралелна со a и со b. **51.2.** Уп. Постави рамнина Σ_1 низ a и A, и разгледај ја правата b што минува низ A и е паралелна со правата $\Sigma\cap\Sigma_1$. **52.2.** Паралелни или разминувачки. **54.2.** Рамнината што минува низ правата a и е паралелна со правата b. **55.2.** Права, паралелна со правата a или празно множество (кога $p\parallel\Sigma$). **56.3.** Уп. Тргни од спротивното и изведи противречност. **57.3.** Уп. Искористи ја 56. 3. VI. **58.3.** Не мора. На пример, нека рамнините Σ_1 и Σ_2 се сечат во правата p и нека $a_1, a_2\in\Sigma_1$, $b_1, b_2\in\Sigma_2$, така што $a_1, a_2, b_1, b_2\parallel p$; тогаш $a_1\parallel b_1$ и $a_2\parallel b_2$, но рамнините Σ_1 и Σ_2 не се паралелни. **59.3.** Уп. Тргни од спротивното дека a_1 и a_2 имаат заедничка точка и изведи противречност. **61.3.** Рамнината што минува низ A и е паралелна со рамнината Σ. **62.3.** Рамнина, паралелна со дадената. **65.3.** Уп. Аголот $\alpha=\sphericalangle AOB$ е агол на диедарот, а триаголникот AOB е рамнокрак. **66.3.** 29 см. **67.3.** 8 см. **69.3.** Уп. Последица од 68. 3. VI. **70.3.** Уп. Тргни од спротивното: a не лежи во Σ_1, а потоа изведи противречност: низ A минува и друга права b (којашто лежи во Σ_1), $b\neq a$. **72.3.** Уп. Ако a' е проекцијата од a врз Σ_1, тогаш Σ е рамнината определена со правите a и a'. **73.3.** Уп. Ако a е правата низ A нормална на П и ако b е права од П што минува низ $A'=a\cap\Pi$, тогаш Σ е рамнината определена со правите a и b. Задачата има бесконечно многу решенија. **74.3.** Уп. Низ точката A постави произволна рамнина Σ_1 и права p низ A нормална на Σ_1, а потоа две заемно нормални рамнини Σ_2 и Σ_3 што минуваат низ правата p. **75.3.** Уп. Ако p_1 и p_2 се правите низ A нормални на Σ_1 и Σ_2 соодветно, тогаш бараната рамнина Σ е определена со правите p_1 и p_2. Задачата има едно или бесконечно многу решенија во зависност од тоа дали рамнините се сечат или се паралелни. **76.4.** Уп. Искористи го фактот што секој рабен агол од едно трирабно ќоше е помал од збирот на другите два рабни агли (Учебникот, стр. 185). **78.4.** а) Не. б) Да. в) Не. г) Да. **79.4.** 3,4 или 5. **80.4.** а) $10°<x<150°$. б) $10°<x<170°$. **81.4.** 90°. **82.4.** Уп. Искористи ја теоремата 1 од стр. 185 во Учебникот. **83.4.** Уп. Разгледај ги трирабните ќошиња $ABCD$ и $BACD$. **84.4.** 60°. Уп. Разгледај го трирабното ќоше $SABC$, при што $\sphericalangle ASB=\sphericalangle BSC=45°$, а $\sphericalangle ABC=90°$, и согледај дека $\triangle ASC$ е рамностран. **87.5.** $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\mathbf{A}=T[O,R]=\mathbf{B}\cup\mathbf{C}$; $\mathbf{A}\cap\mathbf{C}=\mathbf{C}=T(O,R)$; $\mathbf{B}\cap\mathbf{C}=\varnothing$; $\mathbf{A}\setminus\mathbf{C}=\mathbf{B}=S(O,R)$; $\mathbf{A}\setminus\mathbf{B}=\mathbf{C}=T(O,R)$; $\mathbf{B}\setminus\mathbf{A}=\varnothing$. **88.5.** а) Не. б) Да. **89.5.** Уп. Согледај дека $S(M,r)$ и $T(M,r)$ се подмножества од $T[M,r]$ и покажи дека $T[M,r]\subseteq T(O,R)$. **90.5.** Уп. Земи $r<R-\overline{OM}$ и искористи ја 89. 5. VI. **91.5.** $\varnothing$; $\varnothing$; M, каде што M е допирната точка на $T[O_1,R]$ и $T[O_2,R]$. **92.5.** Уп. Земи $R_1, R_2<\frac{1}{2}\overline{O_1O_2}$. **93.5.** Искористи ја 89. 5. VI. **94.5.** Уп. Тргни од спротивното: постои $A\in S(O,R)$ и $r>0$, така што $T(A,r)\subset S(O,R)$ и изведи противречност. **95.5.** Точките од отворената топка $T(O,R)$. **96.5.** а), б) и г). **97.5.** На црт. 6, 7, 9, 11. **98.5.** Уп. Земи две точки A и B од фигурата што ја испитуваш и покажи дека секоја точка на отсечката AB припаѓа на фигурата. **99.5.** б), в) и г). **100.5.** б) и в). **101.5.** Не. **102.5.** Уп. Согледај дека точките од периферијата на еден круг не се внатрешни за тој круг, а кружницата не е сврзливо множество. **107.5.** Уп. Согледај дека топката не е отворено множество, а сферата нема внатрешни точки. **108.5.** Ако имаат непразен пресек. **109.5.** Уп. Нека со **G** е означена внатрешноста на диедарот (ќошето). Покажи дека секоја точка $M \in \mathbf{G}$ е внатрешна за **G** и дека **G** е сврзлива фигура. **110.5.** а) Не мора. На пример, на црт. VI. 10 имаме две области со непразен пресек, но пресекот не е сврзливо множество. **111.5.** На пример, отворениот круг $k[O, r)$ содржи само внатрешни точки; кружницата $k(O, r)$ содржи само гранични точки; кругот $k[O, r]$ содржи и внатрешни и гранични точки. **112.5.** Уп. Аналогно на 111. 5. VI. **115.5.** Права, отсечка, полуправа, искршена линија. **116.5.** Круг и исполнет триаголник. **117.5.** На црт. VI. 6, 7, 9. **118.5.** Уп. Секоја точка од $\overline{\mathbf{G}}$ е или внатрешна или гранична за **G**, па ако $\mathbf{G} = \{X | X$ е внатрешна за $\overline{\mathbf{G}}\}$, $\mathbf{G}_r = \{X | X$ е гранична за $\overline{\mathbf{G}}\}$, тогаш **G** е област, $\mathbf{G}_r$ е границата на **G**, при што важи $\mathbf{G} \cup \mathbf{G}_r = \overline{\mathbf{G}}$. **119.5.** Ако имаат непразен пресек. **121.5.** Уп. Согледај дека отворена топка не е затворена област, а сфера не е област. **122.5.** Ако имаат непразен пресек. **123.6.** а), б) Не. **125.6.** Уп. Согледај колку најмалку ѕидови и темиња може да има еден полиедар. **126.6.** Да; тој може да се добие на следниов начин: избери трибрано ќоше $SABC$. Тогаш полиедарот $ABCS$ има точно 6 рабa, 4 ѕида и 4 темиња. **128.6.** За $r = 2k$ тој полиедар е k-страна пирамида; за $r = 2k + 1$, избери $(k - 1)$ - страна правилна пирамида и 3 - страна пирамида чиј еден бочен ѕид е складен со ѕидовите на $(k - 1)$ - страната пирамида, и аглите на основата прилегнати кон тој ѕид се помали од $\frac{k-2}{k-1}\pi$ и слепи ги со складните бочни ѕидови. Тогаш бројот на рабовите ќе биде: $2(k-1) + 6 - 3 = 2k + 1$. **129.6.** $n - 3$. **130.6.** $n(n - 3)$. **132.6.** а) 1. б) 2. в) 3. **133.6.** Ќе се удвои. **134.6.** Уп. Согледај ја положбата на заедничкиот раб на тие правоаголници спрема основите на призмата. **135.6.** Ако е тристрана — да, ако не е тристрана — не мора; на пример, права призма чија основа е ромб (што не е квадрат) за бочни ѕидови има складни правоаголници, но таа не е правилна. **136.6.** Не може. **137.6.** Не. Уп. Кои било две дијагонали на правилен петаголник се еднакви (а тоа не е точно за правилен n-аголник, $n > 5$). **139.6.** Уп. Согледај дека таа отсечка е средна линија на еден од дијагоналните пресеци. **140.6.** Уп. Согледај дека дијагоналните пресеци кај кој било квадар се складни правоаголници. **141.6.** Уп. Согледај дека дијагоналните пресеци се складни правоаголници. **142.6.** Може; на пример, ако $SABC$ е тристрана пирамида и ако правата SO е нормална на основата, каде што O е центарот на опишаната кружница околу основата. **143.6.** а) Може. б) Ако трапезот е рамнокрак — може; ако не е рамнокрак — не може. в) Ако паралелограмот е правоаголник — може; ако не е — не може. **144.6.** Уп. Да се искористи 142. 6. VI. **145.6.** а) Ако $n = 3, 4$ или 5 — може; ако $n > 5$ — не може. б) Ако $n = 3$ — може; ако $n > 3$ — не може. Уп. Искористи го фактот што збирот на рабните агли на ќошето, чие теме е врвот на пирамидата, е помал од 360°. **146.6.** Уп. Нека $SABC$ е тристрана пирамида. Согледај



Црт. VI. 10



Црт. VI. 11

дека средините на рабовите SA, SB, CA и CB се темиња на еден бочен пресек (лежат на иста рамнина) и дека тој е ромб. **147.6.** Уп. Види 86. 4. VI. **148.6.** Уп. Согледај дека дијагоналните пресеци минуваат низ врвот на пирамидата и низ центарот на опишаната кружница на основата. **149.6.** Ако основата е четириаголник со заемно нормални дијагонали (на пример: квадрат, ромб делтоид итн.) и проекцијата од врвот врз основата е во пресекот на дијагоналите. **152.6.** Неправилен тетраедар, квадар и други. **153.6.** Да. На пример , полиедар формиран од два правилни складни тетраедри залепени со по еден ѕид (црт. VI. 11); од A, B, C — по 4 раба, од S и N — по 3 раба. **154.6.** Да; на пример, полиедар формиран од две четиристрани правилни пирамиди со основен раб a и бочен раб $b\,(a < 2b)$, залепени со основните (октаедар). **155.6.** а) $a\sqrt{2}$. б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Уп. Согледај дека секое ќоше на тетраедарот односно на октаедарот се конструира на ист начин. **156.6.** $\frac{a}{2}$. Уп. Направи цртеж и согледај дека ѕидовите на добиениот полиедар се рамострани триаголници (секоја страна е средна линија на еден ѕид — рамностран триаголник — на тетраедарот); значи тие се осум складни рамнострани триаголници. Согледај дека во секое теме на полиедарот се среќаваат по 4 рабови. Според тоа тој е правилен октаедар. **158.6.** $a\sqrt{2}$. Уп. Согледај дека тие отсечки се дијагонали на трите квадрати (со страна a) чии темиња се по два пара спротивни темиња на октаедарот. **159.6.** Центрите на ѕидовите на правилен тетраедар се темиња на правилен тетраедар; на коцка — октаедар; на октаедар — коцка; на икосаедар — додекаедар; на додекаедар — икосаедар. **160.6.** а) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. б) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. в) $\frac{2}{3}\,a$. Уп. Впиши коцка во октаедарот, така што нејзините темиња да се во центрите на ѕидовите на октаедарот. **162.6.** Центарот на сферите е пресекот на висините на тетраедарот. Уп. Согледај дека во тетраедарот постои точка — пресекот на висините — којашто е еднакво оддалечена од сите темиња и од сите ѕидови. **163.6.** Рамнината што минува низ средините на два пара спротивни раба; $s = 2a$.

ТРЕТ ДЕЛ
РЕШЕНИЈА

ГЛАВА I

МЕЃУСЕБНИ ОДНОСИ НА ОСНОВНИТЕ ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

1.1. Нека B произволна точка различна од A и нека a е единствената права што минува низ точките A и B. За секоја права постојат точки што не ѝ припаѓаат, па нека C е една точка што не лежи на правата a. Точката A, B и C не се колинеарни.

2.1. Според претходната задача, постојат точки B и C, такви што точките A, B, C не се колинеарни. Правата BC не минува низ точката A.

3.1. Нека A е произволна точка, а B и C нека се точки, такви што A, B, C не се колинеарни (види 1.1.I). Правите AB, BC и CA се три прави што не минуваат низ една иста точка.

4.1. Нека A, B, C и D се четири различни точки. Можни се следниве случаи:

— сите четири точки лежат на една иста права;

— три од нив лежат на иста права a, а четвртата не лежи на таа права;

— кои било три од тие четири не лежат на иста права.

Во првиот случај точките A, B, C и D определуваат само една права. Во вториот случај тие определуваат четири прави; на пример, ако точките A, B, C лежат на правата a, тогаш првите a, AD, BD, и CD се четири различни прави. Во третиот случај тие определуваат шест различни прави; тоа се правите AB, AC, AD, BC, BD и CD.

6.1. Нека a и b се две различни прави и нека A и B се две точки што се заеднички за правите a и b. Според **А.2.** низ точките A и B минува единствена права, а тоа е спротивно на претпоставката дека правите a и b се различни. Значи, правите a и b може да имаат најмногу една заедничка точка.

9.1. Да ја провериме аксиомата **А.1.** Нека $\{(x, kx+n) \mid x \in \mathbf{N}^\circ\}$ е произволна права. Бидејќи множеството $\mathbf{N}^\circ$ е бесконечно, следува дека и множеството $\{(x, kx+n) \mid x \in \mathbf{N}^\circ\}$ е бесконечно, т.е. на секоја права лежат бесконечно многу точки. Ниедна од точките $(a, k+n)$, $a \neq 1$, $a \in \mathbf{N}^\circ$, не лежи на правата $\{(x, kx+n) \mid x \in \mathbf{N}^\circ\}$, т.е. за секоја права постојат точки што не ѝ припаѓаат. Значи, аксиомата **А.1.** е задоволена.

Да провериме, сега, дали е задоволена и аксиомата **А.2.** Нека (a, b) и (c, d) се две различни точки. Ако постои права $\{(x, kx+n) \mid x \in \mathbf{N}^\circ\}$ што минува низ тие две точки, тогаш важи

$$ka+n=b \text{ и } kc+n=d,$$

од каде што добиваме $k(c-a)=d-b$. Оваа равенка по k има единствено решение ако $a-c \neq 0$, т.е. $a \neq c$, а нема решение при $a=c$ и $b \neq d$.

Значи, при $a \neq c$, низ точките (a, b) и (c, d) минува единствена права — тоа е правата

$$\left\{\left(x, \frac{d-b}{c-a}x+\frac{bc-da}{c-a}\right) \mid x \in \mathbf{N}^{\circ}\right\}.$$

Ако, пак, $a=c$ и $b \neq d$, тогаш низ точките (a, b) и (c, d) не минува права. На пример, такви се точките: $(0, 0)$ и $(0, 1)$, $(2, 3)$ и $(2, 5)$ итн. Следствено, аксиомата **А.2.** не е задоволена.

10.1. Да ја провериме аксиомата **А.1.** Нека $\{(p, y) \mid p$ е делител на $y\}$ (p е прост број), е произволна права. Множеството точки $\{(p, kp) \mid k \in \mathbf{N}\}$ е бесконечно и сите тие точки лежат на правата $\{(p, y) \mid p$ е делител на $y\}$, што значи дека на секоја права лежат бесконечно многу точки. Ако, пак, $q \neq p$ е прост број, тогаш ниедна од точките (q, x) не лежи на правата $\{(p, y) \mid p$ е делител на $y\}$. Значи, за секоја права постојат точки што не ѝ припаѓаат. Следствено, аксиомата **А.1.** е задоволена.

Аксиомата **А.2.** не е задоволена, зашто низ точките $(1, x)$ и $(1, y)$, $x \neq y$, не минува ниедна права. Уште повеќе, точката (a, x), каде што $a=1$ или, пак, a е сложен број, не лежи на ниедна права. Низ точките (a, b) и (c, d) минува права ако и само ако $a=c=p$ е прост број и, притоа, $b=k_1p$, $d=k_2p$.

12.1. Дека на секоја права лежат бесконечно многу точки следува од тоа што множеството $\mathbf{Q}$ е бесконечно. Да видиме дали за секоја права постојат точки што не ѝ припаѓаат. За таа цел ќе провериме посебно за двата вида прави.

Нека $\{(x, kx) \mid x \in \mathbf{Q}^*\}$ е произволна права од првиот вид. Точките (x, y), $x, y \in \mathbf{Q}^*$ и $y \neq kx$ не лежат на таа права. Нека, сега,

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Q}^*,\ x^2+y^2+ax+by=0\}$$

е произволна права од вториот вид; точките $(x, 0)$, $x \neq -a$, не лежат на неа. Значи, аксиомата **А.1.** е задоволена.

Да ја провериме и аксиомата **А.2.**

Нека (x_1, y_1) и (x_2, y_2) се две произволни различни точки. Можни се следниве два случаја:

— постои рационален број k, така што $y_1=kx_1$ и $y_2=kx_2$;
— таков број не постои.

Во првиот случај правата $\{(x, kx) \mid x \in \mathbf{Q}^*\}$ е единствена од првиот вид што минува низ точките (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Да претпоставиме дека $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Q},\ x^2+y^2 \neq 0,\ x^2+y^2+ax+by=0\}$ е права од вториот вид што минува низ точките (x_1, kx_1) и (x_2, kx_2). Тогаш важат релациите:

$$x_1^2+k^2x_1^2+ax_1+bkx_1=0,$$

$$x_2^2+x^2x_2^2+ax_2+bkx_2=0,$$

т.е., поради $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$,

$$(1+k^2)\,x_1+a+bk=0,$$
$$(1+k^2)\,x_2+a+bk=0,$$

од каде што добиваме $x_1 = x_2$, спротивно на претпоставката дека (x_1, y_1) и (x_2, y_2) се различни точки. Значи, во овој случај не постои права од вториот вид што минува низ точките (x_1, y_1) и (x_2, y_2), т.е. правата $\{(x, kx) \mid x \in \mathbf{Q}^*\}$ е единствена што минува низ нив.

Во вториот случај, бидејќи не постои рационален број k, таков што да важи $y_1 = kx_1$, и $y_2 = ky_2$, следува дека не постои права од првиот вид што минува низ точките (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Нека

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Q},\ x^2 + y^2 \neq 0,\ x^2 + y^2 + ax + by = 0\}$$

е права од вториот вид што минува низ точките (x_1, y_1) и $({}_2x, y_2)$. Тогаш важи

$$x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 = 0,$$

$$x_2^2 + y_2^2 + ax_2 + by_2 = 0,$$

при што $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$. Значи, системот има единствено решение по a и b, т.е. постои единствена права од вториот вид што минува низ точките (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Да забележиме дека тоа е правата

$$\left\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Q}^*,\ x^2 + y^2 - \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & y_1 \\ x_2^2 + y_2^2 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}\, x - \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ x_2 & x_2^2 + y_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}\, y = 0\right\}$$

Следствено, и аксиомата **A.2.** е задоволена.

13.1. Дека на секоја права лежат бесконечно многу точки следува од тоа што равенката $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ има бесконечно мнгу решенија. На пример, ако $a_3 \neq 0$, тогаш при дадени x_1 и x_2 имаме $x_3 = \frac{1}{a_3}\,(a_1 x_1 + a_2 x_2)$, т.е. точките

$$\left(x_1, x_2, \frac{1}{a_3}\,(a_1 x_1 + a_2 x_2)\right), \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R} \text{ и } x_1^2 + x_2^2 \neq ,$$

се бесконечно многу што лежат на правата

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R},\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0\}. \tag{1}$$

Точката $(0, 0, 1)$, при $a_3 \neq 0$, не лежи на правата (1); при $a_2 \neq 0$, точката $(0, 1, 0)$ не лежи на таа права; при $a_1 \neq 0$, точката $(1, 0, 0)$ не лежи на неа. Значи, задоволена е аксиомата **A.1.**

Да ја провериме аксиомата **A.2.** Нека (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) се две различни точки. Тоа значи дека не постои реален број $k \neq 0$, така што да важи $y_i = kx_i$, $i = 1, 2, 3$. Тоа, пак, значи дека барем една од детерминантите

$$D_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix},\quad D_1 = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}$$

е различна од нула. Можеме да претпоставиме дека првата не е 0, т.е.

$$D_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0. \tag{2}$$

Ако (1) е права што минува низ точките (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), тогаш важи:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \qquad (3)$$
$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0.$$

Поради (2), системот равенки

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = -a_3 x_3,$$
$$a_1 y_1 + a_2 y_2 = -a_3 y_3,$$

има единствено решение по a_1 и a_2 — тоа е:

$$a_1 = a_3 \frac{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}, \qquad a_2 = a_3 \frac{\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}.$$

Ставајќи $a_3 = D_3$, добиваме дека едно решение на системот (3) е:

$$a_1 = D_1, \quad a_2 = -D_2, \quad a_3 = D_3,$$

а секое друго решение е од обикот

$$a_1 = tD_1, \quad a_2 = -tD_2, \quad a_3 = tD_3,$$

каде што t е реален број, различен од нула. Значи, правата

$$\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbf{R}, \quad D_1 x - D_2 y + D_3 z = 0\}$$

е единствената права што минува низ точките (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3).

Следствено, задоволена е и аксиомата **A.2.**

Останува да покажеме дека кои било две прави имаат заедничка точка. Нека

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}, \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0\},$$
$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}, \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0\},$$

се две произволни различни прави. Тоа значи дека не постои реален број $k \neq 0$, така што да важи $b_i = k a_i$, $i = 1, 2, 3$. Тоа, пак, значи дека барем една од детерминантите

$$E_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad E_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad E_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}$$

е различна од нула. Можеме да претпоставиме дека

$$E_1 \neq 0. \qquad (4)$$

Во овој случај системот

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$

има единствено решение. Тоа е

$$x_1 = E_1, \quad x_2 = E_2, \quad x_3 = E_3.$$

Значи, точката (E_1, E_2, E_3) лежи и на двете прави.

14.2. Според задачата 1.1. I, постојат точки B и C, так што точките A, B и C не се колинеарни. Според **А.4,** низ точките A, B и C минува единствена рамнина Σ. Според **А.3,** постои точка D, којашто не лежи во рамнината Σ. Значи, точките A, B, C и D не лежат во иста рамнина.

16.2. Ако A е произволна точка, тогаш според задачата 1. 2. I. постојат точки B, C и D, така што точките A, B, C и D не лежат во иста рамнина. Рамнините ABC, ABD и ACD се различни и сите минуваат низ точката A.

17. 2. За точките A, B, C и D можни се следниве случаи:

— или сите лежат во иста рамнина,

— или не лежат во иста рамнина.

Во првиот случај тие определуваат единствена рамнина, а во вториот случај тие определуваат четири рамнини. Тоа се рамнините ABC, ABD, ACD и BCD.

18.2. За точките A, B, C, D и E можни се следниве случаи:

— сите пет точки лежат во иста рамнина;

— четири од нив лежат во иста рамнина Σ, а петтата не лежи во таа рамнина;

— кои било четири точки од нив не лежат во иста рамнина.

Во првиот случај тие определуваат единствена рамнина.

Во вториот случај тие определуваат седум различни рамнини; ако, на пример, точките A, B, C и D лежат во иста рамнина Σ, а E не лежи во Σ, тогаш тоа се рамнините: Σ, ABE, ACE, ADE, BCE, BDE и CDE.

Во третиот случај тие определуваат десет рамнини; тоа се рамнините: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE и CDE.

19.3. Нека Σ е произволна рамнина. Според **А.3,** во рамнината Σ лежат барем три неколинеарни точки A, B и C. Бидејќи точките A, B и C не се колинеарни правите AB, BC и CA се различни. Од секоја од овие три прави по две точки лежат во рамнината Σ, па, според **А.5,** сите три прави лежат во рамнината Σ.

20.3. На рамнината Σ лежат барем три неколинеарни точки; нека се тоа P, S и T. Ако една од нив е точката A, на пример $P=A$, тогаш точките $B=S$ и $C=T$ се такви што A, B и C не се колинеарни. Ако ниедна од нив не е точката A, тогаш од неколинеарноста на P, S и T, за B и C можеме да избереме кои било две од P, S и T.

21.3. Според 20. 3. I, во рамнината Σ постојат точки B и C, така што A, B и C не се колинеарни. Правата $a=BC$ лежи во рамнината Σ и не минува низ точката A.

23.3. Според задачата 21. 3. I, во рамнината Σ постои права a што не минува низ точката A. На правата a лежат бесконечно многу точки (**А. 1**), и сите тие лежат во рамнината Σ. Сите прави $AX, X\in a$, се меѓусебно различни и сите лежат во рамнината Σ, па, значи, низ точката A минуваат бесконечно многу прави што лежат во рамнината Σ.

24.3. Нека Σ е една рамнина. Според **А.3**, постои точка A што лежи во Σ и точка B што не лежи во Σ. Правата AB има само една заедничка точка со Σ, зашто ако би имала две заеднички точки со Σ, тогаш, според **А.5**, и самата права би лежела во Σ, т.е. и точката B би лежела во Σ. Значи, правата AB ја прободува Σ.

26.3. Нека A е точка што не лежи на правата a и нека Σ_1 е рамнината што минува низ точката A и правата a (види Т.4). Постои точка B што не лежи во Σ_1 (**А.3**), па нека Σ_2 е рамнината што минува низ точката B и правата a. Значи, Σ_1 и Σ_2 се две различни рамнини што минуваат низ правата a. Според 22. 3. I, постои точка $C \in \Sigma_1$ и точка $D \in \Sigma_1$ што не лежи на правата a. Правата $b = CD$ ги прободува и двете рамнини, па рамнините што минуваат низ правата a и произволна точка $X \in b$ се бесконечно многу.

27.4. Бидејќи $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing$, следува дека тие се сечат, т.е. имаат заедничка права. Нека е тоа правата a. Спород задачата 22. 3. I, во Σ_1 и Σ_2 постојат точки B и C што не лежат на правата a. Правата BC има само по една заедничка точка и со рамнината Σ_1 и со рамнината Σ_2, па, значи, таа ги прободува и двете рамнини.

32.5. Нека правата a ја прободува рамнината Σ во точката A и нека x е произволна права што лежи во рамнината Σ. Ако $A \in x$, тогаш правите a и x се сечат, па тие не се паралелни. Затоа, да претпоставиме дека $A \notin x$. Во овој случај правите немаат заедничка точка, но не се паралелни, бидејќи не лежат во иста рамнина.

36.6. Прво имаме:

$$d(A_1 A_4) \leqslant d(A_1 A_2) + d(A_2 A_4). \tag{1}$$

а потоа и

$$d(A_2 A_4) \leqslant d(A_2 A_3) + d(A_3 A_4). \tag{2}$$

Заменувајќи (2) во (1) следува:

$$d(A_1 A_4) \leqslant d(A_1 A_2) + d(A_2 A_4) \leqslant d(A_1 A_2) + d(A_2 A_3) + d(A_3 A_4).$$

38.6. Според аксиомата за растојание (А.7), важат неравенствата:

$$d(AD) \leqslant d(AB) + d(BD),$$
$$d(BD) \leqslant d(BC) + d(CD),$$

па, за да ги докажеме равенствата (2), доволно е да докажеме дека важат неравенствата:

$$d(AB) + d(BD) \leqslant d(AD),$$
$$d(BC) + d(CD) \leqslant d(BD).$$

Имаме:

$$\begin{aligned} d(AB) + d(BD) &\leqslant d(AC) - d(BC) + d(BC) + d(CD) = \\ &= d(AC) + d(BD) = d(AD); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(BC) + d(CD) &= \ d(AC) - d(AB) + d(AD) - d(AC) = \\ &= -d(AB) + d(AD) \leqslant - d(AB) + d(BD) = \\ &= \ d(BD). \end{aligned}$$

41.6. а) Јасно е дека $d(AB) \geqslant 0$. Ако $A = B$, тогаш $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, па

$$d(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 0.$$

Нека, сега, $d(AB) = 0$; тогаш имаме:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 0,$$

т.е.

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 0.$$

Збир од квадратите на два броја е нула ако и само ако и двата броја се нула, па значи, $x_2 - x_1 = 0$ и $y_2 - y_1 = 0$, т.е. $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Според тоа, $A = B$. Следствено, задоволен е условот 1° од **А.7.**

Дека е исполнет условот 2° од **А.7**, следува од:

$$d(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d(BA).$$

На крајот, нека $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ се три произволни точки. Бидејќи за произволни ненегативни броеви a, b важи неравенството

$$a + b \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

имама:

$$\begin{aligned}
d(AC) &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} = \sqrt{(x_3 - x_2 + x_2 - x_1)^2 + (y_3 - y_2 + y_2 - y_1)^2} \\
&\leqslant \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \\
&= \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] + [(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2]} \leqslant \\
&\leqslant \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \\
&= d(AB) + d(BC).
\end{aligned}$$

Значи, d е растојание во $\mathbf{P}$.

б) Имаме $d(AB) = |x_2 - x_1| \geqslant 0$, но од $d(AB) = 0$ не следува $A = B$.

На пример, за точките $A(1, 2)$ и $B(1, 3)$ имаме $d(AB) = 0$. Значи, d не е растојание во $\mathbf{P}$.

в) Јасно е дека $d(AB) \geqslant 0$. Бидејќи

$$|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = 0$$

ако и само ако $x_2 - x_1 = 0$ и $y_2 - y_1 = 0$, следува дека $d(AB) = 0$ ако и само ако $A = B$. Понатаму, од $|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$ и $|y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$ следува дека:

$$d(AB) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = d(BA).$$

На крајот, користејќи го неравенството

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

добиваме:

$$\begin{aligned} d(AC) &= |x_3 - x_1| + |y_3 - y_1| = \\ &= |x_3 - x_2 + x_2 - x_1| + |y_3 - y_2 - y_1 + y_2| \leqslant \\ &\leqslant |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + |y_2 - y_1| + |y_3 - y_2| = \\ &= (|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|) + (|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|) = \\ &= d(AB) + d(BC). \end{aligned}$$

Следствено, d е растојание во **P**.

г) Јасно е дека $d(AB) \geqslant 0$, но од $d(AB) = 0$ не следува $A = B$. На пример, за точките $A(1,2)$ и $B(1, 3)$ имаме $d(AB) = 0$. Значи, d не е растојание во **P**.

43.7. Од тоа што C лежи меѓу A и B, следува дека точките A, B и C се колинеарни; од тоа што M лежи меѓу A и C, следува дека точките A, C и M се колинеарни. Значи, точките B и M лежат на правата AC, т.е. сите четири точки се колинеарни.

44.7. Нека $d(AB) = r$ и нека $c > r$; тогаш на правата AB постојат точно две точки (А.8) C_1 и C_2, така што:

— A лежи меѓу C_1 и C_2;
— $d(AC_1) = d(AC_2) = c$.

Во овој случај имаме:

$$d(BC_1) = x - r, \quad d(BC_2) = x + r,$$

или, пак,

$$d(BC_1) = x + r, \quad d(BC_2) = x - r.$$

Значи, важи

$$d(AC_1) = d(AB) + d(BC_1),$$

или, пак,

$$d(AC_2) = d(AB) + d(BC_2),$$

т.е. или B лежи меѓу A и C_1 или B лежи меѓу A и C_2.

Бидејќи постојат бесконечно многу броеви c, така што $c > r$, следува дека такви точки C постојат бесконечно многу.

45.7. Ако B лежи меѓу A и C, тогаш A, B и C се колинеарни и, притоа,

$$d(AC) = d(AB) + d(BC);$$

ако C лежи меѓу A и D, тогаш A, C и D се колинеарни и, притоа,

$$d(AD) = d(AC) + d(CD).$$

Значи, точките A, B, C и D се колинеарни. Според 4. 6. I, од равенствата (1) и (2) следуваат и равенствата

$$d(AD) = d(AB) + d(BD), \quad d(BD) = d(BC) + d(CD),$$

што значи дека B лежи меѓу A и D, а C лежи меѓу B и D.

46.7. За доказ ќе го користиме тврдењето дека од три колинеарни точки само една лежи меѓу другите две.

Не губејќи ништо од општоста, можеме да претпоставиме дека B лежи меѓу A и C и дека C лежи меѓу A и D. При оваа претпоставка точките да ги означиме на следниов начин:

— точката A со 1;

— точката B со 2;

— точката C со 3;

— точката D со 4.

Значи, точката 2 лежи меѓу 1 и 3, а точката 3 лежи меѓу 1 и 4.
Но, според 45. 7. I, во овој случај точката 2 лежи меѓу 1 и 4, а точката 3 лежи меѓу 2 и 4.

47.7. За полесна формулација на решението да ја воведеме следнава ознака:

Ако точката Y лежи меѓу точките X и Z, тоа ќе го означуваме со (X, Y, Z); притоа, ако важи (X, Y, Z), тогаш важи и (Z, Y, X).

Нека се дадени четири колинеарни точки. Според 45. 7. I, можеме да претпоставиме дека тие се означени со буквите A, B, C и D, така што истовремено важат:

$$1)\ (A, B, C);\quad 2)\ (A, B, D),\quad 3)\ (A, C, D),\quad 4)\ (B, C, D).$$

Освен овие четири тројки, од точките A, B, C и D можеме да ги формираме и следниве тројки:

$$\begin{array}{llllll} (A, C, B), & (A, D, B), & (A, D, C), & (B, A, C), & (B, C, A), & (B, A, D), \\ (B, D, A), & (B, D, C), & (C, A, B), & (C, B, A), & (C, A, D), & \\ (C, D, A), & (C, B, D), & (C, D, B), & (D, A, B), & (D, B, A), & \\ (D, A, C), & (D, C, A), & (D, B, C), & \text{и } (D, C, B). & & \end{array}$$

Користејќи го тоа што од три колинеарни точки само една лежи меѓу другите две, можеме да забележиме дека од овие 20 тројки важат само (C, B, A), (D, B, A), (D, C, A), (D, C, B) кои се исти со тројките 1), 2), 3) и 4). На пример, тројката (A, D, B) противречни на (A, B, D); тројката (D, B, C) противречи на (B, C, D) итн.

Следствено, само точките B и C лежат меѓу точките A и D.

51.7. Според дефиницијата на полуправа, две точки M и N лежат на една полуправа h со почеток во O ако O не лежи меѓу M и N. Значи, за да докажеме дека множеството

$\mathbf{F} = \{X \mid X$ е меѓу A и B или B е меѓу A и $X\}$ доволно е да покажеме дека за кои било две точки $X, Y \in \mathbf{F}$, точката A не лежи меѓу нив.

Нека $X, Y \in \mathbf{F}$; тогаш важи еден од следниве четири услови:

1) X е меѓу A и B и Y е меѓу A и B;

2) X е меѓу A и B и B е меѓу A и Y;

3) B е меѓу A и X и B е меѓу A и Y;

4) B е меѓу A и X и Y е меѓу A и B.

Значи, A не е меѓу X и Y, т.е. множеството $\mathbf{F}$ е полуправата AB.

ГЛАВА II

ПОВАЖНИ ФИГУРИ ВО РАМНИНАТА

12.1. Од црт. II. 7 може да се види дека се образуваат три различни агли: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$, $\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOC$, $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD = \sphericalangle COA = \sphericalangle DOB$.

а) Напоредни се овие парови агли:
$(\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC)$,$(\sphericalangle BOC, \sphericalangle COD)$, $(\sphericalangle COD, \sphericalangle DOA)$, $(\sphericalangle DOA, \sphericalangle AOB)$.

б) Рамни се аглите: $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle BOD$, $\sphericalangle COA$, $\sphericalangle DOB$.

19.1. Од $\alpha_1 + \alpha = 180°$ и $\beta_1 + \beta = 180°$, со собирање, при што водиме сметка дека $\alpha + \beta = 90°$, добиваме $\alpha_1 + \beta_1 = 270°$.

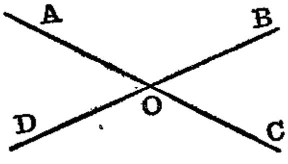
22.1. Ако ставиме $\sphericalangle ABP = \alpha$ и $\sphericalangle RBC = \beta$, тогаш $\sphericalangle PBR = \alpha + \beta$. Од $\sphericalangle ABC = 180°$ (зошто?) и $\sphericalangle ABC = 2(\alpha + \beta)$, добиваме дека $\alpha + \beta = \sphericalangle PBR = 90°$.

32.2. Ако $n > 5$, тогаш $n - 3 > 2$, па

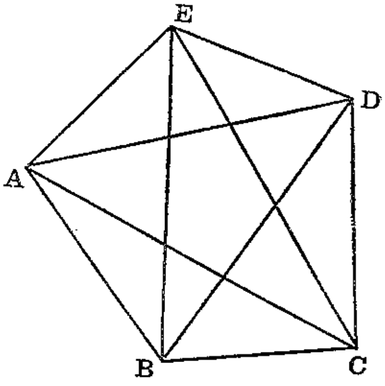
$$D = \frac{1}{2} n(n-3) > \frac{1}{2} n \cdot 2 = n, \text{ т.е. } D > n.$$

36.3. Ако кои било три точки од зададените не се колинеарни, тогаш може да се формираат следниве 10 триаголници: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BED, CED (цтр. II. 8).

37.3. Бидејќи правата a ја сече страната AB на ΔABC, точките A и B лежат на различни страни од таа права. Според условот, правата a не минува низ темето C, па, значи, или C и A или C и B ќе лежат на различни страни од правата a, односно правата a ќе ја сече или страната AC или страната BC.



Црт II. 7



Црт. II. 8

Ако не ја сече ни AC ни BC, тогаш C лежи на иста страна и со A и со B, што е спротивно на **А. 9.** Ако ги сече и AC и BC, тогаш C лежи на различни страни и со A и со B, што е спротивно на **А. 9.**

40.3. Да потсетиме дека секој надворешен агол на еден триаголник е поголем од кој било несоседен внатрешен агол на тој триаголник.

Ако триаголникот е тапоаголен или правоаголен, тогаш двата надворешни агли што не се соседни со тапиот односно со правиот агол, се тапи агли. Ако, пак, триаголникот е остроаголен, тогаш е јасно дека сите негови надворешни агли (како напоредни со внатрешните) се тапи агли.

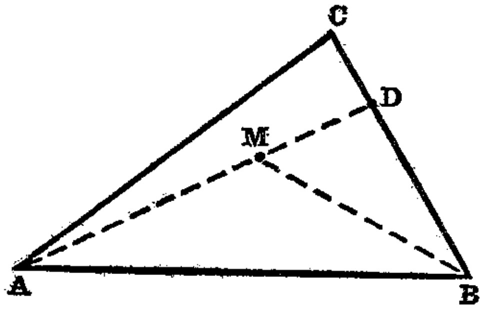
41.3. Бидејќи секој надворешен агол на триаголникот е поголем од кој било несоседен внатрешен агол на тој триаголник, од црт. II. 9 гледаме дека:

$\sphericalangle AMB > \sphericalangle ADB$ (како надворешен агол на ΔMBD),

$\sphericalangle ADB > \sphericalangle ACB$ (како надворешен агол на ΔACD),

од каде што следува дека

$$\sphericalangle AMB > \sphericalangle ACB.$$



Црт. II. 9

42.3. Направи цртеж. Триаголниците AMC и BMD се складни според признакот CAC, зашто: $\overline{AM} = \overline{BM}$ (од условот на задачата), $\overline{CM} = \overline{DM}$ (од условот на задачата) и $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMD$ (како накрсни агли), па следува дека $\overline{AC} = BD$. Триаголниците AMD и BMC се складни според признакот CAC, зашто: $\overline{AM} = \overline{BM}$ (од условот на задачата), $\overline{DM} = \overline{CM}$ (од условот на задачата) и $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BMC$ (како накрсни агли), па $\overline{AD} = \overline{BC}$.

43.3. Направи цртеж. Триаголниците AMD и BMC се складни според признакот CAC, зашто: $\overline{AM} = \overline{CM}$ (од условот на задачата), $\overline{DM} = \overline{BM}$ (од условот на задачата) и $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BMC$ (како накрсни агли), па, значи,

$$\sphericalangle DAM = \sphericalangle BCM.$$

44.3. Направи цртеж. Триаголниците AMB и CMD се складни според признакот CCC, зашто страните на едниот триаголник се еднакви со страните на другиот триаголник, т.е.

$$\overline{AM} = \overline{CM},\ \overline{BM} = \overline{DM} \text{ и } \overline{AB} = \overline{DC},$$

па,

$$\sphericalangle AMB = \sphericalangle DMC.$$

45.3. Направи цртеж. Означи ја со M средината на отсечката CD. Бидејќи полуправата AB минува низ M, триаголниците ACM и ADM се складни според признакот CCC, зашто: $\overline{AC} = \overline{AD}$ (од условот на задачата), $\overline{CM} = \overline{DM}$ (од условот на задачата) и AM им е заедничка страна, па следува дека

$$\sphericalangle AMC = \sphericalangle AMD.$$

Бидејќи овие агли се и напоредни, тие се прави агли, па $AB \perp CD$.

46.3. Направи цртеж. Триаголниците ABM и CBM се складни според признакот CAC, зашто: $\overline{AB} = \overline{CB}$ (од условот на задачата), BM им е заедничка страна и $\sphericalangle ABM = \sphericalangle CBM$ (од условот на задачата) па следува дека $\overline{AM} = \overline{CM}$, т.е. M е средина на страната AC.

53.3. На црт. II. 10, со A_1 и B_1 се означени средините на краците BC и AC на рамнокракиот триаголник ABC. Триаголниците ABA_1 и BAB_1 се складни според признакот CAC, зашто: AB им е заедничка страна, $\overline{BA_1} = \overline{AB_1}$ (како половинки од еднаквите страни на ΔABC), $\sphericalangle ABA_1 = \sphericalangle BAB_1$ (како агли што лежат на основата на рамнокракиот триаголник ABC, па, значи,

$$\overline{AA_1} = \overline{BB_1},$$

што и требеше да се докаже.

58.3. Од условот $\sphericalangle CST = \sphericalangle CTS$ следува дека ΔSCT е рамнокрак, од каде што

$$\overline{SC} = \overline{TC}. \tag{1}$$

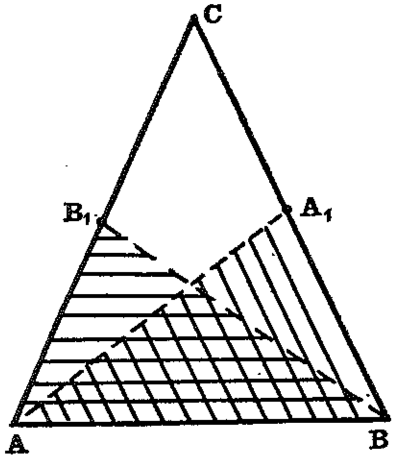
Триаголниците ACT и BCS се складни според признакот ACA, зашто: $\overline{TC} = \overline{SC}$, $\sphericalangle C$ им е заеднички и $\sphericalangle ACT = \sphericalangle ATS + \sphericalangle STC = \sphericalangle BST + \sphericalangle TSC = \sphericalangle BSC$, па

$$\overline{AS} = \overline{BT}. \tag{2}$$

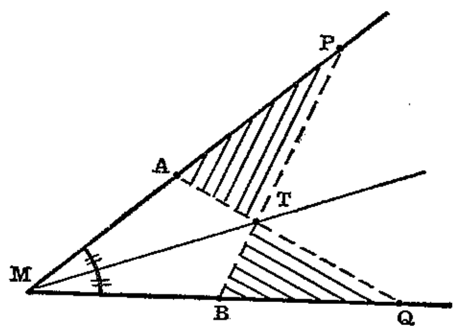
Од (1) и (2) следува дека

$$\overline{AC} = \overline{AS} + \overline{SC} = \overline{BT} + \overline{TC} = \overline{BC},$$

што значи дека ΔABC е рамнокрак.



Црт. II. 10



Црт. II. 11

59.3. Поради $\overline{AM} = \overline{BM}$, $\sphericalangle AMT = \sphericalangle BMT$ и поради тоа што отсечката MT им е заедничка страна, според признакот CAC, следува дека триаголниците AMT и BMT се складни, па, значи $\overline{AT} = \overline{BT}$ (црт. II. 11)

За триаголниците APT и BQT е точно: $\overline{AT}=\overline{BT}$, $\sphericalangle ATP=\sphericalangle BTQ$ (како накрсни агли) и $\sphericalangle PAT=180°-\sphericalangle MAT=180°-\sphericalangle MBT=\sphericalangle QBT$ (зашто аглите MAT и MBT се еднакви како хомологни агли во складните триаголници AMT и BMT), па, значи, тие се складни (според признакот ACA).

60.3. За тиаголниците BCD и ABE (црт. II. 12) важи: $\overline{AD}=\overline{AB}$ (како страни на рамностраниот триаголник ABD), $\overline{BC}=\overline{BE}$ (како страни на рамностраниот триаголник BCE) и $\sphericalangle DBC=60°+x=\sphericalangle ABE$, па, според признакот CAC, овие триаголници се складни, од каде што следува дека $\overline{CD}=\overline{AE}$.

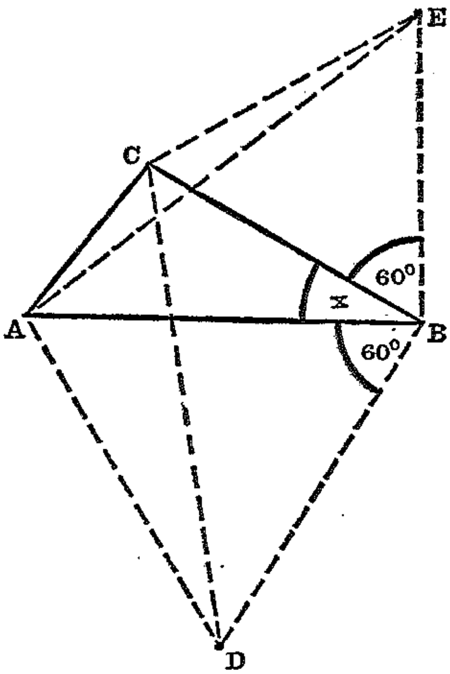
61.3. Аглите ADC и BDC може да се:

— прави, т.е. CD да е висина на триаголникот ABC; во тој случај отсечката CD е помала (како висина) од AC и BC;

— различни, при што еден од нив е тап; во тој случај страната на триаголникот ABC што лежи наспроти овој тап агол е поголема од отсечката CD.

62.3. Бидејќи во ΔACE важи $\sphericalangle ACE>\sphericalangle CAE$, следува дека $\overline{AE}>\overline{CE}$; аналогно, $\overline{BE}>\overline{DE}$. Следствено,

$$\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{EB}>\overline{CE}+\overline{ED}=\overline{CD}.$$



Црт. II. 12

63.3. Нека е зададен многуаголникот $A_1A_2\dots A_n$. Со дијагоналите што излегуваат од темето A_1 може да се формираат $n-2$ триаголници:

$$A_1A_2A_3,\ A_1A_3A_4,\dots,A_1A_{i-1}A_i,\dots,\ A_1A_{n-1}A_n.$$

Да ја избереме дијагоналата A_1A_i и да ги формираме следниве неравенства (што следуваат од својството-признак за постоење на триаголник):

(1) $\overline{A_1A_3}<\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3},\ \overline{A_1A_4}<\overline{A_1A_3}+\overline{A_3A_4},\dots,$
$\overline{A_1A_i}<\overline{A_1A_{i-1}}+\overline{A_{i-1}A_i}$, потоа

(2) $\overline{A_1A_i}<\overline{A_1A_{i+1}}+\overline{A_iA_{i+1}}<\overline{A_1A_{i+2}}+\overline{A_{i+1}A_{i+2}},\dots,$
$\overline{A_1A_{n-1}}<\overline{A_1A_n}+\overline{A_{n-1}A_n}.$

Од низата (1), преку последователна елиминација на дијагоналите, добиваме:

$$(1')\quad \overline{A_1A_i} < \overline{A_1A_{i-1}} + \overline{A_{i-1}A_i} < \overline{A_1A_{i-2}} + \overline{A_{i-2}A_{i-1}} + \overline{A_{i-1}A_i} <$$
$$< \ldots < \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{i-1}A_i}.$$

Исто така од низата (2), добиваме:

$$(2')\quad \overline{A_1A_i} < A_iA_{i+1} + \ldots + A_{n-1}A_n + \overline{A_nA_1}.$$

Собирајќи ги неравенствата (1') и (2') добиваме:

$$\overline{A_1A_i} < \frac{1}{2}(\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_nA_1}),$$

што и требеше да се докаже.

65.3. Да го означиме со h растојанието од дадената точка до дадената права p. Да претпоставиме дека можеме од точката M да напртаме три отсечки со иста должина b што ќе се наведнати кон правата p и нека другите крајни точки на тие отсечки се A, B, C, т.е.

$$\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = b.$$

Значи, триаголниците MAB, MAC, MBC се рамнокраки со иста висина и со еднакви краци, но не се складни, бидејќи $\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{AC}$. Но како тоа е невозможно, следува дека е точно тврдењето во задачата.

67.3. Ако $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ на триаголникот ABC се прави, тогаш постојат две нормали спуштени од точката C на правата AB, што е спротивно на фактот дека од една точка може да се спушти само една нормала на дадена права.

68.3. Нека правата BP ја сече страната AC на ΔABC во точката D (црт. II. 13). Од ΔABC имаме

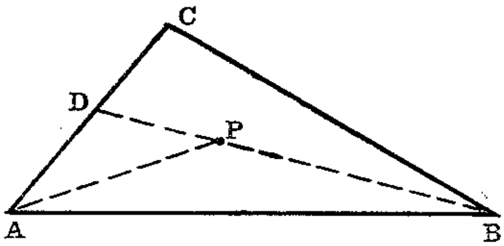
$$\overline{DB} < \overline{CD} + \overline{CB},$$

односно

$$\overline{DP} + \overline{PB} < \overline{CD} + \overline{CB}. \quad (1)$$

Од ΔAPD имаме

$$\overline{PA} < \overline{DP} + \overline{DA}. \quad (2)$$



Црт. II. 13

Со собирање на неравенствата (1) и (2) се добива

$$\overline{PA} + \overline{PB} < \overline{CA} + \overline{CB},$$

при што $\overline{CD} + \overline{DA} = \overline{CA}$.

69.3. Јасно е дека:

$$h_a < \overline{AB}, \qquad h_a < \overline{AC},$$
$$h_b < \overline{BA}, \qquad h_b < \overline{BC},$$
$$h_c < \overline{CA}, \qquad h_c < \overline{CB}.$$

Ако ги собереме овие неравенства, добиваме

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}>h_a+h_b+h_c.$$

71.4. Триаголниците AOD и BOC се складни, зашто $\overline{AO}=\overline{OC}$, $\overline{BO}=\overline{OD}$ (според условот на задачата) и $\sphericalangle AOD=\sphericalangle BOC$ (како накрсни агли).

Според тоа, $\sphericalangle OAD=\sphericalangle OCB$. Бидејќи тие се наизменични агли на трансверзалата AC за правите AD и BC, според $T.2$ од III. 4, правите AD и BC се паралелни.

Аналогна постапка ќе нè доведе до заклучок дека правите AB и CD се паралелни.

74.4. Од условот на задачата имаме

$$\sphericalangle PAT=\sphericalangle TAB, \quad \sphericalangle QBT=\sphericalangle TBA.$$

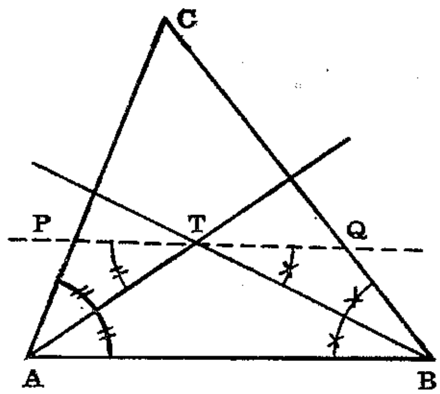
Ако земеме правата AT, односно BT, да е трансверзала на паралелните прави AB и PQ, тогаш

$$\sphericalangle TAB=\sphericalangle PTA \quad \text{и} \quad \sphericalangle TBA=\sphericalangle QTA$$

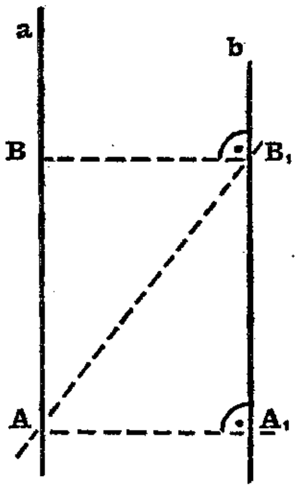
како наизменични агли (црт. II.14). Значи, триаголниците APT и BQT се рамнокраки, па $\overline{AP}=\overline{PT}$ и $\overline{BQ}=\overline{QT}$. Следствено,

$$\overline{PQ}=\overline{PT}+\overline{QT}=\overline{AP}+\overline{BQ}.$$

75.4. Доволно ќе биде да покажеме дека две различни точки од една права се на еднакви растојанија од другата права.



Црт. II. 14



Црт. II. 15

Нека $a \| b$ и нека $A, B \in a$, односно нека $\overline{AA_1}$ и $\overline{BB_1}$ се растојанијата од A, односно B, до правата b (црт. II.15). Правоаголните триаголници ABB_1 и AA_1B_1 се складни бидејќи имаат заедничка хипотенуза AB_1 и $\sphericalangle BAB_1=\sphericalangle A_1B_1A$ (како наизменични агли при пресечувањето на паралелните прави a и b со трансверзалата AB_1). Значи,

$$\overline{AA_1}=\overline{BB_1}.$$

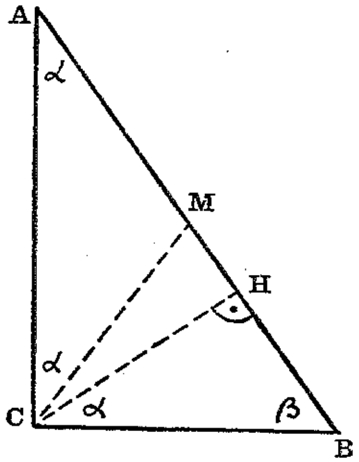
77.4. Ако се повлечат сите n-3 дијагонали што излегуваат од едно теме на n-аголникот, тогаш овој се разделува на n-2 составни триаголници. Збирот на аглите на многуаголникот ќе биде еднаков со збирот на аглите на сите добиени триаголници, т.е. бараниот збир ќе изнесува

$$(n-2)\cdot 180^\circ.$$

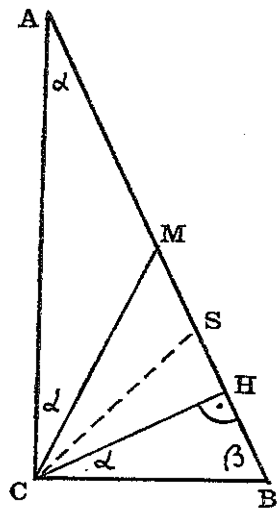
84.4. Во триаголникот ABC (црт. II.16). повлечени се од темето C на правиот агол тежишната линија CM и висината на CH.

Да претпоставиме дека $\overline{AC} \geqslant \overline{BC}$. Тогаш точката M лежи меѓу A и H. Јасно е дека $\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MC}$, т.е. триаголниците MAC и MBC се рамнокраки, од каде што следува дека $\sphericalangle ACM=\alpha$ и $\sphericalangle BCM=\beta$. Бидејќи $\sphericalangle BCH=\alpha$, добиваме $\sphericalangle MCH=\beta-\alpha$.

Ако пак, $\overline{AC} \leqslant \overline{BC}$, тогаш бараниот агол е $\alpha-\beta$.



Црт. II. 16



Црт. II. 17

85.4. Да претпоставиме дека правоаголниот триаголник ABC не е рамнокрак (црт. II.17). Нека CM, CH и CS се тежишната линија, висината и симетралата повлечени од темето C на правиот агол. Тогаш S лежи меѓу H и M, па користејќи го фактот што $\sphericalangle ACS=\sphericalangle BCS$ и задачата 84.4.II, добиваме дека:

$$\sphericalangle MCS=\sphericalangle ACS-\alpha=\sphericalangle BCS-\alpha=\sphericalangle HCS.$$

89.4. Нека CC_1 е симетрала на надворешниот агол BCA_1, т.е. $\sphericalangle C_1CA_1=\sphericalangle BCC_1$ и нека $CC_1 || AB$ (црт. II. 18). Ако правите AC, односно BC, се земат како трансверзали што ги сечат паралелните прави CC_1 и AB, тогаш

$$\sphericalangle BAC=\sphericalangle C_1CA_1 \text{ (како согласни),}$$

$$\sphericalangle ABC=\sphericalangle BCC_1 \text{ (како наизменични).}$$

Значи,

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC,$$

од каде што следува дека ΔABC е рамнокрак.

93.4. Нека надворешниот агол γ_1 е напореден со γ и нека $\gamma_1 = 2\alpha$. Од $\gamma + \gamma_1 = 180°$ и $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ следува $\gamma + 2\alpha = \alpha + \beta + \gamma$, од каде што $\alpha = \beta$.

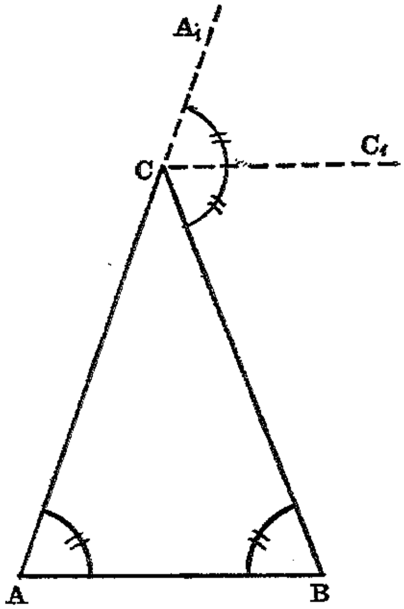
94.4. Продолжи ги краците на аглите α и β што не лежат на правата AB. Нека тие се сечат во точката P.

а) Аголот φ на црт. II.19 е еднаков на $\alpha + \beta$, зашто φ е надворешен агол на триаголникот ABP, а аглите α и β не се соседни со него.

б) Од (црт. II.20) се гледа: $\delta = 180° - \beta$ и $\alpha + \delta + \varphi = 180°$, од каде што $\varphi = 180° - \alpha - \delta = 180° - \alpha - 180° + \beta$, значи,

$$\varphi = \beta - \alpha.$$

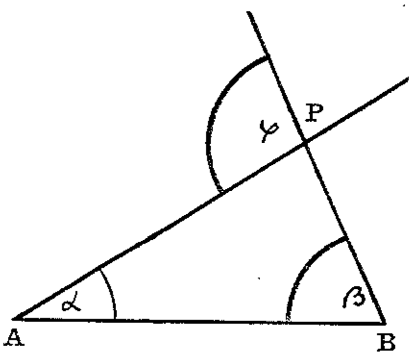
(Во случајот кога вторите краци на аглите се паралелни, конструкцијата е јасна).



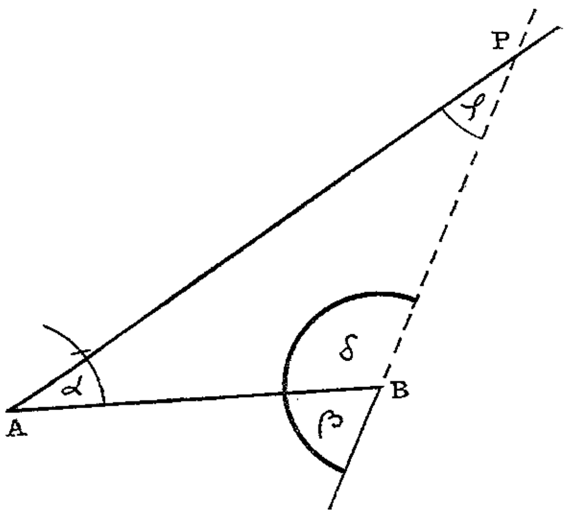
Црт. II. 18

96.4. Два агла со заемно нормални краци може: а) двата да се остри, б) двата да се тапи и в) едниот да е остар а другиот тап.

Да ги разгледаме овие случаи:

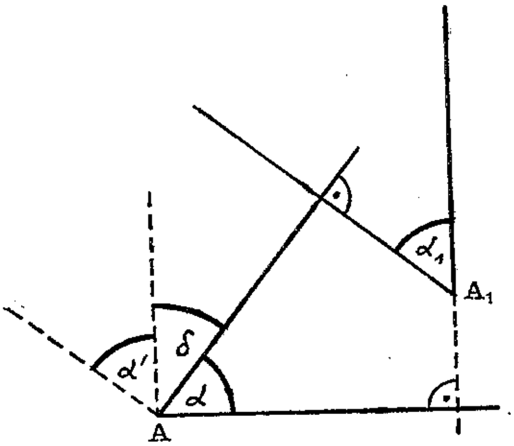


Црт. II. 19

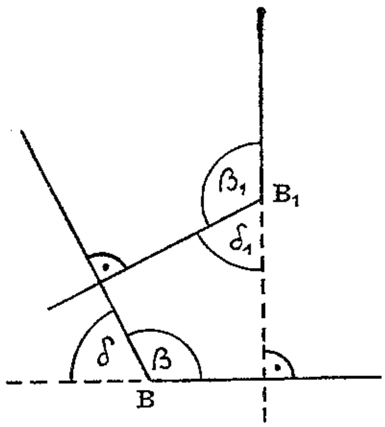


Црт. II. 20

а) Нека аглите α и α_1 (црт. II.21) се остри и нека се со заемно нормални краци. Низ темето A на аголот α повлекуваме полуправи, паралелни со краците на аголот α_1; така се добиваат аглите α' и δ. Бидејќи $\sphericalangle\delta$ ги дополнува и $\sphericalangle\alpha$ и $\sphericalangle\alpha'$ до правиот агол, следува дека $\alpha = \alpha'$. Како пак, $\sphericalangle\alpha'$ и $\sphericalangle\alpha_1$ се еднакви, следува дека и аглите α и α_1 се еднакви.



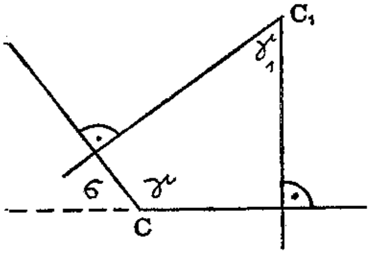
Црт. II. 21



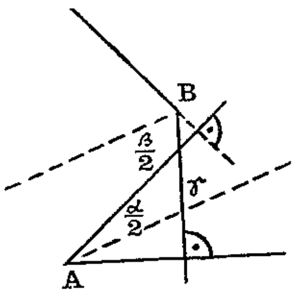
Црт. II. 22

б) Земаме помошни агли δ и δ_1 (како на црт. II.22) што се напоредни со аголот β, односно аголот β_1. Аглите δ и δ_1 имаат заемно нормални краци и се остри, па, значи, се еднакви. Бидејќи δ и δ_1 се напоредни со β, односно со β_1, следува дека β и β_1 се еднакви.

в) Помошниот агол σ (црт. II.23) е еднаков со аголот γ_1 (зошто?). Бидејќи σ и γ се напоредни, следува дека γ и γ_1 се суплементни.



Црт. II. 23



Црт. II. 24

100.4. Нека $\sphericalangle A = \alpha$ и $\sphericalangle B = \beta$ се агли со заемно нормални краци и нека $\alpha + \beta = 180°$. Од црт. II.24 се гледа дека:

1°. γ и $\dfrac{\beta}{2}$ се еден пар наизменични агли кога симетралите на α и β се сечат со еден крак на аголот β;

2°. $\gamma = 90° - \frac{\alpha}{2}$ (зашто γ е надворешен агол на правоаголен триаголник). Бидејќи $\frac{\beta}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$, следува дека $\gamma = \frac{\beta}{2}$, па, значи, симетралите се паралелни ($T.2$ од III.4 во учебеникот).

103.5. Да ја означиме со S пресечната точка на продолженијата на краците на трапезот (црт. II.25). Според $T.1$ од III.5, за аголот ASB и паралелните прави AB и CD е точно равенството $\overline{SD} : \overline{SA} = \overline{DC} : \overline{AB}$ т.е.

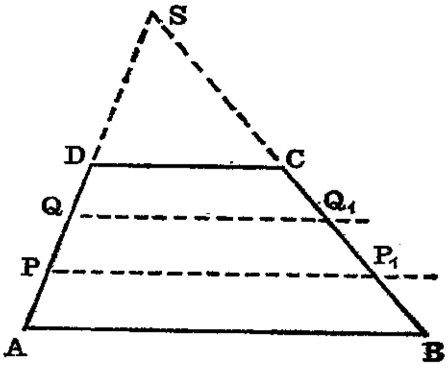
$$\overline{SD} : \overline{SA} = 14 : 20 = 0{,}7.$$

Според истата теорема имаме

$$\overline{QQ_1} : \overline{AB} = \overline{SQ} : \overline{SA}.$$

Бидејќи

$$\begin{aligned}\overline{SQ} : \overline{SA} &= (\overline{SD} + \overline{DQ}) : \overline{SA} = \\ &= (\overline{SD} + \tfrac{1}{3}\overline{DA}) : \overline{SA} = \\ &= \left(\frac{2}{3}\overline{SD} + \frac{1}{3}\overline{SA}\right) : \overline{SA} = \\ &= \frac{2}{3}(\overline{SD} : \overline{SA}) + \frac{1}{3} = \\ &= \frac{2}{3}\cdot 0{,}7 + \frac{1}{3} = 0{,}8,\end{aligned}$$



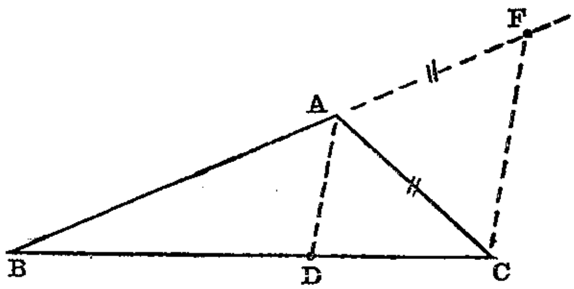
Црт. II. 25

имаме $\overline{QQ_1} : \overline{AB} = 0{,}8$, т.е. $\overline{QQ_1} = 16$ см.

Со аналогна постапка може да се определи и должината $\overline{PP_1}$; ќе се добие: $\overline{PP_1} = 18$ см.

104.5. Нека на црт. II.26 отсечката AD е симетрала на $\sphericalangle BAC = \alpha$. Низ темето C (или B) повлекуваме права паралелна со симетралата AD, којашто продолжението на страната AB ја сече во F. Ако сметаме дека краците на $\sphericalangle B$ се пресечени со паралелните прави AD и FC, тогаш, според Т.1 од III.5, имаме дека

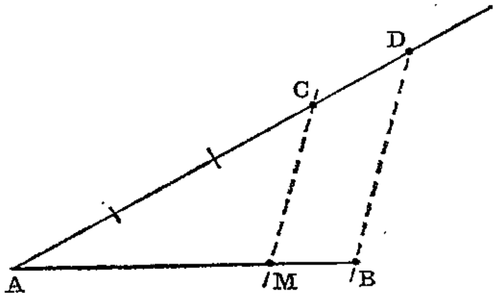
$$\overline{AB} : \overline{BD} = \overline{AF} : \overline{CD}. \qquad (1)$$



Црт. II. 26

Лесно се забележува дека $\triangle CAF$ е рамнокрак, зашто $\sphericalangle FCA = \sphericalangle CAD = \frac{\alpha}{2}$ (како наизменични), $\sphericalangle CFA = \sphericalangle DAB = \frac{\alpha}{2}$ (како согласни) од каде што следува дека $\overline{AF} = \overline{AC}$, па од (1) се добива

$$\overline{AB} : \overline{BD} = \overline{AC} : \overline{CD}.$$

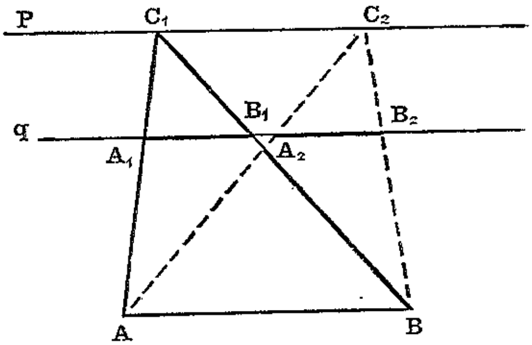


Црт. II. 27

106.5. Низ точката A да повлечеме произволна права и да ги нанесеме отсечките AC и CD, без заеднички внатрешни точки, така што важи $\overline{AC} : \overline{CD} = m : n$ (земи, на пример, $\overline{AD} = m + n$). Низ точката C да повлечеме права p паралелна со правата BD. Ако $M = p \cap AB$, тогаш ќе имаме $\overline{AM} : \overline{MB} = \overline{AC} : \overline{CD} = m : n$, што значи дека M е бараната точка. На црт. II. 27 точката M ја дели отсечката AB во однос 3 : 1.

112.5. За да докажеме дека исказот во задачата е точен, доволно е да докажеме дека е точен за две произволни положби на темето C, т.е. дека (црт. II.28) $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$. Лесно може да се согледа дека

$$\triangle ABC_1 \sim \triangle A_1B_1C_1,$$
$$\triangle ABC_2 \sim A_2B_2C_2.$$



Црт. II. 28

Бидејќи триаголниците ABC_1 и ABC_2 имаат заедничка страна AB и еднакви соодветни висини, двата пара слични триаголници ќе имаат ист коефициент, па, од

$$\overline{A_1B_1} = k\overline{AB} \text{ и } \overline{A_2B_2} = k\overline{AB},$$

следува

$$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}.$$

113.5. Нека на црт. II.29 отсечката AD е симетрала на аголот BAC. Низ темето C (или B) повлекуваме права паралелна со симетралата AD, којашто продолжението на страната AB ја сече во E. Лесно се забележува дека:

1° од $CE \parallel AD$ следува

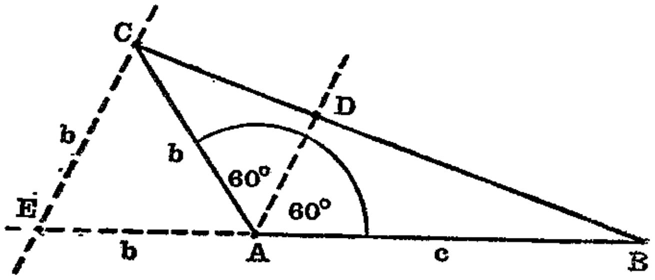
$$\sphericalangle ACE = \sphericalangle CAD = 60° \text{ (како наизменични)}$$
$$\sphericalangle CEA = \sphericalangle DAB = 60° \text{ (како согласни)}$$

па, значи, $\triangle ACE$ е рамностран.

2° $\triangle ABD \sim \triangle EBC$, од каде што $\overline{AD} : \overline{EC} = \overline{AB} : \overline{EB}$, т.е.

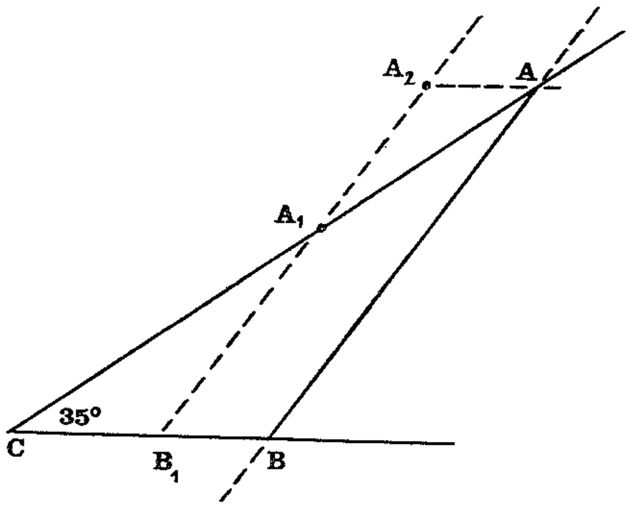
$$\overline{AD} : b = a : (a+b),$$

$$\overline{AD} = \frac{ab}{a+b}.$$



Црт. II. 29

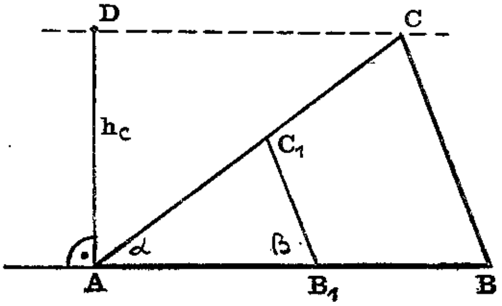
114.5. а) На краците на $\sphericalangle C = 35^\circ$ нанесуваме отсечки $\overline{CB_1} = a_1 = 2$см и $\overline{CA_1} = b_1 = 5$см (црт. II.30). Триаголникот CA_1B_1 е сличен со бараниот триаголник зашто $\sphericalangle C = 35^\circ$ и $a_1 : b_1 = 2 : 5 = a : b$. На правата A_1B_1 нанесуваме отсечка $\overline{B_1A_2} = 6$ см; потоа низ точката A_2 повлекуваме права, паралелна со CB_1 до пресекот A со кракот CA_1, па од точката A повлекуваме права паралелна со A_1B_1 до пресекот B со кракот CB_1; на тој начин се добива $\overline{AB} = 6$ см.



Црт. II. 30

Триаголникот ABC е сличен со триаголникот CA_1B_1, зашто (според Т. 1 од III. 4) $\overline{CB} : \overline{CA} = \overline{CB_1} : \overline{CA_1} = 2 : 5$, а $\sphericalangle C$ е заеднички агол. Тој е бараниот триаголник, бидејќи ги исполнува условите на задачата.

б) Конструираме еден триаголник AB_1C_1 со $\sphericalangle A=\alpha$ и $\sphericalangle B=\beta$ (црт. II.31). Од темето A издигаме нормала AD и, притоа, земаме $\overline{AD}=h_c$. Низ D повлекуваме права, паралелна со AB_1 до пресекот C со правата AC_1; потоа, низ C повлекуваме права паралелна со B_1C_1 до пресекот B со правата AB_1. Триаголникот ABC е сличен со триаголникот, AB_1C_1, па тој е бараниот триаголник, зашто $\sphericalangle A=\alpha$, $\sphericalangle B=\beta$ и има висина h_c.



Црт. II. 31

в) Аналогно како под б).

115.5. а) Од сличноста на триаголниците ACD и ABC (црт. II.32) следува дека $h:b=a:c$, т.е. $h=ab/c$.

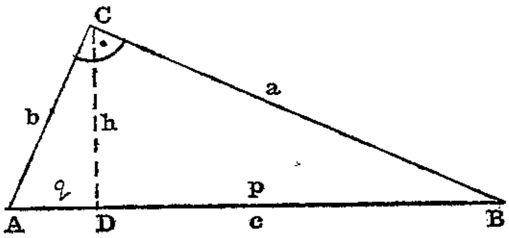
б) Од $a^2=cp$ и $b^2=cq$ имаме $c=a^2/p$ и $c=b^2/q$, па

$$\frac{a^2}{p}=\frac{b^2}{q}.$$

б) Од $a^2=cp$ и $b^2=cq$ имаме

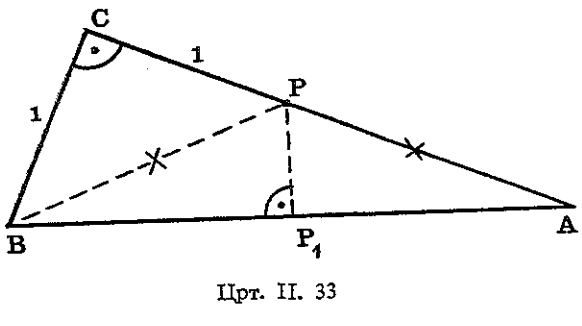
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{cp}+\frac{1}{cq}=\frac{1}{c}\cdot\frac{p+q}{pq}=$$

$=\dfrac{c}{cpq}$, па поради $h^2=pq$, добиваме $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{h^2}$.



Црт. II. 32

120.5. Нека P_1 е ортогоналната проекција од P на хипотенузата AB (црт. II.33). Триаголниците ABC и APP_1 се слични, зашто имаат по два еднакви агли (по еден прав агол и $\sphericalangle A$ им е заеднички), од каде што следува дека



Црт. II. 33

$$\overline{AP_1}:\overline{AP}=\overline{AC}:\overline{AB}.$$

Од конструкцијата се гледа дека: $\overline{BP}=\overline{AP}=\sqrt{2}$, $\overline{AC}=\overline{AP}+\overline{CP}=$ $=1+\sqrt{2}$ и $\overline{AP_1}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}$ (бидејќи триаголникот ABP е рамнокрак).

Според тоа, имаме $\frac{1}{2}\ \overline{AB} : \sqrt{2} = (1+\sqrt{2}) : \overline{AB}$, од каде што

$$\overline{AB} = \sqrt{2\sqrt{2}\,(1+\sqrt{2})}.$$

121.5. Бидејќи $\sphericalangle A = \alpha = 30^\circ$ е најмал агол во правоаголниот триаголник ABC, следува дека спротивната страна BC е катета. Од $\overline{AB} > \overline{AC}$ следува дека и страната AC е катета. Според тоа, AC и BC се катети, па, значи, $\sphericalangle C$ е правиот агол во триаголникот.

Според Питагоровата теорема имаме:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{6{,}75} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

123.6. Лесно може да се согледа дека еден четириаголник не може да има само три прави агли. Ако сите агли, што не се прави агли, се тапи, тогаш збирот на аглите во четириаголникот ќе биде поголем од 360°.

Ако сите агли, што не се прави агли, се остри, тогаш збирот на аглите во четириаголникот ќе биде помал од 360°.

Значи точно е тврдењето во задачата.

126.6. Од правоаголниот триаголник CDD_1 (црт. II.34) имаме:

$$\sphericalangle DD_1C = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle ADC.$$

Од условот на задачата се знае дека

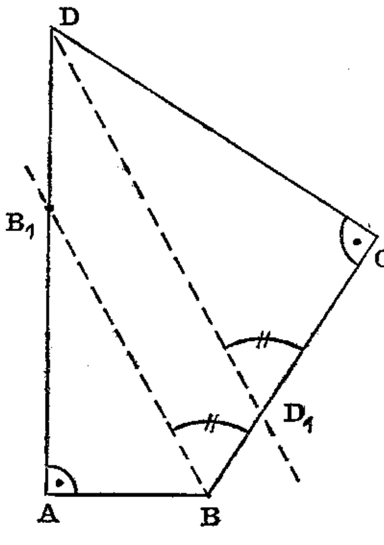
$$\sphericalangle ADC + \sphericalangle ABC = 180^\circ,$$

па следствено

$$\sphericalangle DD_1C = 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle ABC) = \frac{1}{2}\sphericalangle ABC = \sphericalangle B_1BC.$$

Бидејќи аглите DD_1C и B_1BC се согласни и еднакви кога правите BB_1 и DD_1 се сечат со правата BC, следува дека овие прави (симетрали) се паралелни.

Да претпоставиме дека симетралите BB_1 и DD_1 се совпаѓаат, т.е. $D_1 = B$, $B_1 = D$. Тогаш $\overline{BA} = \overline{BC}$ и $\overline{DA} = \overline{DC}$, т.е. четириаголникот ABC е делтоид, а во специјален случај квадрат.



Црт. II. 34

131.6. Триаголниците ADS_1 и BCS_1 се складни според признакот ACA, зашто: $\overline{AD} = \overline{BC}$ (како спротивни страни на паралелограм), $\sphericalangle ADS_1 = \sphericalangle CBS_2$ и $\sphericalangle DAS_1 = \sphericalangle BCS_2$ (како половини од спротивните агли на паралелограм, а тие се еднакви). Од тоа следува дека $\overline{DS_1} = \overline{BS_2}$ и $\overline{AS_1} = \overline{CS_2}$.

132.6. Триаголниците APE и BPC се слични (црт. II.35), зашто:

$$\sphericalangle EAP = \sphericalangle BCP \text{ и } \sphericalangle AEP = \sphericalangle CBP$$

(како наизменични агли кога паралелните прави AD и BC се пресекуваат со трансверзалата AC, односно BE), па, следствено

$$\overline{AP} : \overline{PC} = \overline{AE} : \overline{BC} = \overline{AE} : \overline{AD} = k,$$

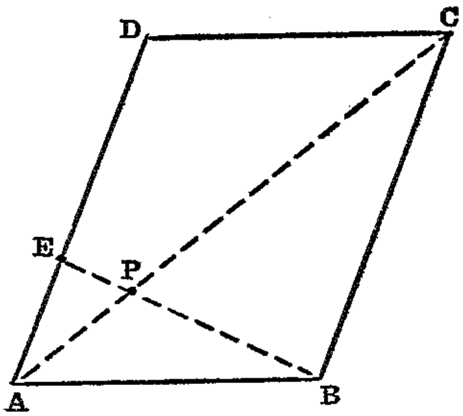
$$\overline{BP} : \overline{PE} = \overline{BC} : \overline{AE} = \overline{AD} : \overline{AE} = \frac{1}{k}.$$

Од $\overline{AP} : \overline{PC} = k$, добиваме $\overline{AP} : (\overline{AP} + \overline{PC}) = k : (k+1)$, т.е.

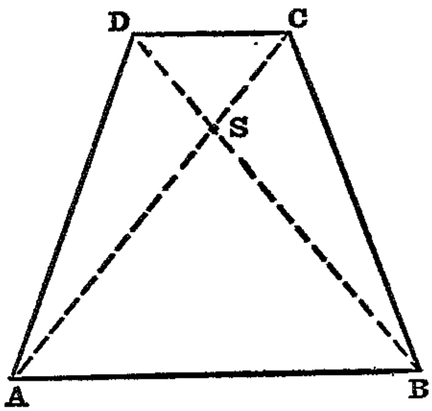
$$\overline{AP} : \overline{AC} = k : (k+1),$$

а од $\overline{BP} : \overline{PE} = 1 : k$, добиваме $\overline{BP} : (\overline{BP} + \overline{PE}) = 1 : (1+k)$, т,е,

$$\overline{BP} : \overline{BE} = 1 : (1+k).$$



Црт. II. 35



Црт. II. 26

136.6. Нека во трапезот $ABCD$ точката S е пресек на дијагоналите AC и BD, и нека $\overline{AC} = \overline{BD}$ (црт. II.36). Лесно се установува дека триаголниците ASB и CSD се слични, па, значи:

$$\overline{AS} : \overline{SC} = \overline{BS} : \overline{SD},$$

од каде што се добива

$$\overline{AS} : (\overline{AS} + \overline{SC}) = \overline{BS} : (\overline{BS} + \overline{SD}),$$

односно

$$\overline{AS} : \overline{BS} = \overline{AC} : \overline{BD} = 1, \text{ т.е. } \overline{AS} = \overline{BS}.$$

На ист начин се добива $\overline{SC} = \overline{SD}$.

Значи, триаголниците ASD и BSD се складни (признак CAC), од каде што следува дека $\overline{AD} = \overline{BC}$, т.е. трапезот е рамнокрак.

137.6. Нацртај четириаголник $ABCD$ во кој дијагоналите AC и BD да се преполовуваат со пресечната точка S, т.е. $\overline{AS}=\overline{SC}$ и $\overline{BS}=\overline{SD}$.

Лесно се установува дека триаголниците ABS и CDS се складни (признак CAC), од каде и дека $\sphericalangle CAB=\sphericalangle ACD$; ако овие агли ги сметаме како наизменични при пресечување на правите AB и DC со трансверзалата AC, тогаш јасно е дека AB и DC се паралелни прави. На ист начин, преку складноста на триаголниците ASD и BCS, се установува дека $AD\|BC$.

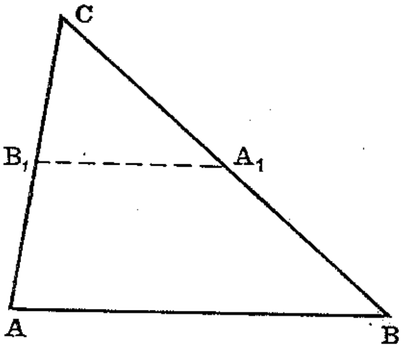
Според тоа, имаме $AB\|DC$ и $AD\|BC$, т.е. четириаголникот $ABCD$ е паралелограм.

139.6. Триаголниците ABC и A_1B_1C се слични (црт. II.37), зашто: $\sphericalangle C$ им е заеднички и $\overline{AC}:\overline{B_1C}=\overline{BC}:\overline{A_1C}=2$. Од тоа следува дека $\sphericalangle CB_1A_1=\sphericalangle CAB$, а тоа, пак, значи дека $A_1B_1\|AB$. Од сличноста на триагиаголниците следува и дека $\overline{AB}:\overline{A_1B_1}=\overline{AC}:\overline{B_1C}=2$, т.е. $\overline{A_1B_1}=$ $=\frac{1}{2}\overline{AB}$.

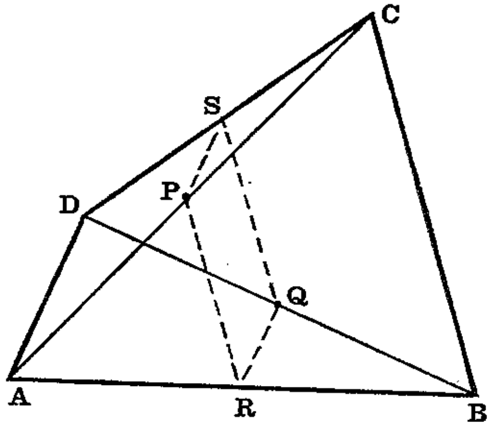
141.6. Нека $ABCD$ е четириаголникот за кој станува збор, а P, Q, R и S се средините на неговите страни. Според 140.6.II, следува дека страните на четириаголникот $PQRS$ се паралелни со дијагоналите на четириаголникот $ABCD$.

а) Бидејќи дијагоналите кај ромбот се заемно нормални, следува дека аглите на паралелограмот $PQRS$ се прави, т.е. тој е правоаголник.

б) Бидејќи дијагоналите кај правоаголникот се еднакви, следува дека сите страни на паралелограмот $PQRS$ се еднакви, т.е. тој е ромб.



Црт. II. 37



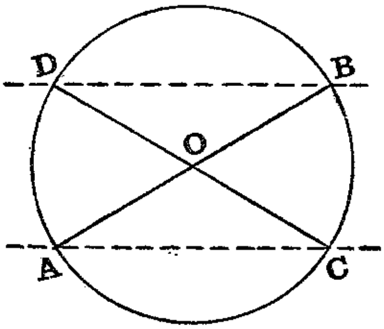
Црт. II. 38

142.6. Нека P и Q се средините на дијагоналите AC и BD соодветно, а R и S средините на спротивните страни AB и CD (црт. II.38). Отсечката PS е средна линија во триаголникот ADC, па, значи, $PS\|AD$ и $\overline{PS}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AD}$. Отсечката, пак, RQ е средна линија во триаголникот ADB, од каде што следува дека $RQ\|AD$ и $\overline{RQ}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AD}$. Следствено, $PS\|RQ$ и $\overline{PS}=\overline{RQ}$, т.е. четириаголникот $PSQR$ е паралелограм.

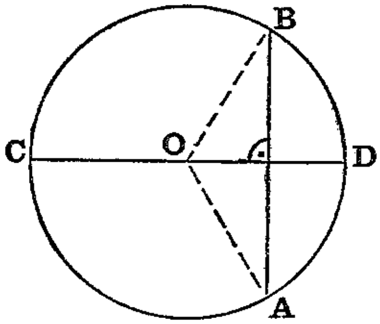
143.7. Триаголниците AOC и BOD (црт. II. 39) се складни според признакот CAC, зашто: $\overline{AO}=\overline{OC}=\overline{OB}=\overline{OD}$ (радиуси на кружницата), $\sphericalangle AOC=\sphericalangle BOD$ (како накрсни агли). Од складноста на овие триаголници следува

$$\sphericalangle OAC=\sphericalangle OBD,$$

па значи, правите AC и BD се паралелни, зашто овие агли се наизменични кога правите ќе се пресечат со трансверзалата AB.



Црт. II. 39



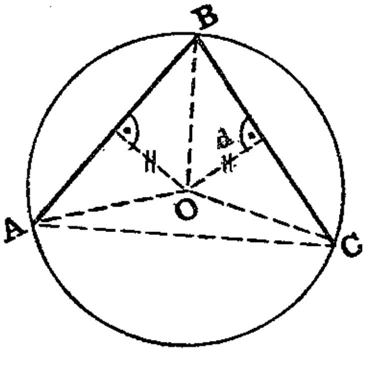
Црт. II. 40

145.7. Поради $\overline{OA}=\overline{OB}$ (како радиуси на кружницата на црт. II.40), триаголникот OAB е рамнокрак со основа AB. Дијаметарот CD, што е нормален на тетивата AB, ја содржи висината на рамнокракиот триаголник AOB спуштена од врвот O, па, значи, ја располовува основата AB.

146.7. Нека $k(O, r)$ е зададената кружница (црт. II.41) и нека растојанието од центарот O до тетивите AB и BC е d. Од рамнокраките триаголници OAB и OBC следува дека

$$\frac{\overline{AB}^2}{4}=r^2-d^2 \text{ и } \frac{\overline{BC}^2}{4}=r^2-d^2,$$

од каде што $\overline{AB}=\overline{BC}$. Значи, триаголникот ABC е рамнокрак.



Црт. II. 41

149.7. Конструкцијата е изведена на црт. II.42, по следниот редослед:

1°. MN е симетрала на отсечката AB;

2°. $k(A, \overline{AB})$;

3°. $O=MN \cap k(A, \overline{AB})$.

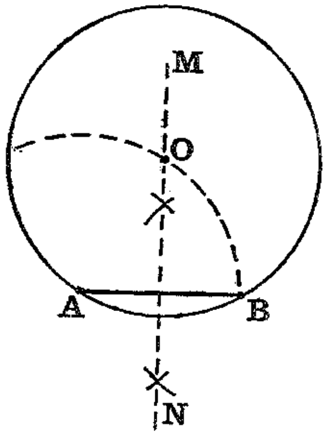
Бараната кружница е $k(O, \overline{AB})$.

150.7. Нека A и B се две различни точки (црт. II. 43). За произволна точка M на симетралата е точно

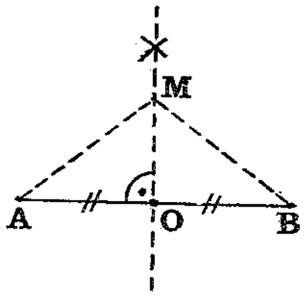
$$\overline{MA}+\overline{MB}\geqslant\overline{AB},$$

но, поради $\overline{MA}=\overline{MB}=r$, имаме

$$r\geqslant\frac{1}{2}\overline{AB}.$$



Црт. II. 42



Црт. II 43

Значи, кружницата $k(O, \frac{1}{2}\cdot\overline{AB})$, каде што O е пресечната точка на отсечката AB и нејзината симетрала, минува низ точките A и B и има најмал радиус.

156.7. Ако точките A, B, C од кружницата се колинеарни, тогаш правата, на која лежат тие точки, ќе има три заеднички точки со кружницата, што не е можно.

157.7. Нека A е дадената точка, r е дадениот радиус, а p дадената права. Направи цртеж изведувајќи ги по ред следниве конструкции:

1°. $k(A, r)$;

2°. $p\cap k(A, r)$.

Центарот на бараната кружница ќе биде во пресечната точка на правата p и кружницата $k(A, r)$.

Задачата има две, едно или ниедно решение, според тоа дали правата p и кружницата k имаат две, една или ниедна заедничка точка. Според тоа, ако d е растојанието од точката A до правата p, тогаш:

— ако $d>r$, задачата нема решение;

— ако $d=r$, задачата има само едно решение;

— ако $d<r$, задачата има две решенија.

160.7. Нека кружницата $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ се допираат во точката T. Тогаш: $\overline{O_1O_2}=\overline{O_1T}+\overline{O_2T}$, или $\overline{O_1O_2}=\overline{O_1T}-\overline{O_2T}$, ако $r_1>r_2$, од каде што следува дека:

$$d(O_1 O_2) = d(O_1 T) + d(TO_2),$$

односно

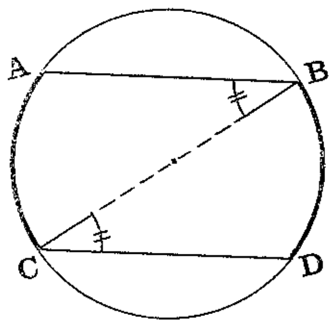
$$d(O_1 T) = d(O_1 O_2) + d(O_2 T).$$

Од овие релации следува дека точките O_1, O_2 и T се колинеарни и, притоа, точката T лежи меѓу O_1 и O_2, односно O_2 лежи меѓу O_1 и T.

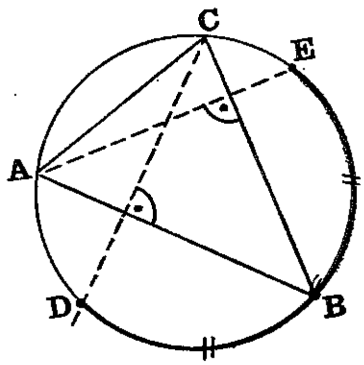
170.7. Од $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ (црт. II. 44) следува дека соодветните централни агли се еднакви, односно дека и перифериските агли над овие лаци се еднакви меѓу себе. Значи

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD.$$

Ако правата BC ја сметаме за трансверзала на правите AB и CD, тогаш, поради еднаквоста на наизменичните агли ABC и BCD, тие се паралелни.



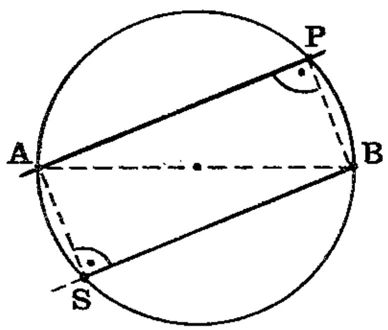
Црт. II. 44



Црт. II. 45

173.7. Од условот на задачата имаме дека аглите BAE и BCD се со заемни нормални краци (црт. II.45), од каде што следува дека тие се еднакви. Од еднаквоста на овие периферискиагли следува дека и нивните соодветни централни агли се еднакви, па, значи, соодветните лаци од кружницата се еднакви, т.е. $\widehat{BD} = \widehat{BE}$.

174.7. Триаголниците APB и ASB се правоаголни (црт. II.46). Поради $\sphericalangle ABS = \sphericalangle BAP$ (како наизменични што се добиени при сечење на паралелните прави AP и BS со правата AB) и AB заедничка хипотенуза тие триаголници се складни, од каде што следува дека $\overline{AP} = \overline{BS}$.



Црт. II. 46

175.7. Ако постои тангента на кружницата k што минува низ A (при што $\overline{OA} > r$) со допирна точка T, тогаш аголот OTA е прав агол, па, според Талесовата теорема, точката T ќе лежи и на кружницата $k_1\left(M, \frac{\overline{OA}}{2}\right)$, каде што M е средина на отсечката OA.

Бидејќи k_1 минува низ центарот O на кружницата k и низ точката A што е надворешна за k, следува дека k и k_1 имаат две заеднички точки. Ако се тоа точките P и T, тогаш AP и AT се тангенти на кружницата k.

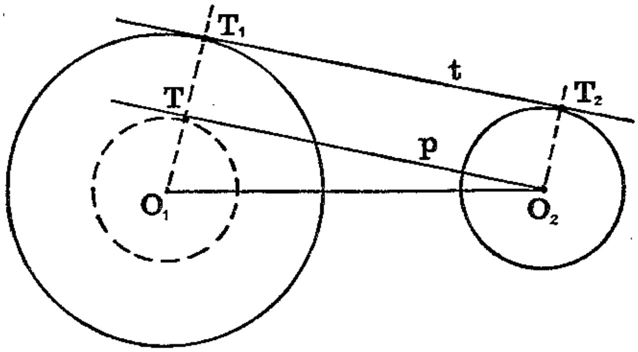
Правоаголните триаголници OTA и OPA имаат заедничка хипотенуза OA и еднакви катети $\overline{OT}=\overline{OP}=r$, па, значи, се складни триаголници, од каде следува $\overline{AP}=\overline{AT}$ и дека правата OA е симетрала на аголот PAT.

176.7. Нека зададената кружница е $k(O,r)$ и нека M е средина на отсечката OB. Согледувајќи го размислувањето во решението на претходната задача, заклучуваме дека допирните точки на тангентите што минуваат низ B, ако постојат, би биле заеднички точки на кружниците k и $k_1\left(M, \frac{\overline{OB}}{2}\right)$.

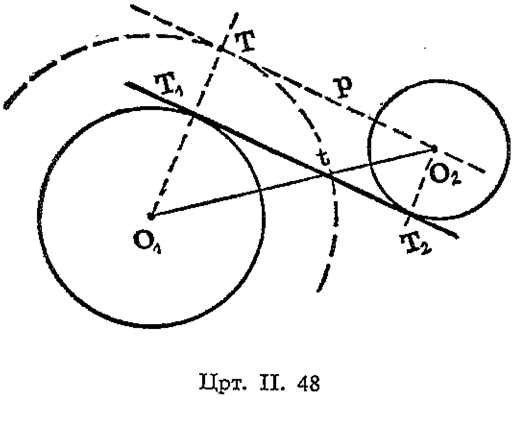
За централното растојание $\overline{OM}$ на k и k_1 имаме, поради $\overline{OB}<r$,

$$\overline{OM}=\frac{\overline{OB}}{2}=\overline{OB}-\frac{\overline{OB}}{2}<\left|r-\frac{\overline{OB}}{2}\right|,$$

од каде што следува дека k и k_1 немаат заеднички точки.



Црт. II. 47



Црт. II. 48

178.7. *Заедничка тангента* на две дадени кружници ја викаме онаа права што ги допира и двете кружници. Ако центрите на двете кружници се од иста страна од заедничката тангента неа ја нарекуваме *надворешна*, (црт. II.47), а ако се наоѓаат на различни страни ја нарекуваме *внатрешна* (црт. II. 48).

При каква било заемна положба на две кружници, конструкцијата на нивните надворешни (внатрешни) заеднички тангенти, во колку тие постојат, се врши на ист начин. Ќе ги разгледаме посебно двата случаи: конструкција на надворешна тангента и конструкција на внатрешна тангента.

Да претпоставиме дека задачата е решена и t е заедничка надворешна тангента на кружниците $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$, при што $r_2 \leqslant r_1$. Низ точката O_2 да повлечеме права p паралелна на t; нека $T = O_1T_1 \cap p$. Бидејќи $O_2T \perp O_1T_1$, правата p ќе биде тангента на кружницата $(O_1, r_1 - r_2)$, ако $r_2 < r_1$, или, пак, p се совпаѓа со централната линија O_1O_2, ако $r_1 = r_2$.

Од тоа произлегува следнава конструкција. Ако $r_2 < r_1$, да ја конструираме кружницата $k_3(O_1, r_1 - r_2)$, а потоа тангентите p_1, p_2 на k_3 повлечени од точката O_2. Бараните тангенти ќе бидат тангенти на кружницата k_1 што се паралелни со p_1, p_2. Ако, пак, $r_1 = r_2$, тогаш бараните тангенти се тенгентите на k_1 паралелни со правата O_1O_2.

Дали задачата ќе има решение, $r_2 < r_1$, зависи од тоа дали од точката O_2 може да се повлечат тангенти на кружницата k_3. Според тоа,

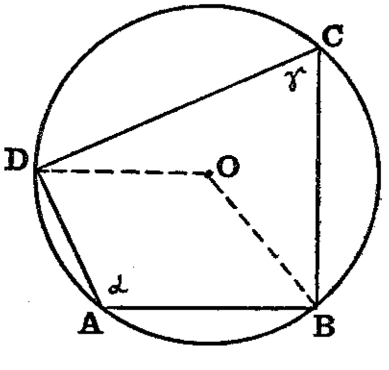
— ако $\overline{O_1O_2} < r_1 - r_2$, тогаш задачата нема решение;

— ако $\overline{O_1O_2} = r_1 - r_2$, тогаш задачата има единствено решение;

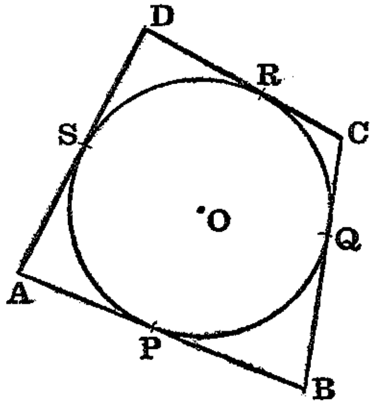
— ако $\overline{O_1O_2} > r_1 - r_2$, тогаш задачата ќе има две решенија.

Ако, пак, $r_1 = r_2$, тогаш задачата има секогаш решение.

Конструкцијата на внатрешните заеднички тангенти се врши на следниов начин. Се конструира кружницата $k_4(O_1, r_1 + r_2)$, а потоа тангентите на k_4 повлечени од точката O_2; бараните тангенти ќе бидат паралелни со нив. Да забележиме само дека задачата ќе има решение ако $\overline{O_1O_2} \geqslant r_1 + r_2$ и тоа: ако $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$, задачата има едно решение, а ако $\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$, задачата има две решенија.



Црт. II. 49



Црт. II. 50

179.7. Нека четириаголникот $ABCD$ е тетивен (црт. II.49). Спротивните агли α и γ се периферски, па имаме $\alpha = \frac{1}{2} \measuredangle BOD$, $\gamma = \frac{1}{2}(360° - \measuredangle BOD)$, од каде што добиваме дека $\alpha + \gamma = 180°$, т.е. аглите α и γ се суплементни.

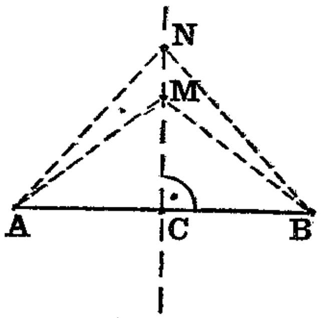
180.7. Нека четириаголникот $ABCD$ е тангентен (црт. II.50) и нека P, Q, R и S се допирните точки на страните AB, BC, CD и DA соодветно. Според 175.7.II, имаме:

$$\overline{AP}=\overline{AS},\ \overline{BP}=\overline{BQ},\ \overline{CQ}=\overline{CR},\ \overline{DR}=\overline{DS},$$

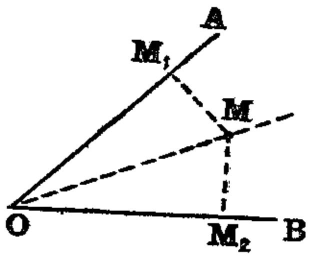
а потоа:

$$\begin{aligned}\overline{AB}+\overline{CD}&=(\overline{AP}+\overline{PB})+(\overline{CR}+\overline{RD})=\\&=(\overline{AS}+\overline{BQ})+(\overline{CQ}+\overline{DS})=\\&=(\overline{AS}+\overline{SD})+(\overline{BQ}+\overline{QC})=\overline{AD}+\overline{BC}.\end{aligned}$$

181.8. Нека $\mathbf{\Gamma}$ е бараното геометриско место. Јасно е дека средината C на отсечката AB припаѓа на $\mathbf{\Gamma}$. Нека $M\in\mathbf{\Gamma}$ е произволна точка, $M\neq C$ (црт. II.51). Тогаш $\overline{MA}=\overline{MB}$, па триаголникот ABM е рамнокрак, што значи дека $MC\perp AB$. Според тоа $M\in p$, каде што p е правата низ C и нормална на AB. Ако, пак, $N\in p$, тогаш јасно е дека $N\in\mathbf{\Gamma}$. Според тоа, $\mathbf{\Gamma}=p$.



Црт. II. 51

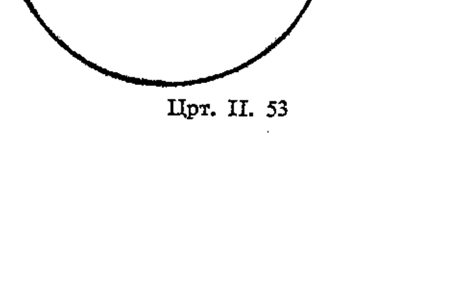


Црт. II. 52

182.8. Нека $\mathbf{\Gamma}$ е бараното геометриско место. Јасно е дека $O\in\mathbf{\Gamma}$. Затоа, нека $M\neq O$ е произволна точка од $\mathbf{\Gamma}$ и нека M_1 и M_2 се ортогоналните проекции од M на краците OA и OB соодветно (црт. II.52). Тогаш триаголниците OM_1M и OM_2M се правоаголни, имаат заедничка хипотенуза OM и еднакви катети MM_1, MM_2, па тие се складни. Од тоа следува дека $\sphericalangle M_1OM=\sphericalangle M_2OM$, т.е. M лежи на симетралата s од аголот AOB. Ако, пак, $N\in s$, тогаш јасно е дека $N\in\mathbf{\Gamma}$. Според тоа $\mathbf{\Gamma}=s$.

184.8. Нека $M\in\mathbf{\Gamma}$ (црт. II. 53); тогаш триаголникот AMO е правоаголен, од каде што следува дека $M\in(S,\overline{SO})$ при што S е средината на отсечката AO. Според тоа:

— ако $\overline{OA}\leqslant r$ и $A\neq O$, тогаш $\mathbf{\Gamma}=(S,\overline{SO})$;



Црт. II. 53

— ако $\overline{OA} > r$, тогаш $\mathbf{Г}$ е делот од кружницата $(S, \overline{SO})$ што е внатрешен за кружницата k;

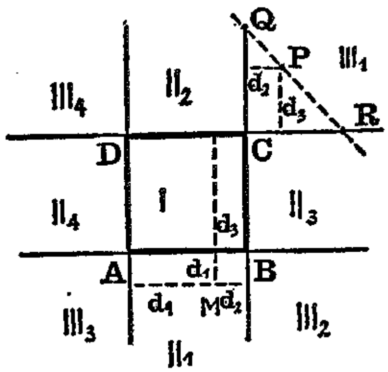
— ако $A = O$, тогаш $\mathbf{Г} = \{O\}$.

185.8. Нека $\mathbf{Г}$ е бараното геометриско место на точки. Јасно е дека, ако една точка M е внатрешна за квадратот или лежи на некоја од страните на квадратот, тогаш збирот на растојанијата од M до правите AB, BC, CD и DA е еднаков на $2a$ (црт. II.54). Од тоа следува дека:

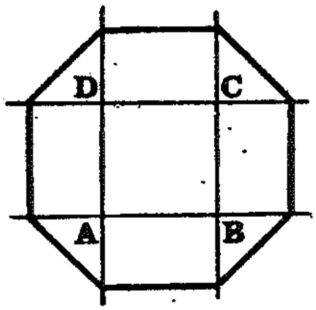
— ако $s = 2a$, тогаш $\mathbf{Г}$ е исполнетиот квадрат $ABCD$;

— ако $s < 2a$, тогаш $\mathbf{Г} = \varnothing$.

Затоа, да претпоставиме дека $s = 2a + 2h > 2a$. Растојанијата на точката M до правите AB, BC, CD и DA да ги означиме со d_1, d_2, d_3 и d_4 соодветно. Ако M е од делот II_1, тогаш $d_2 + d_4 = a$, $d_3 = d_1 + a$, па од условот $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 2a + 2h$, добиваме $d_1 = h$. Значи M лежи на права, паралелна со AB и на растојание h од неа. Аналогно се добива кога точката M се наоѓа во деловите II_2, II_3 и II_4.



Црт. II. 54



Црт. II. 55

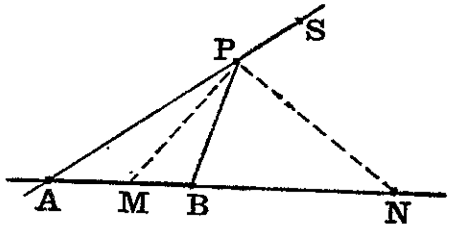
Нека сега $P \in \mathbf{Г}$ и P е од делот III_1. Низ P да повлечеме права QR паралелна со BD, т.е. права која со правите BC и CD зафаќа агол од 45°. Тогаш имаме $d_2 + d_3 = \overline{CQ} = \overline{CR}$, $d_1 = d_3 + a$, $d_1 = d_2 + a$, па од условот $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 2a + 2h$, добиваме $d_2 + d_3 = h$, т.е. $\overline{CQ} = \overline{CR} = h$. Според тоа, точката P лежи на права која со правите BC и CD образува рамнокрак правоаголен триаголник, со катета h.

Од сето тоа следува дека $\mathbf{Г}$ е како на црт. II.55, т.е. множеството точки од еден осумаголник со страни a и $h\sqrt{2}$.

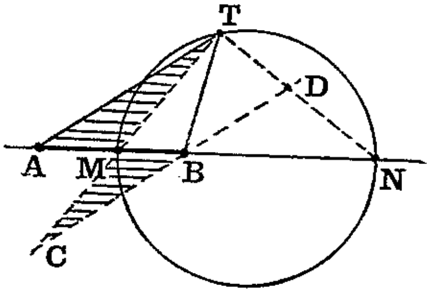
186.8. Да забележиме, прво, дека на правата AB постојат две точки, M и N, коишто отсечката AB ја делат во ист однос λ; едната (точката M) е внатрешна за отсечката AB, а другата (точката N) е надворешна (црт. II.56).

Нека, сега, P е произволна точка од бараното геометриско место $\mathbf{\Gamma}$, така што P да не лежи на правата AB (црт. II.56). Од $\overline{AM}:\overline{BM}=\lambda=\overline{AP}:\overline{BP}$, следува дека PM е симетрала на аголот $\sphericalangle APB$ (види 104. 5. II). Од $\overline{AN}:\overline{BN}=\lambda=\overline{AP}:\overline{BP}$ на ист начин, заклучуваме дека PN е симетрала на аголот $\sphericalangle BPS$. Според тоа, $\sphericalangle MPN=90°$.

Значи, од произволна точка $P\in\mathbf{\Gamma}$ што не лежи на правата AB, отсечката MN се гледа под агол од 90°, т.е. P лежи на кружницата k чиј дијаметар е отсечката MN. Со тоа сме покажале дека $\mathbf{\Gamma}\subseteq k$.



Црт. II. 56



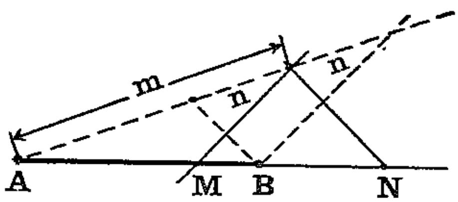
Црт. II. 57

Обратно, нека T е произволна точка од кружницата k (црт. II.57), $T\neq M$ и $T\neq N$. Низ точката B да повлечеме права паралелна со правата AT; така ги добиваме точките C и D. Триаголниците AMT и BMC се слични, па $\overline{AT}:\overline{BC}=\overline{AM}:\overline{BM}$ или $\overline{AT}:\overline{BC}=\lambda$. Исто така, триаголниците BDN и ATN се слични, од каде што добиваме дека $\overline{AT}:\overline{BD}=\lambda$. Според тоа, имаме $\overline{BC}=\overline{BD}$, т.е. TB е тежишна линија во правоаголниот триаголник CTN, па $\overline{TB}=\overline{BC}=\overline{BD}$. Бидејќи $\overline{AT}:\overline{BC}=\lambda$, ставајќи TB наместо BC, добиваме $\overline{TA}:\overline{TB}=\lambda$; тоа значи дека $T\in\mathbf{\Gamma}$.

Од сето тоа следува дека $\mathbf{\Gamma}$ е кружницата k, којашто се вика *аполониева кружница* за отсечката AB и бројот λ.

На црт. II.58 се најдени точките M и N, за $\lambda=m:n$.

Во случајот $\lambda=1$, види 181.8.II.



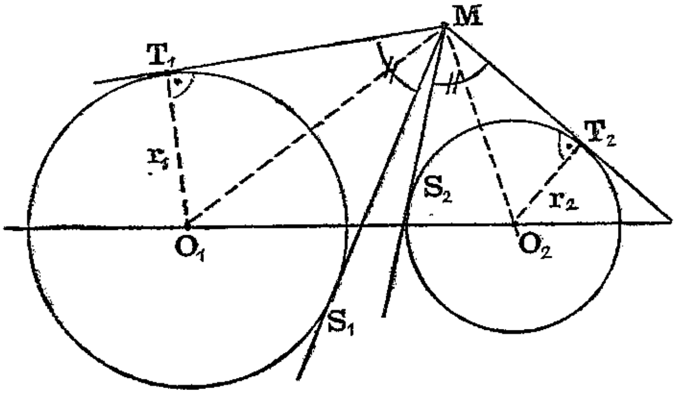
Цтр. II. 58

187.8. Нека $O_1\neq O_2$ и нека M е произволна точка од бараното геометриско место $\mathbf{\Gamma}$ (црт. II.59). Бидејќи $\sphericalangle T_1MS_1=\sphericalangle T_2MS_2$, $\sphericalangle T_1MO_1=\sphericalangle O_1MS_1$, $\sphericalangle T_2MO_2=\sphericalangle S_2MO_2$, следува дека $\sphericalangle T_1MO_1=\sphericalangle T_2MO_2$. Според тоа, правоаголните триаголници MT_1O_1 и MT_2O_2 се слични, од каде што следува дека

$$\overline{MO_1} : \overline{MO_2} = \overline{O_1T_1} : \overline{O_2T_2} = r_1 : r_2.$$

Според тоа, ако $r_1 \neq r_2$, тогаш Γ е аполониева кружница за отсечката O_1O_2 и бројот $r_1 : r_2$, а ако $r_1 = r_2$, тогаш Γ е симетралата на отсечката O_1O_2.

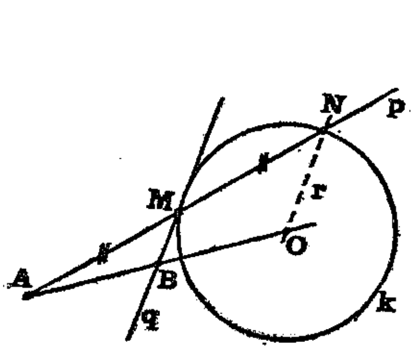
Ако $O_1 = O_2$, а $r_1 \neq r_2$, тогаш $\Gamma = \varnothing$.



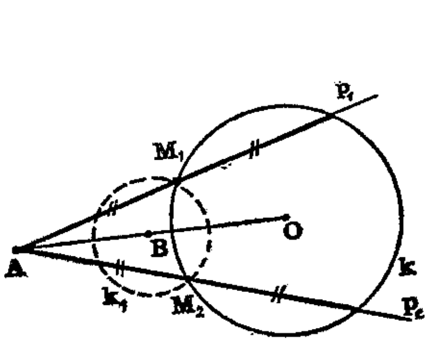
Црт. II. 59

189.8. Нека Γ_1 е геометриското место на центрите на кружниците со радиус r, коишто ја допираат правата p_1, а Γ_2 геометриското место на центрите на кружниците со радиус r, коишто ја допираат правата p_2. Центарот на бараната кружница $k(O, r)$ ќе биде точка од $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

194.8. Да претпоставиме дека задачата е решена и дека p е бараната права (црт. II.60). Низ M да повлечеме права q паралелна со ON; нека $B = q \cap AO$. Тогаш $\overline{AB} = \overline{BO}$, па точката B може да се најде. Триаголниците ABM и AON се слични, па следува дека $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{ON} = \frac{1}{2}r$. Значи, $M \in k_1(B, \frac{1}{2}r)$. Бидејќи $M \in k$, следува дека $M \in k_1 \cap k$, а p е правата AM.



Црт. II. 60



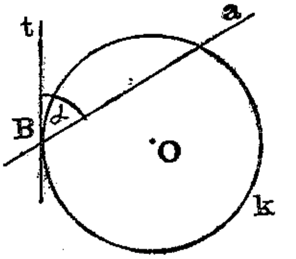
Црт. II. 61

Конструкцијата се врши по следниов редослед: 1) средината B на отсечката AO; 2) кружницата $k_1(B, \frac{1}{2} r)$; 3) $\{M_1, M_2\} = k_1 \cap k$; 4) $p_1 = AM_1$, $p_2 = AM_2$ (црт. II.61).

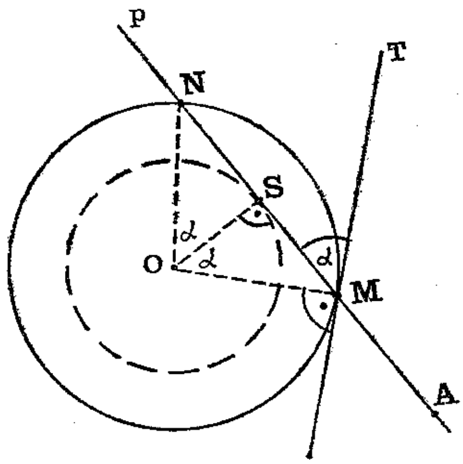
Задачата има две, едно или ниедно решение.

195.8. Нека правата a ја сече кружницата k во точката B, нека t е тангентата на k во B и нека α е аголот меѓу a и t; тогаш велиме дека *a ја сече кружницата k под агол α* (црт. II.62).

Според тоа, ако $\alpha = 0°$, тогаш правата p е тангента на кружницата k повлечена од точката A, а ако $\alpha = 90°$, тогаш $p = AO$.



Црт. II. 62



Црт. II. 63

Затоа, да претпоставиме дека $0° < \alpha < 90°$ и дека задачата е решена, т.е. p е права низ A, којашто кружницата $k(O, r)$ ја сече под агол α (црт. II.63). Бидејќи $\sphericalangle OMT = 90°$, следува дека $\sphericalangle OMS = 90° - \alpha$, а од тоа, пак, следува дека $\sphericalangle MOS = \alpha$.

Од оваа дискусија следува следнава конструкција. Конструираме централен агол $\sphericalangle MON = 2\alpha$, а потоа кружницата $k_1(O, \overline{OS})$, каде што S е средината на тетивата MN. Бараната права е тангента на кружницата k_1 повлечена од точката A.

Бројот на решенијата зависи од бројот на тангентите на k_1 што минуваат низ A. Според тоа:

— ако $\overline{OA} > r \cos \alpha$, тогаш задачата има две решенија;

— ако $\overline{OA} = r \cos \alpha$, задачата има само едно решение;

— ако $\overline{OA} < r \cos \alpha$, тогаш задачата нема решение.

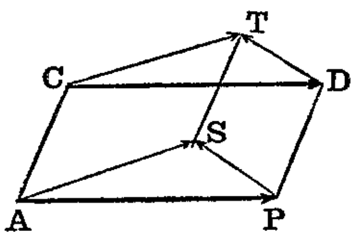
ГЛАВА III

ВЕКТОРИ

5.1. Нека точките A, B и C се колинеарни. Тогаш тие лежат на иста права, па и векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ лежат на таа права, т.е. $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ се колинеарни.

Обратно, ако два вектора се колинеарни, тогаш тие лежат или на иста права или на две различни паралелни прави. Бидејќи A е заедничка почетна точка за двата колинеарни вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, следува дека тие лежат на иста права, т.е. точките A, B и C се колинеарни.

9.1. Можеме да сметаме дека $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не лежат на иста права (зашто, во спротивно, можеме да земеме права, паралелна со $\overrightarrow{AB}$ и на неа вектор $\overrightarrow{C'D'}$, којшто е еднаков со $\overrightarrow{CD}$). Ќе ја користиме теоремата: „Ако два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не лежат на иста права, тогаш тие се еднакви ако и само ако четириаголникот $ABCD$ е паралелограм".



Црт. III. 4

Од $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{CT}$ следува дека $ABDC$ и $ASTC$ се паралелограми (црт. III. 4), па $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{ST}$. Од $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{ST}$ следува дека $BDTS$ е паралелограм, па $\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{DT}$.

10.1. Да земеме, прво, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ да не лежат на иста права. Нека $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Тогаш, според признакот ACA, $\triangle ABS \cong \triangle DCS$, па $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{SC}$.

Обратно, нека $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{SC}$. Тогаш, според признакот CAC, $\triangle ASB \cong \triangle DSC$, па: $\overline{AB}=\overline{CD}$, $AB \parallel CD$ и $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ се исто насочени, т.е. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

19.2. а) Да претпоставиме дека векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ формираат триаголник, т.е. постои триаголник ABC, така што $\mathbf{a}=\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{CA}$ и $\mathbf{c}=\overrightarrow{AB}$. Тогаш имаме:

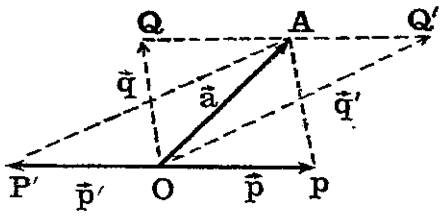
$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\mathbf{o}.$$

Обратно, да претпоставиме дека важи $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{o}$. Нека A е произволна точка и нека B е точка, таква што $\overrightarrow{AB}=\mathbf{c}$, а C е точка, таква што $\overrightarrow{BC}=\mathbf{a}$. Тогаш за векторот $\overrightarrow{CA}$ имаме:

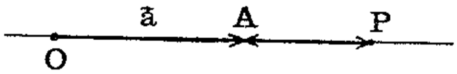
$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=-(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB})=-(\mathbf{a}+\mathbf{c}).$$

Од $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{o}$ следува дека $\mathbf{a}+\mathbf{c}=-\mathbf{b}$, па $\overrightarrow{CA}=-(\mathbf{a}+\mathbf{c})=-(-\mathbf{b})=\mathbf{b}$, т.е. векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ формираат триаголник.

21.2. а) Нека $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ е дадениот вектор, нека $\mathbf{p}$ лежи на правата OP и нека $|\mathbf{p}|=\overline{OP}$ (црт. III. 5). Повлекувајќи права низ O, паралелна со AP, а потоа права низ A, паралелна со OP, ја добиваме точката Q како пресек на тие две прави. Од правилото на паралелограм односно од правилото на триаголник за собирање вектори добиваме дека вториот собирок во разложувањето на $\mathbf{a}$ е векторот $\mathbf{q}=\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{PA}$. Ако, пак, $\mathbf{p}'=\overrightarrow{OP'}$, тогаш со горната постапка ја добиваме точката Q', па вториот собирок ќе биде $\mathbf{q}'=\overrightarrow{OQ'}$. (Значи, задачата има две решенија.) И во случајот кога $\mathbf{a}$ и $\mathbf{p}$ се колинеарни се добива дека $\mathbf{q}=\overrightarrow{PA}$ (на пример, како на црт. III. 6).

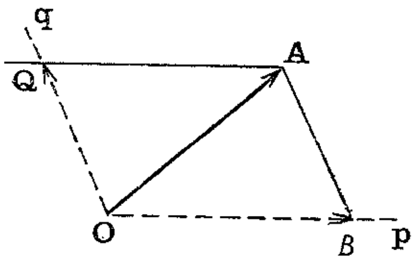


Црт. III. 5

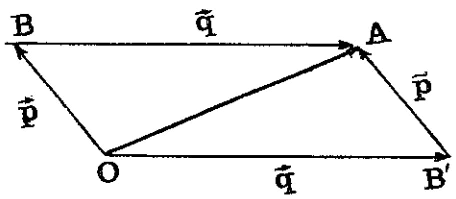


Црт. III. 6

б) Нека $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ е дадениот вектор, а p и q се правите со кои се определени правците на $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ (црт. III. 7). Повлекукувајќи прави низ A, паралелни со p и q, ги добиваме пресечните точки P и Q на овие прави со правите p и q соодветно, па $\mathbf{p}=\overrightarrow{OP}$ и $\mathbf{q}=\overrightarrow{OQ}$ се бараните собирци.



Црт. III. 7



Црт. III. 8

Ако едниот собирок е колинеарен со $\mathbf{a}$, тогаш мора и другиот собирок да биде колинеарен со $\mathbf{a}$, па земајќи произволна точка P од правата OA (црт. III. 6) добиваме: $\mathbf{p}=\overrightarrow{OP}$, $\mathbf{q}=\overrightarrow{PA}$ и $\mathbf{a}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}=\mathbf{p}+\mathbf{q}$, т.е. задачата има безброј многу решенија.

в) Нека $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ е дадениот вектор, а p и q — должините на неговите собирци. Го конструираме триаголникот OAB (односно OAB') со $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=p$, $\overline{BA}=q$ (односно $\overline{OB'}=q$, $\overline{B'A}=p$), црт IV. 8. Бараните собирци во разложувањето на $\mathbf{a}$ се векторите $\mathbf{p}=\overrightarrow{OB}$ $(=\overrightarrow{B'A})$ и $\mathbf{q}=\overrightarrow{BA}$ $(=\overrightarrow{OB'})$.

25.2. Нека $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\leqslant|\mathbf{a}|$. Можни се два случаја:

1°. $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни — во тој случај аголот меѓу $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ е рамен, па важи заклучокот од задачата;

2°. $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не се колинеарни. Во тој случај векторот $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ е положен на дијагоналата OC од паралелограмот $OACB$ што е конструиран над векторите $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$, па бидејќи $\overline{OC}\leqslant\overline{OA}$, следува дека аголот OAC (во триаголникот OAC) е остар, па аголот AOB (во паралелограмот $OACB$) е поголем од правиот агол.

26.2. $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Да претпоставиме, прво, дека $\overline{OC}\leqslant\overline{OA}$. Бидејќи $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$, паралелограмот $OACB$ е ромб, во кој дијагоналата OC е помала од страната OA, па аголот $\sphericalangle A$ лежи спроти помалата страна рамнокракиот триаголник OAC. Аголот $\sphericalangle A$ не може да е поголем од 60° (зашто, во спротивно, и другите два агла во $\triangle OAC$ би биле поголеми од 60°, па збирот на аглите во него би бил поголем од 180°). Следствено, аголот AOB (меѓу $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$), како суплементен на $\sphericalangle A$, не е помал од 120°.

Обратно, нека аголот меѓу $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ не е помал од 120° и нека $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Тогаш аголот $\sphericalangle A$, како суплементен на $\sphericalangle AOB$, не е поголем од 60°, па основата OC во рамнокракиот триаголник OCA не е поголема од кракот, т.е. $|\overrightarrow{OC}|\leqslant|\overrightarrow{OA}|$.

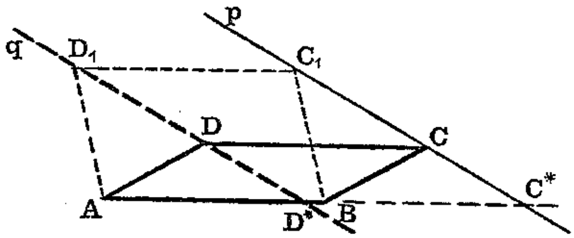
31.2. Ако $ABCD$ е паралелограм, тогаш

$$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC})+(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD})=\mathbf{o},$$

од каде што следува дека постои четириаголник чии страни се еднакви и паралелни со отсечките SA, SB, SC, SD. Обратно, нека постои таков четириаголник. Тогаш $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=\mathbf{o}$, т.е.

$$(\overrightarrow{SA+SC})+(\overrightarrow{SB+SD})=\mathbf{o}. \qquad (1)$$

Векторот $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ е колинеарен со $\overrightarrow{AC}$, а $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$ е колинеарен со $\overrightarrow{BD}$, па ако векторите $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ и $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$ не би биле нулти, тие не би билени колинеарни, а од тоа би следувало дека не важи равенството (1). Според тоа, од (1) следува дека $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\mathbf{o}$ и $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\mathbf{o}$, т.е. четириаголникот $ABCD$ е паралелограм.



Црт. III. 9

34.2. Нека $ABCD$ и p се како на црт. III. 9. Да конструираме паралелограм ABC_1D_1. Бидејќи $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{C_1D_1}$, следува дека четириаголникот CDD_1C_1 е паралелограм (зошто?), па $DD_1 \parallel CC_1$. Следствено, точката D_1 лежи на права q којашто минува низ D и е паралелна со p, па геометриското место (на четвртото теме D) е права q, паралелна со p. (Можеме да сметаме дека и точката $D^*=AB\cap q$ припаѓа на бараното геометриско место, ако во разгледувањата го вклучиме и „дегенерираниот паралелограм" ABC^*D^* на црт. III. 9.)

43.3. Да се реши една векторска равенка со една непозната $\mathbf{x}$ значи да се најде таков вектор, којшто, ставен на местото од $\mathbf{x}$, би ја задоволувал идентички дадената равенка.

При решавањето на векторски равенки, како и системи од векторски равенки, важат сите формални правила што важат за решавање обични линеарни и системи линеарни равенки.

а) Додавајќи го векторот $-\mathbf{x}+\mathbf{a}-\mathbf{b}$ од двете страни на дадената равенка, добиваме

$$2\mathbf{x}-\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{x}+\mathbf{a}-\mathbf{b}=2(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{x}-\mathbf{x}+\mathbf{a}-\mathbf{b},$$

од каде што, користејќи го комутативниот закон за собирањето на вектори, добиваме

$$\mathbf{x}=2(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{a}-\mathbf{b}, \text{ т.е. } \mathbf{x}=3\mathbf{a}+\mathbf{b}.$$

45.3. в) Постапувајќи аналогно како во задачата 43.3.III, ќе го добиеме решението на дадениот систем векторски равенки по $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{x}=2(1-\sqrt{2})(\mathbf{a}+\mathbf{b}), \ \mathbf{y}=(1-\sqrt{2})(\mathbf{a}+\mathbf{b}).$$

За да го конструираме векторот **x**, ќе ја земеме должината на векторот $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ за единица и ќе конструираме отсечка со должина $\sqrt{2}$, а потоа отсечка со должина $2(\sqrt{2}-1)$. Бараниот вектор **x** ќе биде колинеарен со $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ и со спротивна насока од него, а со должина $2(\sqrt{2}-1)\,|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$.

Аналогно се постапува за да се конструира **y**.

47.3. Три вектори формираат триаголник ако и само ако нивниот збир е **o** (види ја задачата 19.2.III).

а) Бидејќи $(\mathbf{a}-\mathbf{b})+(\mathbf{b}-\mathbf{c})+(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{b}-\mathbf{c}+\mathbf{c}-\mathbf{a}=\mathbf{o}$, следува дека векторите $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ формираат триаголник, какви и да се дадените вектори **a**, **b**, **c**.

б) Бидејќи $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+(\mathbf{b}+\mathbf{c})+(\mathbf{c}+\mathbf{a})=2(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$, следува дека $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+(\mathbf{b}+\mathbf{c})+(\mathbf{c}+\mathbf{a})=\mathbf{0}$ ако и само ако $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{o}$. Според тоа, векторите $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{c}+\mathbf{a}$ формираат триаголник ако и само ако формираат триаголник дадените вектори **a**, **b**, **c**.

58.3. Бидејќи M е средината на отсечката AB, а N — на отсечката CD, имаме $2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$ и $2\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CD}$, па користејќи го правилото на три точки (в. IV. 2. 1 во Учебникот, стр. 90), добиваме:

$$2\overrightarrow{MN}=2(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN})=2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CN}=$$
$$=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD},$$
$$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}.$$

60.3. Нека A и B се средини на тетивите A_1A_2 и B_1B_2 соодветно. Тогаш: $\overrightarrow{SA_1}+\overrightarrow{SA_2}+\overrightarrow{SB_1}+\overrightarrow{SB_2}=(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AA_1})+(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AA_2})+(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BB_1})+(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BB_2})=2\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SB}+(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AA_2})+(\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BB_2})=2(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB})=2\cdot\overrightarrow{SO}$.

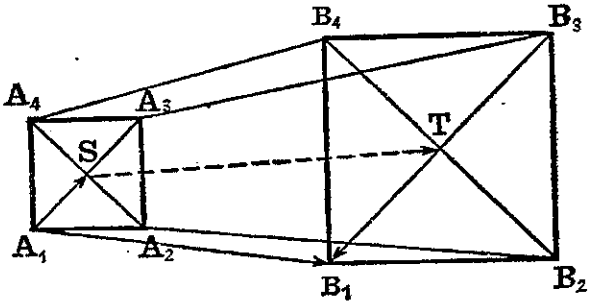
62.3. Нека дадените квадрати се како на црт. III. 10. Секој од собирците A_kB_k во равенството

$$\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\overrightarrow{A_3B_3}+\overrightarrow{A_4B_4}=4\overrightarrow{ST} \tag{1}$$

може да се претстави на следниов начин:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1B_1}&=\overrightarrow{A_1S}+\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{TB_1}, & \overrightarrow{A_2B_2}&=\overrightarrow{A_2S}+\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{TB_2},\\ \overrightarrow{A_3B_3}&=\overrightarrow{A_3S}+\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{TB_3}, & \overrightarrow{A_4B_4}&=\overrightarrow{A_4S}+\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{TB_4}.\end{aligned} \tag{2}$$

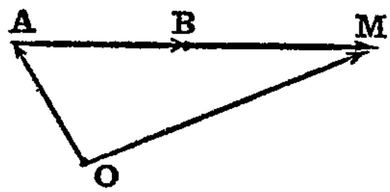
Уочувајќи, прво, дека $\overrightarrow{A_kS}+\overrightarrow{A_{k+2}S}=\mathbf{o}$ и $\overrightarrow{B_kT}+\overrightarrow{B_{k+2}T}=\mathbf{o}$ $(k=1,2)$, а потоа собирајќи ги равенствата (2), го добиваме равенството (1).



Црт. III. 10

63.3. Нека точката M е колинеарна со A, B. Тогаш векторот $\overrightarrow{AM}$ е колинеарен со $\overrightarrow{AB}$, па постои реален број t, таков што $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$. Следствено, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$ (црт. III.11).

Обратно, нека $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$, за некој реален број t Бидејќи $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AM}$, следува дека $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$, т.е. векторите $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AB}$ се колинеарни, што значи дека A, B, M се колинеарни.



Црт. III. 11

64.3. Нека точката P лежи на правата AB (црт. III.12). Имаме:

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+y(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=$$
$$=(1-y)\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB},$$

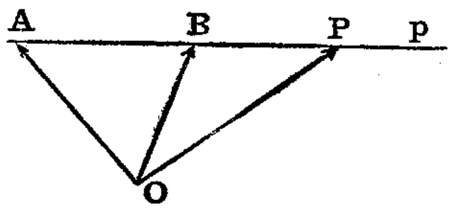
па ставајќи $x=1-y$, добиваме дека

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB},\qquad x+y=1. \tag{1}$$

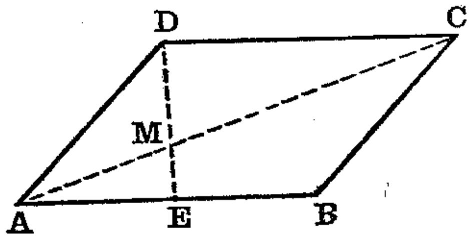
Обратно, нека важи (1). Треба да докажеме дека A, B, P се колинеарни, за што е доволно да покажеме дека $\overrightarrow{AB}$ е колинеарен со $\overrightarrow{AP}$. Бидејќи $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$, користејќи ги и (1), добиваме:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AP}-x\overrightarrow{OA}-(1-x)\overrightarrow{OB}=$$
$$=\overrightarrow{AP}+x(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{AP}+x\overrightarrow{AB},$$

од каде што следува $\overrightarrow{AP}=(1-x)\overrightarrow{AB}$, т.е. A, B, P се колинеарни.



Црт. III. 12



Црт. III. 13

65.3. Решение I. Нека $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$ (црт. III.13). Имаме: $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC}=\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $\overrightarrow{DM}=\mu\overrightarrow{DE}=\mu\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}-\mathbf{b}\right)$ за некои броеви λ, μ. Бидејќи $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AM}$, добиваме $\mathbf{b}+\mu\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}-\mathbf{b}\right)=\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, а по средувањето:

$$\left(\lambda-\frac{1}{2}\mu\right)\mathbf{a}+(\lambda+\mu-1)\mathbf{b}=\mathbf{o}. \tag{1}$$

Векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не се колинеарни, па од (1) следува $\lambda-\frac{1}{2}\mu=0$ и $\lambda+\mu-1=0$, од каде што добиваме $\lambda=\frac{1}{3}$, $\mu=\frac{2}{3}$. Според тоа, $\overline{AM}:\overline{MC}=1:2$ и $\overline{DM}:\overline{ME}=2:1$.

Решение II. Отсечките AS и DE се тежишни линии за $\triangle ABD$, па M е неговото тежиште. Ако се знае дека тежиштето на еден триаголник ги дели тежишните линии во однос $2:1$ (IV, § 4.2 во учебникот), добиваме дека $\overline{DM}:\overline{ME}=2:1$ и $\overline{AM}:\overline{MS}=2:1$. Според последното равенство добиваме $\overline{AM}:\overline{MC}=2:4=1:2$.

66.3. Да ставиме $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BE}$. Бидејќи (црт. III.14) од една страна имаме

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}=\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}),$$

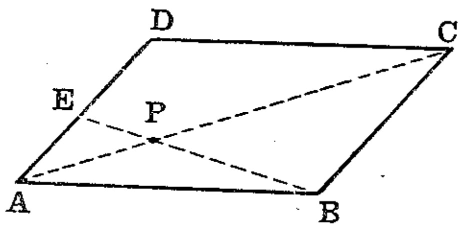
а од друга страна:

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\mathbf{a}+\mu\overrightarrow{BE}=\mathbf{a}+\mu(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE})=\mathbf{a}+\mu(-\mathbf{a}+k\mathbf{b}),$$

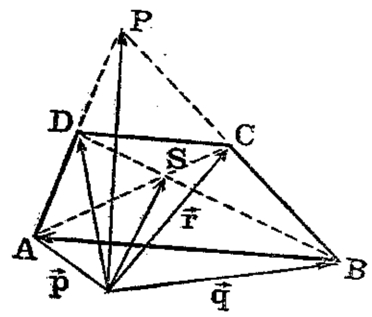
добиваме:

$$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{a}+\mu(-\mathbf{a}+k\mathbf{b}), \text{ т.е.}$$

$$(\lambda+\mu-1)\mathbf{a}+(\lambda-k\mu)\mathbf{b}=\mathbf{o}.$$



Црт. III. 14



Црт. III. 15

Бидејќи **a** и **b** се неколинеарни, следува дека

$$\lambda+\mu-1=0, \quad \lambda-k\mu=0.$$

Решение на овој систем равенки (по λ и μ) е: $\lambda=\dfrac{k}{k+1}$, $\mu=\dfrac{1}{k+1}$. Следствено:

$$\overline{AP}:\overline{AC}=\frac{k}{k+1}, \quad \overline{BP}:\overline{BE}=\frac{1}{k+1}.$$

68.3. Бидејќи $\overline{AB}=k\overline{CD}$ и $AB\parallel CD$ (црт. III.15) ќе имаме $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{DC}$. Точката O е произволна, па ќе имаме $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\mathbf{q}-\mathbf{p}$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\mathbf{r}-\overrightarrow{OD}$. Заменувајќи во $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{DC}$, добиваме

$$\overrightarrow{OD}=\mathbf{r}+\frac{1}{k}(\mathbf{p}-\mathbf{q}).$$

За векторот $\overrightarrow{OP}$ имаме $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\mathbf{p}+\overrightarrow{AP}$. Бидејќи $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{DP}=k(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD})$, за векторот $\overrightarrow{AP}$ ќе имаме:

$$\overrightarrow{AP}=\frac{k}{k-1}\overrightarrow{AD}=\frac{k}{k-1}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})=\frac{k}{k-1}\left[\mathbf{r}+\frac{1}{k}\left(\mathbf{p}-\mathbf{q}\right)-\mathbf{p}\right]=$$

$$=\frac{1}{k-1}(k\mathbf{r}+\mathbf{p}-\mathbf{q}-k\mathbf{p})=\frac{1}{k-1}(k\mathbf{r}-\mathbf{q})-\mathbf{p},$$

па, значи, $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{k-1}(k\mathbf{r}-\mathbf{q})$.

Слично, добиваме дека $\overrightarrow{OS}=\frac{1}{1+k}(\mathbf{p}+k\mathbf{r})$.

69.3. Нека векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ формираат триаголник. Тогаш имаме: $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{o}$, т.е. $1\cdot\mathbf{a}+1\cdot\mathbf{b}+1\cdot\mathbf{c}=\mathbf{o}$, па бидејќи скаларот $1\neq 0$, според дефиницијата за линеарно зависен систем, следува дека $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ се линеарно зависни.

70.3. Поради комутативноста на собирањето на вектори, можеме да претпоставиме дека $\mathbf{a}_1=\mathbf{o}$. Бидејќи $x\cdot\mathbf{o}=\mathbf{o}$ за кој било реален број x и $0\cdot\mathbf{a}=\mathbf{o}$ за кој било вектор $\mathbf{a}$, следува дека

$$1\cdot\mathbf{o}+0\cdot\mathbf{a}_2+\ldots+0\cdot\mathbf{a}_k=\mathbf{o}.$$

Бидејќи барем еден од скаларите не е нула $(1\neq 0)$, следува дека системот $\mathbf{a}_1=\mathbf{o}$, $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ е линеарно зависен.

71.3. Можеме да претпоставиме дека $\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_2=\mathbf{a}$. Имаме:

$$-1\cdot\mathbf{a}+1\cdot\mathbf{a}+0\cdot\mathbf{a}_3+\ldots+0\cdot\mathbf{a}_k=\mathbf{o},$$

па бидејќи барем еден од скаларите е различен од нула $(-1\neq 0,\ 1\neq 0)$, следува дека дадениот систем вектори е линеарно зависен.

73.3. Ако барем едниот од векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ е нула, тогаш тие се колинеарни (по дефиниција) и се линеарно зависни (според задачата 70.3.III), т.е. важи тврдењето во задачата. Затоа ќе претпоставиме дека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се ненулти вектори.

Нека $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ е линеарно зависен систем. Тоа значи дека постојат реални броеви x, y, од кои барем еден не е нула, така што $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}=\mathbf{o}$. Ако $y\neq 0$, тогаш $\mathbf{b}=-\frac{x}{y}\mathbf{a}$, а тоа значи дека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни.

Обратно, ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни, тогаш $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$ за некој реален број λ, т.е. $-\lambda\mathbf{a}+1\cdot\mathbf{b}=\mathbf{o}$, а тоа значи дека системот $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ е линеарно зависен.

75.3. а) Нека $x\mathbf{p}+y\mathbf{q}=\mathbf{o}$ т.е. $x(2\mathbf{a}-\mathbf{b})+y(3\mathbf{a}-\frac{3}{2}\mathbf{b})=\mathbf{o}$. Тогаш

$$(2x+3y)\mathbf{a}+\left(-x-\frac{3}{2}y\right)\mathbf{b}=\mathbf{o},$$

па бидејќи $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се линеарно независни (види ја задачата 39.3.III) следува дека

$$2x+3y=0,\quad -x-\frac{3}{2}y=0. \tag{1}$$

Од втората равенка имаме $x=-\frac{3}{2}y$, па заменувајќи во првата, ја добиваме равенката $-3y+3y=0$, т.е. $0\cdot y=0$, чие решение е секој реален број $y=t$. Според тоа, $x=-\frac{3}{2}t$, $y=t$, (каде што t е произволен реален број) е решение на системот (1).

Ставајќи, на пример, $t=-2$, добиваме $x=3$, $y=-2$, па

$$3\mathbf{p}-2\mathbf{q}=3\,(2\mathbf{a}-\mathbf{b})-2\left(3\mathbf{a}-\frac{3}{2}\mathbf{b}\right)=\mathbf{o},$$

што значи дека системот вектори $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ е линеарно зависен.

б) Имаме:

$$x\mathbf{p}+y\mathbf{q}=\mathbf{o}\Rightarrow x(\mathbf{a}+\mathbf{b})+y(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{o}\Rightarrow(x+y)\,\mathbf{a}+(x-y)\,\mathbf{b}=\mathbf{o}$$
$$\Rightarrow[x+y=0,\ x-y=0]\Rightarrow x=y=0.$$

Следствено, системот вектори $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ е линеарно независен.

в) Имаме:

$$x\mathbf{p}+y\mathbf{q}+z\mathbf{r}=\mathbf{o}\Rightarrow x(\mathbf{a}+\mathbf{b})+y(\mathbf{a}-\mathbf{b})+z(2\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{o}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(x+y+2z)\,\mathbf{a}+(x-y+z)\,\mathbf{b}=\mathbf{o}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+y+2z=0,\quad x-y+z=0$$

Едно ненулто решение на последниов систем равенки е, на пример, $x=3$, $y-1$, $z=-2$. Следствено, системот вектори $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ е линеарно зависен.

76.3. Нека системот вектори $\mathbf{p}=\alpha_1\mathbf{a}+\beta_1\mathbf{b}$, $\mathbf{q}=\alpha_2\mathbf{a}+\beta_2\mathbf{b}$ е линеарно независен и нека $x\mathbf{p}+y\mathbf{q}=\mathbf{o}$. Тогаш $x(\alpha_1\mathbf{a}+\beta_1\mathbf{b})+y(\alpha_2\mathbf{a}+\beta_2\mathbf{b})=\mathbf{o}$, т.е. $(\alpha_1x+\alpha_2y)\,\mathbf{a}+(\beta_1x+\beta_2y)\,\mathbf{b}=\mathbf{o}$, па поради тоа што $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се линеарно независни, следува дека

$$\alpha_1x+\alpha_2y=0,\quad \beta_1x+\beta_2y=0. \tag{1}$$

Бидејќи $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ е линеарно независен систем, следува дека

$$x\mathbf{p}+x\mathbf{q}=\mathbf{o}\ \Rightarrow\ x=y=0, \tag{2}$$

што значи дека единственото решение на системот линеарни равенки (1) е тривијалното решение $x=y=0$.

Познато ни е дека: еден систем линеарни равенки (1) има единствено решение ако и само ако детерминантата на системот е различна од нула. Следствено,

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\neq 0. \tag{3}$$

Обратно, нека $\mathbf{p}=\alpha_1\mathbf{a}+\beta_1\mathbf{b}$, $\mathbf{q}=\alpha_2\mathbf{a}+\beta_2\mathbf{b}$ и нека важи (3). Тогаш системот линеарни равенки (1) има единствено решение $x=y=0$. Од тоа следува дека важи (2), т.е. системот вектори $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ е линеарно независен.

Применувајќи го овој резултат на задачата 75.3.III а), б), имаме:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = -3+3=0$, па системот вектори е линеарно зависен;

б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1=-2\neq 0$, па системот вектори е линеарно независен.

77.3. Нека системот $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ е линеарно зависен, т.е. $x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\ldots x_k\mathbf{a}_k=\mathbf{o}$, при што барем еден од скаларите $x_1, \ldots, x_k$ не е нула. Можеме да претпоставиме дека $x_1\neq 0$. Тогаш од $x_1\mathbf{a}_1=-x_2\mathbf{a}_2-\ldots-x_k\mathbf{a}_k$, ставајќи $y_2=-x_2/x_1, \ldots, y_k=-x_k/x_1$, добиваме

$$\mathbf{a}_1=y_2\mathbf{a}_2+\ldots+y_k\mathbf{a}_k,$$

што значи дека $\mathbf{a}_1$ е линеарна комбинација од преостанатите вектори на системот.

Обратно, нека некој од векторите на системот е линеарна комбинација на преостанатите. Можеме да земеме дека $\mathbf{a}_1=y_2\mathbf{a}_2+\ldots+y_k\mathbf{a}_k$ за некои скалари $y_2, \ldots, y_k$. Тогаш

$$-1\cdot\mathbf{a}_1+y_2\mathbf{a}_2+\ldots+y_k\mathbf{a}_k=\mathbf{o},$$

при што барем еден од скаларите не е нула $(-1\neq 0)$, што значи дека системот $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ е линеарно зависен.

78.3. Нека системот вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ е линеарно зависен. Тогаш постојат скалари x, y, z, од кои барем еден не е нула, така што

$$x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}=\mathbf{o}.$$

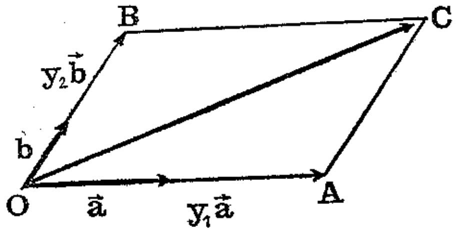
Според тадачата 69.3.III, векторите $x\mathbf{a}$, $y\mathbf{b}$, $z\mathbf{c}$ формираат триаголник што значи дека векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ може да се постават на страните од тој триаголник, т.е. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ се компланарни.

Обратно, нека $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ се компланарни. Во рамнината во која лежат, да го нацртаме векторот $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ и векторите $\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}$. Ако правите AB и OC се паралелни, тогаш $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ се колинеарни, па според задачата 74.3.III, системот $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ е линеарно зависен. Затоа нека правите $OC \nparallel AB$ и нека се сечат во точката P. Тогаш, $\overrightarrow{BP} = x\mathbf{b}$ и $\overrightarrow{OP} = y\mathbf{c}$, па од $\triangle OAP$ добиваме $\mathbf{a} + x\mathbf{b} = y\mathbf{c}$, т.е.

$$1 \cdot \mathbf{a} + x\mathbf{b} - y\mathbf{c} = \mathbf{o},$$

што значи дека системот $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ е линеарно зависен (зошто?).

Нека системот вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ е е линеарно зависен. Тогаш, според задачата 77.3.III, некој од тие вектори е линеарна комбинација од преостанатите, на пример, $\mathbf{c} = y_1\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}$. Ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни, тогаш е јасно дека $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ се компланарни. Ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не се колинеарни, тогаш векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се положени на страните, а $\mathbf{c}$ — на дијагоналата од еден паралелограм (црт. III.16), т.е. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, и $\mathbf{c}$ се компланарни.



Црт. III. 16

Обратно, нека $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ се компланарни. Ако некои два од нив се колинеарни, тогаш според задачата 74.3.III, системот е линеарно зависен. Затоа нека $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ пар по пар не се колинеарни. Да ги нанесеме $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, и $\mathbf{c}$ на ист почеток 0 (црт. III.16). Од крајната точка на $\mathbf{c}$ повлекуваме паралелни прави со $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и ги добиваме точките A, B соодветно на правите OA и OB. Тогаш, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = y_1\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}$, па според задачата 42.3.III, системот $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ е линеарно зависен.

81.3. Нека $x(\alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}) + y(\gamma\mathbf{b} - \alpha\mathbf{c}) + z(\beta\mathbf{c} - \gamma\mathbf{a}) = \mathbf{o}$, т.е. $(\alpha x - \gamma z)\mathbf{a} + (-\beta x + \gamma y)\mathbf{b} + (-\alpha x + \beta z)\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Можни се два случаја: 1° $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ се линеарно зависни и 2° $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ се линеарно независни.

1°. Ако $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ се линеарно зависни, тогаш барем еден од коефициентите пред $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ во последната сума, на пример, $-\alpha y + \beta z \neq 0$, т.е.

$$\beta z \neq \alpha y. \tag{1}$$

Од тоа следува дека барем еден од броевите y, z не е нула. (Слично ако $\alpha x \neq \gamma z$ или $\gamma y \neq \beta x$.) Тоа значи, дека системот вектори $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ е линеарно зависен.

2°. Ако $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ се линеарно независни, тогаш

$$\alpha x - \gamma z = 0, \quad -\beta x + \gamma y = 0, \quad -\alpha y + \beta z = 0, \tag{2}$$

т.е. $\alpha x = \gamma z$, $\gamma y = \beta x$, $\beta z = \alpha y$. Можеме да претпоставиме дека барем еден од броевите α, β, γ не е нула (во спротивно би имале $\mathbf{p} = \mathbf{q} = \mathbf{r} = \mathbf{o}$). Ставајќи $x = \gamma$, $y = \beta$, $z = \alpha$ добиваме едно решение на системот (2), при што барем еден од броевите x, y, z не е нула. Следствено, системот $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ е линеарно зависен.

82.3. Нека $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ се линеарно зависни и нека $x(\mathbf{a}+\mathbf{b})+y(\mathbf{b}+\mathbf{c})+z(\mathbf{c}+\mathbf{a})=\mathbf{o}$. Тогаш $(x+z)\mathbf{a}+(x+y)\mathbf{b}+(y+z)\mathbf{c}=\mathbf{o}$, па барем еден од броевите пред $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ не е нула, на пример $x+z \neq 0$, т.е. $z \neq -x$ (а слично ако $x+y \neq 0$ или $y+z \neq 0$). Тогаш барем едниот од броевите z, x не е нула, што значи дека системот $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{c}+\mathbf{a}$ е линеарно зависен.

Обратно, нека $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{c}+\mathbf{a}$ е линеарно зависен и нека

$$x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}=0. \tag{1}$$

Да ги избереме броевите α, β, γ така што

$$x=\alpha+\gamma, \quad y=\beta+\alpha, \quad z=\gamma+\beta, \tag{2}$$

т.е. $\alpha=\dfrac{1}{2}(x+y-z)$, $\quad \beta=\dfrac{1}{2}(-x+y+z)$, $\quad \gamma=\dfrac{1}{2}(x+y-z)$.

Заменувајќи ги (2) во (1), добиваме

$$\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\beta(\mathbf{b}+\mathbf{c})+\gamma(\mathbf{c}+\mathbf{a})=\mathbf{o},$$

од каде што следува дека барем еден од броевите α, β, γ не е нула; нека, на пример, $\alpha \neq 0$. Тогаш $x+y-z \neq 0$, т.е. $z \neq x+y$, од што следува дека барем еден од броевите x, y, z не е нула. Следствено, системот $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ е линеарно зависен.

83.3. Можеме да сметаме дека $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ се компланарни. Според задачата 78.3.III, постојат скалари x_1, x_2, x_3 од кои барем еден не е нула, такви што $x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+x_3\mathbf{a}_3=\mathbf{o}$. Тогаш и

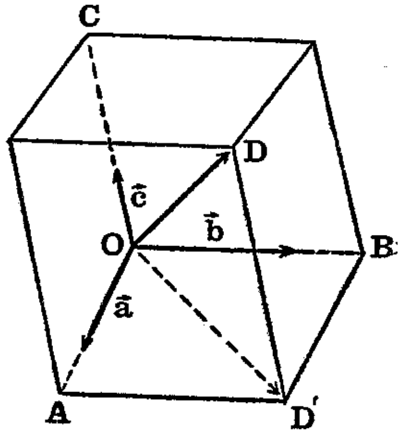
$$x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+x_3\mathbf{a}_3+0\cdot\mathbf{a}_4+\ldots+0\cdot\mathbf{a}_k=\mathbf{o},$$

при што барем еден од скаларите не е нула. Следствено, системот $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ е линеарно зависен.

84.3. Нека $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ се четири произволно зададени вектори. Ако некои три од нив се компланарни, тогаш дадениот систем, според задачата 83.3.III, е линеарно зависен. Да претпоставиме дека никои три од тие вектори не се компланарни. За да докажеме дека дадениот систем вектори е линеарно зависен, доволно е (според задачата 77.3.III) да докажеме дека некој од дадените вектори, на пример $\mathbf{d}$, може да се претстави како линеарна комбинација на преостанатите три: $\mathbf{d}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}$.

За таа цел, векторите **a**, **b**, **c**, **d** да ги надоврземе на иста точка O и да ја означиме со D крајната точка на **d** (црт. III.17). Ако поставиме рамнина низ D што е паралелна со рамнината во која лежат векторите **b** и **c**, тогаш таа ќе ја сече правата на која лежи векторот **a** во точката A. Слично ќе ги добиеме точките B и C. Бидејќи $\overrightarrow{OA}=x\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=y\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC}=z\mathbf{c}$, добиваме

$$\mathbf{d}=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OD'}+\overrightarrow{D'D}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+$$
$$+\overrightarrow{OC}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}.$$



Црт. III. 17

Забелешка. Од овој резултат следува дека, ако **a**, **b**, **c** се три некомпланарни вектори, тогаш секој вектор **d** може да се претстави како нивна линеарна комбинација.

88.4. Да го најдеме односот $\overline{AC}:\overline{AB}$. Бидејќи точката C ја дели отсечката AB во однос $m:n$, ќе имаме

$$\overrightarrow{AC}=\frac{m}{n}\overrightarrow{CB}=\frac{m}{n}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}),$$

од каде што добиваме

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)\overrightarrow{AC}=\frac{m}{n}\overrightarrow{AB},$$

т.е.

$$\overrightarrow{AC}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}. \tag{1}$$

Значи, $\overline{AC}:\overline{AB}=m:(m+n)$.

Равенството (1) може да се напише во облик

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB},$$

од каде што добиваме

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB},$$

па $\overline{CB}:\overline{AB}=n:(m+n)$.

89.4. Нека λ е односот во кој точката M ги дели отсечките P_1P_2 и P_3P_4 и нека O е произволна точка. Тогаш имаме

$$\vec{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\vec{OP_1}+\lambda\vec{OP_2}) \text{ и } \vec{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\vec{OP_3}+\lambda\vec{OP_4}),$$

од каде што добиваме

$$\vec{OP_1}+\lambda\vec{OP_2}=\vec{OP_3}+\lambda\vec{OP_4}.$$

$$\lambda(\vec{OP_2}-\vec{OP_4})=\vec{OP_3}-\vec{OP_1},$$

$$\lambda\vec{P_4P_2}=\vec{P_1P_3},$$

т.е. $\lambda=\overline{P_1P_3}:\overline{P_4P_2}$. Значи, точката M е определена со:

$$\vec{OM}=\frac{1}{a+b}(b\vec{OP_1}+a\vec{OP_2})$$

при што $a=\overline{P_1P_3}$, $b=\overline{P_2P_4}$.

90.4. Според 88.4.III, имаме:

$$\vec{MC}=\frac{n}{m+n}\vec{AC} \text{ и } \vec{NC}=\frac{n}{m+n}\vec{BC}.$$

Користејќи го ова, за векторот $\vec{MN}$ имаме:

$$\vec{MN}=\vec{MC}+\vec{CN}=\frac{n}{m+n}\vec{AC}-\frac{n}{m+n}\vec{BC}=$$

$$=\frac{n}{m+n}(\vec{AC}-\vec{BC})=\frac{n}{m+n}(\vec{AC}+\vec{CB})=\frac{n}{m+n}\vec{AB},$$

од каде што следува дека $MN\parallel AB$ и дека $\overline{MN}=\frac{n}{m+n}\overline{AB}$.

91.4. Од $MN\parallel AB$ следува дека векторите $\vec{MN}$ и $\vec{AB}$ се колинеарни, па постои реален број λ така што $\vec{MN}=\lambda\vec{AB}$. Нека точката M ја дели отсечката AB во однос μ, а точката N ја дели отсечката BC во однос ν; треба да докажеме дека $\mu=\nu$. Од ова, според 88.4.III следува дека

$$\vec{MC}=(1-\mu)\vec{AC} \text{ и } \vec{NC}=(1-\nu)\vec{BC}.$$

Сега имаме:

$$\vec{MN}=\vec{MC}+\vec{CN},$$

$$\lambda\overrightarrow{AB}=(1-\mu)\overrightarrow{AC}+(\nu-1)\overrightarrow{BC},$$

$$\lambda\overrightarrow{AB}=(1-\mu)\overrightarrow{AC}+(\nu-1)(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}),$$

$$(\lambda+\nu-1)\overrightarrow{AB}+(\mu-\nu)\overrightarrow{AC}=\mathbf{o}.$$

Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ не се колинеарни, па следува дека

$$\lambda+\nu-1=0 \text{ и } \mu-\nu=0,$$

од каде што добиваме $\mu=\nu$.

93.4. Според 18.3.III, векторот $\frac{1}{c}\mathbf{c}+\frac{1}{b}\mathbf{b}$ е колинеарен со векторот $\mathbf{s}_a$, па постои реален број λ, така што

$$\mathbf{s}_a=\lambda\left(\frac{1}{c}\mathbf{c}+\frac{1}{b}\mathbf{b}\right). \tag{1}$$

Од друга страна имаме:

$$\mathbf{s}_a=\mathbf{b}+\mu\overrightarrow{CB}=\mathbf{b}+\mu(\mathbf{c}-\mathbf{b})=(1-\mu)\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}. \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме:

$$\frac{\lambda}{c}\mathbf{c}+\frac{\lambda}{b}\mathbf{b}=(1-\mu)\mathbf{b}+\mu\mathbf{c},$$

$$\left(\frac{\lambda}{b}+\mu-1\right)\mathbf{b}+\left(\frac{\lambda}{c}-\mu\right)\mathbf{c}=\mathbf{o}.$$

Векторите $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не се колинеарни, па следува дека

$$\frac{\lambda}{b}+\mu-1=0 \quad \text{и} \quad \frac{\lambda}{c}-\mu=0,$$

од каде што добиваме $\lambda=\frac{bc}{b+c}$. Заменувајќи во (1) добиваме

$$\mathbf{s}_a=\frac{c}{b+c}\mathbf{b}+\frac{b}{b+c}\mathbf{c}.$$

94.4. Според 93.4.III, за векторот $\overrightarrow{AA_2}$ имаме:

$$\overrightarrow{AA_2}=\frac{1}{\overline{AB}+\overline{AC}}(\overline{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overline{AC}\cdot\overrightarrow{AB}),$$

од каде што следува дека

$$\overline{BA_2}:\overline{A_2C}=\overline{AB}:\overline{AC}.$$

95.4. Нека ABC е произволен триаголник и нека AA_1, BB_1 и CC_1 се неговите тежишни линии. За да докажеме дека постои триаголник чии страни се паралелни и еднакви со тежишните линии AA_1, BB_1 и CC_1 доволно е да докажеме дека $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\mathbf{o}$.

За векторите $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ имаме:

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA},\quad \overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Користејќи го тоа, добиваме:

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=$$

$$=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\mathbf{o}.$$

96.4. За векторите $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OC_1}$ имаме:

$$\overrightarrow{OA_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}),\quad \overrightarrow{OB_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}),\quad \overrightarrow{OC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

Користејќи го тоа добиваме:

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=$$

$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

97.4. Тежиштето T ги дели тежишните линии $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ во однос $2:1$, па имаме:

$$\overrightarrow{TA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1},\quad \overrightarrow{TB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1},\quad \overrightarrow{TC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}.$$

Користејќи го ова и 95.4.III, добиваме дека $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\mathbf{o}$.

98.4. Нека T е тежиштето на триаголникот ABC и O произволна точка; тогаш имаме

$$\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AT},\quad \overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BT},\quad \overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CT}.$$

Собирајќи ги овие три равенства добиваме

$$3\overrightarrow{OT}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{CT}).$$

Бидејќи $\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{CT}=\mathbf{o}$ (види 97.4.III), добиваме

$$\overrightarrow{OT}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

99.4. Нека O е произволна точка. Тогаш $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}$, па ако замениме во даденото равенство $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{o}$, добиваме

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}),$$

од каде што, според 98.4.III, добиваме $M=T$.

100.4. Нека T и T' се тежиштата на триаголниците ABC и $A'B'C'$ соодветно; тогаш имаме:

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{TT'}+\overrightarrow{T'A'},\quad \overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{TT'}+\overrightarrow{T'B},\quad \overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CT}+\overrightarrow{TT'}+\overrightarrow{T'C'},$$

од каде што добиваме:

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=(\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{CT})+(\overrightarrow{T'A'}+\overrightarrow{T'B'}+\overrightarrow{T'C'})+3\overrightarrow{TT'}.$$

Бидејќи $\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{CT}=\mathbf{o}$ и $\overrightarrow{T'A'}+\overrightarrow{T'B'}+\overrightarrow{T'C'}=\mathbf{o}$ (види 97.4.III), добиваме:

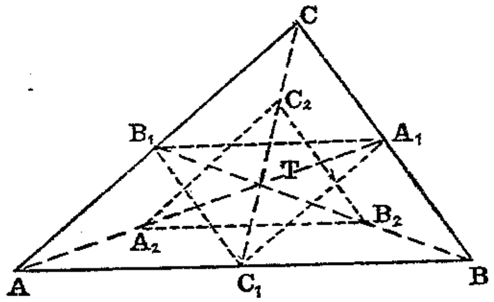
$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{TT'}.$$

101.4. Нека T е тежиштето на $\triangle ABC$, а T_1—на $\triangle MNP$ и нека односот е $m:n$. Тогаш, за произволна точка O, имаме $\overrightarrow{OT_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OM}+$ $+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP})$ (в. 98.4.III), а бидејќи $\overrightarrow{OM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$ (види во учебникот, IV.4.1, стр. 105) и слично за $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OP}$, добиваме:

$$\overrightarrow{OT_1}=\frac{1}{3}\left(\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OB}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OC}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OC}+\right.$$
$$\left.+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OA}\right)=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OT}.$$

(Притоа, пак е искористена задачата 98.4.III). Значи, $T_1=T$.

102.4. Од триаголникот ABC, според 90.4.III, добиваме дека $\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, а од триаголникот ABT добиваме дека $\overrightarrow{A_2B_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, од каде што $\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{B_1A_1}$ (црт. III.18). Слично: $\overrightarrow{B_2C_2} = \overrightarrow{C_1B_1}$, $\overrightarrow{C_2A_2} = \overrightarrow{A_1C_1}$. Значи, $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$, $\overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2}$, $\overline{C_1A_1} = \overline{C_2A_2}$, па според признакот CCC, следува дека триаголниците $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ се складни.



Црт. III. 18

Нека T_1 и T_2 се тежиштата на триаголниците $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ соодветно и нека O е произволна точка. Тогаш, според 98. 4. III, имаме:

$$\overrightarrow{OT_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OT}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT_2} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2}) = \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OT}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OT}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OT})\right] = \\ &= \frac{1}{6}\left[(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + 3\overrightarrow{OT}\right] = \frac{1}{6}(3\overrightarrow{OT} + 3\overrightarrow{OT}) = \overrightarrow{OT},\end{aligned}$$

од каде што следува дека $T_1 = T_2 = T$.

103.4. Како и во задачата 99.4.III, имаме:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + 2\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\right).$$

Означувајќи ја средината на отсечката BC со A_1, добиваме $\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, па,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA_1}).$$

Значи, постои точка M со својството $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{o}$ и таа точка ја дели отсечката AA_1 во однос $2:1$.

Ако M' е точка со својството $\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{M'B}+\overrightarrow{M'C}=\mathbf{o}$, тогаш пак како во задачата 99.4.III, имаме

$$\overrightarrow{OM'}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}),$$

од каде што следува дека $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM}$, па значи, $M'=M$, т.е. M е единствена точка со наведеното својство.

104.4. Да претпоставиме дека точка M со својството

$$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\mathbf{o} \tag{1}$$

постои. Тогаш за произволна точка O од рамнината на триаголникот ABC имаме

$$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC},$$

па заменувајќи во равенството (1) добиваме

$$6\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\mathbf{o}.$$

Ставајќи $O=T$ каде што T е тежиштето на $\triangle ABC$, добиваме

$$6\overrightarrow{MT}+(\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC})+(\overrightarrow{TB}+2\overrightarrow{TC})=\mathbf{o}.$$

Бидејќи $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\mathbf{o}$, $\overrightarrow{TB}+2\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}+\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$, добиваме

$$6\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{AC}=\mathbf{o},\ \text{т.е.}\ \overrightarrow{MT}=\frac{1}{6}\overrightarrow{CA} \tag{2}$$

Значи, ако M го има својството (1), тогаш таа го задоволува равенството (2). Обратно, ако една точка M го има својството (2), тогаш заменувајќи во (1) ќе заклучиме дека тоа е исполнето. Според тоа, постои точка M со наведеното својство и таа е определена со равенството (2).

Забелешка. Користејќи го (2), можеме да добиеме друго определувачко равенство за точката M. Имено, од $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AT}$ и (2) добиваме

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AT}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}=$$

$$=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\right]+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC},$$

т.е.

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}. \tag{3}$$

105.4. Нека O е произволна точка и нека T е точката определена со:

$$\overrightarrow{OT}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}). \tag{1}$$

Тогаш имаме: $\overrightarrow{TA_1}+\ldots+\overrightarrow{TA_n}=(\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OA_1})+\ldots+(\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OA_n})=n\overrightarrow{TO}+$ $+(\overrightarrow{OA_1}+\ldots+\overrightarrow{OA_n})=\mathbf{o}$, што значи дека T е една таква точка каква што се бараше.

Нека T' е точка за која важи равенството

$$\overrightarrow{T'A_1}+\overrightarrow{T'A_2}+\ldots+\overrightarrow{T'A_n}=\mathbf{o}. \tag{2}$$

Тогаш, за произволна точка O, имаме

$$\overrightarrow{T'A_k}=\overrightarrow{T'O}+\overrightarrow{OA_k}, \quad k=1,\ 2,\ldots,n,$$

па заменувајќи во (2), добиваме

$$n\overrightarrow{T'O}+\overrightarrow{OA_1}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{o}, \text{ т.е.}$$

$$\overrightarrow{OT'}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}). \tag{3}$$

Од (1) и (3) следува дека $T'=T$, т.е. точката T со својството (2) е единствена.

108.4. Нека O е произволна точка; тогаш имаме:

$$\overrightarrow{A_1B_1}+\ldots+\overrightarrow{A_nB_n}=(\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OA_1})+\ldots+(\overrightarrow{OB_n}-\overrightarrow{OA_n})=$$

$$=(\overrightarrow{OB_1}+\ldots+\overrightarrow{OB_n})-(\overrightarrow{OA_1}+\ldots+\overrightarrow{OA_n})=$$

$$=n\overrightarrow{OT_2}-n\overrightarrow{OT_1}=n(\overrightarrow{OT_2}-\overrightarrow{OT_1})=n\overrightarrow{T_1T_2}.$$

109.4. б) Бидејќи точките B_1, B_2 и B_3 ги делат страните A_2A_3, A_3A_1 и A_1A_2 на триаголникот $A_1A_2A_3$ во ист однос $m:n$, имаме:

$$(m+n)\,\mathbf{p}_1=m\overrightarrow{OA_2}+n\overrightarrow{OA_3},$$

$$(m+n)\,\mathbf{p}_2=m\overrightarrow{OA_3}+n\overrightarrow{OA_1},$$

$$(m+n)\,\mathbf{p}_3=m\overrightarrow{OA_1}+n\overrightarrow{OA_2},$$

од каде што добиваме:

$$\overrightarrow{OA}_1=\frac{1}{m^2+n^2-mn}(m^2\mathbf{p}_2+n^2\mathbf{p}_3-mn\mathbf{p}_1),$$

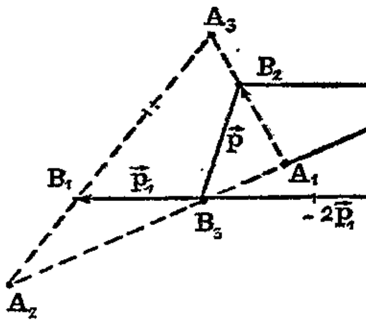
$$\overrightarrow{OA}_2=\frac{1}{m^2+n^2-mn}(m^2\mathbf{p}_3+n^2\mathbf{p}_1-mn\mathbf{p}_2),$$

$$\overrightarrow{OA}_3=\frac{1}{m^2+n^2-mn}(m^2\mathbf{p}_1+n^2\mathbf{p}_2-mn\mathbf{p}_3).$$

в) Избирајќи $O=B_3$ добиваме

$$\overrightarrow{O_3A_1}=\frac{1}{3}(\mathbf{p}_2-2\mathbf{p}_1),$$

па темето A_1 може да се најде, а потоа може да се конструира и триаголникот $A_1A_2A_3$ (црт. III.19).



Црт. III. 19

110.4. Да претпоставиме дека $z\neq 0$; тогаш

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{z}(x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB})=\frac{1}{x+y}(x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}).$$

Бидејќи $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}=\frac{x+y}{x+y}=1$, според 64.3.III следува дека C лежи на правата AB, т.е. точките A,B и C се колинеарни.

111.4. Нека P е средина на AA', Q—на MM', R— на BB'. Тогаш $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{A'M'})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ од каде што следува дека точките P, Q, R се колинеарни.

112.4. Нека средните линии на четириаголникот $ABCD$ се MN и PQ и нека S е средината на MN. Тогаш, за произволна точка O, имаме:

$\overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}))=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+$ $+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}))=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})$, од каде што следува дека S е средината и на отсечката PQ.

113.4. Во четириаголникот $ABCD$ нека O е пресекот на дијагоналите AC и BD, а M, N, P и Q средините на страните AB, BC, CD и DA соодветно.

Да претпоставиме дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм; тогаш $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD}$, па ќе имаме:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=-\overrightarrow{OP},$$

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA})=-\overrightarrow{OQ},$$

од каде што следува дека M, O и P одн. N, O и Q се колинеарни, т.е. средните линии MP и NQ минуваат низ пресекот O на дијагоналите.

Обратно, да претпоставиме дека средните линии MP и NQ минуваат низ пресекот O на дијагоналите; тогаш четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм, па O е средина на неговите дијагонали MP и NQ, т.е. $\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{ON}=-\overrightarrow{OQ}$. Бидејќи O е пресекот на дијагоналите AC и BD, векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$, односно $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OD}$ се колинеарни, па, значи, $\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}=\mu\overrightarrow{OD}$. Од триаголникот AOB, одн. DOC, добиваме:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),\quad \overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}).$$

Заменувајќи во $\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{OP}$, добиваме:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD},$$

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\mathbf{o},$$

$$\lambda\overrightarrow{OC}+\mu\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\mathbf{o},$$

$$(\lambda+1)\overrightarrow{OC}+(\mu+1)\overrightarrow{OD}-\mathbf{o}.$$

Векторите $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ не се колинеарни, па следува дека $\lambda+1=0$ и $\mu+1=0$, т.е. $\lambda=-1$ и $\mu=-1$. Според тоа, $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD}$, што значи дека O е средина на дијагоналите AC и BD, т.е. четириаголникот $ABCD$ е паралелограм.

114.4. Нека S_1 е средината на AC, S_2 — на BD и $M = AC \cap BD$. Тогаш имаме: $\overrightarrow{S_1S_2} = \overrightarrow{S_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS_2} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CS_1} + \overrightarrow{S_2D} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MS_1} + \overrightarrow{S_2M} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD}) + (\overrightarrow{S_2M} + \overrightarrow{MS_1}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{S_2S_1}$, па $2\overrightarrow{S_1S_2} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$. Бидејќи $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се спротивно насочени, следува дека $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}|$, па, значи, $\overline{S_1S_2} = \frac{1}{2} |\overline{AB} - \overline{CD}|$.

115.4. Да ја означиме со S средината на S_1S_2. Ако O е произволна точка, тогаш имаме:

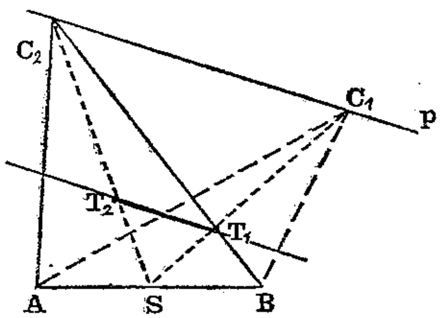
$$\begin{aligned}2\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OS_1} + \overrightarrow{OS_2} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \\ &= \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH}.\end{aligned}$$

Значи, S е средина на средната линија GH. Според 28.4.III, средните линии во произволен четириаголник се преполовуваат, па S е средина и на другата средна линија EF.

Следствено, отсечките S_1S_2, GH и EF минуваат низ една иста точка, којашто ги располовува.

116.4. Нека A, B и p се како на црт. III.20. Над отсечката AB да конструираме два триаголника ABC_1 и ABC_2 со темиња C_1 и C_2, на правата p. Нека T_1 и T_2 се нивните тежишта, а S средината на отсечката AB. Бидејќи

$$\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{C_1T_1} + \overrightarrow{T_1T_2} + \overrightarrow{T_2C_2} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{C_1S} + \overrightarrow{SC_2}) + \overrightarrow{T_1T_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{T_1T_2},$$



Црт. III. 20

следува дека $\overrightarrow{C_1C_2} = 3\overrightarrow{T_1T_2}$, што значи дека геометриското место на тежиштата T е права q, паралелна со дадена права. (Истата забелешка од решението на задачата 21.2.III, важи и тука.)

Г Л А В А IV

Д В И Ж Е Њ А

15.1. а) Ако $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ е пресликување, тогаш на секој елемент x од $\mathbf{A}$ му е придружен некој елемент $y = \varphi(x) \in \mathbf{B}$, па можеме да го формираме множеството Φ од подредени парови (x, y), такви што првата компонента, x, е елемент од $\mathbf{A}$, а втората компонента е елемент од $\mathbf{B}$ којашто е слика на x, т.е.

$$\Phi = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{A}, \quad y = \varphi(x) \in \mathbf{B}\}.$$

Значи, $\Phi \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, па Φ е релација од $\mathbf{A}$ во $\mathbf{B}$, определена со пресликувањето $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

б) Нека релацијата $\Phi \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ определува пресликување $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Во тој случај, ако $a \in \mathbf{A}$ и $\varphi(a) = b \in \mathbf{B}$, тогаш $(a, b) \in \Phi$. Бидејќи с е к о ј елемент $x \in \mathbf{A}$ ќе има слика со φ (во $\mathbf{B}$), следува дека елементите на Φ ги содржат како први компоненти сите елементи од $\mathbf{A}$. Но бидејќи на секој $x \in \mathbf{A}$ му е придружен со φ точно по еден елемент $y \in \mathbf{B}$, следува дека нема два различни елемента (x, y_1), $(x, y_2) \in \Phi$ чии први компоненти би биле еднакви, т.е. ако (x, y_1), $(x, y_2) \in \Phi$, тогаш мора $y_1 = y_2$.

Според тоа, една релација $\Phi \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ определува пресликување $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ако таа ги задоволува следните услови:

i) множеството од првите компоненти на елементите од Φ е еднакво со множеството $\mathbf{A}$, т.е. $(\forall x \in \mathbf{A})(\exists y \in \mathbf{B})\,(x, y) \in \Phi$.

ii) ако првите компоненти на два елемента од Φ се совпаѓаат, тогаш се совпаѓаат и вторите компоненти, т.е. ако (x, y_1), $(x, y_2) \in \Phi$, тогаш $y_1 = y_2$.

29.1. а) Бидејќи целта $\mathbf{B}$ е конечно множество со мал број елементи, за секој елемент од $\mathbf{B}$ можеме да извршиме проверка дали е слика (со φ) на некој елемент од $\mathbf{A}$. Во овој случај треба да провериме дали равенката

$$x^2 - 1 = \varphi(x),$$

кога $\varphi(x)$ е -1, односно 0, односно 3 има решение во $\mathbf{A}$. Без тешкотии увидуваме дека секоја од равенките

$$x^2 - 1 = -1, \quad x^2 - 1 = 0, \quad x^2 - 1 = 3$$

има решение што е елемент од $\mathbf{A}$.

б) Бидејќи целта $\mathbf{N}$ на даденото пресликување е бесконечно множество, не можеме да вршиме проверки за с е к о ј елемент посебно. Поради тоа, ќе земеме п р о и з в о л е н елемент $k \in \mathbf{N}$ и ќе покажеме дека тој е слика барем на еден елемент од $\mathbf{Z}$.

Нека k е произволно избран елемент од $\mathbf{N}$. За да биде слика на некој елемент x од $\mathbf{Z}$, треба

$$|x|+1=k, \text{ т.е. } |x|=k-1. \qquad (*)$$

Бидејќи $k \in \mathbf{N}$, следува дека $k-1 \geqslant 1$, па $|k-1|=k-1$, што значи дека едно решение на равенката ($*$) е $x=k-1$. Следствено, избраниот $k \in \mathbf{N}$ е слика (при φ) барем на елементот $k-1 \in \mathbf{Z}$.

34.1. а) Нека $x \in \mathbf{N}^0$ е произволен број. Ако x е парен број, тогаш $\frac{x}{2}$ е (еднозначно определен) цел број, а ако x е непарен, тогаш $x+1$ е парен број, па $-\frac{x+1}{2}$ е (еднозначно определен) цел број. Следствено, на секој број од $\mathbf{N}^0$ му одговара со φ точно по еден елемент од $\mathbf{Z}$, т.е. φ е пресликување.

Нека k е произволно избран елемент од $\mathbf{Z}$. Ако $k \geqslant 0$, тогаш $2k$ е парен број, за кој $\varphi(2k)=k$, а ако $k<0$, тогаш $-2k-1$ е непарен природен број, за кој $\varphi(-2k-1)=-\frac{-2k-1+1}{2}=k$. Следствено, φ е сурјекција.

б) Ако $\mathbf{B}$ е конечно множество и $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, тогаш и $\mathbf{A}$ е конечно множество. Затоа, доволно е да го разгледаме случајот кога $\mathbf{A}$ е конечно множество.

Нека $\mathbf{A}$ има k елементи, $\mathbf{B}$ има повеќе од k елементи и $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ е кое било пресликување од $\mathbf{A}$ во $\mathbf{B}$. Бидејќи од секој елемент на $\mathbf{A}$ тргнува една и само една стрелка и стигнува до некој елемент од $\mathbf{B}$, следува дека досегот $\mathbf{V}$ на φ има најмногу k елементи. Бидејќи $\mathbf{B}$ има повеќе од k елементи, следува дека ќе има барем еден елемент од $\mathbf{B}$ што не е слика на ниеден елемент од $\mathbf{A}$. Следствено, φ не е сурјекција.

36.1. Дека $\varphi(x)=2x-1$ е пресликување од $\mathbf{N}$ во $\mathbf{N}$ е проверено во задачата 26.1. За да покажеме дека φ е инјекција, треба да покажеме дека секој пар различни елементи од $\mathbf{N}$ се пресликува во некој различен пар елементи од $\mathbf{N}$, т.е.

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2).$$

Ако $x_1, x_2 \in \mathbf{N}$ и $x_1 \neq x_2$, тогаш и природните броеви $2x_1-1$, $2x_2-1$ се различни, т.е. $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. Следствено, φ е инјекција.

(Да забележиме дека φ не е сурјекција, зашто, на пример, 2 не е слика со φ на ниеден природен број.)

39.1. а) Ова својство кажува дека кој било елемент $x \in \mathbf{A}$ има само една слика $\varphi(x) \in \mathbf{B}$. Тоа својство го има секое пресликување, па според тоа, само ова својство не е доволно за карактеризација на инјекција.

б) Ова својство кажува дека кои било два различни елементи од $\mathbf{A}$ имаат различни слики, а тоа и е дефиниција на инјективно пресликување.

в) Ова својство го има секое пресликување, а не само инјекција. Имено, ако два елемента $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ од $\mathbf{B}$, коишто се слики на некои елементи x, y од $\mathbf{A}$, се различни, тогаш мора и елементите x, y да се различни (зашто, ако би било $x=y$, тогаш еден елемент x би имал различни слики со φ, па φ не би било пресликување). Значи, ова својство не повлекува „инјективност" на φ.

г) Нека $\varphi(x)=\varphi(y)$ повлекува $x=y$ за кои било $x, y \in \mathbf{A}$. Ако $a, b \in \mathbf{A}$ и $a \neq b$, тогаш мора $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ (зашто, ако би било $\varphi(a)=\varphi(b)$, тогаш, според горниот услов, би имале $a=b$). Значи, кои било два различни елементи од $\mathbf{A}$ имаат различни слики со φ, а тоа значи дека φ е инјекција.

40.1. Бидејќи, за секој $x \in \mathbf{R}$, бројот $2x+1$ е еднозначно определен реален број, следува дека φ е пресликување. Останува да покажеме дека е инјекција и сурјекција.

Ако x_1, x_2 се кои било различни реални броеви, тогаш и броевите $2x_1+1$, $2x_2+1$ се меѓусебно различни, т.е.

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2).$$

Следствено, $\varphi(x)=2x+1$ е инјекција.

Нека r е произволно избран реален број. За да е слика на некој реален број x при φ, т.е $\varphi(x)=r$, треба $2x+1=r$, т.е. $2x=r-1$, па $x=\dfrac{r-1}{2}$. Значи, $x=\dfrac{r-1}{2}$ е реален број којшто со φ се пресликува во r. Следствено, φ е сурјекција.

52.1. Нека хипотенузата на дадениот триаголник е означена со AB. Ако M е произволно избрана точка од $\mathbf{F}$, тогаш правата што минува низ M и е нормална на AB, ја сече страната AB, во една (и само во една) точка M'. Значи, на секоја точка M од $\mathbf{F}$ ѝ се придружува со φ една единствена точка од $\mathbf{G}$, т.е. $\varphi: \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ е пресликување. Пресликувањето φ не е инјекција, зашто,ако M е внатрешна точка на $\triangle ABC$, тогаш сите (бесконечно многу) точки од правата MM' имаат иста слика M'. φ не е ни сурјекција, зашто, на пример, точката C (темето на правиот агол) не е слика на ниеден елемент од $\mathbf{F}$.

(Ако $\mathbf{F}$ и прописот φ се како во задачата, а $\mathbf{G}$ е множеството точки од хипотенузата AB, тогаш пресликувањето $\varphi: \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ е сурјекција.)

57.1. Пресликувањата φ_1 и φ_2 не се сурјекции, зашто втората редица од таблицата не содржи некои елементи од целта $\mathbf{A}$ (види ја зад. 35. 1). Значи, φ_1 и φ_2 не се биекции.

Бидејќи во вторите редици од таблиците на φ_3 и φ_4 се јавуваат сите елементи од целта $\mathbf{A}$, φ_3 и φ_4 се сурјекции, а бидејќи секој елемент од $\mathbf{A}$ се јавува таму само еднаш, φ_3 и φ_4 се и инјекции од $\mathbf{A}$ во $\mathbf{A}$. Значи, φ_3 и φ_4 се биекции.

Според дефиницијата на инверзна биекција имаме: $\varphi_3^{-1}: \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, $\varphi_3^{-1}: 2 \to 1,\ 3 \to 2,\ 4 \to 3,\ 1 \to 4$ и $\varphi_4^{-1}: \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, $\varphi_4^{-1}: 4 \to 1,\ 1 \to 2,\ 2 \to 3,\ 3 \to 4$, т.е. $\varphi_3^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $\varphi_4^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$. Да уочиме дека $\varphi_3^{-1}=$ $=\varphi_4$ и $\varphi_4^{-1}=\varphi_3$.

58.1. За да ја најдеме инверзната биекција φ^{-1} на биекцијата φ, треба за секој елемент y од целта на φ да го најдеме неговиот оригинал x (при φ) и него да му го придружиме на y.

За таа цел, нека r е произволно избран елемент од целта **R**. Бидејќи φ е биекција, следува дека постои единствен реален број x (т.е. елемент од доменот **R** на φ) којшто е оригинал за r, т.е. $2x+1=r$. Решавајќи ја оваа равенка по x, добиваме $x=\frac{r-1}{2}$. Бидејќи $\varphi\left(\frac{r-1}{2}\right)=2\cdot\frac{r-1}{2}+$ $+1=r$, имаме $\varphi^{-1}(r)=\frac{r-1}{2}$. Бидејќи r е произволен елемент, вообичаено е да се означи со x, па инверзната биекција на φ ќе биде определена со формулата $\varphi^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$.

74.1. При секоја биекција од $\mathbf{F}=\{A, B, C\}$ во $\mathbf{F}$, напишана во таблична форма, секој елемент од $\mathbf{F}$ се јавува еднаш (и само еднаш). Една биекција од $\mathbf{F}$ во $\mathbf{F}$ може да има еден, два, три или ниеден неподвижен елемент.

Ќе ги најдеме, прво, биекциите при кои само еден елемент е неподвижен. Такви ќе има три: првата со $A\to A$, втората со $B\to B$ и третата со $C\to C$, т.е.

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}A & B & C\\ A & C & B\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}A & B & C\\ C & B & A\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}A & B & C\\ B & A & C\end{pmatrix}.$$

Ако при некоја биекција од $\mathbf{F}$ во $\mathbf{F}$ два елемента остануваат неподвижни, тогаш мора и третиот елемент да се преслика во себе, т.е. таа мора да е идентична трансформација $\varepsilon=\begin{pmatrix}A & B & C\\ A & B & C\end{pmatrix}$.

На крајот, да ги најдеме биекциите коишто немаат неподвижни елементи. Една таква е $\rho_1: A\to B$, $B\to C$, $C\to A$, друга е $\rho_2: A\to C$, $B\to A$, $C\to B$ и други такви нема.

Следствено, сите биекции од $\mathbf{F}=\{A, B, C\}$ во $\mathbf{F}$ се следниве шест трансформации на $\mathbf{F}$: ε, σ_1, σ_2, σ_3, ρ_1, ρ_2.

77. 1. Нека x е произволен елемент од **A**. Бидејќи $\varphi: \mathbf{A}\to\mathbf{B}$ е пресликување, следува дека $\varphi(x)$ е еднозначно определен елемент y од **B**, т.е. $\varphi(x)=y$, а бидејќи $\psi: \mathbf{B}\to\mathbf{C}$ е пресликување, следува дека $\psi(y)$, т.е. $\psi(\varphi(x))$ е еднозначо определен елемент z од **C**. Според тоа, за секој елемент x од **A** постои еднозначно определен елемент $z=\psi(\varphi(x))$ од **C**, што значи дека со ($*$) е определено пресликување $\tau: \mathbf{A}\to\mathbf{C}$.

88.1. а) Според задачата 77.1.IV, $\varphi\circ\psi$ е пресликување од **F** во **F**. Останува да покажеме дека $\varphi\circ\psi: \mathbf{F}\to\mathbf{F}$ е сурјекција и инјекција.

Нека z е произволен елемент од **F**. Бидејќи ψ е биекција (значи, и сурјекција), постои елемент $y\in\mathbf{F}$, таков што $z=\psi(y)$. Бидејќи и φ е биекција, постои $x\in\mathbf{F}$, таков што $y=\varphi(x)$. Значи, $z=\psi(y)=\psi(\varphi(x))=$ $=(\varphi\circ\psi)(x)$, т.е. $\varphi\circ\psi$ е сурјекција.

Потоа, нека $x_1, x_2 \in \mathbf{F}$ и $x_1 \neq x_2$. Бидејќи φ е инјекција, следува дека $y_1 = \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2) = y_2$, а бидејќи ψ е инјекција, добиваме $\psi(y_1) \neq \neq \psi(y_2)$, т.е. $\psi(\varphi(x_1)) \neq \psi(\varphi(x_2))$. Значи,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow (\varphi o \psi)(x_1) \neq (\varphi o \psi)(x_2),$$

т.е. $\varphi o \psi$ е инјекција.

Аналогно се покажува дека $\psi o \varphi$ е биекција.

б) Бидејќи $\varphi o \psi$, според *а*), е биекција, а и φ, ψ се биекции, следува дека постојат инверзните биекции $(\varphi o \psi)^{-1}$, φ^{-1} и ψ^{-1}. Останува да покажеме дека

$$(\forall z \in \mathbf{F}) \ (\varphi o \psi)^{-1}(z) = (\psi^{-1} o \varphi^{-1})(z). \tag{1}$$

За таа цел, нека z е произволен елемент од $\mathbf{F}$ и нека $(\varphi o \psi)^{-1}(z) = x$. Според дефиницијата за инверзна биекција (в. зад. 56.1), тоа значи, дека $z = (\varphi o \psi)(x)$, т.е. $z = \psi(\varphi(x))$. Да ставиме $\varphi(x) = y$. Тогаш $x = \varphi^{-1}(y)$, а бидејќи $z = \psi(y)$, ќе имаме $y = \psi^{-1}(z)$ Според тоа:

$$(\psi^{-1} o \varphi^{-1})(z) = \varphi^{-1}(\psi^{-1}(z)) = \varphi^{-1}(y) = x = (\varphi o \psi)^{-1}(z),$$

што значи дека е исполнето равенството (1).

в) Равенството следува од дефиницијата на инверзната биекција. Имено

$$(\varphi^{-1})^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}(y) \Leftrightarrow \varphi(x) = y.$$

Следствено, $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$.

91.2. Според дефиницијата за состав на трансформации имаме $A_1 = \tau_{\mathbf{a}} o \tau_{\mathbf{b}}(A) = \tau_{\mathbf{b}}(\tau_{\mathbf{a}}(A))$. Нека $\tau_{\mathbf{a}}(A) = A'$; тогаш $\tau_{\mathbf{b}}(A') = A_1$. Од $\tau_{\mathbf{a}}(A) = = A'$, следува дека $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{a}$, а од $\tau_{\mathbf{b}}(A') = A_1$ следува дека $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{b}$. Векторот $\overrightarrow{AA_1}$ можеме да го претставиме на следниов начин:

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A_1} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

На сосема ист начин, за векторот $\overrightarrow{AA_2}$ добиваме:

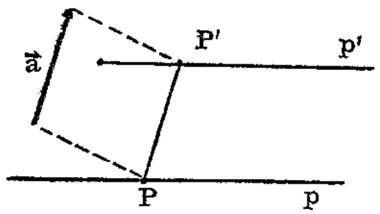
$$\overrightarrow{AA_2} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

Комутативниот закон за собирање на вектори важи, па $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, т.е. $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AA_2}$, од каде што следува дека $A_1 = A_2$.

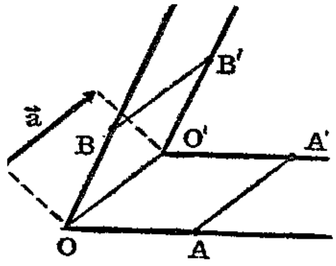
93.2. Да претпоставиме дека постои транслација $\tau_{\mathbf{a}}$, таква што $\tau_{\mathbf{a}}(A) = C$, $\tau_{\mathbf{a}}(B) = D$. Тогаш имаме $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = \mathbf{a}$, т.е. четириаголникот $ABDC$ е паралелограм, а од тоа следува дека $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Обратно, да претпоставиме дека $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Од ова следува дека четириаголникот $ABDC$ е паралелограм, што значи дека $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Ставајќи $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}$, добиваме дека $C = \tau_{\mathbf{a}}(A)$ и $D = \tau_{\mathbf{a}}(B)$, т.е. таква транслација постои.

95.2. Избираме точка P од правата p и ја наоѓаме точката $P'=\tau_{\mathbf{a}}(P)$; потоа, повлекуваме права p' што минува низ P' и е паралелна со p (црт. IV.15).



Црт. IV. 15



Црт. IV. 16

96.2. Нека $\mathbf{a}$ е ненулти вектор и p е права паралелна со $\mathbf{a}$ и нека P е една точка од p. Ако $P'=\tau_{\mathbf{a}}(P)$, тогаш имаме $\overrightarrow{PP'}=\mathbf{a}$, т.е. правата PP' е исто така паралелна со $\mathbf{a}$. Но, низ точката P минува само една права што е паралелна со векторот $\mathbf{a}$, па, значи, PP' е правата p, т.е. $P\in p$. Следствено, $\tau_{\mathbf{a}}(p)=p$.

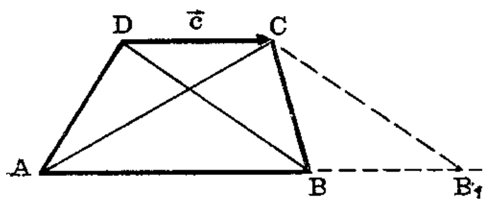
Нека, сега, q е права што не е паралелна со $\mathbf{a}$. Ако $Q\in q$ и $Q'=\tau_{\mathbf{a}}(Q)$, тогаш од $\overrightarrow{QQ'}=\mathbf{a}$ и $q \nparallel \mathbf{a}$ следува дека $Q'\notin q$. Бидејќи правата $q'=\tau_{\mathbf{a}}(q)$ минува низ точката Q', следува дека $q'\neq q$. Следствено, не постои права q што не е паралелна со $\mathbf{a}$, таква што $\tau_{\mathbf{a}}(q)=q$.

98.2. Нека $\sphericalangle A'O'B'$ е сликата на $\sphericalangle AOB$ при транслацијата $\tau_{\mathbf{a}}$ (црт. IV. 16). Од дефиницијата на транслација следува дека $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{OO'}=\mathbf{a}$, од каде што, пак, следува дека $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{O'A'}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{O'B'}$, т.е. аглите $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle A'O'B'$ се со паралелни краци. Од $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{O'A'}$ следува дека краците OA и $O'A'$ се со иста насока, а од $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{O'B'}$ следува дека краците OB и $O'B'$ се со иста насока. Според тоа, $\sphericalangle AOB=\sphericalangle A'O'B'$.

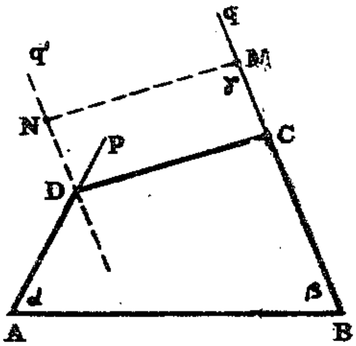
99.2. Според 92.2.IV, следува дека $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{C'A'}=\overrightarrow{CA}$, т.е. $\overline{A'B'}=\overline{AB}$, $\overline{B'C'}=\overline{BC}$, $\overline{C'A'}=\overline{CA}$, од каде што, според признакот CCC, следува дека триаголниците ABC и $A'B'C'$ се складни.

103.2. Да претпоставиме дека задачата е решена и $ABCD$ е бараниот трапез (црт. IV.17). Нека $\mathbf{c}=\overrightarrow{DC}$ и нека $B_1=\tau_{\mathbf{c}}(B)$. Бидејќи $C=\tau_{\mathbf{c}}(D)$, следува дека $\overrightarrow{CB_1}=\overrightarrow{DB}$, Во триаголникот AB_1C познати се сите три страни: $\overline{AB_1}=\overline{AB}+\overline{DC}$, $\overline{AC}$ и $\overline{CB_1}=\overline{DB}$, па тој може да се конструира. Бидејќи е позната и основата $\overline{AB}$ може да се најде и точката B. На крајот, имаме $D=\tau_{-\mathbf{c}}(C)$.

104.2. Да претпоставиме дека задачата е решена и $ABCD$ е бараниот трапез (црт. IV.17), на кој се познати дијагоналите AC и BD, аголот меѓу нив и кракот BC. Триаголникот ACB_1 (црт. IV. 17) може да се конструира, зашто му се познати страните CA и CB_1 како и аголот меѓу нив. За темето B имаме дека $B \in AB_1 \cap (C, \overline{BC})$, а темето D е слика од C при транслацијата за вектор $\overrightarrow{B_1B}$.



Црт. IV. 17

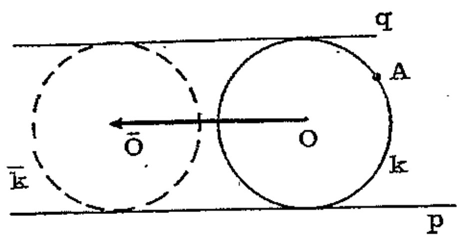


Црт. IV. 18

106.2. Нека $ABCD$ е бараниот четириаголник (црт. IV.18) на кој се познати аглите α, β, γ и двете страни $a = \overline{AB}$, $c = \overline{CD}$. Ако темињата A и B ги избереме така што $\overline{AB} = a$, тогаш можеме да ги конструираме правите $p = AD$ и $q = BC$, нанесувајќи ги аглите α и β кај A и B соодветно. Останува да ги најдеме темињата C и D. На правата BC избираме произволна точка M и го нанесуваме аголот γ кај M. На вториот крак од аголот γ ја наоѓаме точката N, така што $\overline{MN} = c$. Бидејќи $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CD}$, ставајќи $\mathbf{c} = \overrightarrow{MN}$, тогаш $D = \tau_{\mathbf{c}}(C)$. Точката C лежи на правата q, па D ќе лежи на правата $q' = \tau_{\mathbf{c}}(q)$. Значи $D = p \cap q'$.

Задачата може да има најмногу (до складност) едно решение.

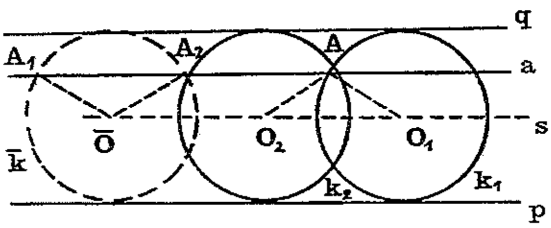
107.2. Да претпоставиме дека задачата е решена (црт. IV.19). Ако $\mathbf{a}$ е вектор паралелен со правата p, тогаш $\tau_{\mathbf{a}}(k) = \bar{k}$ е кружница, којашто



Црт. IV. 19

пак ги допира правите p и q, но не минува низ точката A. Бидејќи една произволна кружница $\bar{k}$ што ги допира правите p и q можеме лесно да конструираме, со помош на една транслација неа можеме да ја пресликаме во бараната кружница.

Конструираме произволна кружница $\bar{k}$ што ги допира правите p и q. Нејзиниот центар O ќе лежи на правата s, што е паралелна со p и q и е еднакво оддалечена од нив. Низ точката A повлекуваме права a паралелна со p и q и ги наоѓаме пресечните точки A_1 и A_2 на a и $\bar{k}$ (ако такви постојат). Ако τ_1 е транслација за вектор $\overrightarrow{A_1A}$, а τ_2 е транслација за вектор $\overrightarrow{A_2A}$, тогаш $k_1=\tau_1(\bar{k})$ и $k_2=\tau_2(\bar{k})$ се кружници што ги задоволуваат условите на задачата (црт. IV.20).



Црт. IV. 20

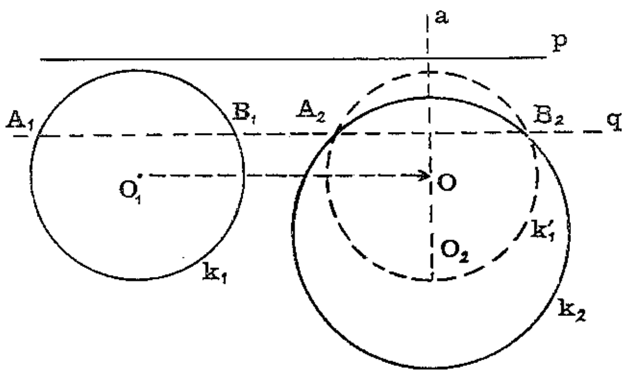
Бројот на решенијата зависи од пресечните точки на правата a и кружницата $\bar{k}$. Според тоа:

— ако точката A е меѓу правите p и q, задачата има две решенија;

— ако точката A лежи на некоја од правите, тогаш задачата има само едно решение;

— во друг случај задачата нема решение.

108.2. Да претпоставиме дека задачата е решена (црт. IV.21). Да повлечеме права a нормална на p и права O_1O нормална на a, т.е. паралелна со p. Тогаш имаме $\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{B_1B_2}=\overrightarrow{O_1O}$. Значи, ако τ е транслација за вектор O_1O, тогаш $A_2=\tau(A_1)$, $B_2=\tau(B_1)$, $O=\tau(O_1)$, а кружницата k_1 со τ се пресликува во кружницата $k_1'(O, \overline{OA_2})$. Според тоа, A_2 и B_2 се пресечните точки на кружниците k_1' и k_2.



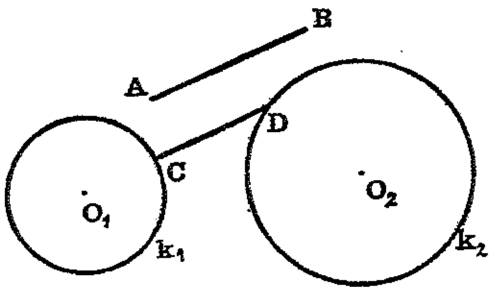
Црт. IV. 21

Дали задачата ќе има решение зависи од тоа дали кружниците k_1' и k_2 имаат заедничка точка или не. Според тоа, задачата има едно или ниедно решение и тоа:

— ако $|r_2-r_1| \leqslant \overline{OO_2} \leqslant r_1+r_2$, тогаш задачата има единствено решение;

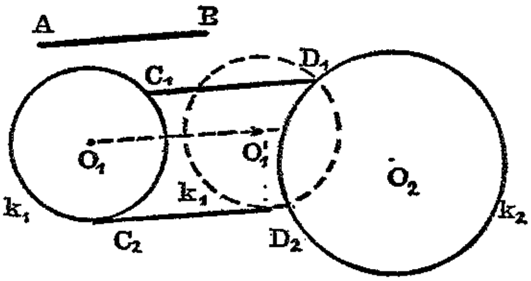
— ако $\overline{OO_2} > r_1+r_2$ или $\overline{OO_2} < |r_2-r_1|$, тогаш задачата нема решение.

109.2. Да претпоставиме дека задачата е решена и CD е бараната отсечка. Бидејќи $\overline{CD} = \overline{AB}$ и $CD \parallel AB$, ќе имаме или $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ или $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$. Нека, на пример, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ (црт IV.22). Ако $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, тогаш $D = \tau_{\mathbf{a}}(C)$. Точката $C \in k_1$, па $D = \tau_{\mathbf{a}}(C) \in \tau_{\mathbf{a}}(k_1) = k_1'$. Значи, $D \in k_1' \cap k_2$. Ако, пак, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$, тогаш $D = \tau_{-\mathbf{a}}(C)$, т.е. $D \in k_1'' \cap k_2$, каде што $k_1'' = \tau_{-\mathbf{a}}(k_1)$.

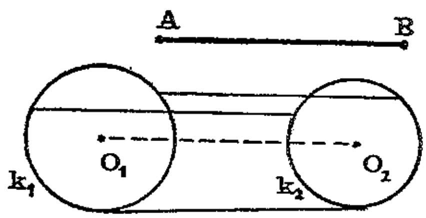


Црт. IV. 22

Конструкцијата е прикажана на црт. IV.23.



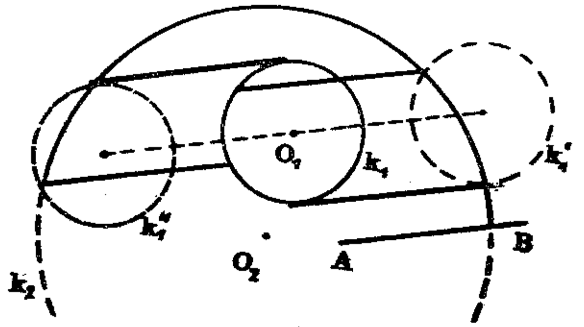
Црт. IV. 23



Црт. IV. 24

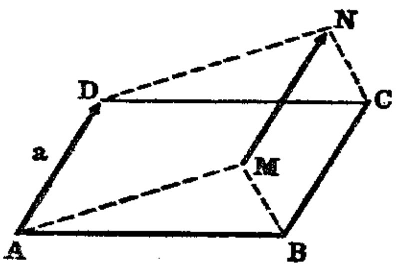
Ако $\tau_{\mathbf{a}}(k_1) = k_2$ или $\tau_{-\mathbf{a}}(k_1) = k_2$, тогаш задачата има бесконечно многу решенија; тоа е случајот кога $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{AB}$ или $\overrightarrow{O_2O_1} = \overrightarrow{AB}$. На црт. IV.24 е прикажан случајот $\overrightarrow{O_2O_1} = \overrightarrow{AB}$.

Во друг случај задачата може да има најмногу четири решенија, што зависи од бројот на заедничките точки на кружниците k_1' и k_2, односно k_1'' и k_2. Случајот, кога задачата има четири решенија е прикажан на црт. IV.25.

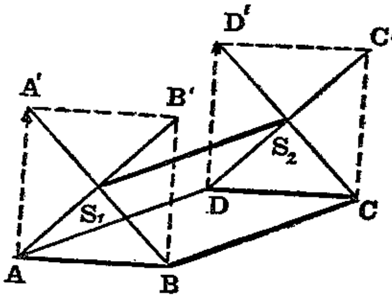


Црт. IV. 25

112.2. Од складноста на триаголниците ABM и DCN и паралелноста на AB и DC следува дека $AM \parallel DN$ и $BM \parallel CN$ (црт. IV.26), а потоа и дека $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DN}$. Според тоа, ставајќи $\overrightarrow{AD} = \mathbf{a}$, имаме $D = \tau_{\mathbf{a}}(A)$, $N = \tau_{\mathbf{a}}(M)$ и $C = \tau_{\mathbf{a}}(B)$, т.е. $\overrightarrow{MN} = \mathbf{a} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, што значи дека $\overline{MN} = \overline{AD} = \overline{BC}$.



Црт. IV. 26



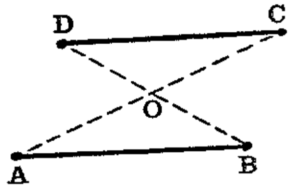
Црт. IV. 27

113.2. Од тоа што векторите $\overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{DD'}$ се исто насочени и фактот дека $\overline{AA'} = \overline{AB} = \overline{DC} = \overline{D'C'}$, следува дека $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DD'}$ а од тоа, пак, следува дека $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$. Ставајќи $\mathbf{a} = \overrightarrow{AD}$, имаме: $\tau_{\mathbf{a}}(A) = D$, $\tau_{\mathbf{a}}(A') = D'$, $\tau_{\mathbf{a}}(B) = C$, $\tau_{\mathbf{a}}(B') = C'$ (црт. IV.27) т.е. квадратот $AA'B'B$ со транслацијата $\tau_{\mathbf{a}}$ се пресликува во квадратот $DD'C'C$, па, значи, $S_2 = \tau_{\mathbf{a}}(S_1)$. Од ова следува дека $\overrightarrow{S_1S_2} = \mathbf{a} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, т.е. $\overline{S_1S_2} = \overline{BC}$.

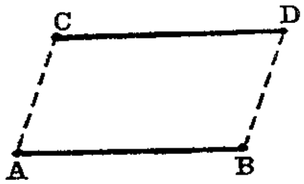
119.3. Нека p е тангента на кружницата $k(S, r)$ и нека $p' = \sigma_O(p)$, $k' = \sigma_O(k)$. Ако T е допирната точка на p и k и ако $\sigma_O(T) = T'$, тогаш $T' \in p'$ и $T' \in k'$, т.е. p' и k' имаат заедничка точка. Ако T_1 е друга заедничка точка на p' и k' и ако $\sigma_O(T_1) = T_1'$, тогаш, $T_1' \in p$ и $T_1' \in k$ зашто $\sigma_O(p') = p$ и $\sigma_O(k') = k$. Но ,p и k имаат само една заедничка точка, па, значи, $T_1' = T$, од каде што следува дека $T_1 = T'$, т.е. p' е тангента на k'.

Да забележиме дека може да биде $p'=p$; тоа е случајот кога $O\in p$. Исто така, може да биде $k'=k$; тоа е случајот кога $O=S$. Но не може истовремено да биде $p'=p$ и $k'=k$, зашто не може истовремено да важи $O\in p$ и $O=S$.

121.3. Ако $\sigma_O(A)=C$ и $\sigma_O(B)=D$, тогаш точката O е средина на отсечката AC и на отсечката BD. Но отсечките AC и BD не мора да се сечат, па, значи, таква централна симетрија не мора да постои. На црт. IV.28 е прикажан случајот кога таква централна симетрија постои, а на црт. IV.29 случајот кога не постои.



Црт. IV. 28



Црт. IV. 29

122.3. Имаме: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{B'A'}$.

127.3. Векторот $\overrightarrow{AA''}$ можеме да го претставиме во обликот:

$$\overrightarrow{AA''}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'A''}=(\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_1A'})+(\overrightarrow{A'O_2}+\overrightarrow{O_2A''}).$$

Од дефиницијата на централна симетрија следува дека $\overrightarrow{AO_1}=\overrightarrow{O_1A'}$ и $\overrightarrow{A'O_2}=\overrightarrow{O_2A''}$, па, значи,

$$\overrightarrow{AA''}=(\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_1A'})+(\overrightarrow{A'O_2}+\overrightarrow{O_2A''})=$$
$$=2\overrightarrow{O_1A}+{}+2\overrightarrow{A'O_2}=2(\overrightarrow{O_1A'}+\overrightarrow{A'O_2})=2\overrightarrow{O_1O_2}.$$

Од равенството $\overrightarrow{AA''}=2\overrightarrow{O_1O_2}$ следува дека точката A'' може да се добие од точката A со транслација τ за векторот $2\overrightarrow{O_1O_2}$. Од $A'=\sigma_1(A)$ и $A''=\sigma_2(A')$ следува дека $A''=\sigma_1\circ\sigma_2(A)$, па, значи, за произволна точка A важи $\sigma_1\circ\sigma_2(A)=\tau(A)$, т.е. составот $\sigma_1\circ\sigma_2$ е транслација за вектор $2\overrightarrow{O_1O_2}$.

128.3. Според 127.3. IV, имаме:

$$\overrightarrow{MM_2}=2\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{M_2M_4}=2\overrightarrow{CA},\quad \overrightarrow{M_4M_6}=2\overrightarrow{BC}.$$

Користејќи го ова добиваме:

$$\overrightarrow{MM_6}=\overrightarrow{MM_2}+\overrightarrow{M_2M_4}+\overrightarrow{M_4M_6}=$$
$$=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{BC}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\mathbf{o},$$

од каде што следува $M_6=M$.

129.3. Според 127.3.IV, имаме:

$$\overrightarrow{A_0A_2}=2\overrightarrow{O_1O_2}=\overrightarrow{B_0B_2},\quad \overrightarrow{A_2A_4}=2\overrightarrow{O_3O_4}=\overrightarrow{B_2B_4}.$$

Користејќи го ова добиваме:

$$\overrightarrow{A_0A_4} = \overrightarrow{A_0A_2} + \overrightarrow{A_2A_4} = 2\overrightarrow{O_1O_2} + 2\overrightarrow{O_2O_4},$$

$$\overrightarrow{B_0B_4} = \overrightarrow{B_0B_2} + \overrightarrow{B_2B_4} = 2\overrightarrow{O_1O_2} + 2\overrightarrow{O_2O_4},$$

т.е. $\overrightarrow{A_0A_4} = \overrightarrow{B_0B_4}$. Според тоа, $\overline{A_0A_4} = \overline{B_0B_4}$.

130.3. За да видиме дали $A_2 = A''$ или $A_2 \neq A''$, ќе провериме дали $\overrightarrow{A_2A''} = \mathbf{o}$ или $\overrightarrow{A_2A''} \neq \mathbf{o}$. Имаме:

$$\overrightarrow{A_2A''} = \overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} = 2\overrightarrow{OA_1} - \mathbf{a} + 2\overrightarrow{AO} + \mathbf{a} =$$

$$= 2(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{AO}) = 2(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA}) = 2\overrightarrow{AA_1} = 2\mathbf{a}.$$

Значи, $\overrightarrow{A_2A''} = 2\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, од каде што следува дека $A_2 \neq A''$.

132.3. Нека O е центар на симетрија на фигурата $\mathbf{F} = \{A, B, C\}$. Бидејќи централната симетрија σ_O е биекција и $\sigma_O(\mathbf{F}) = \mathbf{F}$, следува дека σ_O е една од следниве биекции на $\mathbf{F}$:

$$\varepsilon: A \to A,\ B \to B,\ C \to C;$$
$$\rho_1: A \to B,\ B \to C,\ C \to A;$$
$$\rho_2: A \to C,\ B \to A,\ C \to B;$$
$$\varphi_1: A \to A,\ B \to C,\ C \to B;$$
$$\varphi_2: A \to C,\ B \to B,\ C \to A;$$
$$\varphi_3: A \to B,\ B \to A,\ C \to C.$$

Јасно е дека $\sigma_O \neq \varepsilon$. Ако $\sigma_O = \rho_1$, тогаш O е средина на отсечките AB, BC и CA, што не е можно; значи, $\sigma_O \neq \rho_1$. Слично, $\sigma_O \neq \rho_2$. Ако $\sigma_O = \varphi_1$, тогаш $O = A$ е средина на отсечката BC; ако $\sigma_O = \varphi_2$, тогаш $O = B$ е средина на отсечката AC; ако $\sigma_O = \varphi_3$, тогаш $O = C$ е средина на отсечката AB.

Следствено, фигурата $\mathbf{F}$ е централно симетрична ако и само ако точките A, B и C се колинеарни и едната од нив е средина на отсечката определена со другите две точки.

Да забележиме дека од тоа следува: ниеден триаголник не е централно симетричен.

137.3. Нека h_1 и h_2 се полуправи со почетоци во H_1 и H_2 соодветно и нека фигурата $\mathbf{F}$, составена од полуправите h_1 и h_2 е централно симетрична со центар на симетрија во точката O. Тогаш, $H_2 = \sigma_O(H_1)$, па, значи O е средина на отсечката H_1H_2. Ако A е произволна точка од h_1, тогаш $\sigma_O(A) = B$ е точка од h_2, што значи дека правата a на која лежи h_1 се пресликува во правата b на која лежи h_2 па тие се паралелни. Бидејќи $\overrightarrow{H_1A} = \overrightarrow{H_2B}$ следува дека полуправите h_1 и h_2 се спротивно насочени. Следствено, ако фигурата $\mathbf{F}$ составена од полуправите h_1 и h_2 е централно симетрична, тогаш полуправите лежат на паралелни прави и се спротивно насочени.

Обратно, ако полуправите h_1 и h_2 лежат на паралелни прави и се спротивно насочени, тогаш јасно е дека фигурата **F** составена од h_1 и h_2 е централно симетрична; центарот на симетрија е средината на отсечката H_1H_2.

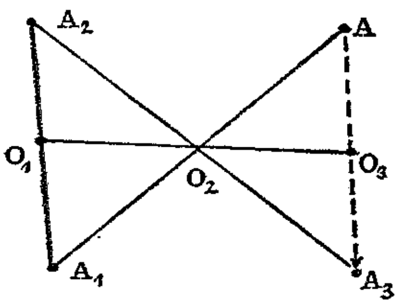
Според тоа, фигурата составена од две полуправи е централно симерична ако и само ако полуправите лежат на паралелни прави и се спротивно насочени.

140.3. Ќе ги разгледаме двата случаја: 1) $S_1 = S_2$ и 2) $S_1 \neq S_2$.

Ако $S_1 = S_2$, тогаш ставајќи $O = S_1 = S_2$, имаме $\sigma_O(k_1) = k_1$, $\sigma_O(k_2) = k_2$, па фигурата е централно симетрична.

Ако $S_1 \neq S_2$ и ако O е центар на симетрија на таа фигура, тогаш $\sigma_O(S_1) = S_2$ и $r_2 = r_1$.

Следствено, фигурата е централно симетрична ако и само ако е исполнет еден од следниве случаи: $S_1 = S_2$ или $S_1 \neq S_2$, $r_1 = r_2$.



Црт. IV. 30

142.3. Нека O_1 и O_2 се центри на симетрија на фигурата **F**, нека $O_3 = \sigma_{O_2}(O_1)$ и нека A е произволна точка (црт. IV.30). Ако $A_1 = \sigma_{O_2}(A)$, $A_2 = \sigma_{O_1}(A_1)$ и $A_3 = \sigma_{O_2}(A_2)$, тогаш точките A_1, A_2 и A_3 исто така припаѓаат на фигурата **F** и притоа имаме:

$$\overrightarrow{O_3A} = \overrightarrow{O_3O_2} + \overrightarrow{O_2A} = \overrightarrow{O_2O_1} - \overrightarrow{O_2A_1} = \overrightarrow{A_1O_1} = \overrightarrow{O_1A_2} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2A_2} = \overrightarrow{O_2O_3} - \overrightarrow{O_2A_3} = \overrightarrow{A_3O_3} = -\overrightarrow{O_3A_3},$$

од каде што следува дека $A_3 = \sigma_{O_3}(A)$. Значи, за произволна точка $A \in \mathbf{F}$ и точката $\sigma_{O_3}(A)$ припаѓа на **F**, т.е. O_3 е, исто така, центар на симетрија на фигурата **F**.

143.3. Да претпоставиме дека фигурата **F** има два центри на симетрија O_1 и O_2. Според 142.3.IV, следува дека точката $O_3 = \sigma_{O_2}(O_1)$ е центар на симетрија на фигурата **F**. Значи, покрај O_1 и O_2 можеме да најдеме барем уште еден центар на симетрија. На ист начин може да се заклучи дека и точките

$$O_4 = \sigma_{0_3}(O_2), \quad O_5 = \sigma_{0_4}(O_3), \ldots,$$

се центри на симетрија на фигурата **F**. Според тоа, фигурата **F** има бесконечно многу центри на симетрија.

144.3. За една фигура **F** велиме дека е *ограничена* ако постои кружница k, така што секоја точка од **F** е внатрешна за кружницата.

Нека фигурата **F** има два центри O_1 и O_2 на симетрија. Според 143.3.IV, точките $O_{i+2} = \sigma_{O_{i+1}}(O_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, се, исто така, центри на симетрија на фигурата **F**, при што важи $\overline{O_iO_{i+1}} = \overline{O_{i+1}O_{i+2}}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, и точката O_{i+1} е меѓу точките O_i и O_{i+2}, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Следствено фигурата **F** не е ограничена.

Според тоа, една ограничена фигура може да има најмногу еден центар на симетрија.

146.3. Точката O е центар на симетрија на паралелограмот $ABCD$, па, значи, $\sigma_O(A)=C$, $\sigma_O(E)=F$, од каде што следува $\overline{AE}=\overline{CF}$.

147.3. За да докажеме дека MN минува низ пресекот O на дијагоналите од паралелограмот $ABCD$, доволно е да покажеме дека $\sigma_O(M)=N$ (црт. IV.31). Лесно се забележува дека $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NC}$, па

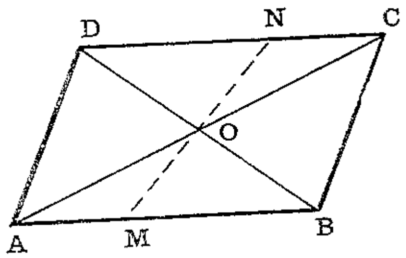
$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{NO}=-\overrightarrow{ON},$$

од каде што следува дека $N=\sigma_O(M)$.

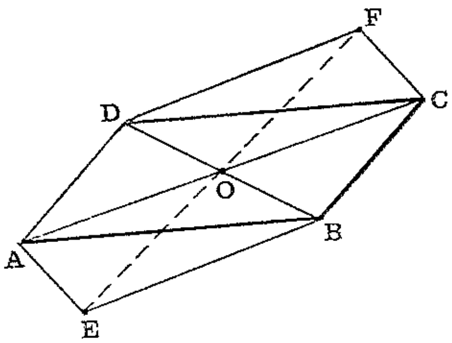
148.3. Од условот на задачата следува дека триаголниците ABE и CDF се како на црт. IV.32. Бидејќи $AB \parallel CD$ и триаголниците ABE и CDF се складни, следува дека $AE \parallel CF$, што значи дека $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FC}$. Сега, имаме:

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{FO}=-\overrightarrow{OF},$$

од каде што следува дека $F=\sigma_O(E)$. Според тоа, правата EF минува низ O и O е средина на отсечката EF.



Црт. IV. 31

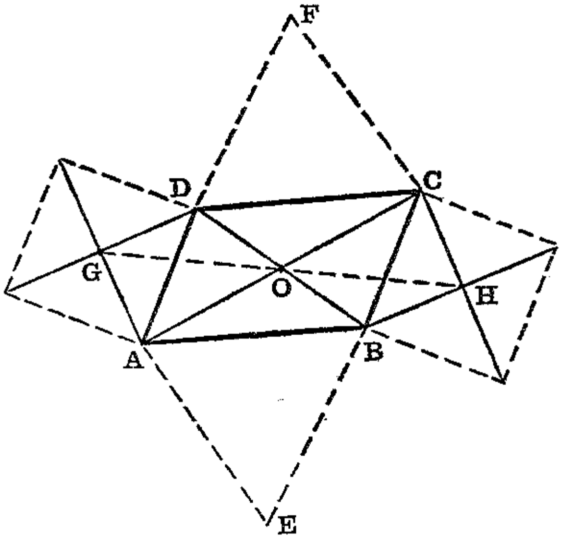


Црт. IV. 32

149.3. Според 148.3.IV, центарот O на паралелограмот $ABCD$ (црт. IV.33) е средина на отсечката EF. Ќе покажеме дека O е средина и на отсечката GH. Лесно се забележува дека $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{HB}$, па:

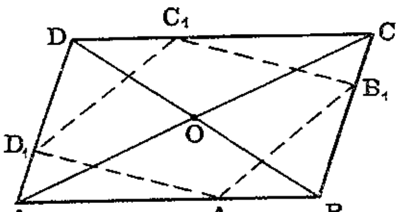
$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{HO}=-\overrightarrow{OH},$$

од каде што следува дека $H=\sigma_O(G)$, т.е. е средина и на отсечката GH. Значи, точката O е центар на симетрија на четириаголникот $EGFH$, т.е. тој четириаголник е паралелограм.

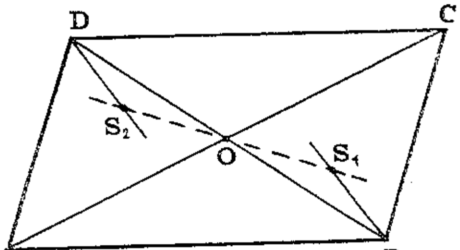


Црт. IV. 33

151.3. Нека O е центарот на паралелограмот $ABCD$ (црт. IV.34). Тогаш точката $A_1'=\sigma_O(A_1)$ лежи на страната CD, а точката $B_1'=\sigma_O(B_1)$ лежи на страната AD и притоа четириаголникот $A_1B_1A_1'B_1'$ е паралелограм впишан во паралелограмот $ABCD$. Значи, $\overline{A_1'B_1'}=\overline{C_1D_1}$ и $A_1'B_1' \parallel C_1D_1$, од каде што следува дека $A_1'=C_1$, $B_1'=D_1$, т.е. $\sigma_O(A_1)=C_1$, $\sigma_O(B_1)=D_1$. Според, тоа точката O е центар и на паралелограмот $A_1B_1C_1D_1$.



Црт. IV. 34



Црт. IV. 35

152.3. Нека $O=AC\cap BD$. За да покажеме дека S_1S_2 минува низ O доволно е да покажеме дека $\sigma_O(S_1)=S_2$. Од тоа што правите BS_1 и DS_2 се симетрали на аглите ABC и ADC следува дека тие се паралелни и дека $\overline{BS_1}=\overline{DS_2}$, т.е. дека $\overrightarrow{BS_1}=\overrightarrow{S_2D}$ (црт. IV.35).

Сега имаме:

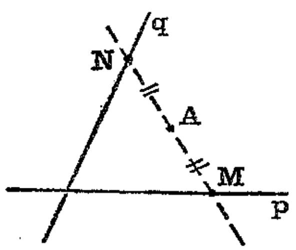
$$\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BS_1} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{S_2D} = \overrightarrow{S_2D} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{S_2O} = -\overrightarrow{OS_2}$$

од каде што следува дека $S_2 = \sigma_O(S_1)$.

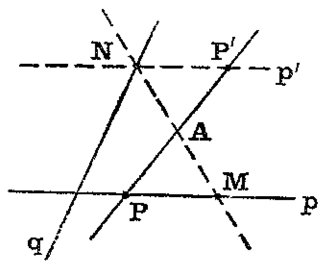
153.3. Тежиштето T ги дели тежишните линии AA_1, BB_1 и CC_1 во однос $2:1$, па значи, T е средина на отсечките A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, од каде што следува дека $\sigma_T(A_1) = A_2$, $\sigma_T(B_1) = B_2$. $\sigma_T(C_1) = C_2$. Значи, триаголникот $A_1B_1C_1$ со σ_T се пресликува во триаголникот $A_2B_2C_2$, што значи тие се складни.

155.3. Нека M, N, P и Q се средини на страните AB, BC, CD и DA од паралелограмот $ABCD$. Од тоа следува дека $\sigma_M(A) = B$, $\sigma_N(B) = C$, $\sigma_P(C) = D$ и $\sigma_Q(D) = A$. Според 14.3.IV, следува дека $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{PQ}$. Значи, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, т.е четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм.

156.3. Да претпоставиме дека задачата е решена и $a = MN$ е бараната права (црт. IV.36). Бидејќи A е средина на отсечката MN, следува дека $N = \sigma_A(M)$. Точката M лежи на правата p, па точката $N = \sigma_A(M)$ ќе лежи на правата $p' = \sigma_A(p)$. Од ова следува дека $N = p' \cap q$ (црт. IV.37).



Црт. IV. 36

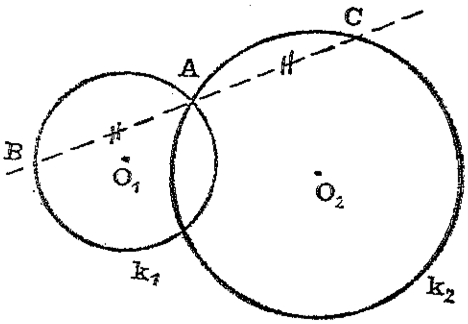


Црт. IV. 37

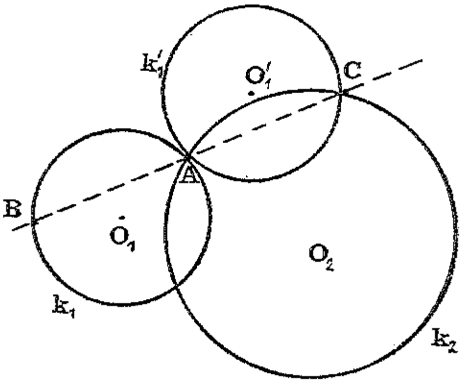
Ако правите p и q се сечат и A не лежи на ниедна од правите p и q задачата има единствено решение, зашто $p' \| p$, па p' и q се сечат. Ако, пак, A лежи на некоја од правите p, q, тогаш задачата нема решение. Ако правите p и q се паралелни, тогаш $p' = q$ или, пак, $p' \neq q$ и $p' \| q$, што значи дека задачата има или бесконечно многу решенија или, пак, ниедно. Направи цртеж и за двата случаи кога $p \| q$ и во случајот $p' = q$ согледај ги сите можни решенија.

159.3. Да претпоставиме дека задачата е решена и a е бараната права (црт. IV.38). Бидејќи $\overline{AB} = \overline{AC}$, точката A ќе биде средина на отсечката BC, т.е. $C = \sigma_A(B)$. Точката $B \in k_1$, па точката $C = \sigma_A(B)$ ќе лежи на кружницата $k_1' = \sigma_A(k_1)$. Значи, $C \in k_1' \cap k_2$ (црт. IV.39).

Задачата има единствено решение.

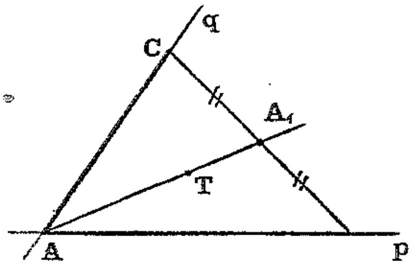


Црт. IV. 38

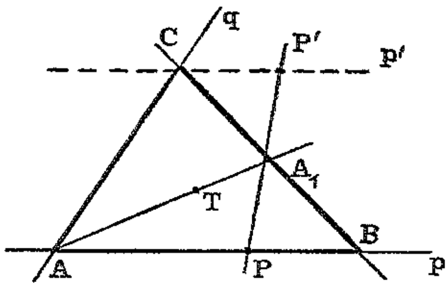


Црт. IV. 39

162.3. Да претпоставиме дека задачата е решена и ABC е бараниот триаголник (црт. IV.40). Точката T ја дели тежишната линија AA_1 во однос $2:1$, па точката A_1 може да се конструира. Сега, задачата се сведува на тоа низ точката A_1 да се повлече права a, така што A_1 да е средина на отсечката BC, т.е. на задачата 156.3.IV (црт. IV.41).



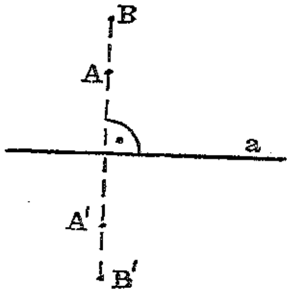
Црт. IV. 40



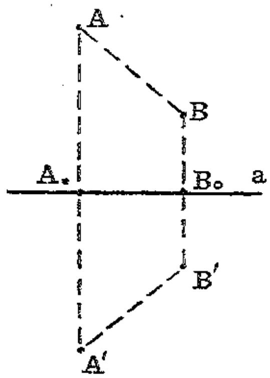
Црт. IV. 41

Бидејќи правите p и q се сечат и T не лежи на ниедна од нив, следува дека задачата има единствено решение.

174.4. Бидејќи $A, B \notin a$, можни се следниве два случаја: или правата AB е нормална на правата a (црт. IV. 42) или, пак, не е (црт. IV. 43). Во првиот случај точките A, B, A' и B' се колинеарни. Затоа, да го разгледаме вториот случај (црт. IV.43). Точките A, B, A' и B' се темиња на рамнокрак трапез. Околу секој рамнокрак трапез може да се опише кружница, па, значи, точките A, B, A' и B' лежат на една кружница.



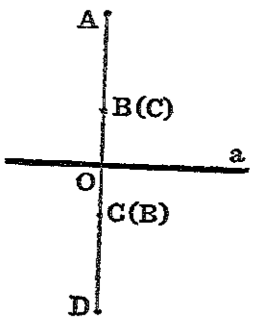
Црт. IV. 42



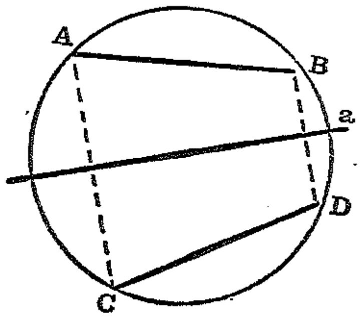
Црт. IV. 43

177.4. Да претпоставиме дека постои осна симетрија σ_a при која отсечката AB се пресликува во отсечката CD. На пример, нека $\sigma_a(A) = C$, $\sigma_a(B) = D$. Тогаш имаме $\overline{AB} = \overline{CD}$ и, според 174.4.IV, точките A, B, C и D се или колинеарни или, пак, лежат на една кружница.

Обратно, да претпоставиме дека $\overline{AB} = \overline{CD}$ и дека точките A, B, C и D се или колинеарни (црт. IV.44) или, пак, лежат на една кружница (црт. IV.45).



Црт. IV. 44



Црт. IV. 45

Во првиот случај, распоредот на точките A, B, C и D нека биде како на црт. IV.44, т.е. точките B и C нека лежат меѓу A и D. Од $\overline{AB} = \overline{CD}$ следува дека средината на отсечката AD е средина и на отсечката BC, т.е. симетралата a на отсечката AD е симетрала и на отсечката BC. Следствено, $\sigma_a(A) = D$, $\sigma_a(B) = C$, т.е. постои осна симетрија σ_a, при која отсечката AB се пресликува во отсечката CD.

Во вториот случај, нека распоредот на точките е како на црт. IV.45. Од $\overline{AB}=\overline{CD}$ следува дека $\widehat{AB}=\widehat{CD}$, па, значи, $\widehat{AD}=\widehat{BC}$, т.е. $\sphericalangle BAC=$ $=\sphericalangle ACD$. Според тоа, имаме и $\sphericalangle ABD=\sphericalangle BDC$, т.е. четириаголникот $ACDB$ е рамнокрак трапез, што значи дека симетралата a на отсечката AC е симетрала и на отсечката BD, па имаме $\sigma_a(A)=C$, $\sigma_a(B)=D$.

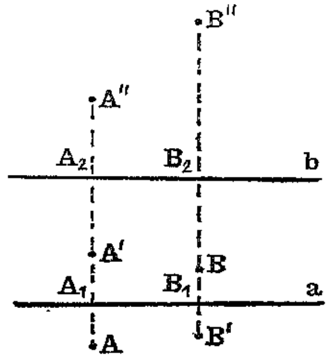
178.4. Нека $AA''\cap a=A_1$, $AA''\cap b=A_2$ (црт. IV.46); тогаш $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{A_1A'}$ и $\overrightarrow{A'A_2}=\overrightarrow{A_2A''}$. Користејќи го тоа добиваме:

$$\overrightarrow{AA''}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1A'}+\overrightarrow{A'A_2}+\overrightarrow{A_2A''}=$$

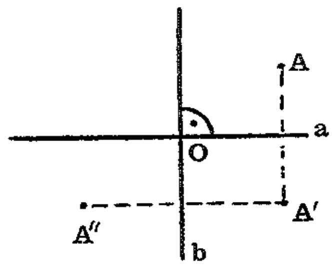
$$=2\overrightarrow{A_1A'}+2\overrightarrow{A'A_2}=2(\overrightarrow{A_1A'}+\overrightarrow{A'A_2})=2\overrightarrow{A_1A_2},$$

од каде што следува дека $\overline{AA''}=2\overline{A_1A_2}=2d$.

180.4. Нека $AA'\cap a=A_1$ и $A'A''\cap b=A_2$ (црт. IV.47).



Црт. IV. 46



Црт. IV. 47

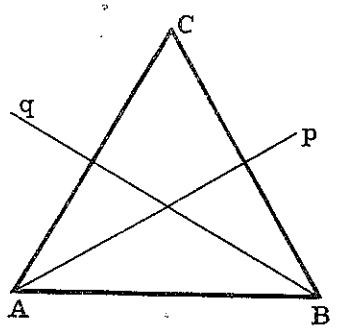
За да докажеме дека $\sigma_O(A)=A''$ треба да докажеме дека точката O е средина на отсечката AA'', а за тоа е доволно да докажеме дека $\overrightarrow{AA''}=2\overrightarrow{AO}$. Прво имаме дека $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{A_1A'}$ и $\overrightarrow{A'A_2}=\overrightarrow{A_2A''}=\overrightarrow{A_1O}$. Сега за векторот $\overrightarrow{AA''}$ имаме:

$$\overrightarrow{AA''}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'A''}=(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1A'})+(\overrightarrow{A'A_2}+\overrightarrow{A_2A''})=$$

$$=2\overrightarrow{AA_1}+2\overrightarrow{A_1O}=2(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1O})=2\overrightarrow{AO}.$$

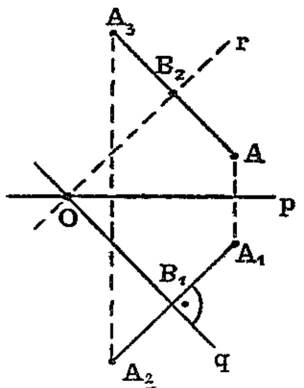
193.4. Да забележиме, прво, дека ако еден триаголник има оска на симетрија, тогаш таа мора да минува низ едно од темињата на триаголникот.

Нека, сега, триаголникот ABC има две оски на симетрија p и q, коишто минувааат низ темињата A и B соодветно (црт. IV.48). Тогаш имаме $\sigma_p(A)=A$, $\sigma_p(B)=C$, $\sigma_p(C)=B$, па, значи, $\overline{AB}=\overline{AC}$. Исто така, $\sigma_q(B)=B$, $\sigma_q(A)=C$, $\sigma_q(C)=A$, па, значи, $\overline{AB}=\overline{BC}$. Следствено, $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}$, т,е, триаголникот ABC е рамностран.

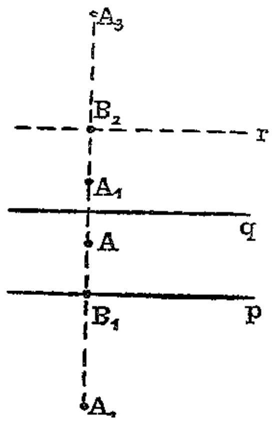


Црт. IV. 48

195.4. Да претпоставиме дека правите p и q се сечат (црт. IV.49). Нека A е произволна точка од фигурата **F** и нека $\sigma_p(A)=A_1$, $\sigma_q(A_1)=A_2$, $\sigma_p(A_2)=A_3$. Тогаш отсечката A_1A_2 со σ_p се пресликува во отсечката AA_3, па средината B_1 на отсечката A_1A_2 ќе се преслика со σ_p во средината на отсечката AA_3. Бидејќи $B_1 \in q$, следува дека $\sigma_p(B_1) \in \sigma_p(q)=r$, т.е. $\sigma_p(B_1)=AA_3 \cap r=B_2$. Значи, B_2 е средина на отсечката AA_3. Од друга страна $A_1A_2 \perp q$, па и $AA_3 \perp \sigma_p(q)=r$. Според тоа, $\overline{AB_2}=\overline{B_2A_3}$ и $AA_3 \perp r$, што значи дека $\sigma_r(A)=A_3$.



Црт. IV. 49



Црт. IV. 50

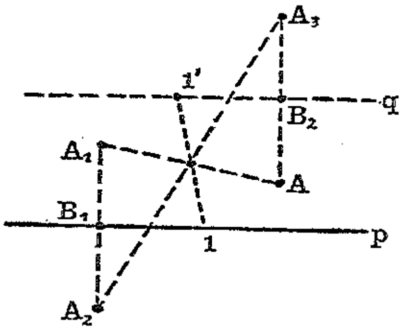
Следствено, за произволна точка $A \in$ **F** и точката $A_3=\sigma_r(A)$ е точка од фигурата **F**, т.е. r е оска на симетрија на фигурата **F**.

Слично, кога правите p и q се паралелни (црт. IV.50).

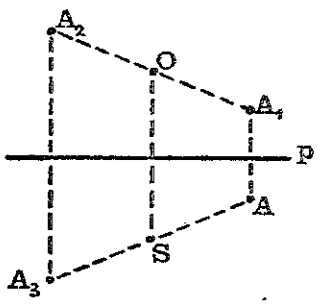
196.4. Нека фигурата F има само две оски на симетрија p и q. Според 185.4.IV, правата $r=\sigma_q(p)$ е, исто така, оска на симетрија на фигурата F. Значи, $r=q$, или $r=p$. Не може да биде $r=q$, зашто $p\neq q$. Значи, имаме $r=p$, т.е. $\sigma_q(p)=p$, од каде што следува $p\perp q$.

201.4. Ако $O\in p$, тогаш $q=p$, $S=O$ па, значи, точно е тврдењето. Затоа, ќе претпоставиме дека $O\notin p$.

а) Нека $q=\sigma_O(p)$, A произволна точка од фигурата F и нека $A_1=\sigma_O(A)$, $A_2=\sigma_p(A_1)$, $A_3=\sigma_O(A_2)$ (црт. IV.51). Тогаш отсечката A_1A_2 со σ_O се пресликува во отсечката AA_3, па средината B_1 на отсечката A_1A_2 ќе се преслика со σ_O во средината на отсечката AA_3. Бидејќи $B_1\in p$, следува дека $\sigma_O(B_1)\in\sigma_O(p)=q$, т.е. $\sigma_O(B_1)=B_2$. Според тоа, B_2 е средина на отсечката AA_3 и притоа $AA_3\perp q$, што значи дека $\sigma_q(A)=A_3$.



Црт. IV. 51



Црт. IV. 52

Следствено, за произволна точка $A\in$ F и точката $A_3=\sigma_q(A)$ припаѓа на F, т.е. правата $q=\sigma_O(p)$ е оска на симетрија на фигурата F.

б) Ако $A\in$ F, $\sigma_p(A)=A_1$, $\sigma_O(A_1)=A_2$, $\sigma_p(A_2)=A_3$ (црт. IV.52), тогаш, слично како во а), лесно се проверува дека S е средина на отсечката AA_3, т.е. $\sigma_S(A)=A_3$, од каде што следува тврдењето.

202.4. Нека $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ се оски на симетрија на фигурата F, а ниедна права p, $p\neq p_i$, $i=1,2,\ldots,n$, не е оска на симетрија на фигурата F и нека σ_i, $i=1,2,\ldots,n$, е осната симетрија со оска p_i, $i=1,2,\ldots,n$.

Кои било две од правите $p_1, p_2, \ldots, p_n$ не се меѓусебно паралелни, зашто ако $p_1\parallel p_2$, тогаш $q_3=\sigma_2(p_1)$, $q_4=\sigma_{q_3}(p_2)$, $q_5=\sigma_{q_4}(q_3), \ldots$ се исто така оски на симетрија на фигурата F, т.е. таа фигура има бесконечно многу оски на симетрија.

Според 195.4.IV, правата $q=\sigma_2(p_1)$ е, исто така, оска на симетрија на фигурата F, па, значи, q е некоја од правите $p_3, p_4, \ldots, p_n$. Можеме да претпоставиме дека $q=p_3$, па правите p_1, p_2 и p_3 минуваат низ иста точка O. На ист начин добиваме дека правите p_2, p_3, p_4 минуваат низ иста точка, т.е. и правата p_4 минува низ точката O. Според тоа, сите прави $p_1, p_2, \ldots, p_n$ минуваат низ иста точка.

203.4. Нека фигурата F е ограничена, т.е. постои кружница $k(S, r)$, така што F е подмножество од кругот $k[S, r]$.

Нека p и q се две оски на симетрија на фигурата F. Ако $p \parallel q$, тогаш лесно се заклучува дека фигурата F не е ограничена. Значи, p и q се сечат, т.е. кои било две оски на симетрија на фигурата F се сечат. Како во зад. 202.4.IV, добиваме дека кои било три оски минуваат низ иста точка, т.е. сите оски на симетрија на фигурата F минуваат низ иста точка.

204.5. Бидејќи r е симетрала на страната AB, ќе имаме $\sigma_r(A) = B$, $\sigma_r(B) = A$, а бидејќи минува низ C, ќе имаме $\sigma_r(C) = C$. Од тоа следува дека $\overline{AC} = \overline{BC}$, што значи дека триаголникот ABC има две страни еднакви, па тој е рамнокрак или рамностран.

206.5. Нека σ е осната симетрија чија оска е правата s_c. Бидејќи s_c е симетрала на аголот $\measuredangle ACB$, следува дека правата AC со σ се пресликува во правата BC, а како s_c е нормална на AB, следува дека правата AB се пресликува со σ во себе. Значи, точката $\sigma(A)$ лежи на правите BC и AB, т.е. $\sigma(A) = BC \cap AB = B$. Бидејќи $\sigma(C) = C$, следува дека $\overline{AC} = \overline{BC}$, па, значи, триаголникот ABC е рамнокрак или рамностран.

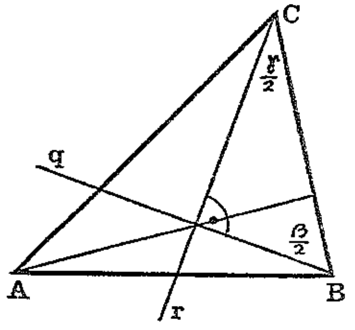
208.5. Да претпоставиме дека симетралата s_c се совпаѓа со симетралата r на страната AB од триаголникот ABC. Тогаш r минува низ темето C, па, според 204.5.IV, триаголникот ABC е рамнокрак или рамностран.

Обратно, ако за триаголникот ABC важи $\overline{AC} = \overline{BC}$, тогаш јасно е дека r се совпаѓа со s_c.

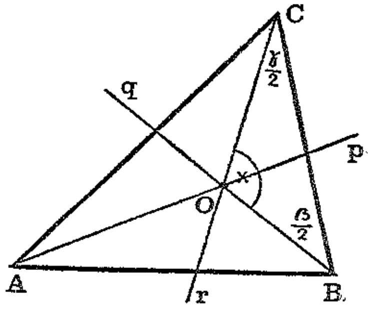
209.5. I решение. Нека p, q, и r се симетралите на аглите кај темињата A, B и C соодветно. Ако $A_1 = \sigma_q(A)$, $A_2 = \sigma_r(A)$, тогаш правата A_1A_2 се совпаѓа со правата BC.

Да претпоставиме сега дека q и r се заемно нормални. Ако $O = q \cap r$, тогаш точките A_1, A_2 и O се колинеарни, т.е. $B = C$, што не е можно.

II решение. Ако q и r се заемно нормални (црт. IV.53), тогаш имаме $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + 90° = 180°$, од каде што добиваме $\beta + \gamma = 180°$, што не е можно.



Црт. IV. 53



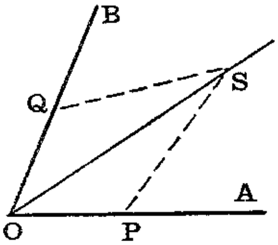
Црт. IV. 54

210.5. Нека $x = \sphericalangle BOC$ (црт. IV.54); тогаш имаме $x + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180°$, $x = 180° - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$. Бидејќи $O < \beta + \gamma < 180°$, ќе имаме

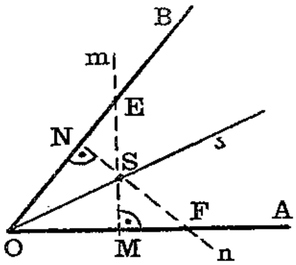
$$x > 180° - \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°,$$

што значи дека аголот x е тап, т.е. p минува низ поголемиот од аглите образувани од q и r.

211.5. Бидејќи s е симетралата на аголот AOB, полуправата OA со σ_s ќе се преслика во полуправата OB (црт. IV.55). Значи, $\sigma_s(P)$ е точка од полуправата OB на растојание од точката O за $\overline{OP}$. По услов $\overline{OP} = \overline{OQ}$, па значи $\sigma_s(P) = Q$. Од друга страна $S \in s$, па $\sigma_s(S) = S$, што значи дека $\overline{PS} = \overline{QS}$ и $\sphericalangle PSO = \sphericalangle QSO$.



Црт. IV. 55



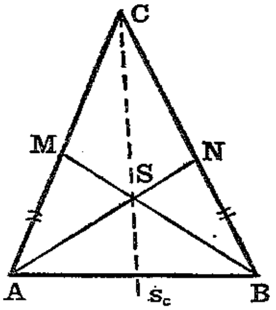
Црт. IV. 56

212.5. Нека s е симетралата на аголот AOB (црт. IV.56). Тогаш полуправата OA со σ_s се пресликува во полуправата OB, а бидејќи $\overline{OM} = \overline{ON}$ и $\sigma_s(O) = O$, следува дека $\sigma_s(M) = N$. При осна симетрија се запазуваат аглите, па, значи, $\sigma_s(m)$ ќе биде права што минува низ $N = \sigma_s(M)$ и е нормална на OB, т.е. $\sigma_s(m) = n$. Според тоа, $\sigma_s(S) = \sigma_s(m \cap n) = n \cap m = S$, т.е. $S \in s$. Сега е веќе јасно дека $\overline{MS} = \overline{NS}$ и дека $\overline{OE} = \overline{OF}$.

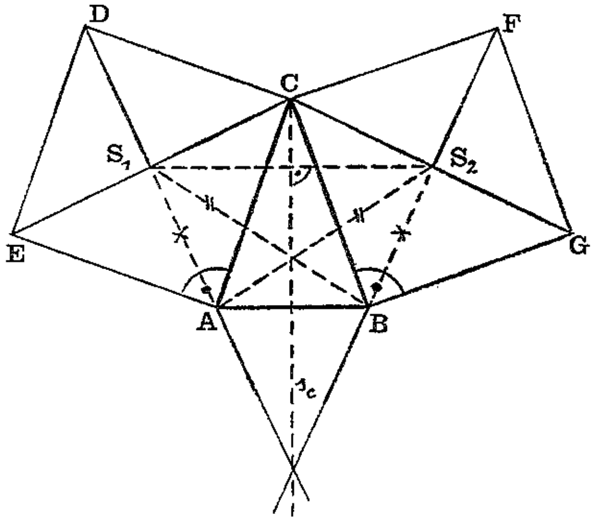
213.5. Нека s_c е симетралата на аголот γ и нека σ е осната симетрија со оска s_c (црт. IV.57). Бидејќи триаголникот ABC е рамнокрак, следува дека s_c е негова оска на симетрија, па, значи, $\sigma(A) = B$, $\sigma(B) = A$, $\sigma(C) = C$, т.е. страната AC со σ се пресликува во страната BC. Од тоа следува дека $\sigma(M)$ е точка од страната BC на растојание $\overline{AM}$ од B, т.е. $\sigma(M) = N$. Сега, од $\sigma(A) = B$, $\sigma(N) = M$, следува дека $\overline{AN} = \overline{BM}$, и дека правата AN со σ се пресликува во правата BM, т.е. $\sigma(S) = \sigma(AN \cap BM) = BM \cap AN = S$. Неподвижни точки при σ се само точките од оската s_c, па, значи, $S \in s_c$.

214.5 Нека s_c е симетралата на аголот γ и нека σ е осната симетрија со оска s_c (црт. IV.58). Тогаш имаме $\sigma(A) = B$, $\sigma(B) = A$ и $\sigma(C) = C$. При осна симетрија агол се запазува, па, значи страната CD

на квадратот $ACDE$ со σ се пресликува во отсечка што лежи на полуправата CF, зашто CF е нормална на BC, со должина $\overline{CD}=\overline{CA}=\overline{CB}$, т.е. тоа е отсечката CF. Според тоа, $\sigma(D)=F$. На ист начин добиваме дека $\sigma(E)=G$, па, значи, квадратот $ACDE$ со σ се пресликува во квадратот $BCFG$, а од тоа, пак, следува дека $\sigma(S_1)=S_2$.



Црт. IV. 57



Црт. IV. 58

а) Бидејќи $\sigma(A)=B$, $\sigma(S_1)=S_2$, $\sigma(B)=A$, $\sigma(S_2)=S_1$, следува дека со σ правата S_1A се пресликува во S_2B, а правата S_1B се пресликува во S_2A, од каде што следува дека точките $S_1A\cap S_2B$ и $S_1B\cap S_2A$ се неподвижни за σ, т.е. тие лежат на оската s_c.

б) Од $\sigma(S_1)=S_2$ и $\sigma(S_2)=S_1$ следува дека правата S_1S_2 е неподвижна за σ, т.е. $S_1S_2\perp s_c$.

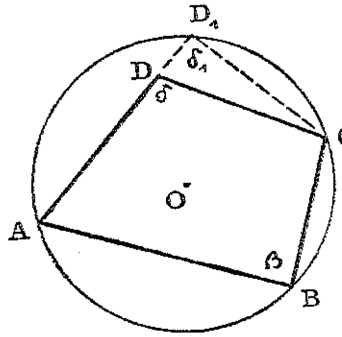
в) Од $\sigma(S_1)=S_2$ и $\sigma(A)=B$, следува дека $\overline{S_1A}=\overline{S_2B}$, а од $\sigma(S_1)=$ $=S_2$ и $\sigma(B)=A$ следува дека $\overline{S_1B}=\overline{S_2A}$.

215.5. Бидејќи q е симетрала на аголот кај темето B од триаголникот ABC, правата AB ќе се преслика со σ_q во правата BC, па, значи $\sigma_q(A)=A_1\in BC$. Слично добиваме дека $\sigma_r(A)=A_2\in BC$. Следствено, $A_1\in BC$ и $A_2\in BC$, т.е. правите A_1A_2 и BC се совпаѓаат.

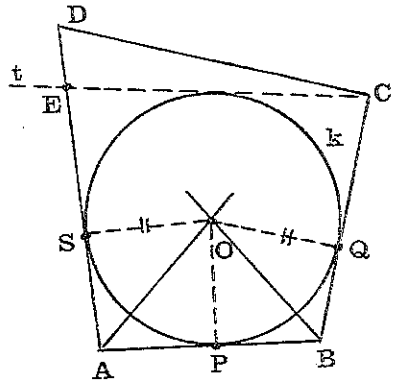
216.5. Нека спротивните агли β и δ на четириаголникот $ABCD$ (црт. IV.59) се суплементни и нека k е кружницата опишана околу триаголникот ABC.

Да претпоставиме дека $D\notin k$; нека D_1 е втората пресечна точка на правата AC и кружницата k. Четириаголникот $ABCD_1$ е тетивен, па, според 179.7.II, имаме $\beta+\delta_1=180°$. По претпоставка имаме $\beta+\delta=180°$, па, значи $\delta=\delta_1$. Од друга страна, еден од аглите δ, δ_1 е надворешен, а другиот внатрешен за триаголникот CDD_1 и не се соседни (на црт. IV.59 δ е надворешен), па ќе имаме $\delta<\delta_1$ или $\delta_1<\delta$ што противречи на фактот $\delta=\delta_1$.

Следствено, кружницата k опишана околу триаголникот ABC минува и низ точката D, т.е. четириаголникот $ABCD$ е тетивен.



Црт. IV. 59



Црт. IV. 60

217.5. За четириаголникот $ABCD$ нека важи

$$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC} \tag{1}$$

и нека O е пресекот од симетралите на аглите $\sphericalangle BAD$ и $\sphericalangle ABC$ (црт. IV. 60). Значи, O е еднакво оддалечена од страната AB и полуправите AD и BC, па, значи, O е центар на кружницата k што ги допира страната AB и полуправите AD, BC. Нека t е втората тангента на кружницата k повлечена од темето C и нека $E=t\cap AD$. Тогаш четириаголникот $ABCE$ е тангентен, па, според 180.7.II, ќе имаме

$$\overline{AB}+\overline{CE}=\overline{BC}+\overline{AE} \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме $\overline{CD}=\overline{DE}+\overline{EC}$, што не е можно.

Следствено, кружницата k ја допира и страната CD, т.е. четириаголникот $ABCD$ е тангентен.

221.5. Нека p, q и r се оски на симетрија на четириаголникот $ABCD$. Можни се следниве случаи:

1) две од нив се правите AC и BD, а третата не минува низ ниедно од темињата;

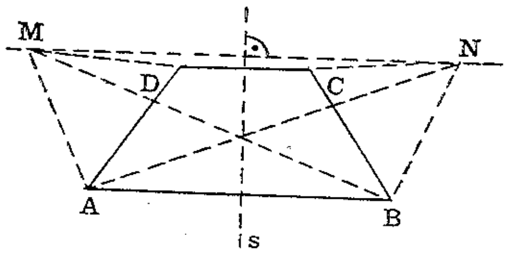
2) две од нив не минуваат низ ниедно од темињата, а третата е една од правите AC или BD.

1) Бидејќи двете прави AC и BD се оски на симетрија, следува дека четириаголникот $ABCD$ е ромб, а бидејќи четириаголникот има оска на симетрија што не минува низ ниедно од темињата следува дека четириаголникот е рамнокрак трапез. Од тоа што ABC е ромб следува дека сите четири страни му се еднакви и дека соседните агли му се суплементни, а бидејќи е рамнокрак трапез, тој има два соседни еднакви агли. Тие соседни агли, како еднакви и суплементни, се прави, па значи четириаголникот $ABCD$ е правоаголен ромб, т.е. квадрат.

2) Бидејќи една од правите AC и BD е оска на симетрија на четириаголникот $ABCD$, следува дека тој е делтоид, а бидејќи има две оски на симетрија што не минуваат низ ниедно од темињата, следува дека тој е правоаголник. Следствено, четириаголникот $ABCD$ е истовремено делтоид и правоаголник, т.е. тој е квадрат.

223.5. Нека четириаголникот $ABCD$ има оска на симетрија што минува низ некое од темињата (таа е правата AC или правата BD) и оска на симетрија што не минува низ ниедно од темињата. Бидејќи една од правите AC и BD е оска на симетрија на четириаголникот, следува дека тој е делтоид, а бидејќи има оска на симетрија што не минува низ ниедно од темињата, следува дека тој е рамнокрак трапез. Значи, четириаголникот $ABCD$ е истовремено делтоид и рамнокрак трапез, па, следствено, тој е квадрат.

224.5. Нека s е оската на симетрија на рамнокракиот трапез $ABCD$; тогаш имаме $\sigma_s(A)=B$, $\sigma_s(B)=A$, $\sigma_s(C)=D$, $\sigma_s(D)=C$ (црт.IV.61). Да ја најдеме точката $\sigma_s(M)=M'$. Правата DM зафаќа агол од $60°$ со правата AD. Бидејќи при осна симетрија агли се запазуваат, следува дека правата DM со σ_s ќе се преслика во права што минува низ точката $\sigma_s(D)=C$ и зафаќа агол од $60°$ со правата BC, т.е. во правата CN. На ист начин добиваме дека правата AM со σ_s се пресликува во правата BN, т.е. $\sigma_s(M)=CN \cap BD=N$.



Црт. IV. 61

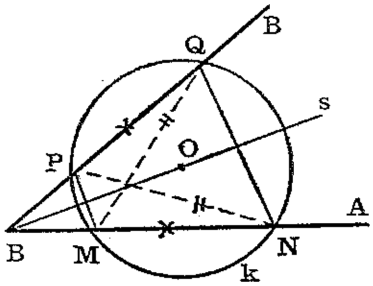
а) Од $\sigma_s(M)=N$ и $\sigma_s(B)=A$ следува дека $\overline{MB}=\overline{NA}$, а од $\sigma_s(M)=$ $=N$ и $\sigma_s(C)=D$ следува дека $\overline{MC}=\overline{ND}$.

б) Од $\sigma_s(M)=N$ следува дека правата MN е неподвижна за σ_s; тоа значи дека $MN \perp s$, т.е. $MN \parallel AB$.

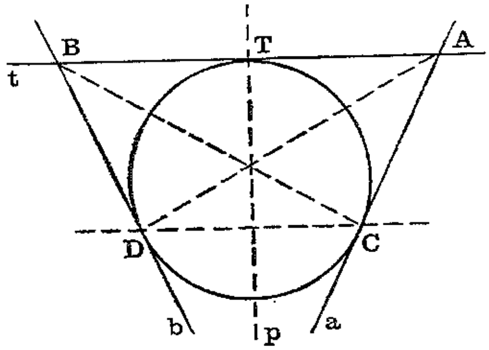
226.5. Ако трапезот $ABCD$ е рамнокрак, тогаш правата MN е негова оска на симетрија, па таа е нормална на неговите основи.

Обратно, нека правите MN и AB се заемно нормални и нека σ е осната симетрија со оска MN. Тогаш MN е нормална и на страната CD. Бидејќи M и N се средините нас траните AB и CD, следува дека $\sigma(A)=B$, $\sigma(D)=C$, т.е. правата MN е оска на симетрија на трапезот $ABCD$, па тој е рамнокрак.

232.5. Правата s е оска на симетрија за аголот ABC и за кружницата k (црт. IV.62), од каде што следува дека кракот BA се пресликува со σ_s во кракот BC и дека $\sigma_s(k)=k$. Според тоа, $\sigma_s(M)=P$, $\sigma_p(N)=Q$, од каде што, пак, следува дека $\overline{MN}=\overline{PQ}$, $\overline{QM}=\overline{PN}$, и дека $PM \parallel QN$.



Црт. IV. 62



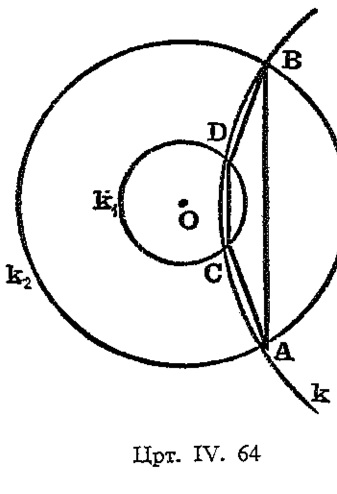
Црт. IV. 63

233.5. Правата $p=TO$ е нормала на тангентата t, па имаме $\sigma_p(t)=t$ и $\sigma_p(A)=B$ (црт. IV.63). Бидејќи тангента на кружница при осна симетрија се пресликува пак во тангента, ќе имаме дека $\sigma_p(a)=b$, т.е. $\sigma_p(C)=D$.

а) Од претходното следува дека $\sphericalangle TAC$ со σ_p се пресликува во $\sphericalangle TBD$, па, значи, $\sphericalangle TAC=\sphericalangle TBD$.

б) Од $\sigma_p(C)=D$, следува дека правата CD е неподвижна за σ_p. Тоа значи дека $CD \perp p$, т.е. $CD \parallel t$.

в) Од $\sigma_p(A)=B$ и $\sigma_p(D)=C$ следува дека $\overline{AD}=\overline{BC}$.

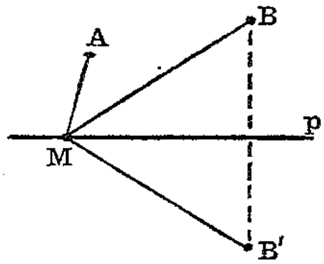


Црт. IV. 64

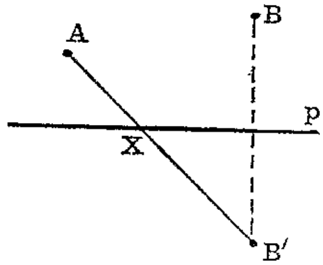
236.5. Правата $p=O_1O$ е оска на симетрија за кружниците k_1, k_2 и k (црт. IV.64), па, значи, $\sigma_p(k_1)=k_1$, $\sigma_p(k_2)=k_2$, $\sigma_p(k)=k$; од тоа следува дека $\sigma_p(A)=B$, $\sigma_p(C)=D$, од каде што следуваат тврдењата.

238.5. Нека M е произволна точка од правата p и нека $B' = \sigma_p(B)$ (црт.IV.65). Тогаш $\overline{MB} = \overline{MB'}$, па $\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AM} + \overline{MB'}$. Значи, $\overline{AM} + \overline{MB}$ е најмал, ако должината на искршената линија AMB' е најмала, а тоа е можно ако точките A, M и B' се колинеарни.

Според тоа, ако $B' = \sigma_p(B)$, тогаш $X = p \cap AB'$ (црт. IV.66).



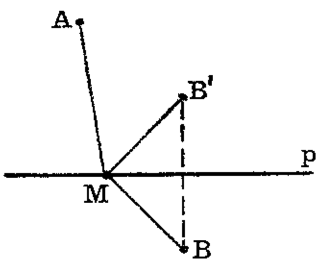
Црт. IV. 65



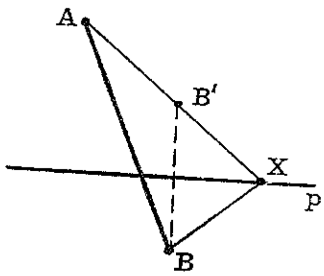
Црт. IV. 66

239.5. Нека M е произволна точка од правата p и нека $B' = \sigma_p(B)$ (црт.IV.67). Тогаш $\overline{MB} = \overline{MB'}$, па $|\overline{AM} - \overline{MB}| = |\overline{AM} - \overline{MB'}|$. Бидејќи $|\overline{AM} - \overline{MB'}| \leqslant \overline{AB'}$, разликата $|\overline{AM} - \overline{MB'}|$ ќе биде најголема кога точките A, M и B' се колинеарни.

Според тоа, ако $B' = \sigma_p(B)$, тогаш $X = p \cap AB'$ (црт.IV.68).

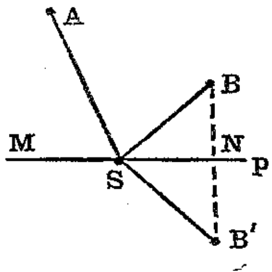


Црт. IV. 67

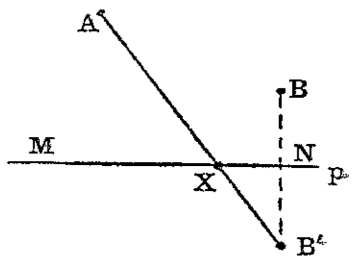


Црт. IV. 68

240.5. а) Нека S е произволна точка од правата $p = MN$ и нека $B' = \sigma_p(B)$ (црт. IV.69), Тогаш $\measuredangle BSN = B'SN$, т.е. $\measuredangle ASM = \measuredangle B'SN$, а тоа е можно ако точките A, S, и B' се колинеарни.



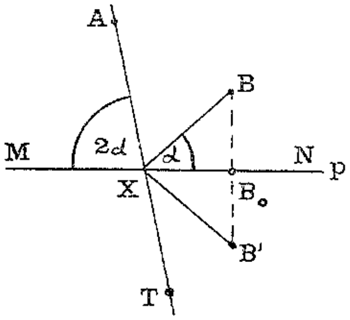
Црт. IV. 69



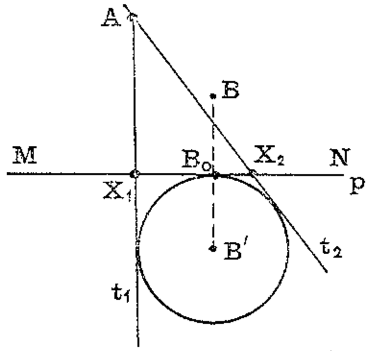
Црт. IV. 70

Според тоа, ако $B' = \sigma_p(B)$, тогаш $X = p \cap AB'$ (црт. IV.70).

б) Да претпоставиме дека задачата е решена и X е бараната точка (црт. IV.71). Ако $B' = \sigma_p(B)$, тогаш $\sphericalangle BXN = \sphericalangle B'XN$, т.е. $\sphericalangle AXM = 2\sphericalangle B'XN$, а тоа значи дека правата XB' е симетрала на аголот NXT, каде што T е точка од правата AX (црт. IV.71). Следствено, точката B' е еднакво оддалечена од правите p и AX, од каде што следува дека правата AX е тангента на кружницата $(B', \overline{BB_0})$.



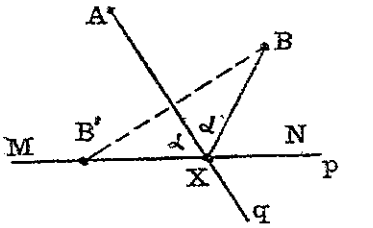
Црт. IV. 71



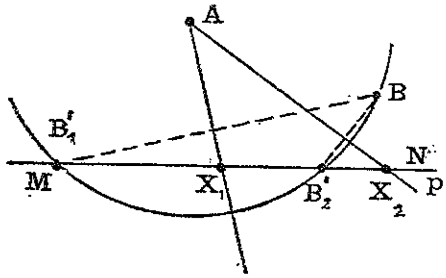
Црт. IV. 72

Според тоа, ако $B' = \sigma_p(B)$ и t_1, t_2 се тангентите на кружницата $(B', \overline{BB_0})$, тогаш бараните точки се $X_1 = t_1 \cap p$ и $X_2 = t_2 \cap p$ (црт. IV.72).

в) Да претпоставиме дека задачата е решена и X е бараната точка (црт. IV.73). Ако $q = AX$, тогаш правата BX со σ_q се пресликува во правата p, па, значи, $B' = \sigma_q(B) \in p$ и $\overline{AB'} = \overline{AB}$, т.е. $B' \in p \cap (A, \overline{AB})$.



Црт. IV. 73

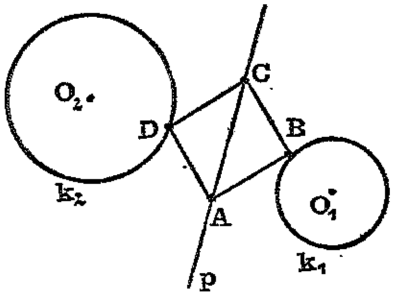


Црт. IV. 74

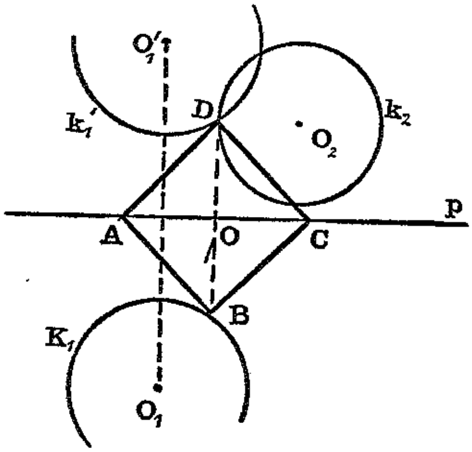
Според тоа, ако $B' \in p \cap (A, \overline{AB})$ и q е правата низ A и нормална на $B'B$, тогаш $X = q \cap p$ (црт. IV.74).

242.5. Нека $ABCD$ е бараниот квадрат (црт. IV.75). Правата p е оска на симетрија на квадратот, па, значи, $\sigma_p(A) = A$, $\sigma_p(C) = C$, $\sigma_p(B) = D$. Точката $B \in k_1$, па $D = \sigma_p(B) \in \sigma_p(k_1) = k_1'$. Бидејќи $D \in k_2$, следува дека $D \in k_1' \cap k_2$.

Според тоа, ако $k_1' = \sigma_p(k_1)$, $D \in k_1' \cap k_2$ и $B = \sigma_p(D)$, тогаш B и D се две спротивни темиња на бараниот квадрат (црт. IV. 76). Ако $O = BD \cap p$, тогаш нанесувајќи ги отсечките $\overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OB} = \overline{OD}$, ги добиваме и темињата A, C.



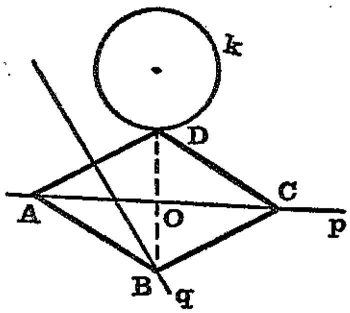
Црт. IV. 75



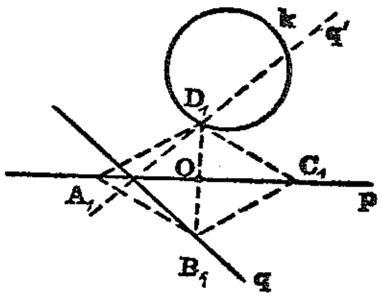
Црт. IV. 76

Задачата може да има две, едно или ниедно решение, во зависност од бројот на пресечните точки на кружниците k_1' и k_2.

243.5. Да претпоставиме дека задачата е решена и $ABCD$ е бараниот ромб (црт. IV.77). Правата p е оска на симетрија на ромбот, па ќе имаме $D \in \sigma_p(q) \cap k$, $B = \sigma_p(D)$. Значи, двете спротивни темиња B и D можеме да ги најдеме. Од темињата A и C дијагоналата BD се гледа под агол од 60°. Следствено, ако Γ е геометриското место на точки од кои дијагоналата BD се гледа под агол од 60°, тогаш $A, C \in p \cap \Gamma$.



Црт. IV. 77

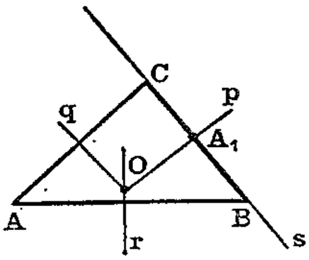


Црт. IV. 78

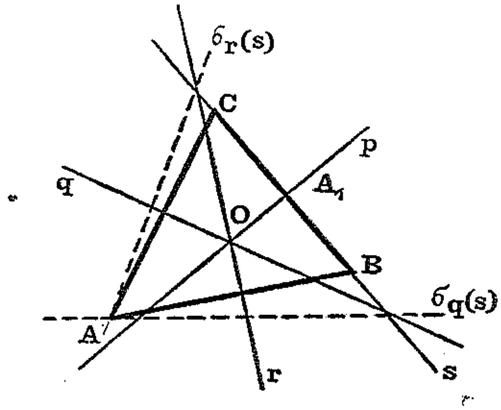
На црт. IV.78 е дадено само едното решение. Задачата може да има две, едно или ниедно решение, во зависност од бројот на пресечните точки на правата $\sigma_p(q)$ и кружницата k.

246.5. Да претпоставиме дека задачата е решена и ABC е бараниот триаголник (црт. IV.79). Бидејќи p е симетрала на страната BC, следува дека темињата B и C ќе лежат на правата s што минува низ точката A_1 и е нормална на правата p. Правата q е симетрала на страната AC, па $A=\sigma_q(C)$, од каде што следува дека $A\in\sigma_p(s)$. Слично, $A\in\sigma_r(B)$, па, значи, $A=\sigma_q(s)\cap\sigma_r(s)$. За темињата B и C имаме дека $B=\sigma_r(A)$, $C=\sigma_q(A)$.

Задачата има секогаш решение и тоа само едно (црт. IV.80).

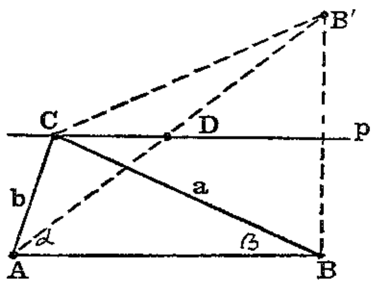


Црт. IV. 79



Црт. IV. 80

248.5. Да претпоставиме дека задачата е решена и ABC е бараниот триаголник (црт. IV.81). Ако p е права низ C паралелна со AB и $B'=\sigma_p(B)$, тогаш $\overline{CB'}=\overline{CB}=a$, $\sphericalangle ACB'=180°-(\alpha-\beta)$ и $D=p\cap AB'$



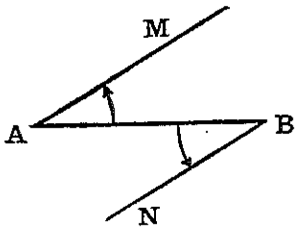
Црт. IV. 81

е средина на отсечката AB'. Значи, триаголникот ACB' може да се конструира, зашто се познати: $\overline{AC}=b$, $\overline{CB'}=a$ и $\sphericalangle ACB'=180°-(\alpha-\beta)$. На крајот, ако D е средината на отсечката AB' и $p=CD$, тогаш $B=\sigma_p(B')$.

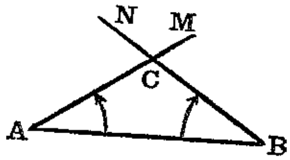
250.6. Од претходната задача имаме $\sphericalangle \overrightarrow{XTY}+\sphericalangle \overrightarrow{YTZ}=\sphericalangle \overrightarrow{XTZ}$, а од дефиницијата на насочен агол имаме $\sphericalangle \overrightarrow{XTY}+\sphericalangle \overrightarrow{YTX}=0$. Според тоа:

$$(\sphericalangle \overrightarrow{AOB} + \sphericalangle \overrightarrow{BOC})+\sphericalangle \overrightarrow{COA}=\sphericalangle \overrightarrow{AOC}+\sphericalangle \overrightarrow{COA}=0.$$

252.6. а) Бидејќи $\sphericalangle \overrightarrow{BAM}$ и $\sphericalangle \overrightarrow{ABN}$ се еднакви како насочени агли (на црт. IV.82 двата се со позитивна насока), следува дека тие се еднакви и како обични агли; тие агли се наизменични и еднакви при трансверзалата AB на правите AM и BN, па, следствено, AM и BN се паралелни.



Црт. IV. 82



Црт. IV. 83

б) Ако $\sphericalangle \overrightarrow{BAM}$ го земеме, на пример, со позитивна насока (црт. IV.83), тогаш поради условот на задачата аголот $\overrightarrow{ABN}$ ќе има негативна насока, па кракот BN ќе го сече кракот AM во точка C. Бидејќи $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, следува дека $\triangle ABC$ е рамнокрак, па $\overline{AC} = \overline{BC}$. Значи, правите AM и BN се сечат во точка C, така што $\overline{AC} = \overline{BC}$.

256.6. Дека O е неподвижна точка за ρ, т.е. $\rho(O) = O$, следува од дефиницијата на ротација. Ќе покажеме дека ρ нема други неподвижни точки. Затоа, нека A е точка, различна од O и нека $A' = \rho(A)$. Тогаш имаме $\sphericalangle \overrightarrow{AOA'} = \alpha$. Бидејќи $\alpha \neq 0°$, следува дека $\sphericalangle \overrightarrow{AOA'} \neq 0°$, т.е. OA и OA' се две различни полуправи со почеток во точката O. Следствено $A' \neq A$, т.е. $\rho(A) \neq A$.

257. 6. Да претпоставиме дека постои ротација ρ со центар во точката O, така што $\rho(A) = B$. Од дефиницијата на ротација, следува дека $\overline{OA} = \overline{OB}$. Значи, ако постои таква ротација, тогаш точката O е еднакво оддалечена од A и B.

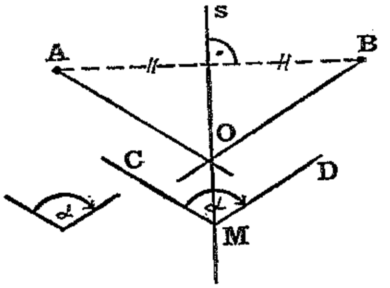
Обратно, нека $\overline{OA} = \overline{OB}$; ако ρ е ротација со центар во точката O и агол $\alpha = \sphericalangle \overrightarrow{AOB}$, тогаш јасно е дека $\rho(A) = B$.

Следствено, таква ротација постои ако и само ако $\overline{OA} = \overline{OB}$.

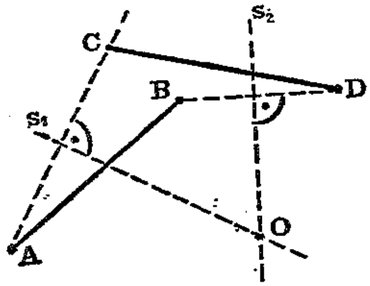
258.6. Ако постои таква ротација ρ, тогаш центарот O е еднакво оддалечен од точките A и B, па, значи, O лежи на симетралата s на отсечката AB.

Да избереме произволна точка M од s и да го пренесеме насочениот агол α со теме во точката M, така што s да биде негова симетрала (црт. IV.84). Ако низ A односно B повлечеме права паралелна со кракот MC односно MD, тогаш тие се сечат во точката $O \in s$ и, притоа, $\sphericalangle AOB = \alpha$.

Според, тоа, ако ρ е ротација со центар O и насочен агол α, тогаш $\rho(A)=B$, Значи, таква ротација постои и тоа само една.



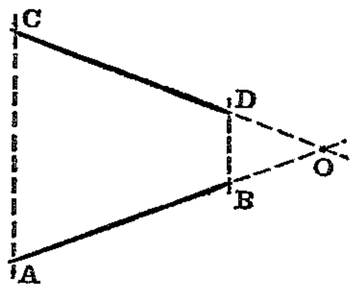
Црт. IV. 84



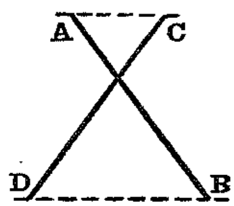
Црт. IV. 85

260.6. Нека ротацијата ρ е со центар O и агол $\alpha \neq 0°$. Бидејки правата AB со ρ се пресликува во правата CD, следува дека тие прави зафаќаат агол α. При $\alpha = 180°$ имаме $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Значи, во секој случај имаме $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$, а јасно е дека $\overline{AB} = \overline{CD}$.

261.6. Од $\overline{AB} = \overline{CD}$ и $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$, следува дека распоредот на точките A, B, C и D е како на црт. IV.85, црт. IV.86. или црт. IV.87, т.е. $AC \nparallel BD$ (црт. V.85), $AC \parallel BD$ (црт. IV.86, IV.87)



Црт. IV. 86



Црт. IV. 87

Во првиот случај, кога $AC \nparallel BD$, симетралата s_1 на отсечката AC и симетралата s_2 на отсечката BD се сечат; нека $O = s_1 \cap s_2$. Точката O е еднакво оддалечена од точките A и C и од точките B и D, т.е. важи $\overline{OA} = \overline{OC}$ и $\overline{OB} = \overline{OD}$, па, значи, триаголниците AOB и COD се складни, од каде што следува дека $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$. Користејќи го ова, добиваме:

$$\sphericalangle \overrightarrow{AOC} = \sphericalangle \overrightarrow{AOB} + \sphericalangle \overrightarrow{BOC} = \sphericalangle \overrightarrow{COD} + \sphericalangle \overrightarrow{BOC} =$$
$$= \sphericalangle \overrightarrow{BOC} + \sphericalangle \overrightarrow{COD} = \sphericalangle \overrightarrow{BOD}.$$

Според тоа, ако ρ е тотација со центар O и агол $\alpha = \sphericalangle \overrightarrow{AOC}$, тогаш $\rho(A) = C$, $\rho(B) = D$.

Во вториот случај, кога $AC \| BD$, нека $O = AB \cap CD$; ако ρ е ротацијата со центар O и агол $\alpha = \sphericalangle \overrightarrow{AOC}$, тогаш имаме $\rho(A) = C$, $\rho(B) = D$.

Ако ρ' е произволна ротација со својството $\rho'(A) = C$ и $\rho'(B) = D'(AC \nparallel BD)$, тогаш нејзиниот центар O' е еднакво оддалечен од A, C и еднакво оддалечен од B, D. Значи, $O' \in s_1$ и $O' \in s_2$, т.е. $O' = s_1 \cap s_2 = O$. Ако $AC \| BD$, тогаш $O' = AB \cap CD = O$. Аголот на ротацијата во двата случаја ќе биде $\sphericalangle \overrightarrow{AO'C} = \sphericalangle \overrightarrow{AOC}$. Следствено $\rho' = \rho$, т.е. постои единсвена таква ротација.

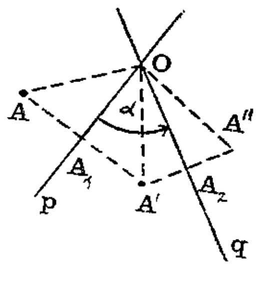
За случајот $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ не постои ротација ρ со својството $\rho(A) = C$, $\rho(B) = D$, туку при транслацијата τ за вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, имаме $\tau(A) = C$, $\tau(B) = D$.

262.6. Прво имаме $\overline{OA_1} = \overline{OA} = \overline{OA_2}$. Понатаму: $\sphericalangle A_1\overrightarrow{O}A_2 = \sphericalangle A_1\overrightarrow{O}A + \sphericalangle A\overrightarrow{O}A_2 = -\sphericalangle A\overrightarrow{O}A_1 - \sphericalangle A\overrightarrow{O}A_2 = -90° - 90° = -180°$, т.е. точките A_1, O и A_2 се колинеарни. Значи, $\sigma_O(A_1) = A_2$.

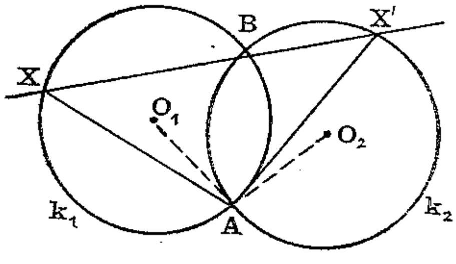
263.6. Од $\sigma_p(A) = A'$ и $\sigma_q(A') = A''$ следува (црт. IV. 88) дека $\overline{OA} = \overline{OA'} = \overline{OA''}$, $\sphericalangle A\overrightarrow{O}A_1 = \sphericalangle A_1\overrightarrow{O}A'$ и $\sphericalangle A'\overrightarrow{O}A_2 = \sphericalangle A_2\overrightarrow{O}A''$, па, значи,

$$\sphericalangle A\overrightarrow{O}A'' = \sphericalangle A\overrightarrow{O}A' + \sphericalangle A'\overrightarrow{O}A'' = 2\sphericalangle A_1\overrightarrow{O}A' + 2\sphericalangle A'\overrightarrow{O}A_2 =$$
$$= 2(\sphericalangle \overrightarrow{A_1}OA' + \sphericalangle \overrightarrow{A'}OA_2) = 2\sphericalangle A_1\overrightarrow{O}A_2 = 2\alpha.$$

Следствено, ако ρ е ротацијата со центар O и агол 2α, тогаш имаме $\rho(A) = A''$.



Црт. IV. 88



Црт. IV. 89

269.6. Нека a е произволна права и нека $\rho(a) = a'$; тогаш правите a и a' зафаќаат агол α. Бидејќи $\alpha \neq 0°$, $180°$, правите a и a' не се паралелни, па, значи и $a \neq a'$, т.е. при $\alpha \neq 0°$, $180°$ за ротацијата ρ нема неподвижни прави.

За $\alpha = 180°$ ротацијата ρ е централната симетрија σ_O, па неподвижни прави се правите што минуваат низ точката O.

271.6. Ако правите p и q се сечат во точката O, тогаш при ротацијата ρ со центар O и агол α (аголот меѓу p и q, насочен од p кон q) имаме $\rho(p)=q$.

Ако, пак, правите p и q се паралелни и ако $O \in s$, каде што s е права паралелна со p, q и еднакво оддалечена од нив, тогаш при ротацијата со центар O и агол $180°$ (централна симетрија σ_O), правата p се пресликува во правата q.

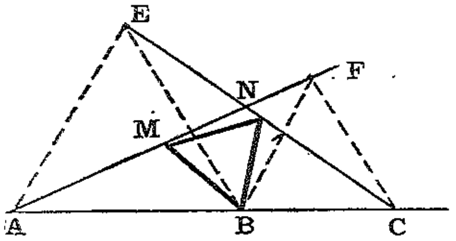
Според тоа, секогаш постои ротација ρ, така што $\rho(p)=q$.

273.6. Бидејќи $r_1=r_2$, правата $s=AB$ е симетрала на отсечката O_1O_2 (црт. IV.89), па, значи, A е центар на ротација ρ, така што $\rho(k_1)=k_2$. Аголот на таа ротација е $\alpha=\overrightarrow{O_1AO_2}$.

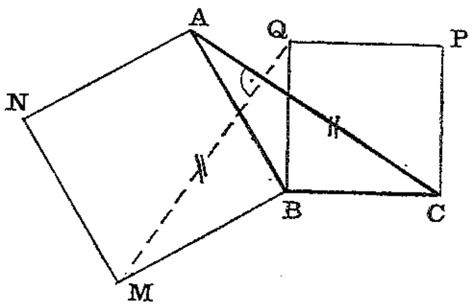
Нека $X \in k_1$ е произволна точка и $X'=XB \cap k_2$ (црт. IV.89). Бидејќи $\sphericalangle AXB$ и $\sphericalangle AX'B$ се периферискии агли над еднакви лаци, следува дека тие се еднакви, па $\overline{AX}=\overline{AX'}$. Ако $\rho(X)=X_1$, тогаш $\overline{AX}=\overline{AX_1}$ и $X_1 \in k_2$, од што следува $X_1=X'$.

Следствено, за произволна точка X од k_1, точките X, B, $\rho(X)$ се колинеарни.

275.6. Нека распоредот на точките A, B и C е како на црт. IV.90 и нека ρ е ротацијата со центар B и агол $-60°$. Тогаш имаме $\rho(A)=E$, $\rho(F)=C$, т.е. отсечката AF со ρ се пресликува во отсечката EC. Средината M на отсечката AF ќе се преслика со ρ во средината N на отсечката EC. Значи, $\rho(M)=N$, од каде што следува дека $\overline{BM}=\overline{BN}$ и $\sphericalangle MBN=60°$, т.е. триаголникот BMN е рамностран.



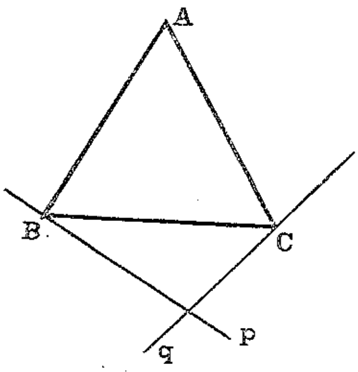
Црт. IV. 90



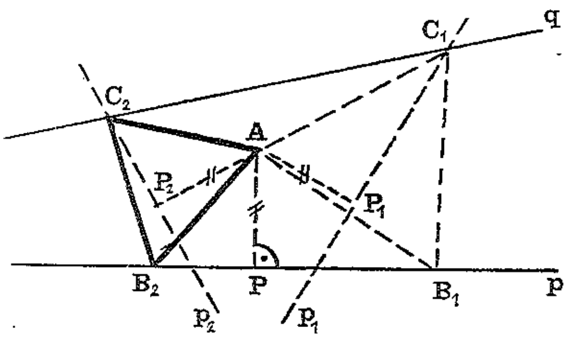
Црт. IV. 91

276.6. Нека триаголникот ABC е како на црт. IV.91 и нека ρ е ротација со центар B и агол $90°$. Тогаш $\rho(C)=Q$ и $\rho(A)=M$, од каде што следува дака $\overline{AC}=\overline{MQ}$ и дека правите AC и MQ зафаќаат агол $90°$ т.е. се заемно нормални.

277.6. Да претпоставиме дека задачата е решена и ABC е бараниот триаголник (црт. IV.92). Бидејќи триаголникот ABC е рамностран, следува дека $\overline{AB}=\overline{AC}$ и $\sphericalangle BAC=60°$. Значи, ако ρ е ротацијата со центар A и агол $60°$ или агол $-60°$, тогаш $\rho(B)=C$. Точката B лежи на пратата p. па точката $C = \rho(B)$ ќе лежи на правата $\rho(p)$. Од друга страна C лежи и на правата q, па значи, $C = \rho(p) \cap q$.



Црт. IV. 92



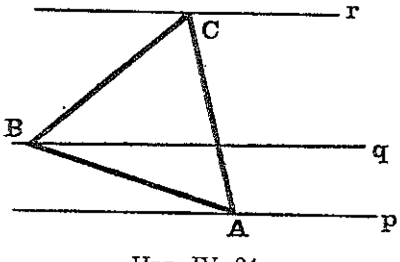
Црт. IV. 93

Затоа, нека ρ_1 е ротацијата со центар A и агол 60°, а ρ_2 ротацијата со центар A и агол $-60°$ и нека $p_1 = \rho_1(p)$, $p_2 = \rho_2(p)$. Ако $C_1 = p_1 \cap q$. $C_2 = p_2 \cap q$, $B_1 = \rho_2(C_1)$, $B_2 = \rho_1(C_2)$, тогаш AB_1C_1 и AB_2C_2 се бараните триаголници (црт. IV.93).

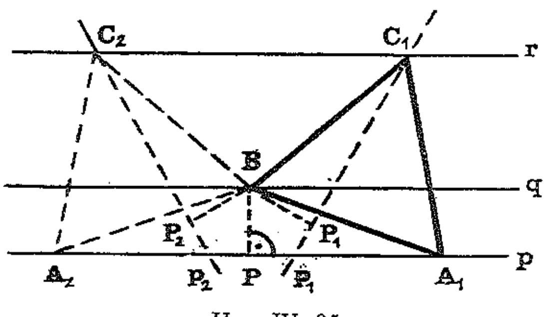
Да забележиме дека барем една од правите p_1, p_2 ја сече правата q, па, значи, задачата секогаш има барем едно решение.

280.6. Да претпоставиме дека задачата е решена и ABC е бараниот триаголник (црт. IV.94). Ако τ е транслација за вектор паралелен со правите p, q и r, тогаш триаголникот ABC се пресликува со τ во триаголник со истите својства $A \in p$, $B \in q$, $C \in r$. Значи, од сите тие триаголници доволно е да конструираме барем еден.

Затоа, нека B е произволна точка од правата q, ρ_1 ротација со центар B и агол 60°, а ρ_2 ротација со центар B и агол $-60°$. Ако $p_1 = \rho_1(p)$, $p_2 = \rho_2(p)$, $C_1 = p_1 \cap r$, $C_2 = p_2 \cap r$, $A_1 = \rho_2(C_1)$, $A_2 = \rho_1(C_2)$, тогаш A_1BC_1 и A_2BC_2 се бараните триаголници (црт. IV.95).



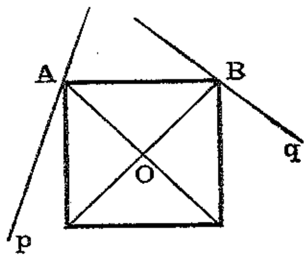
Црт. IV. 94



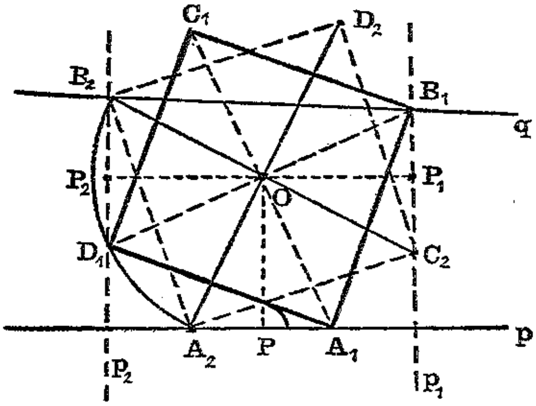
Црт. IV. 95

Да забележиме дека триаголниците A_1BC_1 и A_2BC_2 се складни, па, значи, задачата има само едно решение.

282.6. Да претпоставиме дека задачата е решена и $ABCD$ е бараниот квадрат (црт. IV.96). Аголот $\measuredangle \overrightarrow{AOB} = -90°$, па ако ρ е ротација со центар O и агол $-90°$, тогаш $\rho(A) = B$. Бидејќи $A \in p$, според тоа, ќе имаме $B = \rho(p) \cap q$.



Црт. IV. 96

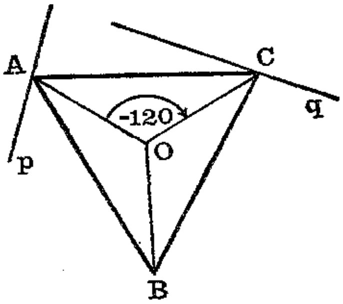


Црт. IV. 97

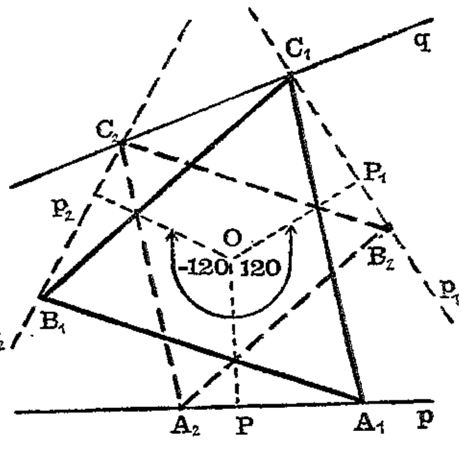
Затоа, нека ρ_1 е тотацијата со центар O и агол $90°$, ρ_2 ротацијата со центар O и агол $-90°$, $p_1 = \rho_1(p)$, $p_2 = \rho_2(p)$, $B_1 = p_1 \cap q$, $B_2 = p_2 \cap q$, $A_1 = \rho_2(B_1)$, $A_2 = \rho_1(B_2)$. Тогаш бараните квадрати се квадратите со страни A_1B_1 и B_2A_2 соодветно (црт. IV.97).

Да забележиме дека задачата може да има или две решенија или ниедно. Ако правите p и q се заемно нормални тогаш p_1 и p_2 се паралелни со правата q, па задачата нема решение, а ако p и q не се заемно нормални, тогаш задачата има точно две решенија.

285.6. Да претпоставиме дека задачата е решена и ABC е бараниот триаголник (црт. IV.98). Бидејќи $\measuredangle \overrightarrow{AOC} = -120°$, ако ρ е ротацијата со центар O и агол $-120°$, тогаш $\rho(A) = C$, па значи, $C = \rho(p) \cap q$.



Црт. IV. 98



Црт. IV. 99

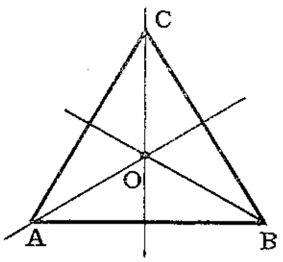
Затоа, нека ρ_1 и ρ_2 се ротациите со центар O и агол 120° и -120° соодветно, $p_1=\rho_1(p)$, $p_2=\rho_2(p)$, $C_1=p_1\cap q$, $C_2=p_2\cap q$, $A_1=\rho_2(C_1)$, $A_2=\rho_1(C_2)$. Тогаш бараните триаголници се со страни A_1C_1 и A_2C_2 соодветно (црт. IV.99).

Задачата може да има две, едно или ниедно решение.

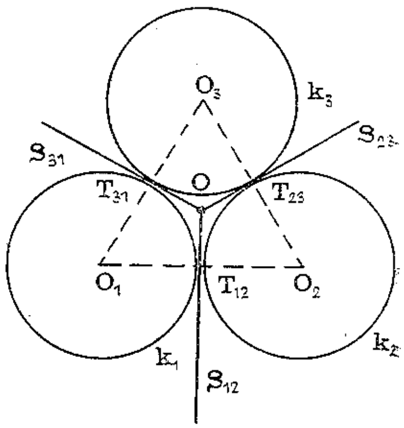
288.7. Нека триаголникот ABC е рамнокрак и нека O е центарот на опишаната кружница (црт. IV. 100). Тогаш $\sphericalangle \overrightarrow{AOB}=\sphericalangle \overrightarrow{BOC}\Rightarrow \sphericalangle \overrightarrow{COA}=120^\circ$ и $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$, па, ако ρ е ротацијата со центар O и агол 120°, ќе имаме $\rho(A)=B$, $\rho(B)=C$, $\rho(C)=A$. Бидејќи $120^\circ=\frac{1}{3}\,360^\circ$, триаголникот ABC има симетрија со ред 3.

289.7. Ако триаголникот ABC е рамностран, тогаш, според 288. 7. IV, тој има симетрија со ред 3.

Обратно, да претпоставиме дека триаголникот ABC има симетрија со ред 3, т.е. постои точка O, така што при ротацијата ρ со центар O и агол $120^\circ=\frac{1}{3}\,360^\circ$, триаголникот ABC се пресликува во себе. Можеме да земеме дека $\rho(A)=B$, $\rho(B)=C$, $\rho(C)=A$, па, значи, $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$, т.е. триаголникот ABC е рамностран.



Црт. IV. 100



Црт. IV. 1 01

294.7. Нека кружниците се $k_i(O_i, r)$, $i=1, 2, 3$, (црт. IV.101). Триаголникот $O_1O_2O_3$ е рамностран, па ако O е неговиот центар, тогаш при ротацијата ρ со центар O и агол 120° ќе имаме $\rho(O_1)=O_2$, $\rho(O_2)=O_3$, $\rho(O_3)=O_1$. Според тоа, $\rho(k_1)=k_2$, $\rho(k_2)=k_3$ и $\rho(k_3)=k_1$, т.е. $\rho(\mathbf{F})=\mathbf{F}$. Бидејќи $120^\circ=\frac{1}{3}\,360^\circ$, ротацијата ρ е симетрија со ред 3 за фигурата $\mathbf{F}$.

296.7. Нека $p_1, p_2, \dots, p_n$ се оските на симетрија на фигурата $\mathbf{F}$. Бидејќи се конечно многу, според 202.4. IV, тие минуваат низ една иста точка O, и можеме да сметаме дека се така означени што важи:

$$\sigma_{p_2}(p_1)=p_3,\ \sigma_{p_3}(p_2)=p_4, \dots,\ \sigma_{p_{n-1}}(p_{n-2})=p_n,\ \sigma_{p_n}(p_{n-1})=p_1.$$

Од тоа следува дека правите p_1 и p_2, p_2 и $p_3, \dots, p_n$ и p_1 зафаќаат ист агол $\alpha=\frac{360°}{n}$, па ако ρ е ротацијата со центар O и агол α, тогаш ќе имаме $\rho(\mathbf{F})=\mathbf{F}$. Значи, фигурата $\mathbf{F}$ има центар на симетрија со ред n.

297.7. Треба да покажеме дека постои природен број n, така што $\alpha=\frac{360°}{n}$.

Да претпоставиме дека $\alpha\neq\frac{360°}{n}$. Тогаш постои природен број k, така што $k\alpha<360°<(k+1)\alpha$. Аголот $(k+1)\alpha-360°$ е помал од аголот α. Да ја разгледаме ротацијата $\overline{\rho}$ со центар O и агол $(k+1)\alpha-360°$. Бидејќи за ротацијата ρ со центар O и агол α имаме $\rho(\mathbf{F})=\mathbf{F}$, следува дека и при ротацијата ρ_{k+1} со центар O и агол $(k+1)\alpha$ фигурата $\mathbf{F}$ се пресликува во себе, па, следствено, и при ротацијата $\overline{\rho}$. Значи, ако $\alpha\neq\frac{360°}{n}$, тогаш постои помал агол β, така што при ротацијата ρ за агол β фигурата $\mathbf{F}$ пак се пресликува во себе, спротивно на претпоставката дека α е најмалиот агол со тоа својство.

Според тоа, ако α е најмалиот агол, така што при ротацијата за агол α и некој центар O, фигурата $\mathbf{F}$ се пресликува во себе, тогаш $\alpha=\frac{360°}{n}$, за некој природен број n, т.е. фигурата $\mathbf{F}$ има симетрија со ред n.

301.7. Нека $A_1A_2\dots A_n$ е тангентен n-аголник, така што $\measuredangle A_1A_2A_3 = \measuredangle A_2A_3A_4=\dots=\measuredangle A_nA_1A_2$.

Да ја означиме со $k(O, r)$ кружницата впишана во тој n-аголник. Правите A_1A_2 и A_1A_n се тангенти на k повлечени од точката A_1, па, значи, правата A_1O е симетрала на $\measuredangle A_nA_1A_2$. Слично заклучуваме дека правата OA_2 е симетрала на $\measuredangle A_1A_2A_3$. Според тоа, $\measuredangle OA_1A_2=\measuredangle OA_2A_1$, т.е. триаголникот A_1OA_2 е рамнокрак со крак $\overline{OA_1}=\overline{OA_2}$.

На ист начин заклучуваме дека сите триаголници A_2OA_3, $A_3OA_4, \dots$, A_nOA_1 се рамнокраки, од каде што следува дека

$$\overline{OA_1}=\overline{OA_2}=\dots=\overline{OA_n},$$

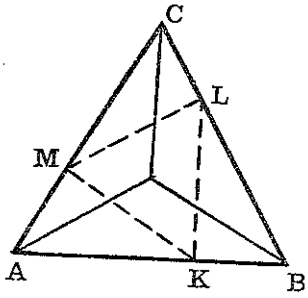
$$\measuredangle A_1OA_2=\measuredangle A_2OA_3=\dots=\measuredangle A_nOA_1,$$

а од тоа, пак, следува дека $\triangle A_1OA_2\cong\triangle A_2OA_3\cong\dots\cong\triangle A_nOA_1$, т.е. $\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=\dots=\overline{A_nA_1}$.

Следствено, n-аголникот $A_1A_2\dots A_n$ е впишан во кружницата $(O, \overline{OA_1})$, т.е. е тетивен, и има еднакви страни, па тој е правилен.

302.7. Нека ABC е рамностран триаголник и нека K, L и M ги делат страните AB, BC и CA во однос $2:1$ (црт. IV.102). При ротацијата ρ со центар O и агол $\sphericalangle \overrightarrow{AOB} = 120°$, имаме $\rho(A)=B$, $\rho(B)=C$, $\rho(C)=A$. Значи страната AB со ρ се пресликува во страната BC. Бидејќи $\overline{AK}=\overline{BL}$, следува дека $\rho(K)=L$. Слично, добиваме дека $\rho(L)=M$, $\rho(M)=K$.

Според тоа, триаголникот KLM има симетрија со ред 3, па, значи, тој е рамностран.



Црт. IV. 102

310.7. Прво да забележиме дека ако два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ со ист почеток O ги ротираме околу O за некој агол α, тогаш и векторот $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ се ротира околу O за истиот агол α.

Нека, сега, $A_1A_2\ldots A_n$ е правилен n-аголник со центар O и нека $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}$. Ако ρ е ротацијата со центар O и агол $\alpha=\dfrac{360°}{n}=\sphericalangle \overrightarrow{A_1OA_2}$ имаме $\rho(O)=O$, $\rho(A_1)=A_2$, $\rho(A_2)=A_3,\ldots,\rho(A_n)=A_1$, т.е. при оваа ротација векторот $\overrightarrow{OA_1}$ се пресликува во векторот $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_2}$ во $\overrightarrow{OA_3},\ldots,\overrightarrow{OA_n}$ во $\overrightarrow{OA_1}$. Значи, $\rho(\mathbf{a})=\mathbf{a}$, па $\mathbf{a}=\mathbf{o}$.

311.8. Нека φ е движење. За да покажеме дека φ е биекција ќе покажеме дека φ е инјекција и сурјекција.

Нека X, Y се две произволни точки и нека $X'=\varphi(X)$, $Y'=\varphi(Y)$. Ако $X'=Y'$, тогаш $\overline{X'Y'}=0$, а бидејќи φ е движење ќе имаме $\overline{XY}=\overline{X'Y'}=0$, што значи дека $X=Y$, т.е. φ е инјекција.

Нека, сега, M' е произволна точка; нека A, B и C се три неколинеарни точки и нека $A'=\varphi(A)$, $B'=\varphi(B)$ и $C'=\varphi(C)$. Триаголниците ABC и $A'B'C'$ се складни. Точката M' не лежи барем на една од правите $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$. Да претпоставиме дека M' не лежи на правата $A'B'$ и нека M_1' е симетричната точка на M' по однос на правата $A'B'$. Постојат точно две точки M и M_1, така што $\triangle ABM \cong \triangle ABM_1 \cong \triangle A'B'M' \cong \triangle A'B'M_1'$. Да ја побараме точката $M^*=\varphi(M)$. За оваа точка важат релациите $\overline{A'M^*}=\overline{AM}$ и $\overline{B'M^*}=\overline{BM}$, т.е. триаголниците AMB и $A'M^*B'$ се складни, па, значи, $M^*=M'$ или $M^*=M_1'$. На ист начин добиваме дека $\varphi(M_1)=M'$, или $\varphi(M_1)=M_1'$. Бидејќи φ е инјекција следува дека важи:

$$\varphi(M)=M' \text{ и } \varphi(M_1)=M_1'$$

или

$$\varphi(M)=M_1' \text{ и } \varphi(M_1)=M'.$$

Следствено, или $\varphi(M)=M'$ или $\varphi(M_1)=M'$, т.е. φ е сурјекција.

314.8. Нека φ е движење, A, B, C три колинеарни точки и нека $A'=\varphi(A)$, $B'=\varphi(B)$, $C'=\varphi(C)$. Од три колинеарни точки само една лежи меѓу другите две. Затоа, нека точките се означени, така што точката B да лежи меѓу точките A и C. Тогаш важи равенството

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}. \tag{1}$$

Бидејќи φ е движење, следува дека $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, $\overline{BC}=\overline{B'C'}$ и $\overline{AC}=\overline{A'C'}$, па заменувајќи во (1), добиваме

$$\overline{A'B'}+\overline{B'C'}=\overline{A'C'}. \tag{2}$$

Од (2) следува дека точките A', B', C' се колинеарни и дека точката B' лежи меѓу точките A' и C'.

Да забележиме дека со ова сме докажале и дека распоредот на три колинеарни точки се запазува при секое движење.

Нека, сега, A, B, C се неколинеарни. Ако A', B', C' би биле колинеарни, тогаш нивните слики A, B, C со φ^{-1} би биле колинеарни (зашто φ^{-1} е движење), спротивно на претпоставката дека A, B, C се неколинеарни.

315.8. Нека φ е движење, a е права и A, B две произволни точки од правата a. Со a' да ја означиме правата што минува низ точките $A'=\varphi(A)$ и $B'=\varphi(B)$. Ќе покажеме дека $\varphi(a)=a'$. За таа цел треба да покажеме дека секоја точка $M \in a$ се пресликува со φ во точка $M' \in a'$ и дека секоја точка $N' \in a'$ е слика барем на една точка $N \in a$.

Нека $M \in a$, $M \neq A, B$ и нека $M'=\varphi(M)$. Точките A, B и M се колинеарни, па според 314. 8.IV, и точките A', B' и M' се колинеарни. Значи $M' \in a'$.

Нека, сега, $N' \in a'$, $N' \neq A', B'$, и нека $\varphi^{-1}(N')=N$. Бидејќи φ^{-1} е движење, според 314. 8.IV, следува дека точките A, B и N се колинеарни, т.е. $N \in a$. Но, од $\varphi^{-1}(N')=N$, следува дека $\varphi(N)=N'$, т.е. постои точка $N \in a$ која со φ се пресликува во точката $N' \in a'$.

Од сето тоа следува дека $\varphi(a)=a'$, т.е. при секое движење права се пресликува во права.

316.8. Нека φ е движење, $k(O, r)$ една кружница и нека $O'=\varphi(O)$. Ако M е произволна точка од k и ако $M'=\varphi(M)$, тогаш ќе имаме

$$\overline{O'M'}=\overline{OM}=r,$$

од каде што следува дека $M' \in k'(O, r)$. Од друга, страна, секоја точка од $k'(O', r)$ е слика на некоја точка од $k(O, r)$. Значи, $\varphi(k)=k'$.

318.8. Нека $\tau_{\mathbf{a}}$ и $\tau_{\mathbf{b}}$ се две транслации, нека A е произволна точка и нека $\tau_{\mathbf{a}}(A)=A'$, $\tau_{\mathbf{b}}(A')=A''$. Тогаш $(\tau_{\mathbf{a}} \circ \tau_{\mathbf{b}})(A)=A''$. Од $\tau_{\mathbf{a}}(A)=A'$ следува дека $\overrightarrow{AA'}=\mathbf{a}$, а од $\tau_{\mathbf{b}}(A')=A''$ следува дека $\overrightarrow{A'A''}=\mathbf{b}$. За векторот $\overrightarrow{AA''}$ ќе имаме:

$$\overrightarrow{AA''}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'A''}=\mathbf{a}+\mathbf{b},$$

од каде што следува дека

$$A'' = \tau_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(A).$$

Значи, за произволна точка A важи

$$(\tau_{\mathbf{a}} \circ \tau_{\mathbf{b}})(A) = \tau_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(A),$$

т.е. $\tau_{\mathbf{a}} \circ \tau_{\mathbf{b}} = \tau_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$.

Бидејќи $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$, ќе имаме:

$$\tau_{\mathbf{a}} \circ \tau_{\mathbf{b}} = \tau_{\mathbf{a}+\mathbf{b}} = \tau_{\mathbf{b}+\mathbf{a}} = \tau_{\mathbf{b}} \circ \tau_{\mathbf{a}},$$

т.е. за составување на транслации важи комутативниот закон.

319.8. Нека σ_S и σ_T се две централни симетрии, нека A е произволна точка и нека $\sigma_S(A)=A'$, $\sigma_T(A')=A''$. Тогаш $(\sigma_S \circ \sigma_T)(A)=A''$. Од $\sigma_S(A)=A'$ следува дека $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{SA'}$, а од $\sigma_T(A')=A''$ следува дека $\overrightarrow{A'T}=\overrightarrow{TA''}$. За векторот $\overrightarrow{AA''}$ ќе имаме:

$$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} = (\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SA'}) + (\overrightarrow{A'T} + \overrightarrow{TA''}) =$$
$$= 2\overrightarrow{SA'} + 2\overrightarrow{A'T} = 2(\overrightarrow{SA'} + \overrightarrow{A'T}) = 2\overrightarrow{ST},$$

од каде што следува дека

$$A'' = \tau_{2\overrightarrow{ST}}(A).$$

Од сето тоа следува дека за произволна точка A важи

$$(\sigma_S \circ \sigma_T)(A) = \tau_{2\overrightarrow{ST}}(A),$$

а тоа значи дека $\sigma_S \circ \sigma_T = \tau_{2\overrightarrow{ST}}$.

Бидејќи $\overrightarrow{ST} \neq \overrightarrow{TS}$, следува дека $\tau_{2\overrightarrow{ST}} \neq \tau_{2\overrightarrow{TS}}$, т.е. $\sigma_S \circ \sigma_T \neq \sigma_T \circ \sigma_S$, т.е. комутативниот закон за составување на централни симетрии не важи.

320.8. Нека се дадени централната симетрија σ_S и транслацијата $\tau_{\mathbf{a}}$. Треба да покажеме дека составите $\tau_S \circ \tau_{\mathbf{a}}$ и $\tau_{\mathbf{a}} \circ \sigma_S$ се централни симетрии.

Нека T е точка определена со $\overrightarrow{ST} = \frac{1}{2}\mathbf{a}$. Според 319. 8. IV, следува дека $\tau_{\mathbf{a}} = \sigma_S \circ \sigma_T$, па ќе имаме:

$$\sigma_S \circ \tau_{\mathbf{a}} = \sigma_S \circ (\sigma_S \circ \sigma_T) = (\sigma_S \circ \sigma_S) \circ \sigma_T = \varepsilon \circ \sigma_T = \sigma_T,$$

т.е. составот $\sigma_S \circ \tau_{\mathbf{a}}$ е централната симетрија σ_T.

Слично, ако T е точката определена со $\overrightarrow{TS} = \frac{1}{2}\mathbf{a}$, ќе имаме $\tau_{\mathbf{a}} \circ \sigma_S = \sigma_T$.

322.8. Нека ρ_1 и ρ_2 се ротации со центар O и агли α и β соодветно. Нека A е произволна точка и нека $A' = \rho_1(A)$, $A'' = \rho_2(A')$; тогаш $(\rho_1 \circ \rho_2)(A) = A''$.

Од $\rho_1(A)=A'$, следува дека $\overline{OA}=\overline{OA'}$ и $\sphericalangle A\overrightarrow{O}A'=\alpha$, а од $\rho_2(A')=A''$ следува дека $\overline{OA'}=\overline{OA''}$ и $\sphericalangle A'\overrightarrow{O}A''=\beta$. Значи, имаме:

$$\overline{OA}=\overline{OA'}=\overline{OA''} \tag{1}$$

и

$$\sphericalangle A\overrightarrow{O}A''=\sphericalangle A\overrightarrow{O}A'=\sphericalangle A'\overrightarrow{O}A''=\alpha+\beta. \tag{2}$$

Ако ρ е ротацијата со центар O и агол $\alpha+\beta$, тогаш од (1) и (2) следува дека $A''=\rho(A)$.

Според тоа, за произволна точка A важи

$$(\rho_1\circ\rho_2)(A)=\rho(A),$$

т.е. $\rho_1\circ\rho_2=\rho$.

323.8. Нека A, B се произволни точки и нека $A_1=\rho_1(A)$, $B_1=\rho_1(B)$, $A'=\rho_2(A_1)$, $B'=\rho_2(B_1)$. Тогаш имаме $\overline{A'B'}=\overline{A_1B_1}=\overline{AB}$.

а) Ако $\alpha+\beta\neq 0°$, тогаш $\overrightarrow{A'B'}\neq\overrightarrow{AC}$, па според 261. 6. IV, постои единствена ротација ρ, така што $\rho(A)=A'$ и $\rho(B)=B'$. Значи, $\rho_1\circ\rho_2=\rho$.

б) Ако $\alpha+\beta=0°$, тогаш $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$, па при транслацијата τ за вектор $\mathbf{a}=\overrightarrow{AA'}$, имаме $\tau(A)=A'$ и $\tau(B)=B'$. Значи, $\rho_1\circ\rho_2=\tau$.

325.8. Нека $\tau_{\mathbf{a}}$ е транслација и нека p и q се две паралелни прави, нормални на векторот $\mathbf{a}$ и на меѓусебно растојание $d=\frac{1}{2}|\mathbf{a}|$. Според 324. 8. IV, имаме $\sigma_p\circ\sigma_q=\tau_{\mathbf{a}}$ или $\sigma_q\circ\sigma_p=\tau_{\mathbf{a}}$.

326.8. Нека ρ е ротација со центар O и агол α, нека p и q се две прави што минуваат низ точката O и нека насочениот агол од p кон q е $\frac{\alpha}{2}$. Според 324. 8.IV, имаме $\sigma_p\circ\sigma_q=\rho$.

327.8. Бидејќи правите b и c се паралелни, составот $\sigma_b\circ\sigma_c$ е транслација τ за вектор $2\mathbf{a}$, каде што $\mathbf{a}$ е векторот:

1) со должина еднаква со растојанието меѓу b и c,
2) со правец нормален на b и c,
3) со насока од b кон c.

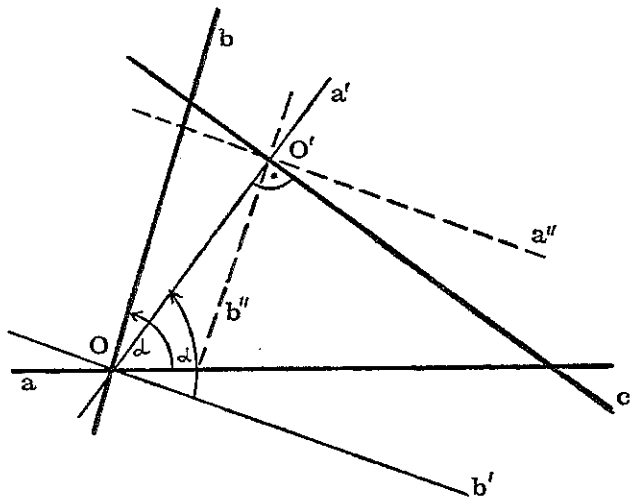
Транслацијата $\tau_{2\mathbf{a}}$ може да се претстави во облик $\sigma_a\circ\sigma_p$, каде што p е права, паралелна со a на растојание $|\mathbf{a}|$ и насоката на $\mathbf{a}$ е од a кон p. Според тоа, имаме:

$$\sigma_a\circ\sigma_b\circ\sigma_c=\sigma_a\circ(\sigma_b\circ\sigma_c)=\sigma_a\circ\tau_{2\mathbf{a}}=\sigma_a\circ(\sigma_a\circ\sigma_p)=$$
$$=(\sigma_a\circ\sigma_a)\circ\sigma_p=\varepsilon\circ\sigma_p=\sigma_p.$$

328.8. Бидејќи правите b и c се сечат во точката O составот $\sigma_b\circ\sigma_c$ е ротација ρ со центар O и агол 2α, каде што α аголот меѓу b и c насочен од b кон c. Ротацијата ρ, според 326. 8. IV, може да се напише во облик $\sigma_a \circ \sigma_p$, каде што p е права низ точката O и насочениот агол од a кон p е α. Според тоа, имаме:

$$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_a \circ (\sigma_b \circ \sigma_c) = \sigma_a \circ \rho = \sigma_a \circ (\sigma_a \circ \sigma_p) =$$
$$= (\sigma_a \circ \sigma_a) \circ \sigma_p = \varepsilon \circ \sigma_p = \sigma_p.$$

329.8. Овде може да се разгледаат два случаи и тоа, кога правите a, b и c формираат триаголник, или, пак, две од нив се паралелни, а третата ги сече. Ние ќе го разгледаме случајот кога правите a, b, c



Црт. IV. 103

образуваат триаголник (црт. IV.103). Нека a' е права низ $O = a \cap b$ нормална на c; нека b' е права низ O која со a' зафаќа агол α; нека a'' е права низ O' паралелна со b' и нека b'' е права низ O' нормална на a''. Тогаш имаме:

$$\sigma_a \circ \sigma_b = \rho_{O, 2\alpha} = \sigma_{b'} \circ \sigma_{a'}, \quad \sigma_{a'} \circ \sigma_c = \sigma_{O'} = \sigma_{a''} \circ \sigma_{b''}.$$

Сега ќе имаме:

$$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \rho_{O, 2\alpha} \circ \sigma_c = \sigma_{b'} \circ (\sigma_{a'} \circ \sigma_c) = \sigma_{b'} \circ \sigma_{O'} = \sigma_{b'} \circ \sigma_{a''} \circ \sigma_{b''}.$$

Составот $\sigma_{b'} \circ \sigma_{a''}$ е транслација τ чиј вектор е нормален на b' и a'', т.е. е паралелен со правата b'', па, значи, составот $\sigma_{b'} \circ \sigma_{a''} \circ \sigma_{b''}$ е коса симетрија.

331.8. Нека $a = AB$, $X \in a$, $X \neq A, B$, произволна точка и нека $\varphi(X) = X'$. Бидејќи $\varphi(A) = A$, $\varphi(B) = B$, следува дека $\varphi(a) = a$, па, значи, $X' \in a$. Распоредот на точките A, B и X се запазува при движењето φ, што значи дека двете тројки A, B, X и A, B, X' се со ист распоред на правата a. Од $\varphi(B) = B$ и $\varphi(X) = X'$ следува дека $\overline{BX} = \overline{BX'}$, а од тоа и претходното следува дека $X = X'$.

Според тоа, секоја точка од правата $a = AB$ е неподвижна за движењето φ.

333.8. Егзистенција на движењето φ е докажана во Учебникот, стр. 162. Останува да докажеме дека движењето φ е единствено.

Нека φ и φ_1 се движења, така што $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, $\varphi(C) = C'$, $\varphi_1(A) = A'$, $\varphi_1(B) = B'$, $\varphi_1(C) = C'$. Бидејќи φ_1^{-1} е движење, следува дека $\varphi_2 = \varphi \circ \varphi_1^{-1}$ е движење. Притоа имаме:

$$\varphi_2(A) = (\varphi \circ \varphi_1^{-1})(A) = \varphi_1^{-1}(\varphi(A)) = \varphi_1^{-1}(A') = A,$$

а слично и $\varphi_2(B) = B$, $\varphi_2(C) = C$. Значи, за движењето φ_2 трите неколинеарни точки A, B и C се неподвижни, па, според 332. 8. IV, следува дека $\varphi_2 = \varepsilon$, т.е. $\varphi \circ \varphi_1^{-1} = \varepsilon$, од каде што следува дека $\varphi = \varphi_1$.

324.8. Нека φ е произволно движење; тогаш φ е еднозначно определено со сликите A', B', C' на три неколинеарни точки A, B, C и, притоа, φ е:

— или осна симетрија σ_p, каде што p е симетралата на отсечката AA', ако $A \neq A'$;

— или составот $\sigma_p \circ \sigma_q$, каде што q е симетралата на отсечката B_1B', $B_1 = \sigma_p(B) \neq B'$;

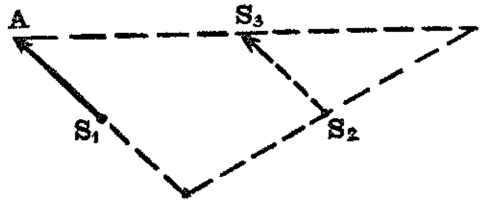
— или составот $\sigma_p \circ \sigma_q \circ \sigma_r$, каде што r е правата $A'B'$ (види 323. 8. IV и Учебникот, стр. 162).

Во првиот случај φ е осна симетрија; во вториот случај φ е или транслација или ротација (специјално централна симетрија); во третиот случај φ е осна симетрија или коса симетрија.

335.8. Нека σ_1, σ_2, σ_3 се централните симетрии со центри S_1, S_2 и S_3 соодветно. Бидејќи S_1 е средина на страната A_1A_2 ќе имаме $\sigma_1(A_1) = A_2$. Слично, добиваме дека $\sigma_2(A_2) = A_3$ и $\sigma_3(A_3) = A_1$. Според тоа, ќе имаме

$$(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3)(A_1) = A_1.$$

Составот $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ е централна симетрија со неподвижна точка A_1, што значи A_1 е нејзиниот центар.



Црт. IV. 104

Значи, за да го конструираме триаголникот $A_1A_2A_3$ доволно е да се најде центарот A_1 на централната симетрија $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$. Точката A_1 е определена со равенството $\overrightarrow{S_1A_1} = \overrightarrow{S_2S_3}$ (црт. IV.104).

336.8. Нека σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 и σ_5 се централните симетрии со центри S_1, S_2, S_3, S_4 и S_5 соодветно. Бидејќи S_1, S_2, S_3, S_4 и S_5 се средини на страните A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 и A_5A_1 соодветно, ќе имаме:

$$\sigma_1(A_1)=A_2,\ \sigma_2(A_2)=A_3,\ \sigma_3(A_3)=A_4,\ \sigma_4(A_4)=A_5,\ \sigma_5(A_5)=A_1,$$

од каде што добиваме дека

$$(\sigma_1\circ\sigma_2\circ\sigma_3\circ\sigma_4\circ\sigma_5)(A_1)=A_1.$$

Составот $\sigma=\sigma_1\circ\sigma_2\circ\sigma_3\circ\sigma_4\circ\sigma_5$ е централна симетрија (321. 8. IV) чиј центар е точката A_1

Значи, таков петаголник постои (и тоа само еден) и неговото теме A_1 е центарот на централната симетрија σ. Тоа е определено со равенството $\overrightarrow{S_1A_1}=\overrightarrow{S_2S_3}+\overrightarrow{S_4S_5}$, или, пак, на следниов начин.

Нека B_o е произволна точка и нека $\sigma_1(B_o)=B_1$, $\sigma_2(B_1)=B_2$, $\sigma_3(B_2)=B_3$, $\sigma_4(B_3)=B_4$, $\sigma_5(B_4)=B_5$. Тогаш

$$\sigma(B_o)=B_5.$$

Составот σ е централна симетрија со центар A_1, па, значи, A_1 ќе биде средината на отсечката B_oB_5.

338.8. Нека σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 се централните симетрии со центри S_1, S_2, S_3 и S_4 соодветно.

Да претпоставиме дека постои четириаголник $A_1A_2A_3A_4$, така што S_1, S_2, S_3 и S_4 се средини на страните A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и A_4A_1 соодветно. Тогаш имаме:

$$(\sigma_1\circ\sigma_2\circ\sigma_3\circ\sigma_4)(A_1)=A_1 \tag{1}$$

Составот $\sigma_1\circ\sigma_2\circ\sigma_3\circ\sigma_4$ е транслација τ за вектор $2(\overrightarrow{S_1S_2}+\overrightarrow{S_3S_4})$. Оваа транслација, според (1), има неподвижна точка, од што следува дека $\overrightarrow{S_1S_2}+\overrightarrow{S_3S_4}=\mathbf{o}$.

Да претпоставиме, сега, дека $\overrightarrow{S_1S_2}+\overrightarrow{S_3S_4}=\mathbf{o}$. Ако A е произволна точка и τ е транслацијата за вектор $2(\overrightarrow{S_1S_2}+\overrightarrow{S_3S_4})$, тогаш

$$\tau(A)=A.$$

Бидејќи $\tau=\sigma_1\circ\sigma_2\circ\sigma_3\circ\sigma_4$, ќе имаме

$$(\sigma_1\circ\sigma_2\circ\sigma_3\circ\sigma_4)(A)=A,$$

т.е. секоја точка од рамнината е неподвижна за составот $\sigma_1\circ\sigma_2\circ\sigma_3\circ\sigma_4$. Според тоа, ако $A_1=A$ и $\sigma_1(A_1)=A_2$, $\sigma_2(A_2)=A_3$, $\sigma_3(A_3)=A_4$, тогаш $\sigma_4(A_4)=A_1$, па $A_1A_2A_3A_4$ е четириаголник за кој S_1, S_2, S_3 и S_4 се средини на страните A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и A_4A_1 соодветно.

Од сето тоа следува дека постои таков четириаголник (и тоа бесконечно многу) ако и само ако $\overrightarrow{S_1S_2}+\overrightarrow{S_3S_4}=\mathbf{o}$.

340.8. Нека $k(O, r)$ е дадената кружница, а p_1, p_2 и p_3 дадените прави. Во кружницата k треба да се впише триаголник $A_1A_2A_3$, така што неговите страни се паралелни со правите p_1, p_2, p_3.

Да претпоставиме дека задачата е решена и $A_1A_2A_3$ е бараниот триаголник, при што $A_1A_2 \| p_1$, $A_2A_3 \| p_2$, $A_3A_1 \| p_3$. Ако a_1, a_2 и a_3 се прави низ O нормални p_1, p_2 и p_3 соодветно, тогаш a_1 е симетрала на страната A_1A_2, a_2 е симетрала на A_2A_3 и a_3 е симетрала на A_3A_1. Според тоа, ако σ_1, σ_2 и σ_3 се осните симетрии со оски a_1, a_2 и a_3 соодветно, тогаш

$$\sigma_1(A_1) = A_2, \ \sigma_2(A_2) = A_3, \ \sigma_3(A_3) = A_1,$$

од каде што добиваме дека

$$(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3)(A_1) = A_1.$$

Правите a_1, a_2 и a_3 минуваат низ точката O, па составот $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ е осна симетрија σ чија оска a минува низ точката O; следствено $A_1 \in a \cap k$.

Според тоа, ако a оската на осната симетрија $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$, ако $\{A_1, B_1\} = a \cap k$, и ако $A_2 = \sigma_1(A_1)$, $A_3 = \sigma_2(A_2)$, $B_2 = \sigma_1(B_1)$, $B_3 = \sigma_2(B_2)$, тогаш $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ се бараните триаголници.

Задачата има точно две решенија.

342.8. Задачата ќе ја решиме во случај кога рамностраните триаголници ABC_1 BCA_1 и CAB_1 се конструирани надвор од триаголникот ABC.

Нека ρ_1, ρ_2, ρ_3 се ротациите со центри O_1, O_2, O_3 соодветно и агол $120°$, или $-120°$, така што $\rho_1(A) = B$, $\rho_2(B) = C$, $\rho_3(C) = A$. Тогаш $(\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3)(A) = A$. Бидејќи $120° + 120° + 120° = 0°$ $(-120° - 120° - 120° = 0°)$, составот $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3$ е транслација. Но A е неподвижна точка за оваа транслација, па, значи, таа е идентичност, т.е. $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3 = \varepsilon$, а од таа следува дека $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_3^{-1}$. Значи, $\rho_1 \circ \rho_2$ е ротација со центар O_3 и агол $-120°$ или $120°$.

Ако $\rho_2(O_1) = O_1'$, $\rho_2(O_2') = O_2$, тогаш центарот O_3 на ротацијата $\rho_1 \circ \rho_2$ е пресек од симетралите на отсечките O_1O_1' и $O_2'O_2$. Тие симетрали се, значи, правите O_2O_3 и O_1O_3, коишто заафаќаат со правата O_1O_2 агол од $60°$. Следствено, триаголникот $O_1O_2O_3$ има два агла по $60°$, т.е. тој е рамностран.

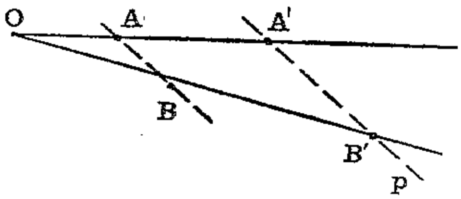
ГЛАВА V

ТРАНСФОРМАЦИИ НА СЛИЧНОСТ

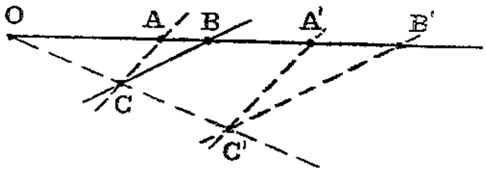
2.1. Ќе ги разгледаме двата случаја:

— точката B не е колинеарна со O и A.
— точката B е колинеарна со O и A.

Нека B е произволна точка што не е колинеарна со точките O и A (црт. V.1). Од $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$, според дефиницијата на хомотетија, следува дека $A' = \chi_{O,k}(A)$. Точката $B' = \chi_{O,k}(B)$ ги задоволува условите $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. Од тоа следува дека B' лежи на правата OB и на правата p што минува низ A' и е паралелна со правата AB. Значи, $B' = OB \cap p$ (црт. V.1).



Црт. V. 1



Црт. V. 2

Нека, сега, точката B лежи на правата OA (црт. VI.2). Да избереме точка C што не лежи на правата OA и, како во претходниот случај, да ја најдеме точката $C' = \chi_{O,k}(C)$. Точката B' можеме, сега, да ја најдеме исто како во претходниот случај, заменувајќи ја точката A со точката C (црт. V.2).

4.1. Нека $\chi_{O,k}(O) = O'$; тогаш, според дефиницијата на хомотетија, имаме $\overrightarrow{OO'} = k\overrightarrow{OO} = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$, од каде што следува дека $O' = O$ т.е. O е неподвижна точка за хомотетија $\chi_{O,k}$.

Да докажеме дека O е единствената неподвижна точка. Нека, $k \neq 1$, A произволна точка различна од O и нека $A' = \chi_{O,k}(A)$. Тогаш $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$. Бидејќи $k \neq 1$, следува дека $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA'}$ се различни вектори со ист почеток, па, значи, $A' \neq A$.

Според тоа, при $k \neq 1$, O е единствената неподвижна точка за хомотетијата $\chi_{O,k}$.

5.1. Ќе ги разгледаме двата случаја: а) O, A, A' се колинеарни и б) O, A, A' не се колинеарни.

а) Ако O, A, A' се колинеарни, тогаш постои број k, таков што $\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}$, што значи дека постои хомотетија $\chi_{O,k}(A)=A'$; од $\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}$ е јасно дека таа е единствена.

б) Ако O, A, A' не се колинеарни, тогаш векторите $\overrightarrow{OA'}$ и $\overrightarrow{OA}$ не се колинеарни, т.е. $\overrightarrow{OA'}\neq k\overrightarrow{OA}$ за кој било број k, па не постои хомотетија χ со центар O при која A и A' си соодветствуваат.

Во случајот кога постои хомотетија χ со центар O и притоа $\chi(A)=A'$, тогаш $\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}$ за некој број k, од каде што следува дека O, A, A' се колинеарни.

8.1. Да претпоставиме дека постои хомотетија χ, таква што $\chi(A)=C$, $\chi(B)=D$. Нека O е центарот, а k коефициентот на таа хомотетија. Тогаш $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OB}$, од каде што добиваме

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OB}-k\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=k\overrightarrow{AB}.$$

Обратно, да претпоставиме дека за точките A, B, C и D постои реален број $k\neq 0{,}1$, така што $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$. Нека O е точката што го задоволува условот $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}$. Тогаш имаме

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{AB}=k(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})=k\overrightarrow{OB}.$$

Ако χ е хомотетијата со центар O и коефициент k, тогаш од $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OB}$, следува дека $\chi(A)=C$, $\chi(B)=D$. Значи, постои таква хомотетија.

При $k=1$ имаме $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$, па ако $\mathbf{a}=\overrightarrow{AC}$, тогаш имаме $\tau_{\mathbf{a}}(A)=C$ $\tau_{\mathbf{a}}(B)=D$, т.е. во овој случај постои транслација со тоа својство.

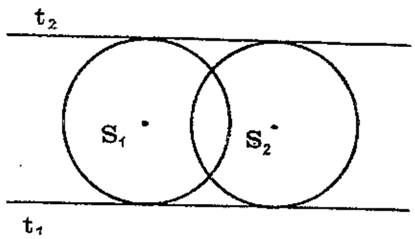
9.1. Нека $A_1=\chi_1(A)$ и $A_2=\chi_2(A_1)$. Тогаш $\overrightarrow{OA_1}=k_1\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA_2}=k_2\overrightarrow{OA}$, од каде што добиваме дека $\overrightarrow{OA_2}=k_1k_2\overrightarrow{OA}$. Значи, A_2 можеме да ја добиеме од A со хомотетијата χ, т.е. $A_2=\chi(A)$. Од ова може да се заклучи дека $\chi_1\circ\chi_2=\chi$. Бидејќи $k_1k_2=k_2k_1$, следува дека важи $\chi_2\circ\chi_1=\chi_1\circ\chi_2$.

10.1 Од $A_1=\chi_1(A)$ и $B_1=\chi_2(B)$, според 8. 1. V, слеудва дека $\overrightarrow{A_1B_1}=k\overrightarrow{AB}$, а од $A_2=\chi_2(A_1)$ и $B_2=\chi_2(B_1)$, пак според 8. 1. V, следува дека $\overrightarrow{A_2B_2}=k_2\overrightarrow{AB}$. Според тоа, $\overrightarrow{A_2B_2}=k_1k_2\overrightarrow{AB}$.

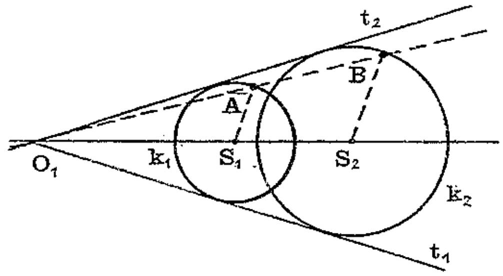
Според 8. 1. V, бидејќи $k_1k_2\neq 1$, следува дека постои хомотетија χ, така што $A_2=\chi(A)$ и $B_2=\chi(B)$, т.е. при $O_1\neq O_2$ и $k_1k_2\neq 1$, составот $\chi_1\circ\chi_2$ е хомотетија. Центарот O на хомотетијата $\chi=\chi\circ\chi_2$ може да се најде на следниов начин. Нека $\chi_2(O_1)=O_1'$ и $\chi_1(O_2')=O_2$; тогаш $\chi(O_1)=$

$= \chi_1 \circ \chi_2(O_1) = \chi_2(\chi_1(O_1)) = \chi_2(O_1) = O_1'$, $\chi(O_2') = \chi_1 \circ \chi_2(O_2') = \chi_2(\chi_1(O_2')) = \chi_2(O_2) = O_2$, од каде што следува дека $O = O_1O_1' \cap O_2'O_2$. Уште повеќе, од $\chi_2(O_1) = O_1'$ следува дека точката O лежи и на правата O_1O_2, т.е. трите центри O_1, O_2 и O се колинеарни.

25.1. Нека $k_1(S_1, r_1)$ и $k_2(S_2, r_2)$ се две кружници што се сечат. Бидејќи k_1 и k_2 се сечат тие имаат само две заеднички тангенти (надворешните). Тие или се паралелни со централната линија S_1S_2 (ако $r_1 = r_2$, црт. V.3) или, пак, минуваат низ надворешниот центар на сличност O_2. Нека $r_1 \neq r_2$ и нека S_1A и S_2B се два паралелни радиуси на k_1 и k_2 соодветно од иста страна на централната линија S_1S_2 (црт. V.4). Тогаш $O_1 = AB \cap S_1S_2$, а заедничките тангенти t_1 и t_2 се тангентите на k_1 повлечени од O_1.

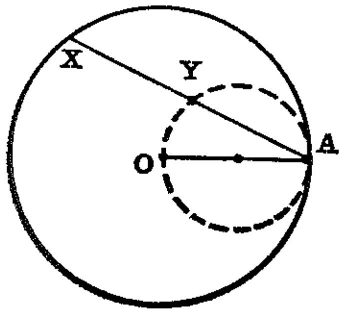


Црт. V. 3

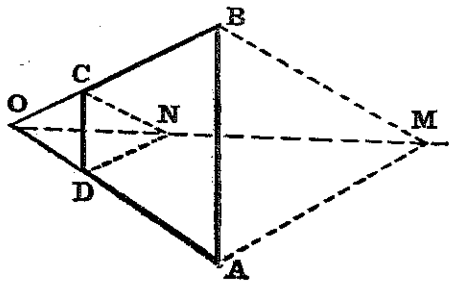


Црт. V. 4

30.1. Нека AX е произволна тетива на кружницата (O, r) и нека Y е нејзината средина (црт. V.5). Бидејќи $\overline{AY} = \frac{1}{2}\overline{AX}$, следува дека $Y = \chi_{A,1/2}(X)$, па бараното геометриско место ќе биде сликата од кружницата (O, r) при хомотетијата $\chi_{A,1/2}$, т.е. кружница со дијаметар отсечката OA.



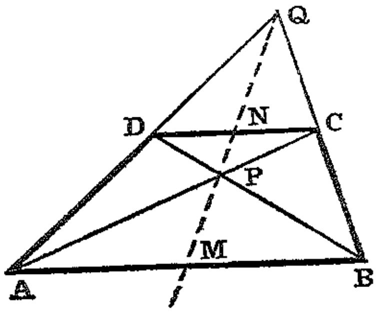
Црт. V. 5



Црт. V. 6

32.1. Нека рамностраните триаголници ABM и DCN се расположени, како, на пример, на црт. V.6. Ако важи $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$, тогаш важи и $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{DN}$, т.е. при хомотетијата χ со центар O и коефициент k, ќе имаме $\chi(D)=A$, $\chi(C)=B$ и $\chi(N)=M$. Од $\chi(N)=M$ следува дека точките O, M и N се колинеарни.

34.1. Бидејќи $\overline{QD}:\overline{QA}=\overline{QC}:\overline{QD}=\overline{DC}:\overline{AB}$, следува дека при хомотетијата χ_1 со центар Q и коефициент $\overline{DC}:\overline{AB}$ ќе имаме $\chi_1(A)=D$, $\chi_1(B)=C$. Значи, со хомотетијата χ_1 отсечката AB се пресликува во отсечката DC, па следствено средината M на AB ќе се преслика во средината N на DC, т.е. $\chi_1(M)=N$, од каде што следува дека точките Q, M и N се колинеарни.

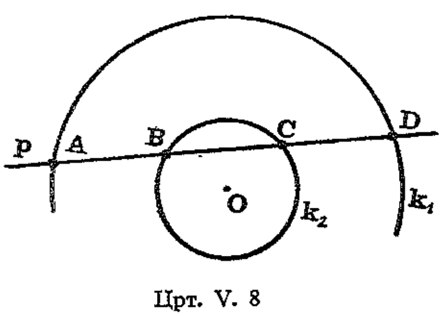


Црт. V. 7

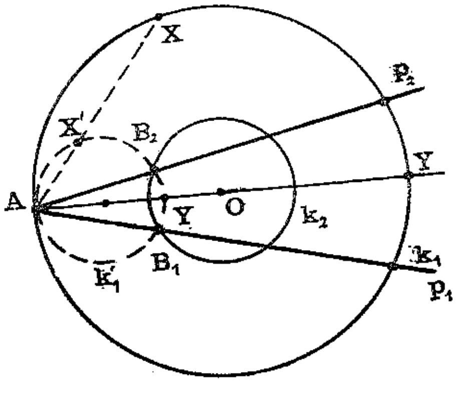
На сличен начин добиваме дека $\chi_2(M)=N$, каде што χ_2 е хомотетијата со центар P и коефициент $-\frac{\overline{DC}}{\overline{AB}}$, од каде што следува дека точките P, M и N се колинеарни.

Според тоа, точките M, N, P и Q се колинеарни.

38.1. Да претпоставиме дека задачата е решена и p е бараната права (црт. V.8). Тогаш $\overline{AB}:\overline{AD}=1:3$, па при хомотетијата χ со центар A и коефициент $1:3$ точката D ќе се преслика во точката B, т.е. точката B ќе лежи на кружницата $\chi(k_1)$. Според тоа, $B\in\chi(k_1)\cap k_2$.



Црт. V. 8



Црт. V. 9

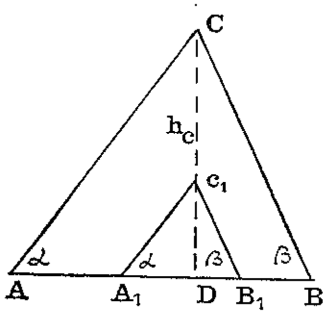
Следствено, ако фиксираме една точка A од кружницата k_1 и $B\in\chi(k_1)\cap k_2$, тогаш правата $p=AB$ (црт. V.9).

Да забележиме дека задачата може да има или бесконечно многу решенија или, пак, ниедно и тоа:

— ако $r_1 \leqslant 3r_2$, тогаш задачата има бесконечно многу решенија;
— ако $r_1 > 3r_2$, тогаш задачата нема решение.

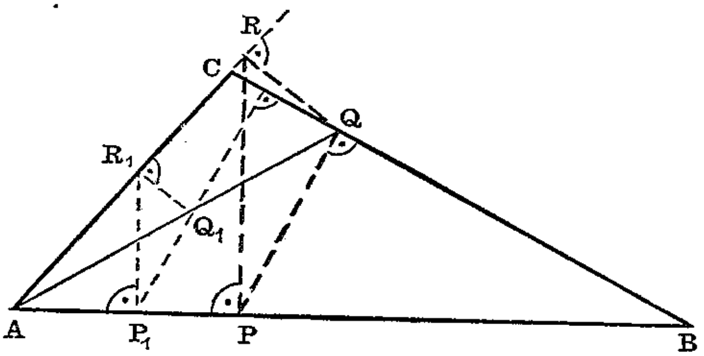
40.1. Да претпоставиме дека задачата е решена и ABC е бараниот триаголник (црт. V. 10). Ако $A_1B_1C_1$ е произволен триаголник со агли α и β, тогаш триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ се хомотетични со центар точка D.

Според тоа, ако конструираме произволен триаголник $A_1B_1C_1$ со агли α и β и ако χ е хомотетија со центар D (подножјето на висината спуштена од C_1) и коефициент $h_c : \overline{C_1D}$, тогаш бараниот триаголник ABC е слика од $A_1B_1C_1$ при хомотетијата χ.



Црт. V. 10

44.1. Да претпоставиме дека задачата е решена и PQR е бараниот триаголник (црт. V.11), така што P, Q и R лежат на страните AB, BC и CA соодветно (или нивните продолженија) и $PQ \perp BC$, $QR \perp CA$, $RP \perp AB$. Ако χ е хомотетија со центар A и некој коефициент $k \neq 1$,

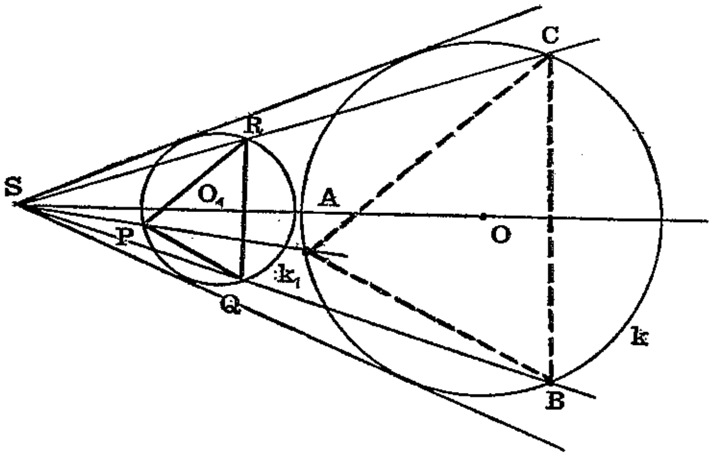


Црт. V. 11

тогаш триаголникот PQR ќе се преслика во триаголникот $P_1Q_1R_1$, така што $P_1 \in AB$, $R_1 \in AC$, $P_1Q_1 \perp BC$, $Q_1R_1 \perp CA$ и $R_1P_1 \perp AB$, но точката Q_1 нема да лежи ни правата BC. Триаголникот $P_1Q_1R_1$ можеме да го конструираме со избор на произволна точка P_1 од AB.

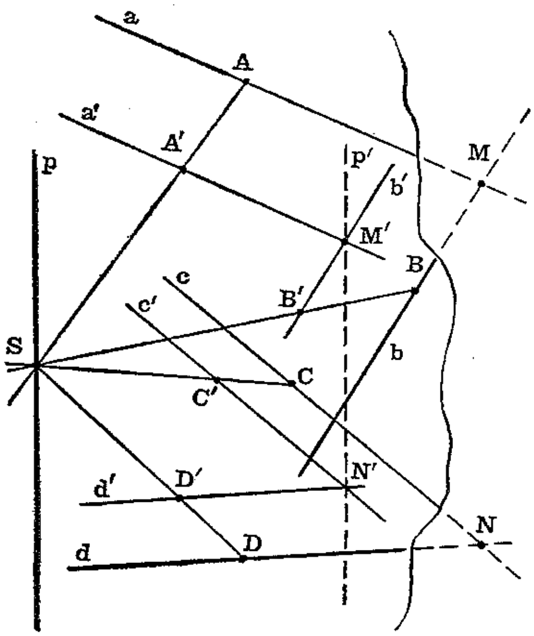
Според тоа, ако $P_1Q_1R_1$ е конструиран, тогаш $Q = AQ_1 \cap BC$.

47.1. Нека $k_1(O_1, r_1)$ е опишаната кружница околу триаголникот PQR и нека S е центар на сличност на кружниците k и k_1 (црт. V.12). Бараниот триаголник ABC е хомотетичен со PQR, зашто при хомотетијата χ со центар S и коефициент $r : r_1$, триаголникот PQR се пресликува во триаголникот ABC.



Црт. V. 12

49.1. За да можеме да ја нацртаме правата p, доволно е да нацртаме произволна права p_1, којашто е паралелна со „недостижната" права MN. Бидејќи при секоја хомотетија права се пресликува во права паралелна со

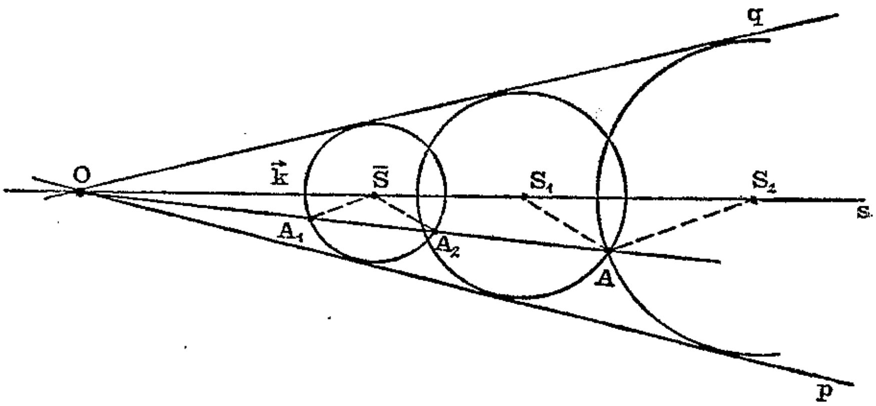


Цр. V. 13

неа, треба да избереме таква хомотетија χ, при која точките $M' = \chi(M)$ и $N' = \chi(N)$ ќе се наоѓаат на листот на кој цртаме. Во тој случај $p_1 = M'N'$.

Според тоа, нека A е точка од правата a и A' точка од SA, што лежи меѓу S и A, (црт. V.13) а χ нека биде хомотетијата со центар S и коефициент $\overline{SA'} : \overline{SA}$. Ако $\chi(a) = a'$, $\chi(b) = b'$, $\chi(c) = c'$, $\chi(d) = d'$, тогаш $M' = \chi(M) = a' \cap b'$, $N' = \chi(N) = c' \cap d'$.

50.1. Нека $k(S, r)$ е бараната кружница и нека $O = p \cap q$. Центарот S ќе лежи на симетралата s на оној агол, образуван од p и q, во кој лежи точката A. Ако χ е хомотетија со центар O и некој коефициент $k \neq 1$, тогаш $\chi(p) = p$, $\chi(q) = q$, а $\chi(k)$ ќе биде некоја кружница $\overline{k}$ што ги допира правите p и q. Кружницата $\overline{k}$ може да се конструира, а потоа $k = \chi^{-1}(\overline{k})$.



Црт. V. 14

Според тоа, нека s е симетралата на аголот меѓу p и q во кој лежи точката A, $\overline{S}$ точка од s и нека $\overline{k}$ е кружницата со центар во $\overline{S}$ и ги допира правите p и q. Ако $OA \cap \overline{k} = \{A_1, A_2\}$ и ако χ_i е хомотетијата со центар O и коефициент $\overline{OA} : \overline{OA_i}$, $i = 1,2$, тогаш кружниците $\chi_1(\overline{k})$ и $\chi_2(\overline{k})$ се бараните. Задачата има две решенија.

Случаите кога $p \parallel q$, или A лежи на една од правите p и q разгледај ги сам. Да забележиме, само, дека во случајот $p \parallel q$ задачата може да има две или ниедно решение, а во случајот кога $A \in p$ или $A \in q$, задачата има само едно решение.

51.1. Нека k е бараната кружница, Бидејќи k минува низ точките A и B центарот S на k ќе лежи на симетралата s од отсечката AB, па, значи, $\sigma_s(k) = k$. Бидејќи, пак, k ја допира правата p и $\sigma_s(k) = k$, кружницата ќе ја допира и правата $q = \sigma_s(p)$. Следствено, задачата се сведува на 50. 1. V, земајќи ги правите p, $q = \sigma_s(p)$ и точката A.

Задачата може да има две, едно или ниедно решение и тоа:

— ако точките A и B лежат на различни страни од правата p, задачата нема решение;

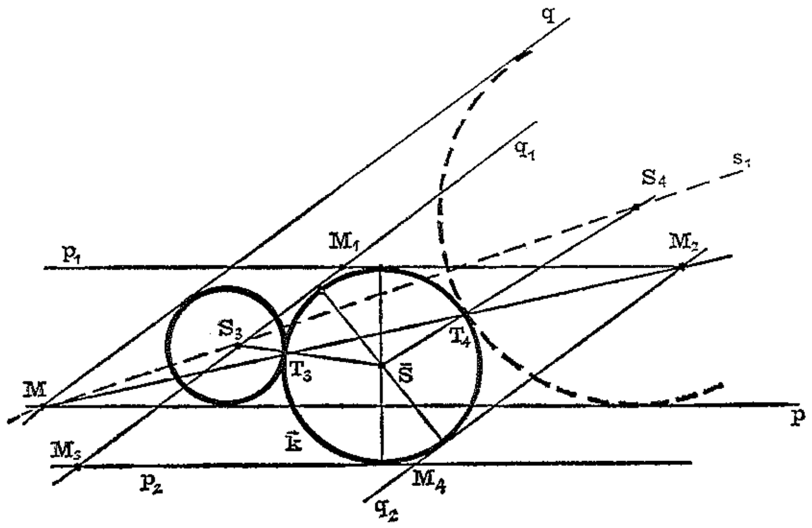
— ако правата p е паралелна на AB, задачата има единствено решение;

— ако точките A, B лежат на иста страна на правата p и правата p не е паралелна на AB, задачата има две решенија.

52.1. Нека k е бараната кружница. Центарот S на k ќе лежи на една од симетралите s_1, s_2 на аглите образувани од правите p и q.

Нека T е допирната точка на $\bar{k}$ и k; тогаш точката T е центар на сличност за k и $\bar{k}$, па, значи, постои хомотетија χ со центар во точката T, таква што $\chi(k) = \bar{k}$. Правите p, q се тангенти на кружницата k, па правите $p' = \chi(p)$ и $q' = \chi(q)$ ќе бидат тангенти на кружницата $\bar{k}$, паралелни со p и q соодветно. Ако $M = p \cap q$, и $M' = p' \cap q'$, тогаш $\chi(M) = M'$. Точките T, M и M' се колинеарни, па, значи, $T \in MM' \cap \bar{k}$. На крајот, за центарот S на кружницата k, имаме $S = \bar{S}_1 T \cap s_1$ или $S = \bar{S}_2 T \cap s_2$.

Според тоа, нека p_1 и p_2 се тангентите на $\bar{k}$, паралелни со p, q_1 и q_2 тангентите на $\bar{k}$, паралелни со q и нека $M_1 = p_1 \cap q_1$, $M_2 = p_1 \cap q_2$, $M_3 = p_2 \cap q_1$ и $M_4 = p_2 \cap q_2$. Ако $\{T_1, T_2\} = MM_1 \cap \bar{k}$, $\{T_3, T_4\} = MM_2 \cap \bar{k}$, $\{T_5, T_6\} = MM_3 \cap \bar{k}$ и $\{T_7, T_8\} = MM_4 \cap \bar{k}$, тогаш точките $S_i = s_1 \cap \bar{S} T_i$, $i = 1, 2, \ldots, 8$, ќе бидат центрите на бараните кружници k_1, k_2, $k_3, \ldots$, k_8.



Црт. V. 15

На црт. V.15 правите MM_1 и MM_3 не ја сечат кружницата $\bar{k}$, па во овој случај задачата има 4 решенија; конструирани се само кружниците k_3 и k_4.

Случајот $p \parallel q$, разгледај го сам. Да забележиме, само, дека во овој случај задачата може да има, две, едно, или ниедно решение.

58.2. Нека ψ_1 е сличност со коефициент k_1, ψ_2 сличност со коефициент k_2 и нека $\psi = \psi_1 \circ \psi_2$. Треба да докажеме дека ψ е, исто така, сличност.

За таа цел, нека A и B се две произволни точки и нека $A'=\psi_1(A)$, $B'=\psi_1(B)$, $A''=\psi_2(A')$, $B''=\psi_2(B')$. Тогаш $A''=(\psi_1 o \psi_2)(A)$, $B''=(\psi_1 o \psi_2)(B)$. Од $A'=\psi_1(A)$, $B'=\psi_1(B)$, следува дека $\overline{A'B'}=k_1\overline{AB}$, а од $A''=\psi_2(A')$, $B''=\psi_2(B')$, следува дека $\overline{A''B''}=k_2\overline{A'B'}$. Според тоа, имаме:

$$\overline{A''B''}=k_2\overline{A'B'}=k_2k_1\overline{AB},$$

т.е. ψ е сличност со коефициент k_1k_2.

Сличноста $\psi=\psi_1 o \psi_2$ е движење ако и само ако $k_1k_2=1$.

67.2. Нека B'' е точка од полуправата $A'B'$, така што $\overline{A'B''}=\overline{AB}$, а C'' точка од полуправата $A'C'$, така што $\overline{A'C''}=\overline{AC}$. Тогаш триаголниците ABC и $A'B''C''$ се складни, а триаголниците $A'B'C'$ и $A'B''C''$, се хомотетични со центар A'. Според тоа, постои движење φ, така што $\varphi(A)=A'$, $\varphi(B)=B''$, $\varphi(C)=C''$ и постои хомотетија χ, така што $\chi(A')=A'$, $\chi(B'')=B'$, $\chi(C'')=C'$. Составот $\varphi o \chi$ е сличност и, притоа, имаме:

$$(\varphi o \chi)(A)=\chi(\varphi(A))=\chi(A')=A',$$
$$(\varphi o \chi)(B)=\chi(\varphi(B))=\chi(B'')=B',$$
$$(\varphi o \chi)(C)=\chi(\varphi(C))=\chi(C'')=C',$$

т.е. постои барем една сличност $\psi=\varphi o \chi$, така што $\psi(A)=A'$, $\psi(B)=B'$, $\psi(C)=C'$.

Нека, сега, ψ_1 е произволна сличност, така што $\psi_1(A)=A'$, $\psi_1(B)=B'$ и $\psi_1(C)=C'$. Бидејќи $\psi_1{}^{-1}$ е сличност, следува дека составот $\psi o \psi_1{}^{-1}$ е, исто така, сличност. Притоа имаме:

$$\psi o \psi_1{}^{-1}(A)=\psi_1{}^{-1}(\psi(A))=\psi_1{}^{-1}(A')=A,$$
$$\psi o \psi_1{}^{-1}(B)=\psi_1{}^{-1}(\psi(B))=\psi_1{}^{-1}(B')=A,$$
$$\psi o \psi_1{}^{-1}(C)=\psi_1{}^{-1}(\psi(C))=\psi_1{}^{-1}(C')=C,$$

од каде што следува дека сличноста $\psi o \psi_1{}^{-1}$ е движење, а според 332. 8. IV, следува дека $\psi o \psi_1{}^{-1}=\varepsilon$, т.е. $\psi=\psi_1$.

Од сето тоа, следува дека постои единствената сличност ψ, така што $\psi(A)=A'$, $\psi(B)=B'$, $\psi(C)=C'$, Да забележиме дека, уште повеќе, секоја сличност е состав од движење и хомотетија.

68.2. Нека ψ е произволна сличност. Според 67. 2. V, ψ е еднозначно определена со два слични триаголника, па значи, ψ е состав на движења φ и хомотетија χ (види го доказот за згзистенција на сличност, задача 67. 2. V), т.е. $\psi=\varphi o \chi$. Но, φ е или транслација или централна симетрија или ротација или осна симетрија или коса симетрија, па:

— ако $\varphi=\tau_a$, тогаш ψ е хомотетија;

— ако $\varphi=\sigma_O$, тогаш ψ е хомотетија или транслација;

— ако φ е коса симетрија, тогаш ψ е состав на осна симетрија и хомотетија.

Од сето тоа следува дека ψ е една од следниве сличности: движење, хомотетија, состав на ротација и хомотетија, состав на осна симетрија и хомотетија.

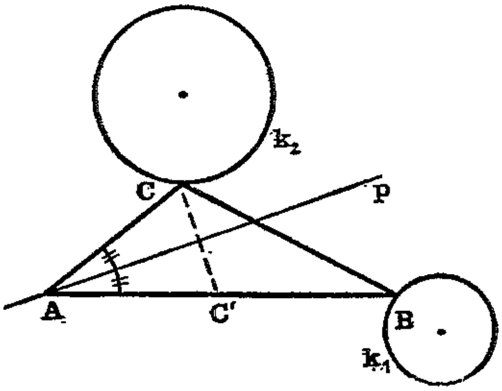
69.2. Нека T е тежиштето на триаголникот ABC. При хомотетијата χ_1 со центар T и коефициент $-1/2$ имаме $\chi_1(A)=A_1$, $\chi_1(B)=B_1$, $\chi_1(C)=C_1$. При хомотетијата χ_2 со центар P и коефициент 2 имаме $\chi_2(A_1)=A_2$, $\chi_2(B_1)=B_2$, $\chi_2(C_1)=C_2$. Значи, $\chi_1 o \chi_2(A)=A_2$, $\chi_1 o \chi_2(B)=B_2$ и $\chi_1 o \chi_2(C)=C_2$. Бидејќи $-\frac{1}{2}\cdot 2=-1\neq 1$, составот $\chi_1 o \chi_2$ е централна симетрија σ_M. Според тоа, $\sigma_M(A)=A_2$, $\sigma_M(B)=B_2$, $\sigma_M(C)=C_2$, од каде што следува дека отсечките AA_2, BB_2 и CC_2 минуваат низ точката M, која што ги преполовува.

Уште повеќе, триаголниците ABC и $A_2B_2C_2$ се складни.

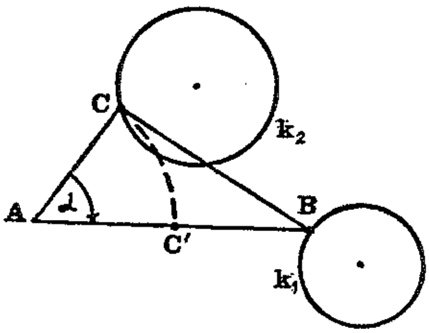
70.2. Да претпоставиме дека задачата е решена и ABC е бараниот триаголник (црт. V.16) Правата p е симетрала на аголот $\alpha=\sphericalangle A$, па, значи, точката $C'=\sigma_p(C)$ лежи на правата AB и, притоа, важи $\overline{AC}=\overline{AC'}$. Односот $\overline{AB}:\overline{AC'}=\overline{AB}:\overline{AC}$ е познат, па ако χ е хомотетија со центар A и коефициент $\overline{AB}:\overline{AC}$, тогаш $\chi(C')=B$. Точката C лежи на кружницата k_2, па следува дека C' лежи на кружницата $\sigma_p(k_2)$, а од тоа следува дека точката B лежи на кружницата $\chi(\sigma_p(k_2))$.

Следствено, $B\in(\sigma_p o \chi)(k_2)\cap k_1$, со што задачата е решена, зашто $C=(\chi^{-1} o \sigma_p)(B)$.

Задачата може да има две, едно или ниедно решение.



Црт. V. 16



Црт. V. 17

71.2. Да претпоставиме дека задачата е решена и ABC е бараниот триаголник (црт. V.17). Ако ρ е ротација со центар A и агол $\alpha=\sphericalangle \overrightarrow{CAB}$, тогаш точката C' ќе лежи на правата AB и, притоа, важи $\overline{AC}=\overline{AC'}$. Односот $\overline{AB}:\overline{AC'}=\overline{AB}:\overline{AC}$ е познат, па ако χ е хомотетија со центар A и коефициентот $\overline{AB}:\overline{AC}$, тогаш $\chi(C')=B$. Од $C\in k_2$ следува дека $C'\in\rho(k_2)$, а од тоа, пак, следува дека $B\in\chi(\rho(k_2))$.

Следствено, $B\in(\rho o \chi)(k_2)\cap k_1$, со што задачата е решена, зашто $C=(\chi^{-1} o \rho^{-1})(B)$.

Задачата може да има две, едно или ниедно решение.

ГЛАВА VI

ЌОШЕ И ПОЛИЕДРИ

5.1. Ако сите точки од фигурата **F** се колинеарни, тогаш заклучокот е јасен.

Нека фигурата **F** има барем четири неколинеарни точки. Три од нив секако се неколинеарни; да ги означиме со A, B, C. Тие точки определуваат (еднозначно) една рамнина П. Според условот на задачата, кои било четири точки од **F** лежат во една рамнина, па, ако $X \in \mathbf{F}$, $X \neq A, B, C$, тогаш $X \in П$, т.е. фигурата **F** е рамнинска.

8.1. Ако правата p ги сече правит a, b, c во точката M, тогаш сите четири прави минуваат низ иста точка.

Нека p не минува низ M. Нека p ги сече правите a, b, c во точките A, B, C соодветно. Точките A, B и M определуваат рамнина Σ_1 во која лежат правите a, b и p. Точките B, C и M определуваат рамнина Σ_2 во која лежат правите b, c и p. Рамнините Σ_1 и Σ_2 содржат две различни прави, b и p, па според тоа, тие се совпаѓаат. Следствено, правите a, b, c и p лежат во иста рамнина.

9.2. Една рамнина Σ за да биде нормална на правата a и да минува низ точката A, доволно е да содржи две прави b и c што се нормални на правата a и што минуваат низ точката A.

За да докажеме дека постои барем една рамнина Σ што минува низ точката A и што е нормална на правата a, ќе ги разгледаме двата случаи:

1) $A \in a$. Нека $П_1$ и $П_2$ се две произволни рамнини низ правата и нека p_1 и p_2 се правите во нив што минуваат низ A и се нормални на правата a (направи цртеж). Тогаш рамнината Σ, определена со правите p_1 и p_2, е нормална на правата a и минува низ точката A.

2) $A \notin a$. Нека $П_1$ е рамнината определена со правата a и точката A, а $П_2$ произволна рамнина низ правата a. Во рамнината $П_1$ повлекуваме права p_1 низ A, нормална на a, а потоа низ точката $B = a \cap p_1$ повлекуваме права p_2 во рамнината $П_2$ нормална на правата a (направи цртеж). Тогаш рамнината Σ, определена со правите p_1 и p_2, минува низ точката A и е нормална на правата a.

Останува да докажеме дека рамнината Σ е единствена.

Да претпоставиме дека П е друга рамнина што минува низ точката A и е нормална на правата a. Тогаш рамнините П и Σ се сечат во права p што минува низ точката A и е нормална на правата a. Според тоа, во рамнината П би лежеле две прави p и p_1 што минуваат низ точката A и што се нормални на правата a, а тоа не е можно. Следствено, претпоставката е погрешна, т.е. рамнината Σ е единствена.

10.2. За да докажеме дека низ точката A минува барем една права a што е нормална на рамнината Σ, ќе ги разгледаме случаите:

1) $A \in \Sigma$. Нека p и q се две заемно нормални прави во Σ што минуваат низ точката A и нека Π_1 е рамнината низ p нормална на правата q (направи цртеж). Тогаш правата $a \in \Pi_1$ што минува низ точката A и е нормална на правата p, ќе биде нормална и на рамнината Σ. (Образложи го тоа!).

2) $A \notin \Sigma$. Нека p е произволна права од Σ, а Π_2 рамнината определена со правата p и точката A. Во рамнината Π_2 конструираме права q што минува низ точката A и е нормална на p, а во рамнината Σ права r што минува низ точката $B = p \cap q$ и е нормална на p. На крајот, во рамнината Π_3, определена со правата r и точката A, повлекуваме права a што минува низ точката A и е нормална на правата r. Тогаш правата a минува низ точката A и е нормална на рамнината Σ. (Докажи го тоа!)

Останува да докажеме дека правата a е единствена.

За таа цел, нека b е друга права низ точката A што е нормална на рамнината Σ. Правите a и b сечат, па нека П е рамнината определена со правите a и b, а c пресечната права на рамнините П и Σ. Значи, правите a и b лежат во П, минуваат низ точката A и се нормални на една иста права $c \in \Pi$, коешто не е можно. Според тоа, претпоставката дека b е друга права низ A нормална на Σ е погрешна, т.е. правата a е единствена.

12.2. Нека Г е бараното геометриско место на точки. Јасно е дека, ако O е средината на отсечката AB, тогаш $O \in \Gamma$. Ако x е произволна права што минува низ O и е нормална на правата $a = AB$, тогаш секоја точка X од правата x е, исто така, еднакво оддалечена од точките A и B. Според 11. 2. VI, овие прави x определуваат една рамнина. Следствено, бараното геометриско место Г е рамнина што минува низ средината O на отсечката AB и е нормална на правата AB. (Оваа рамнина се вика *симетрална рамнина* на отсечката AB.)

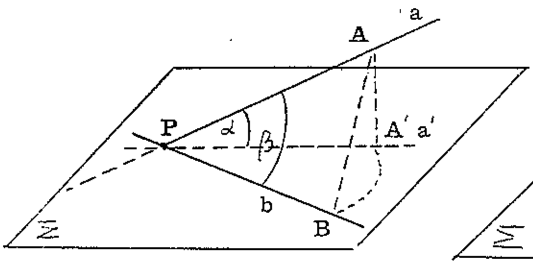
14.2. Триаголниците AOP, BOP и COP се правоаголни со заедничка катета OP и $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$. Значи, тие се складни, па $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$.

15.2. Рамнините Σ_1 и Σ_2 се симетрални рамнини на отсечките BC и CA. Бидејќи отсечките BC и CA не се паралелни, следува дека рамнините Σ_1 и Σ_2 се сечат; нека $p = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ и нека P е произволна точка од p. Точката P лежи во Σ_1, па, значи, е еднакво оддалечена од B и C; таа лежи и во Σ_2, па, значи, е еднакво оддалечена од C и A. Според тоа, точката P е еднакво оддалечена од A и B, па, значи, $P \in \Sigma_3$, т.е. Σ_3 минува, исто така, низ правата p.

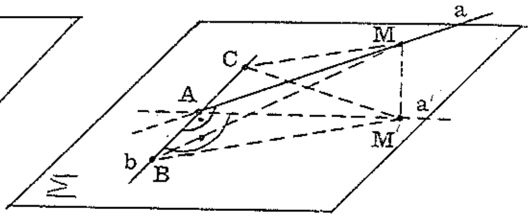
20.2. Нека a' е проекцијата од a врз Σ, A произволна точка од a, A' проекцијата од A врз Σ и нека B е точка од b, така што $\overline{PB}=\overline{PA'}$ (црт. VI.12). Од триаголниците PAA' и PAB имаме: $\overline{AA'} \leqslant \overline{AB}$, $\overline{PA'}=\overline{PB}$ и PA е заедничка страна, па, значи, $\alpha = \sphericalangle APA' \leqslant \sphericalangle APB = \beta$.

23.2. Нека x е произволна права низ точката A што зафаќа агол α со рамнината Σ и Γ_α е геометриското место на точките $x \cap \Sigma$. Според 22. 2. VI, Γ_α е кружница со центар во проекцијата A' на точката A врз Σ. Ако $\{B_1, B_2\} = b \cap \Gamma_\alpha$, тогаш правите AB_1 и AB_2 се бараните.

Задачата може да има две, едно или ниедно решение.



Црт. VI. 12

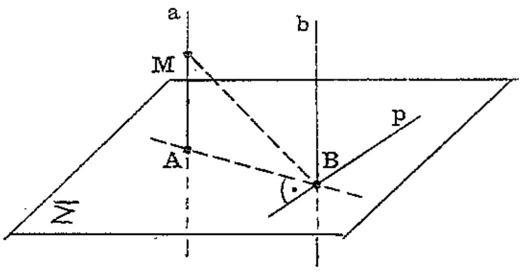


Црт. VI. 13

24.2. На правата b да ги нанесеме отсечките AB и AC, $\overline{AB}=\overline{AC}$ (црт. VI. 13). Да претпоставиме дека $\sphericalangle M'AB = 90°$; тогаш $\overline{M'B}=\overline{M'C}$, зашто $M'A$ е тежишна линија и висина на триаголникот $M'BC$. Триаголниците $MM'B$ и $MM'C$ се складни, па, значи, $\overline{MB}=\overline{MC}$. Според тоа, триаголникот MBC е рамнокрак, па тежишната линија MA е и висина, т.е. $\sphericalangle MAB = 90°$.

Обратно, да претпоставиме дека $\sphericalangle MAB = 90°$. Од тоа следува дека $\overline{MB}=\overline{MC}$, па и $\overline{M'B}=\overline{M'C}$. Според тоа, триаголник $M'BC$ е рамнокрак, па неговата тежишна линија $M'A$ е и висина, т.е. $\sphericalangle M'AB = 90°$.

26.2. Доволно е да докажеме дека правите a и b лежат во иста рамнина и дека немаат заедничка точка. Нека A и B се прободите на a и b со Σ и нека p е правата во Σ што минува низ B и е нормална на правата AB (црт. VI.14). Ако M е произволна точка од правата a, тогаш правата AB е проекција од правата MB врз Σ, па, според 24. 2. VI, правата p е нормална на MB. Покрај тоа, p е нормална и на правата b. Според 11. 2. VI правите AB, MB и b лежат во иста рамнина Σ_1, а бидејќи $M, A \in \Sigma_1$, следува дека и правата a лежи во Σ_1.



Црт. VI. 14

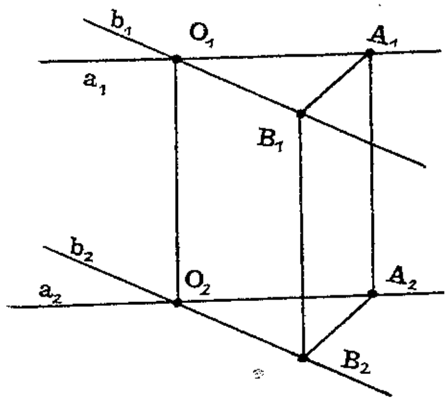
Значи, правите a и b лежат во иста рамнина. Дека немаат заедничка точка, следува од 10. 2. VI.

27.2. Да претпоставиме дека рамнината Σ не е нормална на правата b. Нека B е прободот на b со Σ, а b_1 правата што минува низ B и е нормална Σ. Правите a и b_1 се нормални на една иста рамнина Σ, па, според 26. 2. VI, тие се паралелни. Значи, низ точката B минуваат две прави b и b_1 паралелни со правата a, што не е можно.

Според тоа, претпоставката ни е погрешна, т.е. рамнината Σ е нормална на правата b.

30.2. Нека Σ е рамнина нормална на правите a, b и c (види 27. 2. VI) и нека A, B и C се прободите на a, b и c со Σ. Ако O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC, тогаш правата x е нормалата на Σ во точката O и, јасно, е еднакво оддалечена од правите a, b и c.

Ако правите a, b, c лежат во иста рамнина, тогаш задачата нема решение!



Црт. VI. 15

33.2. Нека O_1 и O_2 се две произволни точки од просторот и нека a_i, b_i се прави што минуваат низ $O_i\,(i=1, 2)$ и се паралелни на дадените прави a, b соодветно. Ако правите a_1, b_1, a_2, b_2 лежат во иста рамнина, тогаш тврдењето следува од теоремата за агли со паралелни краци.

Нека a_1, b_1, a_2, b_2, не лежат во иста рамнина. На правите a_1 и b_1. одбележуваме две точки, A_1 и B_1 соодветно, различни од O_1, и повлекуваме прави A_1A_2 и B_1B_2, паралелни со правата O_1O_2 (црт. VI.15). Тогаш триаголниците $O_1A_1B_1$ и $O_2A_2B_2$ се складни (според презнакот ССС), па аголот меѓу a_1, b_1 е еднаков со аголот меѓу a_2, b_2.

35.2. Нека Σ_1 е произволна рамнина, нормална на правата a, а Σ_2 произволна рамнина, нормална на правата b. Бидејќи правите a и b не се паралелни, следува дека рамнините Σ_1 и Σ_2 се сечат. Нека $p=\Sigma_1\cap\Sigma_2$.

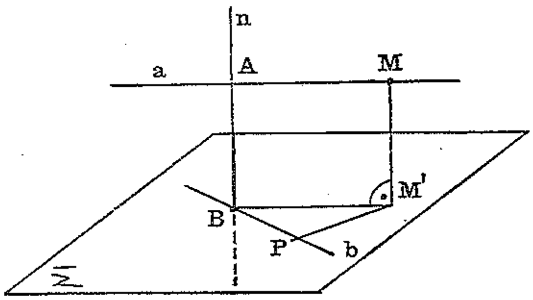
Нека, сега, Π_1 е рамнина низ правата a и паралелна со правата p, а Π_2 рамнина низ правата b и паралелна со правата p. Рамнините Π_1 и Π_2 се сечат и се нормални соодветно на правите b и a. Значи, правата $n=\Pi_1\cap\Pi_2$ е нормална и на двете прави a и b, а во исто време ги сече и двете нив. Следствено, n е заедничка нормала на правите a и b.

Останува да докажеме дека правата n е единствена.

Нека m е заедничка нормала на правите a и b. Значи, m е нормална и на a и на b и истовремено ги сече и двете нив. Од тоа што m е нормална и на a и на b, следува дека m е паралелна и со рамнината Σ_1 и со рамнината Σ_2, т.е. е паралелна со правата p. Значи, рамнината што минува низ a и m е рамнината Π_1, а рамнината што минува низ b и m е рамнината Π_2, т.е. $m=\Pi_1\cap\Pi_2=n$.

36.2. Нека A и B се пресечните точки на правите a и b соодветно со нивната заедничка нормала n и нека $M\in a$, $P\in b$ се произволни точки.

Низ правата b поставуваме рамнина Σ, паралелна со правата a (црт. VI. 16). Од точката M спуштаме нормала MM' на рамнината Σ. Бидејќи $a \| \Sigma$, точките A и M се еднакво оддалечени од Σ, т.е. $\overline{AB} = \overline{MM'}$, а бидејќи отсечката MP е хипотенуза на правоаголникот триаголник $PM'M$, следува дека $\overline{MM'} < MP$.



Црт. VI. 16

Според тоа, должината на отсечката AB (од заедничката нормала) е најкусото растојание меѓу правите a и b.

39.2. Да претпоставиме дека правата a ја прободува рамнината Σ во некоја точка M и да ја сврземе точката M со прободот O на рамнината Σ со правата b. Бидејќи правата MO лежи во рамнината Σ и Σ е нормална на правата b, следува дека MO е нормална на b, што значи дека од точката M во рамнината Σ_1, определена со b и M, се спуштени две нормали на правата b, што не е можно.

Според тоа, претпоставката ни е погрешна, т.е. правата a е паралелна со рамнината Σ.

40.2. Правите a и b, како паралелни, определуваат некоја рамнина П. Да претпоставиме дека правата a ја прободува рамнината Σ во некоја точка M. Бидејќи a лежи во П, точката M ќе лежи на правата $b = \Sigma \cap \Pi$, спротивно на условот дека правите a и b се паралелни. Значи, претпоставката ни е погрешна, т.е. правата a е паралелна на рамнината Σ.

46.2. Нека b е произволна права во рамнината Σ и нека Σ_1 е рамнината определена со правата b и точката A. Низ точката A во рамнината Σ_1 минува единствена права a, паралелна со правата b. Според 40. 2. VI, правата a е паралелна и со рамнината Σ.

Задачата има бесконечно многу решенија.

47.2. Нека Σ_1 е рамнината определена со правата a и точката A и нека b е правата во Σ_1 што минува низ A и е паралелна со a. Произволна рамнина Σ што минува низ правата b, според 40. 2. VI, е паралелна со правата a.

Задачата има бесконечно многу решенија.

48.2. Нека A е произволна точка од правата a и нека p е правата што минува низ A и е паралелна со правата b. Рамнината Σ, определена со правите a и p, според 40. 2. VI, е паралелна со правата b. Задачата има едно, или, пак, бесконечно многу решенија и тоа:

— ако правата a не е паралелна со правата b, тогаш задачата има единствено решение;

— ако правата a е паралелна со правата b, тогаш задачата има бесконечно многу решенија, зашто секоја рамнина што минува низ a е паралелна со b.

50.2. Нека a_1 и b_1 се правите што минуваат низ A и се паралелни соодветно со правите a и b и нека Σ е рамнината определена со правите a_1 и b_1. Тогаш Σ минува низ A и е паралелна со a и b.

Задачата може да има едно или бесконечно многу решенија и тоа:

— ако правите a и b не се паралелни, задачата има единствено решение;

— ако правите a и b се паралелни, задачата има бесконечно многу решенија, зашто во овој случај $a_1 = b_1$ и секоја рамнина низ $a_1 = b_1$ е паралелна со a и со b.

51.2. Нека Σ_1 е рамнината определена со правата a и точката A и нека $p = \Sigma \cap \Sigma_1$. Тогаш правата b што минува низ A и е паралелна со правата p ја сече правата a, а, според 40. 2. VI, е паралелна со рамнината Σ.

56.3. Да претпоставиме дека рамнините Σ_1 и Σ_2 имаат заедничка точка M. Значи, од точката M се повлечени две различни рамнини Σ_1 и Σ_2 нормални на правата p, коешто не е можно (вид. 9. 2. VI) .Според тоа, претпоставката ни е погрешна, т.е. рамнините Σ_1 и Σ_2 се паралелни.

57.3. Нека p е произволна права и A, B две точки од p. Според 9. 2. VI, низ точките A и B минуваат рамнини Σ_1 и Σ_2 што се нормални на правата p, а според 56. 3. VI, рамнините Σ_1 и Σ_2 се паралелни. Бидејќи $A \neq B$, следува дека $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$, т.е. Σ_1 и Σ_2 се две различни паралелни рамнини.

58.3. Да претпоставиме дека рамнините Σ_1 и Σ_2 се сечат во правата p. Бидејќи правата a_1 лежи во рамнината Σ_1 и е паралелна со рамнината Σ_2, според 46. 2. VI, правата a_1 е паралелна и на правата $p = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Слично добиваме дека и правата a_2 е паралелна со правата p, т.е. имаме дека $a_1 \| a_2 \| b_2 \| b_1$. Значи, ако рамнините Σ_1 и Σ_2 се сечат, тогаш правите a_1, a_2, b_1 и b_2 се меѓусебно паралелни.

Обратното не важи, т.е. ако правите a_1, a_2, b_1, b_2 се меѓусебно паралелни, тогаш рамнините Σ_1 и Σ_2 може да бидат паралелни.

Според тоа, можеме да заклучиме дека:

— ако правите a_1, a_2 (b_1, b_2) се сечат, тогаш рамнините Σ_1 и Σ_2 се паралелни;

— ако $a_1 \| a_2$, тогаш рамнините Σ_1 и Σ_2 може и да се сечат.

60.3. Нека A е дадена точка, Π дадена рамнина и нека a е правата што минува низ A и е нормална на рамнината Π (види 10. 2. VI). Тогаш рамнината Σ што минува низ A и е нормална на правата a, според 56. 3. VI, е паралелна на рамнината Π. Значи, низ точката A минува барем една рамнина Σ што е паралелна со рамнината Π.

Да претпоставиме дека $\Sigma_1 \neq \Sigma$ е, исто така, рамнина низ A, паралелна со рамнината П. Нека Λ е произволна рамнина низ A што минува низ правата $\Sigma_1 \cap \Sigma$ (Σ_1 и Σ се сечат по права; зошто?). Тогаш Λ ги сече рамнините Σ и Σ_1 во прави b и c коишто, според 56. 2. VI, се паралелни со правата $p = \Pi \cap \Lambda$, т.е. низ точката A минуваат две прави b и c, паралелни на правата p, коешто не е можно (види 25. 2. VI). Според тоа, претпоставката $\Sigma_1 \neq \Sigma$ ни е погрешна, па, следствено, рамнината Σ_1 се совпаѓа со Σ, т.е. Σ е единствената рамнина низ A, паралелна со П.

63.3. На правите a и b избираме по една точка A и B; потоа низ точката A повлекуваме права a_1 паралелна со b, а низ B права b_1 паралелна со a. Тогаш рамнините Σ_1 и Σ_2 определени соодветно со правите a, a_1 и b, b_1, според 58. 3. VI, се паралелни.

64.3. Нека O е темето на аголот α, p е правата низ O, нормална на рамнината во која лежи аголот α и нека Σ_1 и Σ_2 се полурамнините со раб p во кои лежат полуправите h и k соодветно. Тогаш α е агол на диедарот $\Sigma_1 p \Sigma_2$.

68.3. Нека правата a лежи во рамнината Σ_1 и е нормална на рамнината Σ_2. Прободот на Σ_2 со a да го означиме со O, а правата што минува низ O и е нормална на Σ_1, со b. Тогаш правите a и b се заемно нормални, а, исто така, нормални и на правата $p = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Според тоа, рамнините Σ_1 и Σ_2 се заемно нормални.

70.3. Нека $p = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ и нека b е правата од Σ_1 што минува низ точката A и е нормална на правата p; тогаш правата b е нормална и на рамнината Σ_2. Ако $b \neq a$, тогаш низ точката A ќе минуваат две прави што се нормални на иста рамнина Σ_2, а тоа не е можно. Значи, $b = a$, т.е. правата a лежи во рамнината Σ_1.

76.4. Нека $SABC$ е трирабно ќоше, така што рабниот агол $\sphericalangle ASC$ е најголем. Бидејќи $\sphericalangle ASC \geqslant \sphericalangle ASB$ и $\sphericalangle ASC \geqslant \sphericalangle BSC$, ќе следува дека $\sphericalangle ASC \geqslant | \sphericalangle ASB - \sphericalangle BSC |$. Да видиме дека истото важи и за другите два рабни агли.

Знаеме дека секој рабен агол е помал од збирот на другите два рабни агли. Значи, важи

$$\sphericalangle ASC < \sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC.$$

Намалувајќи ги двете страни од ова неравенство за $\sphericalangle ASB$, односно за $\sphericalangle BSC$ добиваме

$$\sphericalangle ASC - \sphericalangle ASB < \sphericalangle BSC,$$
$$\sphericalangle ASC - \sphericalangle BSC < \sphericalangle ASC,$$

што значи дека секој рабен агол е поголем од разликата на другите два рабни агла.

77.4. Нека $SA_1A_2\ldots A_n$ е повеќерабно ќоше. За трирабното ќоше $A_{i+1}SA_iA_{i+2}$, $i=1, 2,\ldots, n$, $n+1=1$, $n+2=2$, имаме:

$$\sphericalangle A_iA_{i+1}A_{i+2} < \sphericalangle SA_{i+1}A_i + SA_{i+1}A_{i+2},\ i=1, 2, \ldots n. \qquad (1)$$

Аглите $A_iA_{i+1}A_{i+2}$ се внатрешни агли на n-аголникот $A_1A_2\ldots A_n$, па ќе имаме

$$\sphericalangle A_1A_2A_3 + \sphericalangle A_2A_3A_4 + \ldots + \sphericalangle A_nA_1A_2 = (n-2)\cdot 180°.$$

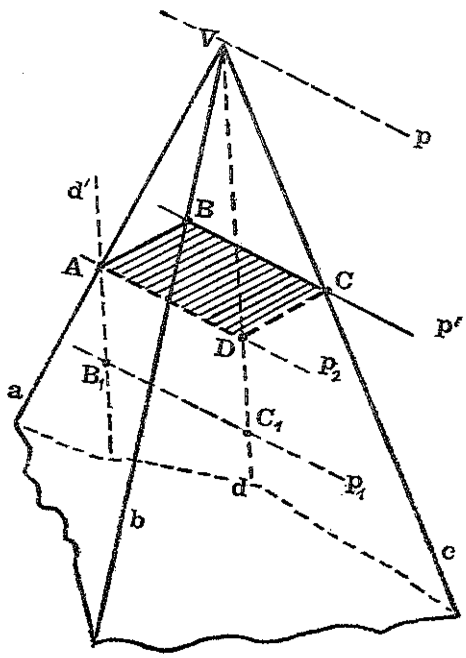
Збирот на десните страни од неравенствата (1) е збирот на аглите во триаголниците SA_1A_2, $SA_2A_3, \ldots$, намален за збирот x на рабните агли на ќошето $SA_1A_2\ldots A_n$. Значи, собирајќи ги неравенствата (1) добиваме $(n-2)\cdot 180° < n\cdot 180° - x$, од каде што добиваме $x < 2\cdot 180° = 360°$.

79.4. Нека ќошето има k рабови. Бидејќи збирот на рабните агли е помал од 360°, ќе имаме $k\cdot 60° < 360°$, од каде што добиваме $k<6$, т.е. ќошето може да има 3, 4 или 5 рабови.

81.4. Нека $SABC$ е трирабно ќоше, така што $\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC = \sphericalangle CSA = 90°$. Бидејќи правите AS и CS се нормални на правата BS, следува дека $\sphericalangle ASC = 90°$ е агол на диедарот со раб SB.

Значи, секој рабен агол е агол на соодветниот диедар.

86.4. Нека p е пресечната права на ѕидовите (a, d) и (b, c) (црт. VI.17). Низ произволна точка C од работ c, во ѕидот (b, c), да повлечеме



Црт. VI. 17

права p', паралелна со p; нека $B=b\cap p'$. Низ произволна точка $C_1\in d$, во ѕидот (a, d), да повлечеме права p_1 паралелна со p и на неа, на страната каде што е работ a, да нанесеме отсечката C_1B_1, така што да важи

$\overline{C_1B_1}=\overline{CB}$. Низ точката B_1 да повлечеме права d', паралелна со d; нека $A=a\cap d'$. Низ точката A, во ѕидот (a, d), да повлечеме права p_2 паралелна со p; нека $D=p_2\cap d$.

Од конструкцијата на точките A, B, C и D следува дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм.

88.5. Бидејќи $S(O, r)$ и $T(O, r)$ се подмножества од $T[O, r]$, доволно е да покажеме дека $T[O,r]\subseteq T[O, R]$.

Нека $M\in T[O, r]$; тогаш $\overline{OM}\leqslant r<R$, од каде што следува дека $M\in T[O, R]$. Значи, $T(O, r)\subset T[O, R]$.

Да забележите дека $S(O, r)$ и $T(O, r)$ се подмножества и од $T(O, R)$, но дека $S(O, r)$ и $S(O, R)$ немаат заедничка точка.

89.5. Доволно е да покажеме дека $T[M, r]\subseteq T(O, R)$.

Нека $X\in T[M, r]$; тогаш $\overline{OX}\leqslant\overline{OM}+\overline{MX}\leqslant\overline{OM}+r<\overline{OM}+(R-\overline{OM})=R$, што значи дека $X\in T(O, R)$.

90.5. Бидејќи $M\in T(O, R)$ имаме $\overline{OM}<R$, па $R-\overline{OM}>0$. Значи, постои реален број r, таков што $0<r<R-\overline{OM}$. Според 89. 5. VI, $T(M, r)\subset T(O, R)$.

93.5. Нека M е произволна точка од отворената топка $T(O, R)$. За да покажеме дека M е внатрешна точка за $T(O, R)$, доволно е да покажеме дека постои отворена топка со центар во M, којашто е подмножество од $T(O, R)$.

Ако $r<R-\overline{OM}$, тогаш според. 89. 5. VI, $T(M, R)\subset T(O, R)$, па, значи, M е внатрешна точка за $T(O, R)$.

98.5. Нека A, B се две произволни точки од отворениот круг $k[O, R)$ и нека X е произволна точка од отсечката AB. Тогаш $\overline{OX}\leqslant\leqslant\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB})<\frac{1}{2}(R+R)=R$, што значи дека $X\in k[O, R)$. Според тоа, секоја точка од отсечката AB лежи во отворениот круг $k[O, R)$, т.е. точките A и B се сврзани со отсечката ABкојашто лежи во $k[O, R)$. Значи, $k[O, R)$ е сврзлива фигура.

Слично за $k[O, R]$, $T(O, R)$ и $T[O, R]$.

104.5. Секоја точка M од k_1 или k_2 е внатрешна за k_1 односно k_2, па е внатрешна и за $k_1\cup k_2$. Треба уште да покажеме дека $k_1\cup k_2$ е сврзлива фигура. За таа цел, нека A и B се две произволни точки од $k_1\cup k_2$. Ако $A, B\in k_1$ или $A, B\in k_2$, тогаш отсечката AB лежи во k_1 или во k_2. Затоа, нека $A\in k_1$ $B\in k_2$. Бидејќи $k_1\cap k_2\neq\varnothing$, постои точка M што припаѓа и на k_1 и на k_2; тогаш отсечката AM лежи во k_1, а отсечката MB лежи во k_2. Значи, искршената линија AMB лежи во $k_1\cup k_2$.

Според тоа, фигурата $k_1\cup k_2$ е сврзлива и секоја нејзина точка е внатрешна, па, значи, фигурата $k_1\cup k_2$ е рамнинска област.

105.5. Да покажеме, прво, дека секоја точка $M\in\mathbf{G}$ е внатрешна за $\mathbf{G}$. Бидејќи $M\in k_1\cap k_2$, следува дека $M\in k_1$ и $M\in k_2$, па, значи, $r_1-\overline{O_1M}>0$ и $r_2-\overline{O_2M}>0$. Според тоа, постои реален број r, таков што

$0 < r < r_1 - \overline{O_1M}$ и $0 < r < r_2 - \overline{O_2M}$. Според 89. 5. VI, $k[M, r]$ е подмножество од k_1 и од k_2, т.е. $k[M, r) \subset \mathbf{G}$. Следствено, M е внатрешна точка за фигурата $\mathbf{G}$.

Останува да покажеме дека фигурата $\mathbf{G}$ е сврзлива. Нека A, B се две произволни точки од $\mathbf{G}$. Тогаш $A, B \in k_1$ и $A, B \in k_2$, па, значи, отсечката AB лежи и во k_1 и во k_2, т.е. во $\mathbf{G}$. Според тоа, фигурата $\mathbf{G}$ е сврзлива.

110.5. а) Нека $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \cup \mathbf{G}_2$. Ако $A \in \mathbf{G}$, тогаш $A \in \mathbf{G}_1$ или $A \in \mathbf{G}_2$, па A е внатрешна точка за $\mathbf{G}_1$ или за $\mathbf{G}_2$, поради што A е внатрешна точка за фигурата $\mathbf{G}$. Нека A, B се произволни точки од $\mathbf{G}$. Ако двете точки A, B се во $\mathbf{G}_1$, тогаш тие може да се сврзат со искршена линија што лежи во $\mathbf{G}_1$, па, значи, и во $\mathbf{G}$. Аналогно, ако $A, B \in \mathbf{G}_2$. Да претпоставиме дека $A \in \mathbf{G}_1$ и $B \in \mathbf{G}_2$. Бидејќи $\mathbf{G}_1 \cap \mathbf{G}_2 \neq \varnothing$, постои точка M, којашто е и во $\mathbf{G}_1$ и во $\mathbf{G}_2$. Поради тоа, постои искршена линија $A \ldots M$ во $\mathbf{G}_1$ и $M \ldots B$ во G_2, па искршената линија $A \ldots M \ldots B$ целосно лежи во $\mathbf{G}$. Следствено, $\mathbf{G}$ е сврзливо множество.

Од сето тоа следува дека $\mathbf{G}$ е област.

112.5. Нека M е произволна точка од кружницата $k(O, R)$ и нека $r > 0$ е произволен реален број, а $r_1 > 0$ реален број помал од r и R Тогаш:

— точката X што лежи на полуправата OM и $\overline{OX} = R + r_1$ не припаѓа на ниедна од фигурите $k(O, R)$, $k[O, R)$ и $k[O, R]$;

— точката $Y \in k(M, r_1)$ и $\overline{OY} = R$, припаѓа на фигурите $k(O, R)$ и $k[O, R]$;

— точката Z што лежи на отсечката OM и $\overline{OZ} = R - r_1$ припаѓа на фигурите $k[O, R)$ и $k[O, R]$.

Според тоа, произволен отворен круг $k[M, r)$ содржи точка што не припаѓа на ниедна од фигурите $k(O, R)$, $k[O, R)$ и $k[O, R]$ и точка што припаѓа на фигурата $k(O, R)$, $k[O, R)$ или $k[0, R]$, т.е. секоја точка $M \in k(O, R)$ е гранична за секоја од фигурите $k(O, R)$, $k[O, R)$ и $k[O, R]$.

124.6. Нека S_1, $S_2, \ldots, S_{2n-1}$ се ѕидовите на полиедарот, така што ѕидот S_i, $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$, е со $2k_i - 1$ страни. Бидејќи секое ребро е страна на два ѕида од полиедарот, бројот на рабовите ќе биде:

$$r = \frac{1}{2}\left[(2k_1 - 1) + (2k_2 - 1) + \ldots + (2k_{2n-1} - 1)\right] =$$

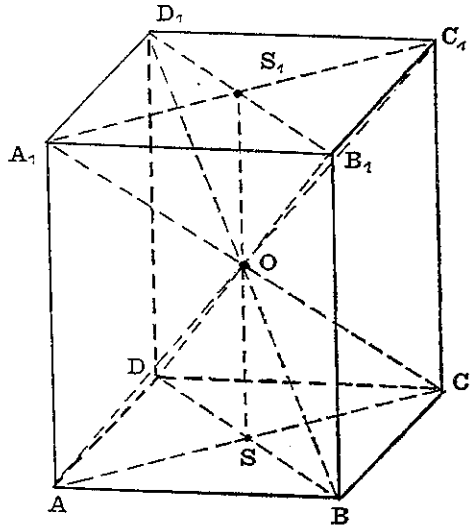
$$= (k_1 + k_2 + \ldots + k_{2n-1} - n) + \frac{1}{2}.$$

Овој број не е цел, па според тоа, не може сите ѕидови да се со непарен број страни.

125.6. Нека $\mathbf{G}$ е полиедар и A едно негово теме. Темето A е теме на едно ќоше што го формираат внатрешните агли на многуаголниците од границата со темиња во точката A. Значи, низ темето A минуваат најмалку три раба на полиедарот $\mathbf{G}$ и темето A е заедничко теме на најмалку три ѕида. На секој од рабовите што минуваат низ темето A лежи уште по едно теме на полиедарот. Според тоа, полиедарот има најмалку четири темиња и најмалку четири ѕида. Ако A, B, C и D се темињата, тогаш отсечките AB, AC, AD, BC, BD и CD се рабови на полиедарот. Значи, полиедарот има најмалку 6 рабови.

134.6. Заедничкиот раб на двата правоаголника е нормален на два соседни основни рабови, па, значи, тој е нормален на основата. Кои било два бочни рабови на призмата се паралелни, па според тоа, секој бочен раб е нормален на основата, т.е. призмата е права.

138.6. Нека е даден паралелопипедот $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (црт. VI.18). Дијагоналниот пресек ACC_1A_1 е паралелограм, па неговата средна линија SS_1 и дијагоналите AC_1, A_1C се сечат во точка O што ги располовува. Но, SS_1 е средна линија и за правоаголникот BDD_1B_1, па точката O ќе биде пресек на неговите дијагонали BD_1 и B_1D.



Црт. VI. 1

Според тоа, сите четири дијагонали на паралелопипедот минуваат низ точката O, којашто ги располовува.

142.6. Нека $SA_1A_2\ldots A_n$ е n-страна пирамида со еднакви бочни рабови. Ќе испитаме каков е n-аголникот $A_1A_2\ldots A_n$. Нека O е проекцијата на S врз рамнината на основата. Тогаш триаголникот SOA_i, $i=1, 2,\ldots,n$, е правоаголен со хипотенуза SA_i и катети SO и OA_i. Бидејќи $\overline{SA_1}=\overline{SA_2}=\ldots=\overline{SA_n}$, триаголниците SOA_1, $SOA_2,\ldots, SOA_n$ имаат еднакви хипотенузи SA_1, $SA_2,\ldots, SA_n$ и имаат заедничка катета SO. Според тоа, тие се складни, па ќе имаме $\overline{OA_1}=\overline{OA_2}=\overline{OA_n}$, што значи дека n-аголникот $A_1A_2\ldots A_n$ е тетивен.

Ако, пак, пирамидата $SA_1A_2\ldots A_n$ е таква што основата $A_1A_2\ldots A_n$ е тетивен n-аголник, со центар O, и SO е нормална на рамнината од основата, тогаш таа има еднакви бочни рабови.

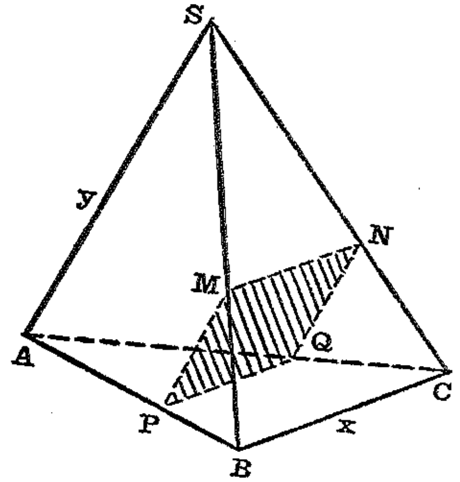
144.6. Нека основата на тристраната пирамида $SABC$ е правоаголен триаголник со хипотенуза AB и нека $\overline{SA}=\overline{SB}=\overline{SC}$. Според 142. 6. VI, проекцијата на S врз рамнината на основата е центарот O на опишаната кружница околу основата. Но, кај правоаголен триаголник, O е средина на хипотенузата, па, значи, бочниот ѕид SAB е нормален на основата.

145.6. а) Нека $SA_1A_2\dots A_n$ е n-страна пирамида таква што бочните ѕидови SA_1A_2, $SA_2A_3,\dots,SA_nA_1$, се рамнострани триаголници. Тогаш сите рабни агли на ќошето $SA_1A_2\dots A_n$ се по $60°$, па ќе имаме $n\cdot 60°<$ $<360°$, т.е. $n<6$.

Според тоа, ако бочните ѕидови на пирамидата $SA_1A_2\dots A_n$ се рамнострани триаголници, тогаш $n=3, 4, 5$.

146.6. Нека $\overline{BC}=x$, $\overline{SA}=y$, (црт. VI. 19). На рабовите SB и SC избираме точки M и N, така што

$$\overline{SM}=\frac{y}{x+y}\,\overline{SB},\quad \overline{SN}=\frac{y}{x+y}\,\overline{SC}, \tag{1}$$



Црт. VI. 19

од каде што следува дека

$$MN\parallel BC,\ \overline{MN}=\frac{y}{x+y}\,\overline{BC}=\frac{xy}{x+y}. \tag{2}$$

На рабовите AB и AC избираме точки P и Q, така што

$$\overline{AP}=\frac{y}{x+y}\,\overline{AB},\quad \overline{AQ}=\frac{y}{x+y}\,\overline{AC}, \tag{1'}$$

од каде што следува дека

$$PQ\parallel BC,\quad \overline{PQ}=\frac{y}{x+y}\,\overline{BC}=\frac{xy}{x+y}. \tag{2'}$$

Од (2) и (2′) следува дека четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм.

Од (1) добиваме:

$$\overline{BM}=\overline{BS}-\overline{SM}=\overline{BS}-\frac{y}{x+y}\overline{BS}=\frac{x}{x+y}\overline{BC}, \tag{3}$$

и, аналогно, од (1')

$$\overline{BP}=\frac{x}{x+y}\overline{BA}. \tag{3'}$$

Од (3) и (3') заклучуваме дека

$$MP \parallel AS,\ \overline{MP}=\frac{x}{x+y}\overline{SA}=\frac{xy}{x+y}$$

Значи, $\overline{MN}=\overline{MP}$, т.е. паралелограмот $MNPQ$ е ромб.

151.6. а) Една n-страна пирамида има $2n$ темиња, $n+2$ ѕида и $3n$ рабови, па $2n+(n+2)=3n+2$.

б) Една n-страна пирамида има $n+1$ теме, $n+1$ ѕид и $2n$ рабови, па $(n+1)+(n+1)=2n+2$.

165.6. Ако еден полиедар има t темиња, s ѕидови и r рабови, тогаш

$$t+s=r+2. \tag{1}$$

(Ојлерова теорема).

Нека **P** е правилен полиедар и n бројот на страните на правилните многуаголници (т.е. ѕидовите на **P**). Тогаш важи

$$sn=2r. \tag{2}$$

Ако, пак, k е бројот на рабните агли кај едно теме, тогаш

$$kt=2r \tag{3}$$

Од (1), (2) и (3) добиваме:

$$r=\frac{2nk}{2n+2k-nk},\quad t=\frac{4n}{2n+2k-nk},\quad s=\frac{4k}{2n+2k-nk}. \tag{4}$$

Од равенствата (4) гледаме дека можеме да ги најдеме броевите r, t и s, ако ги знаеме броевите n и k. За n и k можеме да избираме такви броеви (поголеми од 2), што r, t, s да бидат природни броеви.

Следнава табела ни ја дава можната реализација.

n	к	r	t	s	Назив
3	3	6	4	4	правилен тетраедар
3	4	12	6	8	правилен октаедар
3	5	30	12	20	правилен икосаедар
4	3	12	8	6	правилен хексаедар
5	3	30	20	12	правилен додекаедар

С О Д Р Ж И Н А

РО за издавање на учебници и наставни средства „Просветно дело" — Скопје ул. „Иво Рибар Лола" бб Градски ѕид блок 4

*

За издавачот
Никола Младеновски

*

д-р *Живко Мадевски,*
д-р *Александар Самарџиски,*
д-р *Наум Целакоски*
ЗБИРКА ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИЈА
за II клас на средното образование

*

Лектура
Надежда Манојловиќ

*

Илустрации
Авторите

*

Технички уредник
Трајко Димовски

*

Корицата ја илустрира
Радмила Петровиќ — Ѓиновска

*

Коректор
Мерита Џами

*

Ракописот е предаден во печат во мај 1981 година. Печатењето е завршено во декември 1931 година. Обем: 256 страници. Формат: 17x24 см. Тираж: 10 000 примероци. Книгата е отпечатена во Графичкиот завод „Гоце Делчев" — Скопје (3060)

Цената е одобрена со решение на Републичкиот завод за цени.

514.1(076.33)

МАДЕВСКИ, Живко
Збирка задачи по геометрија : за II клас на средното образование / Живко Мадевски, Александар Самарџиски, Наум Целакоски ; [илустрации авторите]. — Скопје : Просветно дело, 1981. — 249 стр. : илустр. ; 24 см

1. САМАРЏИСКИ, Александар 2. ЦЕЛАКОСКИ, Наум

НУБ „Кл. Охридски“ — Ск.