XVII РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

V-1. Колку страни има многуаголникот кај кој од едно теме може да се повлечат 32 дијагонали?

Решение: Во многуаголник со n страни од едно теме може да се повлечат n-3 дијагонали. Значи $n-3=32$; $n=32+3$, $n=35$.

V-2. Збирот на два броја е 242. Ако поголемиот број се подели со помалиот се добива количник 3 и остаток 2. Кои се тие броеви?

Решение: Нека x е помалиот број. Тогаш, поголемиот број е $3x+2$. Имаме $242=(3x+2)+x$. Според тоа $242-2=3x+x$, односно $240=4\cdot x$. Помалиот број е $240:4=60$, а поголемиот број е $3\cdot 60+2=182$

V-3. Пополни ги празните полиња во табелата така што збирот на броевите: а) во секои три соседни полиња да биде 15. Објасни ја постапката. б) во секои три соседни полиња, по хоризонтала и по вертикала, да биде 12.

	3	**5**					

	5						
				1			
6							
		2					

Решение:
Во првото поле е бројот 7, затоа што 3+5+7=15. Ученикот треба да воочи и да запише дека бројот 7 се запишува на секое четврто поле, а истото важи и за броевите 3 и 5.

7	3	5	7	3	5	7	3

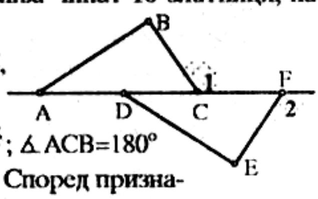
5	5	2	5	5	2	5	5
1	1	10	1	1	10	1	1
6	6	0	6	6	0	6	6
5	5	2	5	5	2	5	5

V-4. Пет телиња и две јагниња чинат 11 златници, а осум јагниња и две телиња чинат 8 златници. Колку златници чини едно теле, а колку едно јагне?

Решение 1: Бидејќи 5 телиња и 2 јагниња чинат 11 златници, 10 телиња и 4 јагниња, двапати повеќе, ќе чинат 22 златници.. Слично, бидејќи 2 телиња и 8 јагниња чинат 8 златници, 10 телиња и 40 јагниња, петпати повеќе, ќе чинат 40 златници. Бидејќи во двата случаи бројот на телињата е 10, разликата во цената одговара на бројот на златниците што се дадени за јагнињата, односно 40-4=36 јагниња чинат 40-22=18 златници. Се заклучува дека секои две јагниња чинат по 1 златник. Бидејќи 5 телиња и 2 јагниња чинат 11 златници, а видовме дека 2 јагниња чинат 1 златник, заклучуваме дека 5 телиња чинат 10 златници, па едно теле ќе чини 2 златници.

Решение 2: Бидејќи 2 телиња и 8 јагниња чинат 8 златници, половината, т.е. 1 теле и 4 јагниња ќе чинат 4 златници. Пет пати повеќе, односно 5 телиња и 20 јагниња ќе чинат 5·4 =20 златници. Но, според условот, 5 телиња и 2 јагниња чинат 11 златници, од каде што заклучуваме дека 20-2=18 јагниња ќе чинат 20-11=9 златници. Значи, едно јагне чини половина златник, а 2 јагниња чинат 1 златник. Бидејќи 5 телиња и 2 јагниња чинат 11 златници, а видовме дека 2 јагниња чинат 1 златник, заклучуваме дека 5 телиња чинат 10 златници, па едно теле ќе чини 2 златници..

VI-1. На цртежот е: $\overline{AD}=\overline{CF}$, $\measuredangle BAC = \measuredangle EDF$, $\measuredangle 1=\measuredangle 2$. Докажи дека $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



Решение: Имаме: $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \overline{CF} + \overline{DC} = \overline{DF}$; $\measuredangle ACB=180^\circ - \measuredangle 1 = 180^\circ - \measuredangle 2 = \measuredangle DFE$; $\measuredangle BAC = \measuredangle EDF$, по услов. Според признакот АСА следува дека $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

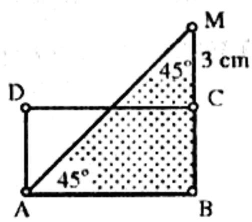
VI-2. Блаже прочитал една книга за три дена. Првиот ден прочитал $\frac{2}{5}$ од бројот на страниците, вториот ден $\frac{4}{9}$ од останатиот дел, а третиот ден ги прочитал преостанатите 90 страници. Колку страници има книгата?

Решение: По првиот ден на Блаже му останало да прочита уште $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ страници. Вториот ден Блаже прочитал $\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{5}=\frac{4}{15}$ од бројот на страниците му останале уште $\frac{3}{5}-\frac{4}{15}=\frac{1}{3}$ од бројот на страниците. Бидејќи тоа се 90 страници, следува дека вкупниот број страници е $90\cdot 3=270$.

VI-3. Одреди ги сите четирицифрени броеви од видот $\overline{1x9y}$ што се деливи и со 3 и со 5.

Решение: Еден број е делив со 5 ако цифрата на единици е 0 или 5. Според тоа $y\in\{0,5\}$. Ако $y=0$, тогаш бројот $\overline{1x90}$ е делив со 3 ако збирот на цифрите му е делив со 3, т.е. $1+x+9+0=10+x$ е делив со 3. Тоа е можно за $x\in\{2,5,8\}$ Бараните броеви се: 1290, 1590 и 1890. Ако $y=5$, тогаш збирот на цифрите на бројот $\overline{1x95}$ е $15+x$ од каде што $x\in\{0,3,6,9\}$ па броевите се: 1095, 1395, 1695 и 1995. Бараните броеви се: 1095, 1290, 1395, 1590, 1695, 1890 и 1995.

VI-4. Правоаголникот ABCD ($\overline{AB}>\overline{BC}$) има периметар L = 26 cm. Симетралата на аголот кај темето A го сече продолжението на страната BC во точката M, така што $\overline{CM}=3$ cm. Пресметај ги должините на страните на правоаголникот.

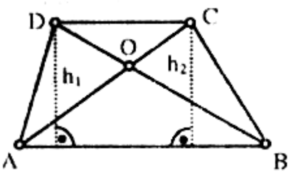


Решение: Триаголникот ABM е правоаголен ($\measuredangle B=90^\circ$). Бидејќи $\measuredangle BAM=45^\circ$, следува дека и $\measuredangle BMA=45^\circ$ па овој триаголник е рамнокрак, т.е. $\overline{AB}=\overline{BM}$. Оттука $a=b+3$. Бидејќи полупериметарот е 13 cm, т.е. $a+b=13$, или $b+3+b=13$, $b=5$ cm, па $a=5+3$, т.е. $a=8$ cm.

VII-1. Докажи дека за секој реален број x, изразот $(15x+1)^2-3(3-7x)\cdot(x-1)-(x^2-73)$ е позитивен.

Решение: $(15x+1)^2-3(3-7x)\cdot(x-1)-(x^2-73)=225x^2+30x+1-3(3x-3-7x^2+7x)-x^2+73=225x^2+30x+1-9x+9+21x^2-21x)-x^2+73=245x^2+83$. Бидејќи $x^2\geq 0$, за секој реален број x, следува дека $245x^2+83>0$.

VII-2. Во четириаголникот ABCD дијагоналите AC и BD се сечат во точката O. Ако плоштините на триаголниците AOD и BOC се еднакви, тогаш четириаголникот ABCD е трапез. Докажи.



Решение: Од $P_{\Delta AOD}=P_{\Delta BOC}$ следува дека $P_{\Delta AOD}+P_{\Delta ABO}=P_{\Delta BOC}+P_{\Delta ABO}$, па $P_{\Delta ABD}=P_{\Delta ABC}$. Бидејќи

$P_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}\ \overline{AB}\cdot h_1$ и $P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\ \overline{AB}\cdot h_2$, следува дека $h_1=h_2$, т.е. D и C се еднакво оддалечени од AB, па DC||AB. Значи, четириаголникот ABCD е трапез.

VII-3. Во едно училиште во V одделение има 140 ученици, а во VI одделение има 5% помалку ученици отколку во петто. Бројот на учениците од V и VI одделение заедно претставува 91% од бројот на учениците во VI и VII одделение.

Колку ученици има во VII одделение?

Решение: Бројот на учениците во шесто одделение е 95% од бројот на учениците во V одд., т.е. $\frac{95}{100}\cdot 140=133$. Според тоа во V и во VI одд. има 273 (=140+133) ученици. Овој број е 91% од бројот на учениците во VI и VII одд., т.е. $\frac{100\cdot 273}{91}$ =30. Во седмо одделение има 300-133=167 ученици.

VII-4. Дали постои природен број n таков што n^2+n+1 е делив со 5? Одговорот објасни го.

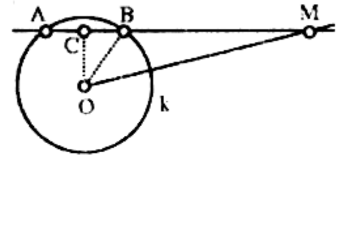
Решение: Ако n^2+n+1 е делив со 5 тогаш постои природен број k така што $n^2+n+1=5k$. Имаме $n^2+n=5k-1$. Бројот $5k-1$ е непарен број за секоја вредност на k. Но, $n^2+n=n(n+1)$ е производ на два последователни природни броја n и $n+1$ од кои едниот е парен број. Според тоа овој производ е парен број. Затоа $n^2+n+1\neq 5k$ за секое $k\in N$, односно не постои n за кое бројот 5 би бил делител на n^2+n+1.

VIII-1. Од еден рој пчели една петтина слетала на цветот на јасминот, а една третина слетала на цветот на зумбулот. Трикратната разлика од овие два броја слетала на цветот на ружата, а една пчела останала да лета. Колку пчели имало во ројот?

Решение: Ако x е бројот на пчелите во ројот, тогаш на цветот на јасминот, зумбулот и ружата слетале $\frac{x}{5}$, $\frac{x}{3}$ и $3(\frac{x}{3}-\frac{x}{5})$ пчели соодветно. Бидејќи една пчела не слетала имаме: $\frac{x}{5}+\frac{x}{3}+3(\frac{x}{3}-\frac{x}{5})+1=x$. $\frac{8x}{15}+\frac{6x}{15}+1=x$; $\frac{14x}{15}+1=x$; $x=15$.

VIII-2. Од точката M што е надвор од кругот K(O, r) повлечена е права што ја сече кружницата во точките A и B. Ако $\overline{MA}=16$ cm, $\overline{MB}=9$ cm, $\overline{MO}=13$ cm пресметај ги плоштината и периметарот на кругот.

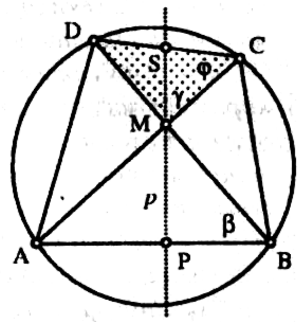
Решение: Нека $C\in AB$ и $OC\perp AB$. Следува дека C е средина на AB. Затоа $\overline{CB}=\frac{1}{2}\ \overline{AB}=\frac{1}{2}(\overline{MA}-\overline{MB})$ = 3,5 cm. ΔCOM е правоаголен па $\overline{OC}^2=\overline{MO}^2-\overline{MC}^2$.



Од $\overline{MC} = \overline{MB} + \overline{BC} =$ 12,5 cm, добиваме $\overline{OC}^2 = 13^2 - 12{,}5^2 = 12{,}75$ cm^2. ΔCOB е правоаголен. Затоа $r^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{BC}^2 = (3{,}5^2 + 12{,}75)$; $r^2 = 25$; $r = 5$ cm.

Конечно, $P = \pi r^2 = 25\pi$ cm^2, $L = 2\pi r = 10\pi$ cm^2.

VIII-3. Дијагоналите на тетивниот четириаголник ABCD се заемно нормални и се сечат во точката M. Докажи дека правата *p* што минува низ точката M и е нормална на страната AB ја преполовува страната CD.



Решение: Нека правата p ја сече страната AB во точката P , а страната CD во точката S. Треба да се докаже дека $\overline{DS} = \overline{SC}$ Да означиме: $\measuredangle PBM$ со β, $\measuredangle SMC$ со γ и $\measuredangle MCS$ со φ. Како агли со нормални краци $\beta = \gamma$, како агли над ист лак во кружница имаме $\beta = \varphi$. Следува дека $\gamma = \varphi$, т.е. ΔMSC е рамнокрак. Значи $\overline{MS} = \overline{CS}$. Аналогно се докажува дека и $\overline{MS} = \overline{SD}$. Значи, $\overline{CS} = \overline{MS} = \overline{SD}$, т.е. C е средина на DC.

VIII-4. На 12 мажи, жени и деца им се поделени 12 леба. Секој маж добил 2 леба, секоја жена добила половина леб, а секое дете добило четвртина леб. Одреди го бројот на мажите, бројот на жените и бројот на деца, ако секој од овие броеви е различен од 0.

Решение: 1. Бројот на мажите е помал од 6. Ако тој број е 6 или поголем од 6, тогаш во групата ќе нема жени и деца. 2. Бројот на мажите е поголем од 3. Ако тој број е 3 или помал од 3 тогаш мажите ќе земат 6 леба или помалку, а сите жени и деца најмногу може да добијат помалку од 6 леба (поточно 5,25 леба). 3. Бројот на мажи е 5. Ако тој број е 4, тогаш за останатите 8 жени и деца преостануваат 4 леба, а тоа значи дека во групата нема деца - спротивно на условот. 4. Значи, во групата имало 5 мажи. Бројот на жени е помал од 4. Тој број не е 3 затоа што тогаш бројот на деца би имало 2, а $5+3+2<12$. Слично се проверува дека бројот на жени не е 2.

Според тоа бројот на жени е 1, а бројот на деца е $12 - (5+1) = 6$.