Зоран Штерјов
Пробиштип

МЕТРИЧКИ РЕЛАЦИИ ВО ТЕТИВЕН ЧЕТИРИАГОЛНИК

Во неколку претходни изданија: Сигма бр. 49, Сигма бр. 54 и Сигма бр. 56 наведени се доволни услови за да еден четириаголник биде впишан во кружница, како и неколку суштински својства на тетивните четириаголници. Во овој напис ќе наведеме, со доказ, неколку метрички релации карактеристични за тетивните четириаголници. Секој четириаголник околу кој може да се опише кружница се нарекува тетивен четириаголник. Притоа:

- *четириаголникот е тетивен ако и само ако симетралите на три негови страни се сечат во една точка*;
- *четириаголникот е тетивен ако и само ако неговите спротивни агли се суплементни, т.е. нивниот збир изнесува* 180° .

Во кружница може да се впише квадрат, правоаголник и рамнокрак трапез, додека делтоидот е тетивен ако има два прави агли.

Должина на дијагоналите во тетивен четириаголник

Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник со страни $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$ и $\overline{AD}=d$ и агли α, β, γ и δ. Притоа $\alpha+\gamma=180^\circ$ и $\beta+\delta=180^\circ$. Дијагоналите во четириаголникот ќе ги означиме со $e=\overline{AC}$ и $f=\overline{BD}$. Според косинусната теорема, од триаголникот ΔABC имаме дека

$$\overline{AC}^2=a^2+b^2-2ab\cos\beta \qquad (1)$$

а од триаголникот ΔADC,

$$\overline{AC}^2=c^2+d^2-2cd\cos(180^\circ-\beta)=c^2+d^2+2cd\cos\beta \qquad (2)$$

Со изедначување на равенствата (1) и (2) добиваме

$$a^2+b^2-2ab\cos\beta=c^2+d^2+2cd\cos\beta,$$

односно

$$\cos\beta=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

и, со замена во (1), добиваме

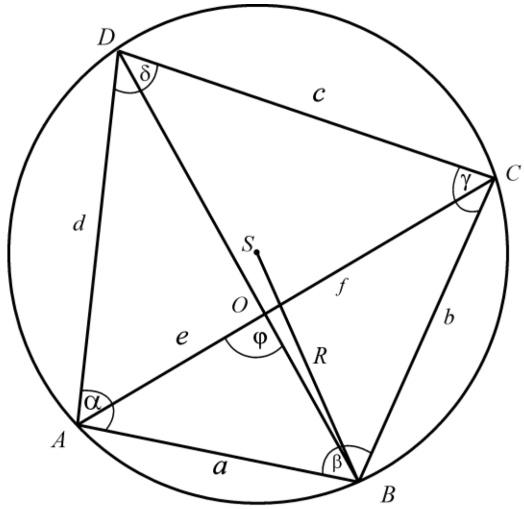
$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = a^2 + b^2 - 2ab\tfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$
$$= \frac{(a^2+b^2)(ab+cd)-ab(a^2+b^2-c^2-d^2)}{ab+cd} = \frac{(a^2cd+d^2ab)+(c^2ab+b^2cd)}{ab+cd}$$
$$= \frac{ad(ac+bd)+bc(ac+bd)}{ab+cd} = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}.$$

Значи должината на дијагоналата $e = \overline{AC}$ е еднаква на

$$e = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}\ .$$

На сличен начин добиваме дека

$$f = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}\ .$$



Забелешка. Ако ги помножиме должините на дијагоналите добиваме $ef = ac + bd$, односно со ова е докажана теоремата на Птоломеј:

Во секој четириаголник, вписан во кружница, производот од должините на неговите дијагонали е еднаков на збирот од производите на должините на неговите спротивни страни.

Забелешка. Ако четириаголникот $ABCD$ е рамнокрак трапез со основи a и c, тогаш $b = d$, а неговите дијагонали се еднакви, т.е. $e = f$. Од равенството $ef = ac + bd$ добиваме дека $e^2 = ac + b^2$, односно $ac = e^2 - b^2$. Со ова е докажана следнава теорема:

Производот од должините на основите на рамнокрак трапез е еднаков на разликата меѓу квадратот на една дијагонала и квадратот на должината на една од непаралелните страни.

Должина на радиусот на кружница опишана околу тетивен четириаголник

Радиусот на опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$ е еднаков со радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ΔABC (или околу $\Delta BCD,\ \Delta CDA,\ \Delta DAB$) односно $R = \frac{e}{2\sin\beta}$. Пресметуваме

$$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta = 1^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)^2$$
$$= \left(1-\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)$$
$$= \frac{(c+d)^2-(a-b)^2}{2(ab+cd)}\cdot\frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{2(ab+cd)}$$
$$= \frac{(c+d-a+b)(c+d+a-b)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{4(ab+cd)^2}.$$

Ќе означиме со $s=\frac{a+b+c+d}{2}$. Тогаш

$$\sin^2\beta = \frac{(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2d)}{4(ab+cd)^2}$$
$$= \frac{4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}{(ab+cd)^2},$$

односно

$$\sin\beta = \frac{2}{ab+cd}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

За радиусот на опишаната кружница добиваме

$$R=\frac{e}{2\sin\beta}=\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}\cdot\frac{ab+cd}{4\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}},$$

односно

$$R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}.$$

При истите ознаки, за радиусот на опишаната кружница околу рамнокрак трапез $ABCD$ (за $b=d$) добиваме

$$R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cb)(ab+bc)(ac+b^2)}{(s-a)(s-b)^2(s-c)}}=\frac{b(a+c)}{2(2s-2b)}\sqrt{\frac{ac+b^2}{(s-a)(s-c)}}$$
$$=\frac{b(a+c)}{2s-2b}\sqrt{\frac{ac+b^2}{4(s-a)(s-c)}}=\frac{b(a+c)}{2s-2b}\sqrt{\frac{ac+b^2}{(2s-2a)(2s-2c)}}$$
$$=\frac{b(a+c)}{a+2b+c-2b}\sqrt{\frac{ac+b^2}{(2s-2a)(2s-2c)}}=b\sqrt{\frac{ac+b^2}{(2b+c-a)(2b+a-c)}}$$
$$=b\sqrt{\frac{ac+b^2}{4b^2-(a-c)^2}}.$$

Забелешка. Значи, радиусот на опишаната кружница околу рамнокрак трапез $ABCD$ со основи a и b и крак c се пресметува по формулата

$$R=c\sqrt{\frac{ab+c^2}{4c^2-(a-b)^2}}.$$

Плоштина на тетивен четириаголник

Со P_{ABCD} ќе ја означиме плоштината на тетивниот четириаголник $ABCD$. Тогаш

$$\begin{aligned}P_{ABCD} &= P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ADC}\\ &= \tfrac{1}{2}ab\sin\beta + \tfrac{1}{2}cd\sin\delta = \tfrac{1}{2}ab\sin\beta + \tfrac{1}{2}cd\sin(180^\circ - \beta)\\ &= \tfrac{1}{2}ab\sin\beta + \tfrac{1}{2}cd\sin\beta = \tfrac{1}{2}(ab+cd)\sin\beta\\ &= \tfrac{1}{2}(ab+cd)\tfrac{2}{ab+cd}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\\ &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.\end{aligned}$$

Значи плоштината на тетивен четириаголник може да се пресмета по формулата на Брамагупта $P_{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, каде што $s = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Агол меѓу дијагоналите на тетивен четириаголник

Нека $\phi = \measuredangle AOB$ е аголот меѓу дијагоналите e и f . Тогаш

$$P_{ABCD} = \tfrac{1}{2}ef\sin\phi .$$

Според теоремата на Птоломеј $ef = ac + bd$, па затоа

$$P_{ABCD} = \tfrac{1}{2}(ac+bd)\sin\phi .$$

Значи $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \frac{1}{2}(ac+bd)\sin\phi$, а оттука

$$\phi = \arcsin\left(\tfrac{2}{ab+cd}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\right).$$

Тетивен четириаголник со заемно нормални дијагонали

а) Нека $\phi = \measuredangle AOB = 90^\circ$. Тогаш $\sin\phi = 1$, па плоштината на тетивниот четириаголник со заемно нормални дијагонали е еднаква на

$$P_{ABCD} = \tfrac{1}{2}(ac+bd).$$

б) Триаголниците ΔABC, ΔBCD, ΔCDA и ΔDAB се впишани во истата кружница, па според синусната теорема имаме дека

$$2R = \frac{a}{\sin\measuredangle ADB} = \frac{b}{\sin\measuredangle CDB} = \frac{c}{\sin\measuredangle CBD} = \frac{d}{\sin\measuredangle ABD} \qquad (3)$$

Нека $\beta_1 = \measuredangle CBD$ и $\beta_2 = \measuredangle CDB$. Тогаш

$$\measuredangle BAC = \measuredangle CDB = \beta_2,$$

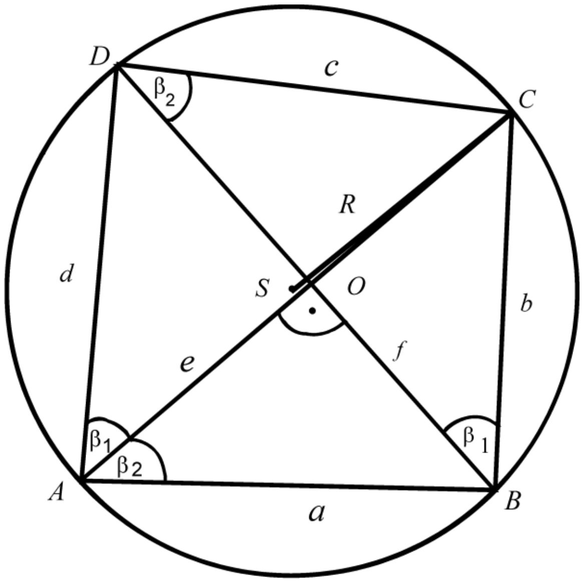
како агли над ист кружен лак. Бидејќи $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, следува дека

$$\measuredangle ABD = 90^\circ - \beta_2.$$

Аналогно добиваме дека

$$\measuredangle CAD = \measuredangle CBD = \beta_1 \text{ и}$$

$$\measuredangle ADB = 90^\circ - \beta_1.$$



Сега од релацијата (3) добиваме дека

$$a = 2R\sin(90^\circ - \beta_1) = 2R\cos\beta_1,\ b = 2R\sin\beta_2,$$

$$c = 2R\sin\beta_1 \text{ и } d = 2R\sin(90^\circ - \beta_2) = 2R\cos\beta_2.$$

Со собирање на квадратите на овие равенства го добиваме равенството

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8R^2.$$

Оттука добиваме дека радиусот на кружницата опишана околу тетивен четириаголник со заемно нормални дијагонали е еднаква на

$$R = \tfrac{1}{4}\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}.$$

Забелешка. Од истите равенства добиваме дека $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ и оваа релација е задоволена за секој тетивен четириаголник со заемно нормални дијагонали.

Литература

1. Сигма бр. 49, Сигма бр. 54 и Сигма бр. 56, СМ на Република Македонија:
2. Foaie matematica, 5/1995, Romania.

Забелешка. Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА