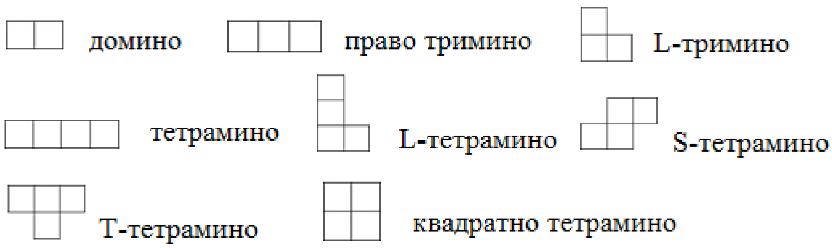
Катерина Аневска,
Скопје

ПОКРИВАЊЕ НА ШАХОВСКА ТАБЛА

Боењето на дадена површина е дел од комбинаториката, кој е тесно поврзан со покривањето на површината со однапред зададени фигури (домина, тримина, тетрамина итн) и со принципот на Дирихле. Оттука, овие задачи се посебно интересни за комисиите кои ги организираат националните и меѓународните натпревари. Во нашите разгледувања ќе се осврнеме на покривање на квадратни мрежи, шаховска табла (квадратна 8×8 мрежа) и правоаголни мрежи. Притоа, да забележиме дека правоаголна мрежа со димензии $m\times n$ е правоаголник со должини на страни m и n, кој со помош на прави паралелни со страните на правоаголникот е разделен на mn квадрати со димензии 1×1, таканаречени единични квадрати, кои ќе ги нарекуваме клетки. Понатаму, облиците на споменатите домино, тримино и тетрамино се:



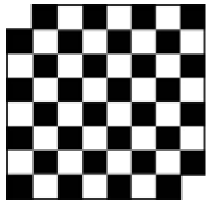
Под покривање на површина (фигура) се подразбира нејзино целосно покривање со дадените фигури, при што истите не смее да се преклопуваат и да излегуваат надвор од границите на дадената површина (фигура). Што се однесува до фигурите со кои се врши покривањето, тие може произволно да се поставуваат, т.е. може да ги завземаат сите можни положби кои се добиваат со нивна ротација.

Во продолжение ќе разгледаме неколку карактеристични примери, за кои сметаме дека ќе ти бидат од помош при усвојувањето на постапките со кои се решаваат задачите од овој тип.

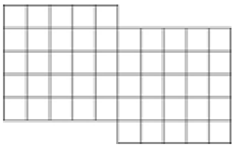
Пример 1. Дали може шаховска табла, од која се отстранети горното лево и долното десно квадратче, да се покрие со домина?

Решение. Нека шаховската табла е обоена како што е прикажано на цртеж 1. При ваквото боење, без разлика како е поставено доминото, тоа покрива по едно бело и едно црно поле (квадратче).

Ако дадената табла може да се покрие со домина, тогаш од петходно изнесеното следува дека ќе бидат покриени ист број на бели и црни полиња. Но, таблата има 32 црни и 30 бели полиња, што значи дека таа не може да се покрие на барaниот начин. ■



Цртеж 1

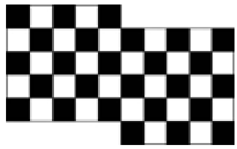


Цртеж 2

Пример 2. Дали мрежата на цртеж 2 може да се покрие со 25 домина?

Решение. Дадената мрежа ќе ја обоиме како што е прикажано на цртеж 3. При ваквото боење секое домино покрива по едно бело и по едно црно поле.

Ако дадената мрежа може да се покрие со домина, тогаш ќе бидат покриени ист број на бели и црни полиња, што значи по 25 црни и бели полиња. Но, мрежата има 26 црни и 24 бели полиња, па значи дека бараното покривање не е можно. ■



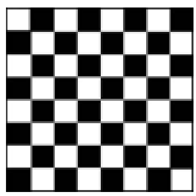
Цртеж 3

Пример 3. Дали може 11×11 табла, од која е отстрането едно аголно поле, да се покрие со прави тетрамина?

Решение. Да ја обоиме таблата на стандарден начин, т.е. како шаховската табла. Тогаш кое било право тетрамино, без разлика како е поставено, ќе покрива по 2 црни и 2 бели полиња, што значи дека при било каков распоред на тетрамината ќе бидат покриени еднаков број црни и бели полиња. Но, бидејќи едно аголно поле е отстрането, и сите аголни полиња се обоени во црна (бела) боја, таблата ќе содржи 61 црно (бело) и 59 бели (црни) полиња. Според тоа, бараното покривање не е можно. ■

Пример 4. Дали шаховска табла со димензии 8×8, може да се покрие со петнаесет T -тетрамина и едно квадратно тетрамино.

Решение. Ќе докажеме дека такво покривање не постои. Да ја обоиме таблата во две бои, на стандарден начин (цртеж 4). Тогаш едно T -тетрамино, во зависност од тоа како е поставено, ќе покрива или 3 црни и 1 бело или 1 црно и 3 бели полиња. Значи, петнаесет T -тетрамина вкупно ќе покријат непарен број црни и непарен број бели полиња, додека едно квадратно тетра-

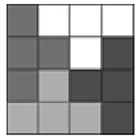


Цртеж 4

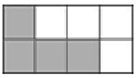
мино секогаш покрива 2 црни и 2 бели полиња. Според тоа, со петнаесет T-тетрамина и 1 квадратно тетрамино може да се покријат непарен број црни и непарен број бели полиња, а на таблата има по 32 полиња во двете бои. Значи, бараното покривање не постои. ■

Пример 5. Докажи дека шаховска 8×8 табла неможе да се покрие со S-тетрамина, но може да се покрие со секое од останатите тетрамина.

Решение. Покривањето на таблата со право и квадратно тетрамино е очигледно.


Цртеж 5

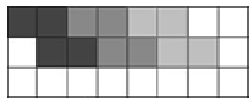
Секоја 4×4 табла може да се покрие со T-тетрамина (цртеж 5), па затоа 8×8 табла може да се покрие со T-тетрамина покривајќи четири 4×4 табли.


Цртеж 6

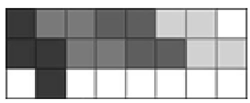
Секоја 2×4 табла може да се покрие со L-тетрамина (цртеж 6). Затоа 8×8 табла може да се покрие со L-тетрамина покривајќи осум 2×4 табли.

Останува да докажеме дека 8×8 табла неможе да се покрие со S-тетрамина.

Да ги разгледаме првите три реда од таблата и сите можности на нивно покривање со S-тетрамина.


Цртеж 7

1° Ако првото S-тетрамино е поставено така да ги покрива првите две хоризонтални полиња од првиот ред, тогаш сите останати S-тетрамина десно од него мораат да бидат поставени на ист начин (цртеж 7). Но, тоа значи дека последните три квадратчиња од таблата не може да се покријат со S-тетрамина.


Цртеж 8

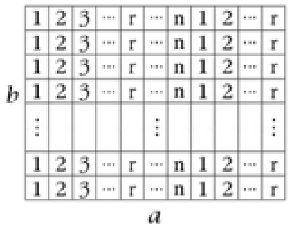
2° Ако првото S-тетрамино е поставено така да ги покрива првите две вертикални полиња од првата колон, тогаш останатите S-тетрамина десно од него мора да бидат во обратна позиција (цртеж 8). Но тогаш горното десно аглово квадратче неможе да биде покриено.

Значи во било кој случај не постои покривање со S-тетрамина на првите три реда на дадената 8×8 табла па значи не постои покривање и на дадената табла. ■

Пример 6. Да се докаже дека правоаголник $a\times b$ може да се покрие со $1\times n$ правоаголници ако и само ако $n\,|\,a$ или $n\,|\,b$.

Решение. Јано, ако $n \mid a$ или $n \mid b$, тогаш очигледно правоаголникот $a \times b$ може да се покрие со $1 \times n$ правоаголници.

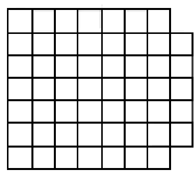
Обратно, нека претпоставиме дека даден правоаголник $a \times b$ може да се покрие со $1 \times n$ правоаголници и нека $n \nmid a$. Тогаш $a = qn + r$, каде $0 < r < n$. Да го обоиме дадениот правоаголник во n бои како на цртеж 9. Тогаш имаме по $bq + b$ клетки во секоја од боите $1, 2, ..., r$ и по bq клетки во секоја од боите $r+1, r+2, ..., n$. Хоризонтално поставен $1 \times n$ правоаголник секогаш покрива по една клетка од секоја боја, додека вертикално поставен $1 \times n$ правоаголник секогаш покрива по n клетки во една иста боја. Нека се поставени h хоризонтални $1 \times n$ правоаголници. Тогаш остануваат по $bq + b - h$ клетки во секоја од боите $1, 2, ..., r$ и по $bq - h$ клетки во секоја од боите $r+1, r+2, ..., n$ па следува дека $n \mid bq + b - h$ и $n \mid bq - h$ од каде имаме дека $n \mid (bq + b - h) - (bq - h) = b$. Аналогно ако претпоставиме дека $n \nmid b$, се добива дека мора $n \mid a$. ■



Цртеж 9

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Една 9×10 табла е покриена со домина, а потоа домината се измешани. Докажи дека таблата не може повторно да се покрие со овие домина, така што секое домино кое во првото покривање било во хоризонтална положба во второто покривање е во вертикална положба.
2. Докажете дека фигурата прикажана на цртеж 10, која е составена од 54 единични квадрата, не може да се покрие со прави тримина.
3. Определи го најголемиот можен број на S-тетрамина кои може да се постават на квадратна 2003×2003 табла (не се дозволени ротации) така да без преклопувања секое од нив да покрива точно четири квадратчиња од таблата.



Цртеж 10

Литература

1. Тренчевски, К., Малчески, Р., Димковски, Д. Занимлива математика, МММ, Скопје, 1994
2. Цветковски, З., Малчески, Р. Комбинаторика (непубликувана книга), Скопје, 2009