Регионален натпревар 1999

I година

1. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} |x|+|y-1|=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$$

Решение. а) Ако $x \geq 0,\ y \geq 1$ го добиваме системот

$$\begin{cases} x+y-1=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$$

чие решение е (1,1). Ако $x \geq 0,\ y < 1$, го добиваме системот

$$\begin{cases} x-y+1=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$$

а овој систем нема решение во оваа област. Ако $x < 0,\ y \geq 1$ го добиваме системот

$$\begin{cases} -x+y-1=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$$

чие решение е $(-\frac{1}{3},\frac{5}{3})$. Ако $x < 0,\ y < 1$ го добиваме системот

$$\begin{cases} -x-y+1=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$$

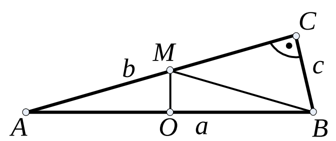
а овој систем нема решение во оваа област.

2. Ако m е цел број, докажи дека дропките $\frac{7m-1}{4}$ и $\frac{5m+3}{4}$ не можат истовремено да бидат цели броеви.

Решение. Да го претпоставиме спротивното т.е. нека $\frac{7m-1}{4}=a$, $\frac{5m+3}{4}=b$, $a,b \in \mathbb{Z}$. Тогаш $7m=4a+1$, $5m=4b-3$. Оттука добиваме $\frac{4a+1}{7}=\frac{4b-3}{5}$, т.е. $2(7b-5a)=13$. Бидејќи левата страна во последното равенство е делива со 2, а десната не е, следува дека последната равенка нема решение во $\mathbb{Z}$, па дадените дропки не можат истовремено да бидат цели броеви.

3А. Во правоаголен триаголник со остар агол 15°, радиусот на опишаната кружница е геометриска средина од катетите a и b, т. е. $R=\sqrt{ab}$. Докажи!

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол кај темето C, аголот кај темето A е 15°, катетите BC и AC се a и b соодветно и хипотенузата е c. Нека M е точка на страната



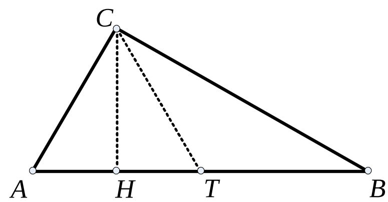
AC така што $\measuredangle ABM = 15^\circ$.

Центарот на опишаната кружница е во средината на хипотенузата, а бидејќи $\triangle ABM$ е рамнокрак следува дека MO е висина во $\triangle ABM$. $\triangle MOB \sim \triangle BCA$, па следува $\overline{BO} : \overline{BM} = \overline{AC} : \overline{AB}$. Аголот кај темето M во правоаголниот триаголник $\triangle BCM$ е 30°, а бидејќи во правоаголен триаголник катетата спроти аголот од 30° е половина од хипотенузата, следува дека $\overline{BM} = 2a$. Имајќи предвид дека $\overline{AB} = 2R,\ \overline{BO} = R,$ од горната пропорција следува $R = \sqrt{ab}$.

4А. Одреди ги аглите во триаголникот, кај кој висината и тежишната линија повлечени од исто теме, го делат аголот при тоа теме на три еднакви дела.

Решение. Нека ABC е триаголник така што висината CH и тежишната линија CT го делат аголот кај темето C на три еднакви дела. $\triangle AHC \cong \triangle CHT$ бидејќи CH е заедничка, $\measuredangle AHC = \measuredangle CHT = 90^\circ$ и од условот на задачата, $\measuredangle ACH = \measuredangle HCT$. Значи

$$\overline{AH} = \overline{HT} = \tfrac{1}{2}\overline{TB} = \tfrac{1}{4}\overline{AB}.$$



CT е симетрала на аголот кај темето C во $\triangle CHB$, па од својството на симетралата, следува $\overline{CH} : \overline{CB} = \overline{HT} : \overline{TB}$. Оттука добиваме

$$\overline{CH} = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{HT}}{\overline{TB}} = \overline{CB} \cdot \frac{\frac{1}{2}\overline{TB}}{\overline{TB}} = \tfrac{1}{2}\overline{CB}.$$

Триаголникот CHB е правоаголен, така што едната катета е два пати помала од хипотенузата. Следува дека $\measuredangle HBC = 30^\circ$ и $\measuredangle BCH = 60^\circ$. Според тоа, аглите во триаголникот ABC се 30°, 60° и 90°.

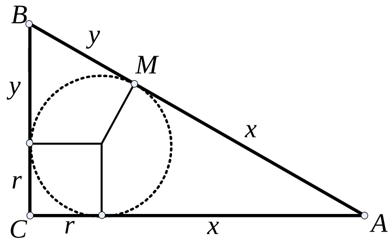
3Б. Едно момче за да стигне до саканата цел треба да помине низ три врати. На секоја врата стои по еден чувар. Момчето во себе носи извесен број јаболка. На првиот чувар треба да му даде половина од тој број и уште половина јаболко. На вториот чувар треба да му даде половина од остатокот и уште половина јаболко и на третиот чувар треба да му даде половина од остатокот и уште половина јаболко. Да се најде најмалиот број на јаболка што треба да го носи со себе момчето, за да стигне до саканата цел, без да се пресече ниту едно јаболко.

Решение. Нека x е бројот на јаболката што момчето ги носи со себе. На првиот чувар треба да му даде $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$ јаболка. Му останале $x - \frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{2}$ јаболка. На вториот чувар трба да му даде $\frac{x-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4}$ јаболка. Му останале $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-3}{4}$ јаболка. И на третиот чувар треба да му даде $\frac{x-3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8}$ јаболка. Бидејќи не е дозволено сечење на јаболката, потребно е броевите $\frac{x+1}{2}$, $\frac{x+1}{4}$ и $\frac{x+1}{8}$

да бидат природни. Значи бројот $x+1$ треба да биде деллив со 8. Најмалиот природен број x за кој што важи ова е $x=7$.

4Б. Докажи дека плоштината на правоаголен триаголник е еднаква на производот од должините на отсечките на кои е разделена хипотенузата со впишаната кружница.

Решение. Нека впишаната кружница ја допира хипотенузата AB во точката M и нека $\overline{AM}=x,\ \overline{BM}=y$. Радиусот на впишаната кружница да го означиме со r, а со P ќе ја означиме плоштината на $\triangle ABC$. Тогаш



$$P=\frac{2xr}{2}+\frac{2xy}{2}+r^2=xr+yr+r^2$$

Од друга страна

$$P=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{2}=\frac{(x+r)(y+r)}{2}=\frac{xy+xr+yr+r^2}{2}=\frac{xy+P}{2}$$

па оттука добиваме дека $P=xy$.

II година

1. Докажи дека $w=\frac{z-1}{z+1}$, каде што z е комплексен број таков што $z\neq -1$, е чисто имагинарен ако и само ако $|z|=1$.

Решение. Нека $|z|=1$ и нека $z=a+ib$. Тогаш

$$w=\frac{a-1+ib}{a+1+ib}\cdot\frac{a+1-ib}{a+1-ib}=\frac{a^2-1+b^2+2ib}{(a+1)^2+b^2}=\frac{a^2-1+b^2}{(a+1)^2+b^2}+i\frac{2b}{(a+1)^2+b^2}\ .$$

Бројот w е чисто имагинарен ако $a^2-1+b^2=0$, односно $|z|^2=1$, а оттука следува $|z|=1$. Ако $|z|=1$, тогаш $a^2-1+b^2=0$, па јасно е дека w е чисто имагинарен.

2. Нека M е средина на страната BC на паралелограмот $ABCD$ и нека AM ја сече дијагоналата BD во точката O. Одреди ја плоштината на четириаголникот $OMCD$, ако плоштината на паралелограмот $ABCD$ е P.

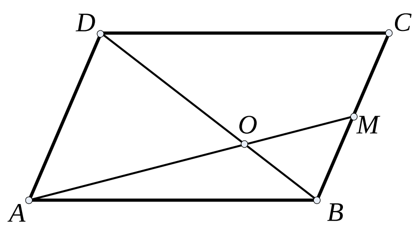
Решение. Очигледно е дека важи

$$P_{ABM}=\frac{1}{4}P,\ P_{BCD}=\frac{1}{2}P$$

и $\triangle BMO\sim\triangle ADO$ со коефициент на сличност 2. Оттука следува дека

$$\overline{AO}:\overline{OM}=2:1,$$

односно



$$\overline{AM}:\overline{OM}=3:1.$$

Значи $P_{ABM}=3P_{BMO}$ (имаат исти висини). Бидејќи $P_{ABM}=\frac{1}{4}P$, следува дека $P_{BMO}=\frac{1}{12}P$. Конечно добиваме

$$P_{OMCD}=P_{BCD}-P_{BMO}=\frac{1}{2}P-\frac{1}{12}P=\frac{5}{12}P.$$

3А. Најди релација меѓу корените на квадратната равенка

$$(x^2-6m+5)+m(x^2-5x+6)=0$$

што не зависи од m?

Решение. Ако $m\neq -1$, тогаш равенката е еквивалентна со равенката

$$x^2-\frac{5m+6}{m+1}x+\frac{6m+1}{m+1}=0,$$

и има корени x_1 и x_2 за кои важат равенствата

$$x_1+x_2=\frac{5m+6}{m+1}=5+\frac{1}{m+1},\quad x_1x_2=\frac{6m+5}{m+1}=6-\frac{1}{m+1}$$

Ако ги собереме овие две равенства, добиваме $x_1+x_2+x_1x_2=11$.

4А. Докажи дека $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$.

Решение. Прв начин. Нека $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Ако ги степенуваме двете страни на ова равенство на трети степен добиваме:

$$x^3=2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+3(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

односно $x^3=4-3x$, а од тука добиваме $(x-1)(x^2+x+4)=0$. Бидејќи равенката $x^2+x+4=0$ нема реални решенија, следува дека $x=1$.

Втор начин. Имаме

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=\sqrt[3]{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})^3}+\sqrt[3]{(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})^3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}=1.$$

3Б. Во равенката $x^2+px+q=0$ одреди ги реалните броеви p и q, ако разликата на корените на равенката е еднаква на 5, а разликата на нивните кубови е 35.

Решение. Нека x_1 и x_2 се корени на дадената равенка. Од условот на задачата имаме $x_1-x_2=5,\ x_1^3-x_2^3=35$. Бидејќи

$$x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2),$$

добиваме $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=7$. Тогаш

$$q=x_1x_2=\frac{1}{3}[(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)-(x_1-x_2)^2]=\frac{1}{3}(7-25)=-6$$

$$p^2 = (x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 - 4x_1x_2 = 25 - 24 = 1$$

па оттука добиваме дека $p = -1$ или $p = 1$.

4Б. Пресметај го збирот

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{1999\sqrt{1998}+1998\sqrt{1999}}.$$

Решение. За секој природен број n важи

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} \cdot \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}$$
$$= \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Тогаш збирот е еднаков на:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{1999\sqrt{1998}+1998\sqrt{1999}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1998}} - \frac{1}{\sqrt{1999}}$$
$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1999}}.$$

III година

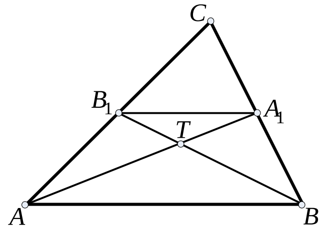
1. Најди $\log_{35} 28$, ако $\log_{14} 7 = a$ и $\log_{14} 5 = b$.

Решение. Имаме

$$\log_{35} 28 = \frac{\log_{14} 28}{\log_{14} 35} = \frac{\log_{14} 14 + \log_{14} 2}{\log_{14} 5 + \log_{14} 7} = \frac{1+\log_{14}\frac{14}{7}}{a+b} = \frac{1+\log_{14} 14 - \log_{14} 7}{a+b} = \frac{2-a}{a+b}.$$

2. Тежишните линии t_a и t_b во триаголникот ABC образуваат со страната AB агли чиј збир е 60°. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC, ако $t_a t_b = \sqrt{3}$.

Решение. Бидејќи тежишните линии со страната AB формираат агли чиј збир е 60°, следува дека



$$\measuredangle ATB = 120^\circ,\ \measuredangle A_1TB_1 = 120^\circ,$$
$$\measuredangle A_1TB = 60^\circ \text{ и } \measuredangle ATB_1 = 60^\circ.$$

Нека $\overline{AT} = n,\ \overline{A_1T} = m,\ \overline{BT} = s$ и $\overline{B_1T} = t$. Сега

$$\sqrt{3} = t_a t_b = (m+n)(s+t) = mt + ms + nt + ns$$

$$P_{ABA_1B_1} = \frac{1}{2} ns \sin 120^\circ + \frac{1}{2} sm \sin 60^\circ + \frac{1}{2} mt \sin 120^\circ + \frac{1}{2} nt \sin 60^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(ns + sm + mt + nt\right) = \frac{3}{4}.$$

Бидејќи A_1B_1 е средна линија во ΔABC, следува дека триаголниците ABC и A_1B_1C се слични со коефициент на сличност 2. Оттука следува дека $P_{ABC} = 4P_{A_1B_1C}$, односно $P_{A_1B_1C} = \frac{1}{3}P_{ABA_1B_1} = \frac{1}{4}$. Значи, $P_{ABC} = P_{ABA_1B_1} + P_{A_1B_1C} = 1$.

3. Пресметај ја најголемата вредност на изразот $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$, ако α, β и γ се агли во триаголник.

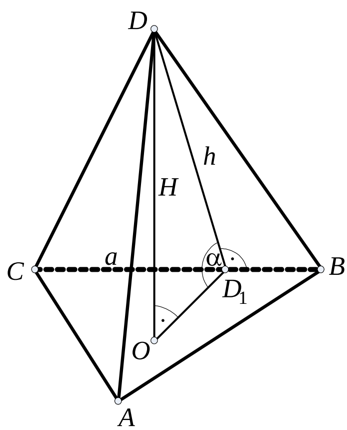
Решение. Барем два од аглите α, β и γ се остри. Нека се тоа аглите α и β. Бидејќи α и β се остри агли, следува дека $0 \le \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \le 1$, а бидејќи $0 < \gamma < \pi$, следува дека $0 \le \cos(\frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{6}) \le 1$.

Добиваме:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\gamma \le 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\gamma + \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} \\
&= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{3} + 2\sin(\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{6})\cos(\frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{6}) - \sin\frac{\pi}{3} \\
&\le 2\sin\frac{\alpha+\beta}{3} + 2\sin(\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{6}) - \sin\frac{\pi}{3} \\
&= 4\sin(\frac{1}{2}(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} + \frac{\pi}{6}))\cos(\frac{1}{2}(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} - \frac{\pi}{6})) - \sin\frac{\pi}{3} \\
&= 4\sin\frac{\pi}{3}\cos(\frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{6}) - \sin\frac{\pi}{3} \le 4\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Ако $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, тогаш $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Значи најголемата вредност што може да ја прими изразот $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ е $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

4А. Нека S и P се плоштините на два ѕида на една триаголна пирамида. Ако a е должината на нивниот заеднички раб, α аголот меѓу тие два ѕида, тогаш волуменот на пирамидата е $\frac{2SP\sin\alpha}{3a}$. Докажи!



Решение. Нека плоштината на ΔABC е S, а на $\triangle BCD$ е P. Понатаму, нека висината на пирамидата спуштена од D е H, а висината на ѕидот BCD е h и заедничкиот раб е $\overline{BC} = a$. Од $\triangle BCD$ следува $h = \frac{2P}{a}$, а од $\triangle OD_1D$ следува $H = h\sin\alpha = \frac{2P\sin\alpha}{a}$. Значи волуменот е

$$V = \frac{SH}{3} = \frac{2SP\sin\alpha}{3a}.$$

3Б. Ако $0<\alpha<\beta<\gamma<\frac{\pi}{2}$, докажи дека

$$\operatorname{tg}\alpha<\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}<\operatorname{tg}\gamma .$$

Решение. Функцијата $\sin x$ е растечка на интервалот $(0,\frac{\pi}{2})$, па следува $\sin\alpha<\sin\beta<\sin\gamma$. Функцијата $\cos x$ е опаѓачка на интервалот $(0,\frac{\pi}{2})$, па следува $\cos\alpha>\cos\beta>\cos\gamma$.

Добиваме:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}>\frac{3\sin\alpha}{3\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha, \qquad \frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}<\frac{3\sin\gamma}{3\cos\gamma}=\operatorname{tg}\gamma$$

Значи

$$\operatorname{tg}\alpha<\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}<\operatorname{tg}\gamma .$$

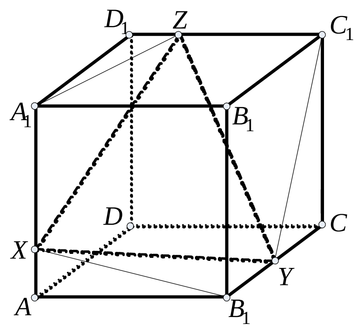
4Б. На три разминувачки рабови на коцка со раб a се избрани темиња на триаголник, различни од темињата на коцката, такви што збирот од квадратите на страните на тој триаголник да биде најмал. Колкав е тој збир?

Решение. На рабовите AA_1, BC и C_1D_1 ги избираме точките X, Y и Z соодветно. Означуваме $\overline{AX}=x$, $\overline{BY}=y$, $\overline{C_1Z}=z$, и $\overline{AB}=a$. Тогаш:

$$\begin{aligned}\overline{XY}^2&=\overline{XB}^2+\overline{BY}^2\\&=\overline{XA}^2+\overline{AB}^2+\overline{BY}^2\\&=x^2+a^2+y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{YZ}^2&=\overline{YC_1}^2+\overline{C_1Z}^2\\&=\overline{YC}^2+\overline{CC_1}^2+\overline{C_1Z}^2\\&=(a-y)^2+a^2+z^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{ZX}^2&=\overline{ZA_1}^2+\overline{A_1X}^2\\&=\overline{ZD_1}^2+\overline{D_1A_1}^2+\overline{A_1X}^2\\&=(a-z)^2+a^2+(a-x)^2\end{aligned}$$



Со собирање на последните три равенства добиваме:

$$\begin{aligned}\overline{XY}^2+\overline{YZ}^2+\overline{ZX}^2&=2(x^2+y^2+z^2)-2a(x+y+z)+6a^2\\&=2[(x-\tfrac{a}{2})^2+(y-\tfrac{a}{2})^2+(z-\tfrac{a}{2})^2+\tfrac{9}{4}a^2].\end{aligned}$$

Овој збир ќе биде најмал ако $x=y=z=\frac{a}{2}$, односно ако точките X, Y и Z се средини на соодветните рабови. Значи, најмалиот збир е $\frac{9}{4}a^2$.

IV година

1. Нека точките $A_i(x_i, y_i),\ i=1,2,3,4$ се различни меѓу себе и припаѓаат на хиперболата $xy=1$. Ако овие четири точки припаѓаат на една кружница, докажи дека $x_1x_2x_3x_4=1$.

Решение. Нека точките $A_i(x_i, y_i),\ i=1,2,3,4$ припаѓаат на кружницата $x^2+y^2+Ax+By+C=0$. Тогаш $(x_i, y_i),\ i=1,2,3,4$ се решенија на системот

$$\begin{cases} xy=1 \\ x^2+y^2+Ax+By+C=0 \end{cases}$$

Ако во втората равенка од системот ставиме $y=\frac{1}{x}$, добиваме

$$x^2+\frac{1}{x^2}+Ax+\frac{B}{x}+C=0$$

односно,

$$x^4+Ax^3+Cx^2+Bx+1=0 \qquad (1)$$

Бидејќи x_1, x_2, x_3 и x_4 се решенија на равенката (1),следува дека

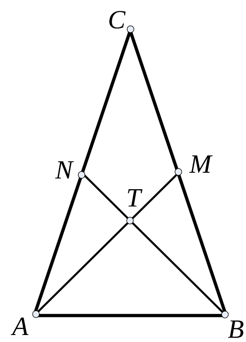
$$x^4+Ax^3+Cx^2+Bx+1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

Со изедначување на слободните членови добиваме $x_1x_2x_3x_4=1$.

2. Ако тежишните линии AM и BN во триаголникот ABC се заемно нормални, докажи дека $\cos\gamma \geq \frac{4}{5}$. (γ е аголот кај темето C)

Решение. ΔABT е правоаголен, па следува

$$c^2=(\tfrac{2}{3}t_a)^2+(\tfrac{2}{3}t_b)^2.$$



Бидејќи

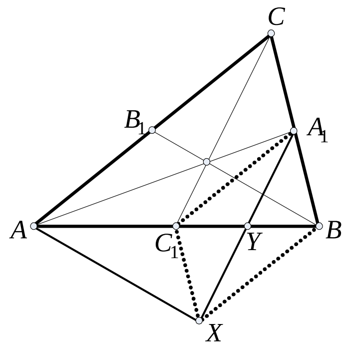
$$t_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4},\ \ t_b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}$$

добиваме $5c^2=a^2+b^2$.

Од косинусната теорема добиваме

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4c^2}{2ab}\geq\frac{4c^2}{a^2+b^2}=\frac{4c^2}{5c^2}=\frac{4}{5}.$$

3А. Даден е триаголник ABC со плоштина P. Од неговите тежишни линии е конструиран друг триаголник, потоа од тежишни линии на вториот триаголник е конструиран трет триаголник и.т.н. Општо, $(n+1)$-от триаголник е конструиран од тежишните линии на n-тиот триаголник. Пресметај го збирот од плоштините на сите триаголници од така добиената низа.



Решение. Нека AA_1, BB_1 и CC_1 се тежишните линии во $\triangle ABC$. Нека AXA_1 е триаголник така што $A_1X \parallel CC_1$, $BB_1 \parallel AX$. Страните на триаголникот AXA_1 имаат еднакви должини како и тежишните линии на триаголникот ABC. Од начинот на конструирањето на триаголникот AXA_1 јасно е дека секој триаголник што е констуиран од тежишните линии на $\triangle ABC$ има еднаква плоштина како и $\triangle AXA_1$. Четириаголникот XBA_1C_1 е паралелограм ($AXBB_1$ е паралелограм, бидејќи, од начинот на конструкција на $\triangle AXA_1$ следува дека $\overline{AX} = \overline{BB_1}$, $AX \parallel BB_1$; оттука следува $BX \parallel A_1C_1$, $\overline{A_1C_1} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ и $\overline{BX} = \frac{1}{2}\overline{AC}$), па следува дека точката Y е средина на отсечките A_1X и C_1B (пресек на дијагоналите) и $\overline{AY} = \frac{3}{4}\overline{AB}$. Значи триаголниците AYA_1 и AXY имаат иста плоштина. Ако h е висината на триаголникот ABC спуштена од темето C, тогаш јасно е дека висината на триаголникот AYA_1 спуштена од темето A_1 е $\frac{1}{2}h$. Нека P_1 е плоштината на триаголникот AXA_1. Тогаш

$$P_1 = 2\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\overline{AB}\cdot\frac{1}{2}h = \frac{3}{4}P$$

Ако $P_2, P_3, ..., P_k, ...$ се плоштините на второт, третиот,..., k -тиот триаголник итн, јасно е дека

$$P_2 = (\tfrac{3}{4})^2 P,\ P_3 = (\tfrac{3}{4})^3 P\ , ...\ ,\ P_k = (\tfrac{3}{4})^k P\ , ...$$

$$P + P_1 + P_2 + ... + P_k + ... = P\,(1 + \frac{3}{4} + \frac{3^2}{4^2} + ... + \frac{3^k}{4^k} + ...) = P\,\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4P\ .$$

4А. На колку начини може кралот на шаховската табла 8×8 да стигне од долниот лев агол до горниот десен агол движејќи се само десно и напред?

Решение. За да стигне кралот од долниот лев агол до горниот десен агол треба да се движи седум пати десно и седум пати напред. Движењето десно да го означиме со Д, а движењето напред со П. Задачата се сведува на следното: на колку начини може да се распоредат седум букви Д и седум букви П. Значи се работи за пермутации од 14 елементи од кои 7 се повторуваат и другите седум се повторуваат. Тој број изнесува $\frac{14!}{7!\,7!} = 3432$.

3Б. Дали можат броевите 2, $\sqrt{6}$ и $\frac{9}{2}$ да бидат членови на една аритметичка или на една геометриска прогресија?

Решение. Нека дадените броеви се членови на една аритметичка прогресија. Тогаш постои реалнен број d и природни броеви k и l така што $\sqrt{6}-2=kd,\ \frac{9}{2}-\sqrt{6}=ld$. Но, $\frac{k}{l}=\frac{\sqrt{6}-2}{\frac{9}{2}-\sqrt{6}}=\frac{2(11\sqrt{6}-30)}{57}$, а овој број не е рационален. Значи, не може дадените броеви да бидат членови на една аритметичка прогресија.

Дадените броеви се членови на некоја геометриска прогресија бидејќи

$$\frac{\sqrt{6}}{2}=q^k,\ \frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{6}}=(\frac{\sqrt{6}}{2})^3=q^{3k}$$

за некој природен број k.

4Б. Ако $n\geq 2$ и $|x|<1$, докажи дека $(1-x)^n+(1+x)^n<2^n$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}(1-x)^n+(1+x)^n &= 1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+\binom{n}{n}x^n+\\ &+1-\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}x^{n-1}+(-1)^n\binom{n}{n}x^n=\\ &=2\left(1+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{4}x^4+\ldots+a(x)\right)\end{aligned}$$

каде што $a(x)=\binom{n}{n}x^n$ ако n е парен и $a(x)=\binom{n}{n-1}x^{n-1}$ ако n е непарен. Да означиме $A(x)=2\left(1+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{4}x^4+\ldots+a(x)\right)$. Бидејќи $|x|<1$, следува дека $\binom{n}{2k}x^{2k}<\binom{n}{2k}$ за секој природен број k. Значи изразот $A(x)$ ќе биде најголем ако $x=\pm 1$ и во тој случај неговата вредност е 2^n. Според тоа

$$(1-x)^n+(1+x)^n<2^n.$$