Републички натпревар 1981

I година

1. Да се разложи на прости множители изразот

$$bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b).$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b) &= bc(b+c)+a(c^2-ac-ab-b^2) \\ &= bc(b+c)+a[(c-b)(c+b)-a(c+b)] \\ &= bc(b+c)+a(b+c)(c-b-a) \\ &= (b+c)(bc+ac-ab-a^2) \\ &= (b+c)[c(b+a)-(a(b+a)] \\ &= (a+b)(b+c)(c-a). \end{aligned}$$

2. Да се докаже дека

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\begin{cases} 2, & 1\le x\le 2 \\ 2\sqrt{x-1}, & x\ge 2 \end{cases}$$

Решение. Левата страна на даденото равенство да ја означиме со $P(x)$. Да забележиме дека $P(x)\ge 0$. Имаме

$$\begin{aligned} [P(x)]^2 &= x+2\sqrt{x-1}+x-2\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^2-4(x-1)} \\ &= 2x+2\sqrt{(x-2)^2} = 2x+2\,|\,x-2\,|. \end{aligned}$$

Ако $1\le x\le 2$, тогаш

$$[P(x)]^2 = 2x-2x+4=4\text{, т.е. } P(x)=2.$$

Ако $x\ge 2$, тогаш

$$[P(x)]^2 = 2x+2x-4=4x-4=4(x-1)\text{, т.е. } P(x)=2\sqrt{x-1}.$$

3. Ку2 че се наоѓало во местото A кога почнало да трча по лисица на растојание 30 m од A. Скокот на кучето е 2 m, а на лисицата е 1 m. Во исто време додека кучето прави два скока, лисицата прави три скока. На кое растојание од A кучето ќе ја стигне лисицата?

Решение. *Прв начин.* Нека x е растојанието од A кога кучето ќе ја стигне лисицата; тогаш од условот на задачата ќе имаме:

$$\tfrac{x}{4}=\tfrac{x-30}{3},$$

од каде што добиваме $x=120$.

Значи, кучето ќе ја стигне лисицата на растојание 120m од A.

Втор начин. Со два скока кучето се приближува до лисациата за $2\cdot 2-3\cdot 1=1\,m$. На почетокот лисицата е оддалечена $30\,m$, па затоа за кучето да ја стигне лисицата треба да направи $30\cdot 2=60$ скока, што значи дека од A кучето ќе ја стигне лисицата на $60\cdot 2=120\,m$.

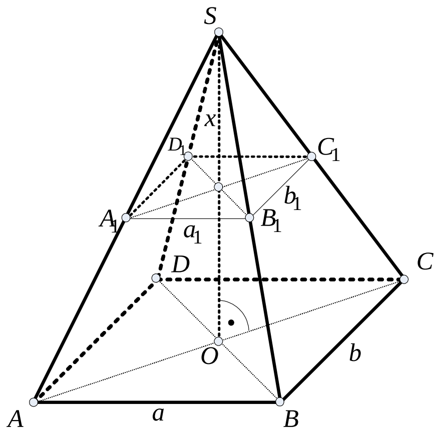
4. Основата на една пирамида е правоаголник со страни a и b, а бочните рабови се еднакви на c. Пирамидата е пресечена со рамнина, паралелна со основата, на два дела со еднакви волумени.

Да се најде растојанието од рамнината до врвот на пирамидата.

Решение. Нека $A_1B_1C_1D_1$ е правоаголникот што се добива како пресек на рамнината со пирамидата (види цртеж). Да го означиме со V волуменот на пирамидата $ABCDS$, а со V_1 волуменот на пирамидата $A_1B_1C_1D_1S$. Од условот на задачата имаме

$$V=2V_1. \qquad (1)$$

Двете пирамиди се слични, па ќе имаме $P:P_1=H^2:x^2$, т.е. $P_1=\frac{x^2P}{H^2}$. Од (1) добиваме $P_1=\frac{P\cdot H}{2x}$; според тоа $x=\frac{H}{2}\sqrt[3]{4}$.



Да ја најдеме висината H на дадената пирамида.

Од триаголникот SOC добиваме

$$H^2=c^2-\frac{a^2+b^2}{4}=\frac{1}{4}(4c^2-a^2-b^2),$$

т.е. $H=\frac{1}{2}\sqrt{4c^2-a^2-b^2}$. Следствено,

$$x=\frac{H\sqrt[4]{4}}{2}=\frac{\sqrt[3]{4}}{4}\sqrt{4c^2-a^2-b^2}\ .$$

II година

1. Да се докаже дека

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}}=\sqrt{6}\ .$$

Решение. Имаме

$$(\sqrt{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}})^2=1+i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}+2\sqrt{1+3}=6\,.$$

Според тоа,

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}}=\sqrt{6}\ .$$

2. Двајца работници, работејќи истовремено, извршуваат одредена работа за еден ден. Кога би работеле еден по друг, секој по толкав дел од денот колку што изнесува делот од работата што ја извршил за еден ден, тогаш би бил завршен k-ти дел од работата. Колку време му е потребно на секој работник сам да ја заврши работата?

Решение. Нека првиот работник ја завршува работата за време од x единици; тогаш вториот работник ќе ја заврши работата за време $\frac{x}{x-1}$. Според условот на задачата, ќе имаме

$$\frac{1}{x^2}+\frac{(x-1)^2}{x^2}=\frac{1}{k},$$

од каде што добиваме

$$(k-1)x^2-2kx+2k=0. \tag{1}$$

Решенијата на ова равенка се $x_{1/2}=\frac{1}{k-1}(k\pm\sqrt{2k-k^2})$.

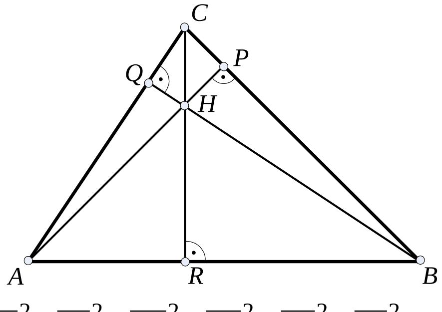
Равенката (1) треба да има реални решенија, па, значи $2k-k^2\geq 0$, т.е. $k\in[0,2]$, а бидејќи k е природен број, добиваме дека $k=1$ или $k=2$.

За $k=1$, од (1) добиваме $x=1$, т.е. првиот работник би ја завршил целата работа, а вториот работник не би имал што да работи, што не е можно при заедничка работа. За $k=2$ имаме $x=y=2$, т.е. и двајцата работници ќе ја завршат работата за исто време.

3. Нека AP, BQ и CR се висините во триаголникот ABC. Да се докаже дека

$$\overline{AR}^2+\overline{BP}^2+\overline{CQ}^2=\overline{RB}^2+\overline{PC}^2+\overline{QA}^2$$

Решение. Од цртежот се гледа дека важат следните равенства



$$\overline{AC}^2-\overline{AR}^2=\overline{BC}^2-\overline{RB}^2$$

$$\overline{AB}^2-\overline{BP}^2=\overline{AC}^2-\overline{PC}^2$$

$$\overline{BC}^2-\overline{CQ}^2=\overline{AB}^2-\overline{QA}^2.$$

Ако ги собереме овие равенства, ќе добиеме

$$\overline{AC}^2-\overline{AR}^2+\overline{AB}^2-\overline{BP}^2+\overline{BC}^2-\overline{CQ}^2=\overline{BC}^2-\overline{RB}^2+\overline{AC}^2-\overline{PC}^2+\overline{AB}^2-\overline{QA}^2,$$

т.е.

$$\overline{AR}^2+\overline{BP}^2+\overline{CQ}^2=\overline{RB}^2+\overline{PC}^2+\overline{QA}^2.$$

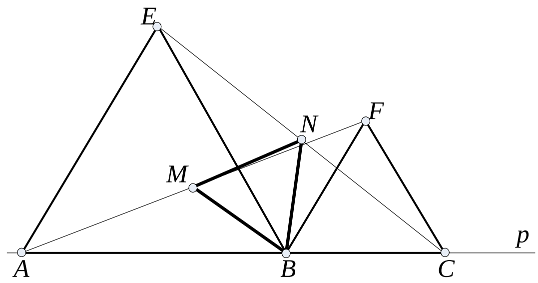
4. На правата P дадени се точките A, B и C, така што B е меѓу A и C. На иста страна од правата p конструирани се рамнострани триаголници ABE и

BCF. Нека M е средината на отсечката AF, а N е средината на отсечката CE. Да се докаже дека триаголникот BMN е рамностран.

Решение. Нека ρ е ротацијата со центар B и агол 60°. Тогаш

$$\rho(A)=E,\ \rho(F)=C,$$

па значи, отсечката AF со ρ се пресликува во отсечката EC, од каде што следува дека средината M на отсечката A со ρ ќе се преслика во средината N на отсечката EF, т.е. $\rho(M)=N$. Од $\rho(M)=N$ следува дека



$$\measuredangle MBN=60^\circ \text{ и } \overline{BM}=\overline{BN},$$

т.е. триаголникот BMN е рамностран.

III година

1. Да се најдат сите вредности на m од интервалот $(-1,1)$ за кои равенката

$$4^{\sin x}+m2^{\sin x}+m^2-1=0$$

има решенија.

Решение. Да ставиме $y=2^{\sin x}$. Така ја добиваме равенката

$$y^2+my+m^2-1=0. \tag{1}$$

Дискриминантата $D=4-3m^2$ на равенката (1) за $m\in(-1,1)$ е позитивна, што значи дека за секој $m\in(-1,1)$ равенката (1) има реални решенија. Решенијата се

$$y_{1/2}=\tfrac{1}{2}(-m\pm\sqrt{4-3m^2}).$$

Од $y=2^{\sin x}>0$ следува дека решение може да биде само $y_1=\frac{1}{2}(-m+\sqrt{4-3m^2})$.

За $m\in(-1,1)$ имаме $4-3m^2>m^2$, што значи дека $y_1>0$. Сега имаме:

$$2^{\sin x}=\tfrac{1}{2}(-m+\sqrt{4-3m^2}),\text{ т.е. } \sin x=\log_2[\tfrac{1}{2}(-m+\sqrt{4-3m^2})],$$

односно

$$\sin x=\log_2(-m+\sqrt{4-3m^2})-1, \tag{2}$$

За равенката (2) да има решение, потребно е да биде исполнето

$$-1\le\log_2(-m+\sqrt{4-3m^2})-1\le1,$$

т.е.

$$1\le -m+\sqrt{4-3m^2})\le 4,$$

а тоа е задоволено за секој $m \in [\frac{-1-\sqrt{13}}{4}, \frac{-1+\sqrt{13}}{4}]$.

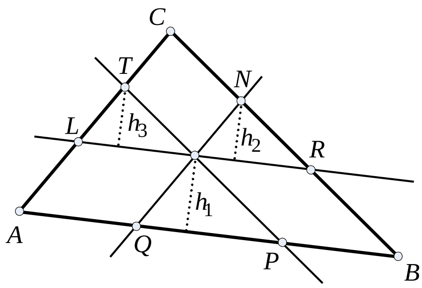
Следствено, дадената равенка има решение за секој $m \in (-1, \frac{-1+\sqrt{13}}{4}]$.

2. Во триаголникот ABC дадена е точка M. Низ M се повлечени три прави p, q и r паралелни со AB, BC и CA соодветно. Нека $R = p \cap BC$, $L = p \cap AC$, $P = q \cap AB$, $T = q \cap AC$, $Q = r \cap AB$, $N = r \cap BC$. Ако се познати плоштините $P_1 = P_{PQM}$, $P_2 = P_{MRN}$ и $P_3 = P_{LMT}$, да се најде плоштината P на триаголникот ABC.

Решение. Лесно се гледа дека $h_1 + h_2 + h_3 = h$ (види цртеж). Триаголниците ABC и QPM се слични, па имаме $P_1 : P = h_1^2 : h^2$.

Слично имаме $P_2 : P = h_2^2 : h^2$ и $P_3 : P = h_3^2 : h^2$, од каде што добиваме:

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{h^2(P_1+P_2+P_3)}{h_1^2+h_2^2+h_3^2} \\
&= \frac{(h_1+h_2+h_3)^2}{h_1^2+h_2^2+h_3^2}(P_1+P_2+P_3) \\
&= (1+\frac{h_2}{h_1}+\frac{h_3}{h_1})^2 \frac{P_1+P_2+P_3}{1+(\frac{h_2}{h_1})^2+(\frac{h_3}{h_1})^2} \\
&= (1+\sqrt{\frac{P_2}{P_1}}+\sqrt{\frac{P_3}{P_1}})^2 \frac{P_1+P_2+P_3}{1+\frac{P_2}{P_1}+\frac{P_3}{P_1}} \\
&= (\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3})^2
\end{aligned}
$$

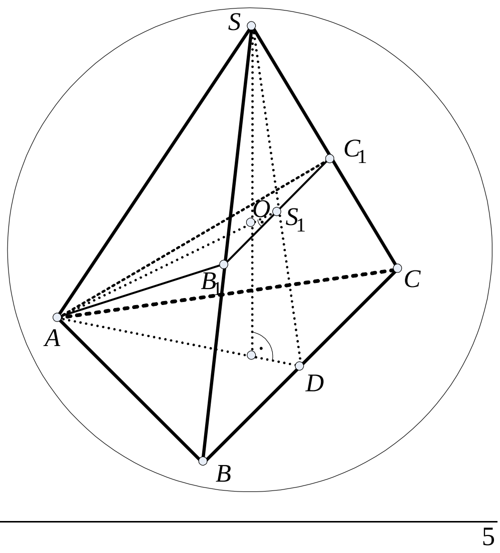


3. Во сфера со центар O е впишан правилен тетраедар $SABC$ со раб a. Низ темето A, поставена е рамнина што минува низ O и го сече ѕидот SBC по права, паралелна со работ BC. Да се најде плоштината на делот од рамнината што е во топката, а е надвор од тетраедарот.

Решение. Центарот O на сферата е центар на опишаната кружница околу триаголникот AB_1C_1. Бараната плоштина P ќе биде

$$P = r^2\pi - P_{AB_1C_1}, \qquad (1)$$

каде што r е радиусот на сферата. Триаголникот AB_1C_1 е рамнокрак со основа B_1C_1 и висина $\overline{AS_1} = H$, висината на тетраедарот. Од триаголникот ASS' (види цртеж) имаме



$$H^2 = a^2 - (\tfrac{2}{3}\tfrac{a\sqrt{3}}{2})^2 = \tfrac{2}{3}a^2,$$

т.е. $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Од триаголникот AOS' имаме:

$$r^2 = (H-r)^2 + (\tfrac{2}{3}\tfrac{a\sqrt{3}}{2})^2,$$

т.е. $r = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Заменувајќи во (1) добиваме

$$P = r^2\pi - \tfrac{1}{2}\overline{B_1C_1}\cdot\overline{AS_1} = \tfrac{3a^2}{8}\pi - \tfrac{1}{2}\tfrac{2}{3}a\tfrac{a\sqrt{6}}{3} = \tfrac{3a^2}{8}\pi - \tfrac{a^2\sqrt{6}}{9} = \tfrac{a^2}{72}(27\pi - 8\sqrt{6}).$$

4. За кои цели броеви a и b системот

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = b \\ \frac{m^n - 1}{m^n + 1} = a \end{cases}$$

има решение (по m и n) во множеството $\mathbb{Z}$ од целите броеви.

Решение. Од првата равенка добиваме $m^n = \frac{1+a}{1-a} = 1 + \frac{2a}{1-a}$, што значи дека бројот $\frac{2a}{1-a}$ треба да биде цел. Бидејќи a и $a-1$ се заемно прости за $a \neq 0$, бројот $\frac{2a}{1-a}$ е цел ако и само ако $a = -1, 2, 3$.

За $a = -1$ имаме $m^n = 0$, па добиваме дека $m = 0$ и n е произволен цел број различен од 0.

За $a = 2$ добиваме $m^n = -3$, па $m = -3, n = 1$.

За $a = 3$, добиваме $m^n = -2$, па $m = -2$, $n = 1$.

Од друга страна за $a = 0$ имаме $m^n = 1$, од каде што добиваме $n = 0$, m е било кој цел број различен од нула или $m = 1$ и n произволен цел број.

Следствено, системот има решение во множеството од целите броеви за: $a = -1, b = n^2, n \neq 0$, $a = 0, b = 1 + n^2$; $a = 2, b = 10$; $a = 3, b = 5$.

IV година

1. Ако корените на равенката $x^4 + px^2 + q = 0$ образуваат аритметичка прогресија, тогаш $100q = 9p^2$. Докажи!

Решение. Ако корените на дадената равенка образуваат аритметичка прогресија, тогаш тие може да се запишат во обликот: $a-d, a, a+d, a+2d$. Според Виетовите правила, прво, ќе имаме

$$a - d + a + a + d + a + 2d = 0,$$

од каде што добиваме $d=-2a$. Значи, корените на дадената равенка ќе бидат $3a, a, -a, -3a$. Ако пак ги примениме Виетовите правила, ќе имаме $9a^4=q$. Заменувајќи во дадената равенка, добиваме $\frac{q}{9}+p\sqrt{\frac{q}{9}}+q=0$, од каде што добиваме $100q=9p^2$.

2. Да се најде 1981-от член на низата

$$1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,\dots .$$

Решение. Нека 1981-от член на низата е бројот k. Да забележиме дека последното појавување на бројот: 2 има реден број 3, 3 има реден број 6, 4 има редден број 10 итн.; последното појавување на бројот k во низата има реден број $1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$.

Според тоа, $\frac{k(k+1)}{2}\ge 1981$, од каде што добиваме дека $k^2+k-3962\ge 0$, т.е.

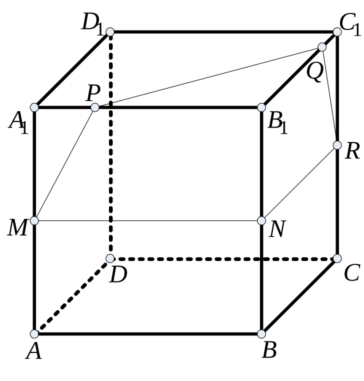
$$k\in(-\infty,\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{15849})]\cup[\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{15849}),+\infty).$$

Бидејќи $k>0$, следува дека k е најмалиот број што му припаѓа на интервалот $[\frac{1}{2}(-1+\sqrt{15849}),+\infty)$. Имаме: $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{15849})\approx 62,4$, па според тоа, $k=63$.

Следствено, 1981-от член во дадената низа е бројот 63.

3. Во средината на еден од бочните рабови на една коцка се наоѓа мравка. Ако мравката по бочните ѕидови се движи со брзина 6, а по основите $5\sqrt{2}$, да се најде бројот на различните патишта (до симетрија) за мравката најбргу да стигне до средината на спротивниот раб.

Решение. Нека мравката се наоѓа во средината M на работ AA_1, а треба да стигне во средината R на работ CC_1 (види цртеж). Очигледно, еден од најкратките патишта од M до R е патот MNR, каде што N е средина на работ BB_1. По овој пат мравката ќе стигне до R за време $t=\frac{2a}{6}=\frac{a}{3}$.



Но мравката може да се движи и по основните ѕидови. Нека $MPQR$ е еден таков пат (види цртеж). Поради симетрија имаме

$$\overline{MP}=\overline{QR} \text{ и } \overline{PB_1}=\overline{B_1Q}.$$

Да ставиме $x=\overline{A_1P}$; тогаш имаме:

$$\overline{MP}=\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}},\ \overline{PQ}=(a-x)\sqrt{2}.$$

Ако t_2 е времето за кое мравката ќе го помине патот $MPQR$, тогаш

$$t_2=\frac{\overline{MP}}{6}+\frac{\overline{PQ}}{5\sqrt{2}}+\frac{\overline{QR}}{6}=\frac{\sqrt{4x^2+a^2}}{6}+\frac{a-x}{5}.$$

Од $t_2 \le t_1$ добиваме

$$\frac{\sqrt{4x^2+a^2}}{6}+\frac{a-x}{5}\le\frac{a}{3},$$
$$5\sqrt{4x^2+a^2}\le 4a+6x,$$
$$(8x-3a)^2\le 0,$$

т.е. $8x-3a=0$, од каде што добиваме $x=\frac{3a}{8}$. Соодветното време е $t_2=t_1=\frac{a}{3}$.

Следствено, постојат (до симетрија) два такви патишта.

4. Нека $S=\{1,2,3,...,n\}$ и нека $T_k=\{x_1+x_2+...+x_k \mid x_i\in S,\ x_i\ne x_j \text{ за } i\ne j\}$. Ако t_k е бројот на елементите во множеството T_k, да се докаже дека

$$\sum_{k=1}^{n}t_k=\frac{n}{6}(n^2+5).$$

Решение. Да го најдеме на почеток бројот t_k. Најмалиот број во T_k е бројот

$$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

а најголемиот е:

$$(n-k+1)+(n-k+2)+...+n=\frac{k}{2}(2n-k+1).$$

Според тоа, ќе имаме:

$$t_k=\frac{k}{2}(2n-k+1)-\frac{k(k+1)}{2}+1=k(n-k)+1.$$

На крајот ќе имаме:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}t_k&=n+\sum_{k=1}^{n}k(n-k)\\&=n+n\cdot\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=n+\frac{n^2(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=\frac{n}{2}(n^2+5).\end{aligned}$$