



## Verižni (lančani) račun

Ksenija Pukšec<sup>1</sup> i Josip Matejaš<sup>2</sup>, Zagreb

### Uvod

Verižni (lančani) račun je postupak nalaženja veze između dviju veličina koje su međusobno vezane nizom proporcionalnih veličina. To je jedan od elementarnih računa gospodarske matematike (vidjeti [2]) koji se provodi po vrlo jednostavnim pravilima, a ima široku primjenu. Može se koristiti za preračunavanje mjernih jedinica, pa njime jednostavno uspoređujemo količine, mase, volumene, duljine, cijene, novčane vrijednosti itd. (vidjeti [1], [3]), a koje su izražene jedinicama iz različitih mjernih sustava. Neke od tih primjena navodimo u ovom prilogu.

### Pravila postavljanja lančanog računa

Pravila postavljanja i postupak provođenja lančanog računa objašnjavamo na sljedećem slikovitom primjeru.

**Primjer 1.** Ako 5 banana ima masu kao 8 jabuka, 20 limuna kao 12 naranči, 4 kruške kao 10 šljiva, 5 limuna kao 2 banane te 6 jabuka kao 9 krušaka, koliko šljiva ima masu kao jedna naranča?

Čitajući zadatak vidimo da je dosta “zapatljan”, tako da nije odmah jasno odakle početi. Ako navedeno voće označimo njegovim početnim slovom ( $b$ ,  $j$ ,  $l$ ,  $n$ ,  $k$ ,  $š$ ), iz uvjeta zadatka imamo

$$5b = 8j \implies b = \frac{8}{5}j, \quad (1)$$

$$20l = 12n \implies n = \frac{20}{12}l, \quad (2)$$

$$4k = 10š \implies k = \frac{10}{4}š, \quad (3)$$

$$5l = 2b \implies l = \frac{2}{5}b, \quad (4)$$

$$6j = 9k \implies j = \frac{9}{6}k. \quad (5)$$

<sup>1</sup> Studentica i demonstratorica iz matematike na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu (puksec@gmail.com).

<sup>2</sup> Docent na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu (josip.matejas@kr.htnet.hr).

Koristeći sada dobivene relacije sljedećim redom: (2), (4), (1), (5) i (3), dobivamo

$$n = \frac{20}{12} l = \frac{20}{12} \cdot \frac{2}{5} b = \dots = \frac{20 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{12 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4} \text{ š} = 4\text{š}, \quad (6)$$

dakle, jedna naranča ima masu kao 4 šljive.

U skladu s relacijom (6), uvjete zadatka možemo zapisati i ovako

$$\begin{array}{l|l} x \text{ š} & 1 n \\ 12 n & 20 l \\ 5 l & 2 b \\ 5 b & 8 j \\ 6 j & 9 k \\ 4 k & 10 \text{ š} \end{array}$$

a što predstavlja zapis u obliku *lančanog računa*. Iz navedenog zapisa i jednakosti (6), lako uočavamo sljedeća pravila postavljanja lančanog računa:

1. Lančani račun započinje pitanjem (kojim je definirana nepoznanica).
2. Novi redak lančanog računa počinje onom veličinom (jedinicom) kojom je prethodni redak završio.
3. Račun završava onom veličinom (jedinicom) kojom je i započeo.
4. Nepoznanicu izračunamo kao kvocijent umnoška desne i umnoška preostalih članova lijeve strane.

Iz pravila 2 i 3 vidimo smisao naziva verižni (lančani) račun. Primijetimo da je pravilo 4 ekvivalentno činjenici da je umnožak desne strane jednak umnošku lijeve strane.

## Primjene

Od vrlo raznolikih primjena lančanog računa navodimo neke od njih, uglavnom ekonomskog karaktera. Počnimo sljedećim praktičnim primjerom.

**Primjer 2.** Prilikom geološkog ispitivanja novog nalazišta aluminijske rude dobiveni su sljedeći podaci. Iz 40 kg rude u prvoj fazi prerade dobije se 2.15 kg boksita. Kemijskim postupkom u drugoj fazi prerade iz 1.4 kg boksita dobije se 425 g aluminijske okside. Elektrolizom u trećoj fazi prerade iz 350 g aluminijske okside dobije se 155 g aluminijske. Da li je ovo nalazište isplativo za korištenje ako znamo da je isplativo prerada one rude koja sadrži bar 1% aluminijske?

Sve količine izražavamo u gramima. Postavljamo pitanje: koliko je rude potrebno za proizvodnju jednog grama aluminijske? Imamo

$$\begin{array}{l|l} x \text{ rude} & 1 \text{ al.} \\ 155 \text{ al.} & 350 \text{ al.oks.} \\ 425 \text{ al.oks.} & 1400 \text{ boks.} \\ 2150 \text{ boks.} & 40000 \text{ rude} \end{array}$$

pa je

$$x = \frac{1 \cdot 350 \cdot 1400 \cdot 40000}{155 \cdot 425 \cdot 2150} \approx 138.39.$$

Dakle, za 1 gram aluminija potrebno je nešto više od 138 grama rude a to znači da je sadržaj aluminija manji od 1% pa nalazište nije isplativo.

Određenim poopćavanjem uvjeta na koje se lančani račun primjenjuje, dolazimo do sljedećeg teorijskog primjera.

**Primjer 3.** Zadan je linearni sustav

$$a_k x_k = b_{k+1} x_{k+1}, \quad a_k, b_{k+1} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad x_{n+1} = x_1$$

gdje su  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nepoznanice. Za zadane indekse  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  odredite  $\alpha_{ij}$  takve da vrijedi  $x_i = \alpha_{ij} x_j$ .

Ako je  $i = j$  tada je očito  $\alpha_{ij} = 1$ . Ako je  $i < j$  tada imamo

$$\begin{array}{l|l} \alpha_{ij} x_j & x_i \\ a_i x_i & b_{i+1} x_{i+1} \\ a_{i+1} x_{i+1} & b_{i+2} x_{i+2} \\ \dots & \dots \\ a_{j-1} x_{j-1} & b_j x_j \end{array} \implies \alpha_{ij} = \frac{b_{i+1} b_{i+2} \dots b_j}{a_i a_{i+1} \dots a_{j-1}} = \frac{\prod_{k=i+1}^j b_k}{\prod_{k=i}^{j-1} a_k},$$

gdje  $\prod$  označava operator umnoška.

Za  $i > j$  u dobivenoj relaciji indeksima  $i$  i  $j$  zamijenimo mjesta te uvažimo da je  $\alpha_{ij} = 1/\alpha_{ji}$ . Vratimo se opet praktičnim primjenama.

**Primjer 4.** Jedno zagrebačko uvozno-izvorno poduzeće uvozi 2500 litara šampanjca iz Francuske za 15 000 EUR. Odredite cijenu tog šampanjca u Zagrebu ako poduzeće za 1 EUR plaća 7.42 HRK, transportni troškovi su 8% a carina 15% nabavne cijene, marža je 5% tako dobivene veleprodajne cijene a PDV je 22%.

Jednostavno slijedimo pravila lančanog računa

$$\begin{array}{l|l} x \text{ HRK} & 1 \text{ l} \\ 2500 \text{ l} & 15\,000 \text{ EUR} \\ 1 \text{ EUR} & 7.42 \text{ HRK} \\ 100 \text{ HRK} & 123 \text{ HRK (t.t. i carina)} \\ 100 \text{ HRK} & 105 \text{ HRK (marža)} \\ 100 \text{ HRK} & 122 \text{ HRK (PDV)} \end{array} \implies x = 70.15 \text{ HRK.}$$

Primijetimo da smo, po pravilima, račun mogli završiti nakon trećeg retka a zatim primijeniti postotni račun (tri puta). Međutim, kao što vidimo, sve se to može elegantno ukorporirati u sam lančani račun u skladu s njegovim pravilima. Tako npr. obračunati maržu od 5% znači da svakih 100 novčanih jedinica (HRK) cijene sada postaje 105 itd.

Preračunavanje mjernih i novčanih jedinica jedna je od značajnih primjena lančanog računa. Takav je i sljedeći primjer.

**Primjer 5.** Ako za 2297 kuna i 10 lipa dobijemo 380 USD, za 4059 kuna i 22 lipa dobijemo 550 EUR a za 6300 EUR trebamo platiti 7665 USD, koliko EUR možemo dobiti za 9999 kuna i 99 lipa?

Primijetimo da, prema uvjetima zadatka, imamo dvije mogućnosti:

1. Za HRK kupujemo EUR:

$$\begin{array}{l|l} x_1 \text{ EUR} & 9999.99 \text{ HRK} \\ 4059.22 \text{ HRK} & 550 \text{ EUR} \end{array} \implies x_1 = 1354.94 \text{ EUR.}$$

2. Za HRK kupujemo USD a zatim za USD kupujemo EUR:

$$\begin{array}{l|l} x_2 \text{ EUR} & 9999.99 \text{ HRK} \\ 2297.10 \text{ HRK} & 380 \text{ USD} \\ 7665 \text{ USD} & 6300 \text{ EUR} \end{array} \implies x_2 = 1359.66 \text{ EUR.}$$

Vidimo da smo, zbog razlike u tečaju pojedinih deviza, dobili različite rezultate pa možemo birati povoljniju mogućnost a to je za nas prva od njih. Takav postupak naziva se *arbitražom deviza i roba*: razlike u cijenama roba i tečaju deviza na različitim tržištima možemo iskoristiti u svrhu povoljnijeg podmirenja dugovanja ili potraživanja, jeftinije kupnje ili skuplje prodaje te ostvarivanja bolje diferencije (zarade) itd. Tu je jedna od najznačajnijih primjena lančanog računa u ekonomiji. Pokažimo arbitražu na još nekim primjerima.

**Primjer 6.** Kako hrvatski turist može najpovoljnije kupiti kameru u Budimpešti čija je cijena 150 000 HUF, ako u Budimpešti notira deviza Beča 275 a deviza Zagreba 3400, dok u Zagrebu notira deviza Budimpešte 2.80 a deviza Beča 7.33?

Svaka deviza je novac koji na određenom tržištu ima određenu cijenu koju nazivamo *tečaj*. Ako je tečaj zadan (poznat) tada kažemo da deviza *kotira* ili *notira* na tom tržištu. Notiranje može biti izravno (broj jedinica domaće valute za 1 ili 100 jedinica strane) koje je na tržištima najčešće ili posredno (broj jedinica strane valute za 1 ili 100 jedinica domaće). Tako uvjeti zadatka znače da je u Budimpešti: 275 HUF = 1 EUR, 3400 HUF = 100 HRK, odnosno u Zagrebu: 2.80 HRK = 100 HUF, 7.33 HRK = 1 EUR.

Vidimo da hrvatski turist ima tri mogućnosti:

1. Promjena HRK u HUF u Budimpešti

$$\begin{array}{l|l} x_1 \text{ HRK} & 150\,000 \text{ HUF} \\ 3400 \text{ HUF} & 100 \text{ HRK} \end{array} \implies x_1 = 4411.76 \text{ HRK.}$$

2. Kupnja EUR u Zagrebu i promjena EUR u HUF u Budimpešti

$$\begin{array}{l|l} x_2 \text{ HRK} & 150\,000 \text{ HUF} \\ 275 \text{ HUF} & 1 \text{ EUR} \\ 1 \text{ EUR} & 7.33 \text{ HRK} \end{array} \implies x_2 = 3998.18 \text{ HRK.}$$

3. Kupnja HUF u Zagrebu

$$\begin{array}{l|l} x_3 \text{ HRK} & 150\,000 \text{ HUF} \\ 100 \text{ HUF} & 2.8 \text{ HRK} \end{array} \implies x_3 = 4200 \text{ HRK.}$$

Za turista je najpovoljnija druga mogućnost. Uočimo osnovno značenje dobivenih rezultata: u svakoj od ove tri mogućnosti hrvatski turist treba platiti različit iznos HRK, dok trgovac u Budimpešti uvijek dobiva 150 000 HUF. Ne radi se tu o nikakvoj prijevari ili smicalici, dobivene razlike su posljedica razlika u tečaju pojedinih deviza na različitim tržištima. Očito je da u praksi, ako promatramo i neke druge valute, imamo još više mogućnosti.

**Primjer 7.** Gdje će uvozno-izvozna tvrtka iz Zagreba kupiti a gdje prodati aluminij ako je cijena aluminija u Sydneyu 22.85 AUD za 25 lb (lb = pound = 453.6 g), u New Yorku 1580 USD za 1 l.t. (l.t. = long tone = 1016 kg), u Osaki 110 000 JPY za 150 kann (kann = 3.75 kg), te ako Zagreb notira devizu Sydneya 4.38, devizu New Yorka 5.76 i devizu Osake 4.64, a troškovi transporta su u Sydneyu 16%, New Yorku 15% i Osaki 14%?

Vidimo da su cijene izražene u različitim valutama i različitim količinskim jedinicama. Kako nije dana količina aluminija koju treba kupiti (prodati), izabiremo je proizvoljno. Pitamo se: koliko HRK treba tvrtka izdvojiti za neku fiksnu količinu aluminija (npr. 1000 kg)? Imamo tri mogućnosti:

1. Kupnja (prodaja) aluminija u Sydneyu

$x_1$ HRK	1000 kg	$\implies$	$x_1 = 10\,237.77$ HRK.
0.4536 kg	1 lb		
25 lb	22.85 AUD		
1 AUD	4.38 HRK		
100 HRK	116 HRK		

2. Kupnja (prodaja) aluminija u New Yorku

$x_2$ HRK	1000 kg	$\implies$	$x_2 = 10\,301.10$ HRK.
1016 kg	1580 USD		
1 USD	5.76 HRK		
100 HRK	115 HRK		

3. Kupnja (prodaja) aluminija u Osaki

$x_3$ HRK	1000 kg	$\implies$	$x_3 = 10\,344.11$ HRK.
3.75 kg	1 kann		
150 kann	110 000 JPY		
100 JPY	4.64 HRK		
100 HRK	114 HRK		

Za tvrtku je najpovoljnija kupnja u Sydneyu a prodaja u Osaki. Pri tome se ostvaruje diferencija (zarada) od  $10\,344.11 - 10\,237.77 = 106.34$  HRK na svakih 1000 kg. Na temelju te diferencije procjenjujemo isplativost ulaska u navedeni uvozno-izvozni posao.

Na kraju napomenimo, a što je jasno iz navedenih primjera, da se kod arbitraže koju provodimo lančanim računom u svim razmatranim mogućnostima, u svrhu direktne usporedbe, treba postaviti *isto pitanje*.

## Zadaci za vježbu

**1.** Srednja udaljenost Mjeseca od Zemlje je 384 400 km. Ako je 1 px (pixel) =  $263.6 \mu\text{m}$ , 1 ft (stopa) = 12 in (inč) = 30.48 cm, 1 mi (milja) = 1609 km te 1 ls (svjetlosna sekunda) = 299 800 km, izrazite navedenu udaljenost u pixelima, inčima, miljama i svjetlosnim sekundama.

*Rješenje.*  $1\,458\,270\,106\,222\text{ px} = 15\,133\,858\,268\text{ in} = 238\,906.153\text{ mi} = 1.2822\text{ ls.}$

**2.** Ako 50 AUD vrijedi kao 4520 JPY, 120 GBP kao 255 CAD a 10 000 JPY kao 45 GBP, koliko CAD vrijedi 100 AUD?

*Rješenje.* 86.445 CAD.

**3.** Pas, mačak i miš ugledaše komad sira i istovremeno pojuriše prema njemu. Ako je pas udaljen od sira 27 svojih skokova, mačak 23 svoja skoka a miš 50 svojih skokova, tko će od njih prvi ugrabiti sir? Znamo da 3 skoka psa imaju istu duljinu kao i 5 skokova mačka a 2 mačja skoka iste su duljine kao i 9 skokova miša. Znamo također da je mačak dvostruko brži od miša a pas dvostruko brži od mačka.

*Rješenje.* Udaljenost od sira izrazimo u mišjim skokovima: pas 202.5, mačak 103.5, miš 50. S obzirom na njihove brzine, prvi dolazi miš (onda pas a zatim mačak).

**4.** Pretpostavimo da uvoznik iz New Yorka treba platiti njemačkom izvozniku iz Frankfurta 1 000 000 EUR za uvoz automobila. U New Yorku notira deviza Londona 1.5918 a deviza Frankfurta 1.1163, dok u Frankfurtu notira deviza Londona 1.4269 a deviza New Yorka 0.8976. Ispitajte na koje sve načine uvoznik može podmiriti svoj dug te koji mu je od tih načina najpovoljniji?

*Rješenje.* Kupnja EUR u New Yorku (1 116 300 USD), kupnja GBP u New Yorku i konverzija u EUR u Frankfurtu (1 115 565.21 USD), konverzija USD u EUR u Frankfurtu (1 114 082 USD) što je i najpovoljnije.

**5.** Gdje će tvrtka iz New Yorka kupiti a gdje prodati pšenicu ako ona kotira u Bonnu 22.74 EUR za 100 kg, u Stockholmu 1928.25 SEK za 1 m.t. (m.t. = metric tone = 1000 kg), u Londonu 120.81 GBP za 1 e.t. (e.t. = english tone = 1016 kg), a New York notira devizu Bonna 0.9225, devizu Stockholma 0.1079, devizu Londona 1.7050, dok su transportni troškovi iz Bonna 7%, iz Stockholma 3% te iz Londona 4%?

*Rješenje.* Za 100 kg pšenice plaća se: u Bonnu 22.45 USD, u Stockholmu 21.43 USD, u Londonu 21.08 USD. Kupnja u Londonu a prodaja u Bonnu (diferencija 1.37 USD na svakih 100 kg pšenice).

## Literatura

- [1] M. BABIĆ, A. BABIĆ, (2003) *Međunarodna ekonomija*, MATE, Zagreb.
- [2] B. RELIĆ, (2002) *Gospodarska matematika*, Hrvatska zajednica računovođa i financijskih djelatnika, Zagreb.
- [3] B. ŠEGO, (2005) *Matematika za III. razred ekonomskih škola*, Neodidacta, Zagreb.