Лилјана Василевска, Виолета Василевска

КОМБИНАТОРНА РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА НА КОНЕЧНИ ВЕРИЖНИ ДРОПКИ

Во оваа статија ќе дефинираме конечни верижни дропки и ќе покажеме како тие можат да се интерпретираат комбинаторно. Потоа ќе покажеме како оваа репрезентација на конечните верижни дропки овозможува комбинаторно да се решат некои интересни проблеми.

1.1 Вовед во конечни верижни дропки

Конечна (едноставна) верижна дропка (со ознака $[a_0, a_1, \cdots, a_n]$) е нескратлива дропка $\frac{p_n}{q_n}$ од облик

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} \qquad (1)$$

каде

a) $a_0 \geq 0,\ a_1 \geq 1,\ a_2 \geq 1, \ldots,\ a_n \geq 1$, и

b) $p_n = p_{a_0 a_1 \cdots a_n}$ и $q_n = q_{a_0 a_1 \cdots a_n}$ се броител и именител на нескратливата дропка (што значи дека $p_{a_0 a_1 \cdots a_n}$ и $q_{a_0 a_1 \cdots a_n}$ се заемно прости броеви, т.е., најголемиот заеднички делител на $p_{a_0 a_1 \cdots a_n}$ и $q_{a_0 a_1 \cdots a_n}$ е 1).

Од дефиницијата следува дека

$$[a_0, a_1, \cdots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = \frac{p_{a_0 a_1 \cdots a_n}}{q_{a_0 a_1 \cdots a_n}}$$

<u>Пример 1.</u> Имаме $[2, 4, 5] = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}} = \frac{47}{21}$, каде $p_{2,4,5} = 47$ и $q_{2,4,5} = 21$. □

<u>Пример 2</u>: Во овој пример ќе покажеме како нескратливата дропка $\frac{278}{27}$ може да се претстави во обликот (1) со помош на Euclid-овиот алгоритам:

$$\frac{278}{27} = 10 + \frac{8}{27} = 10 + \cfrac{1}{\frac{27}{8}} = 10 + \cfrac{1}{3 + \frac{3}{8}} = 10 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{8}{3}}} = 10 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \frac{2}{3}}}$$

$$= 10 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{3}{2}}}} = 10 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = [10, 3, 2, 1, 2].\ □$$

За конечната верижна дропка $[a]=\frac{a}{1}$, важи

$$p_0 = a \text{ и } q_0 = 1. \qquad (2)$$

Доколку конечните верижни дропки се посложени, тие можат да се пресметаат со помош на рекурзивни формули што ќе ги изведеме на следниов начин:

$$[a_0, a_1, \cdots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, \cdots, a_n]}$$

$$= a_0 + \frac{q_{a_1 \cdots a_n}}{p_{a_1 \cdots a_n}}$$

$$= \frac{a_0\, p_{a_1 \cdots a_n} + q_{a_1 \cdots a_n}}{p_{a_1 \cdots a_n}}$$

Бидејќи

$$[a_1, \cdots, a_n] = \frac{p_{a_1 \cdots a_n}}{q_{a_1 \cdots a_n}}$$

знаеме дека $p_{a_1 \cdots a_n}$ и $q_{a_1 \cdots a_n}$ се заемно прости броеви. Следува дека дропката $\frac{a_0\, p_{a_1 \cdots a_n} + q_{a_1 \cdots a_n}}{p_{a_1 \cdots a_n}}$ е исто така нескратлива, бидејќи било кој заеднички делител на броителот и именителот мора да ги дели и двата броеви, $p_{a_1 \cdots a_n}$ и $q_{a_1 \cdots a_n}$, што не е можно. Тогаш можеме да заклучиме дека

$$p_{a_0 a_1 \cdots a_n} = a_0\, p_{a_1 \cdots a_n} + q_{a_1 \cdots a_n}, \qquad (3)$$

$$q_{a_0 a_1 \cdots a_n} = p_{a_1 \cdots a_n}. \qquad (4)$$

Рекурзивните формули (3) и (4), заедно со почетните услови (2), можат да се искористат за пресметување на посложени конечни верижни дропки.

Конечните верижни дропки имаат едно интересно својство што ќе го илустрираме во следниот пример.

<u>Пример 3</u>. Да ги споредиме конечната верижна дропка

$$[3,17,1,10,13] = 3 + \frac{1}{17+\frac{1}{1+\frac{1}{10+\frac{1}{13}}}} = \frac{7881}{2579},$$

и нејзината обратна верижна дропка (т.е. конечната верижна дропка запишана во обратен редослед)

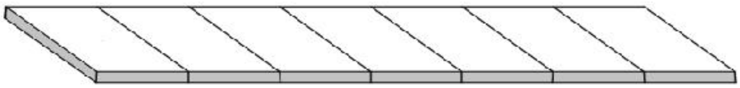
$$[13,10,1,17,3] = 13 + \frac{1}{10+\frac{1}{1+\frac{1}{17+\frac{1}{3}}}} = \frac{7881}{602}.$$

Можеме да забележиме дека двете дропки имаат ист броител. □

Уште поинтересен е фактот, дека овој феномен го поседуваат сите конечни верижни дропки за кои $a_0 > 0$. Ова својство на конечните верижни дропки ќе биде докажано во делот 1.3.

1.2 Проблем на покривање на $(n+1)$ – табла

Табла која се состои од $n+1$ ќелии поставени хоризонтално како што е прикажано на слика 1 ќе ја викаме $(n+1)$ – табла.



Слика 1. 7-табла

Квадратна плочка е плочка која може да покрие само една ќелија на таблата. Правоаголна плочка е плочка која може да покрие две ќелии на таблата.

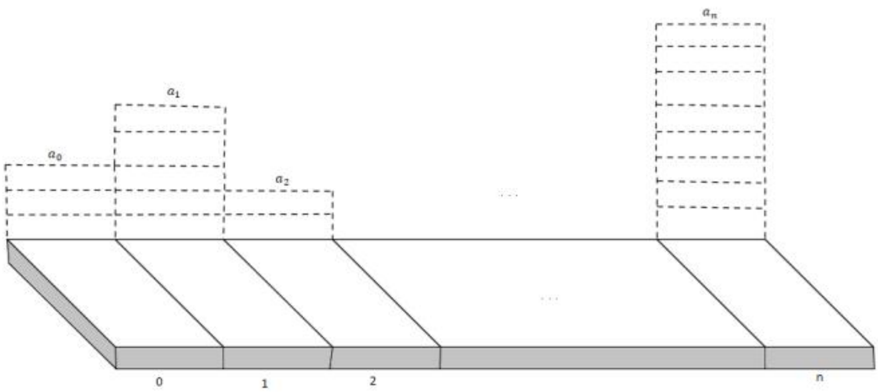
Нека се дадени следниве позитивни цели броеви: $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$. Прашање кое сакаме да го разгледаме е следното:

На колку начини може да се покрие $(n+1)$ – *табла со покривка што се состои од правоаголни и квадратини плочки така што*

1. *над правоаголна плочка ништо не е дозволено да се стави*
2. *секоја i-та ќелија на таблата може да се покрие со максимум* a_i *квадратни плочки (ставени една над друга), за* $0 \le i \le n$.

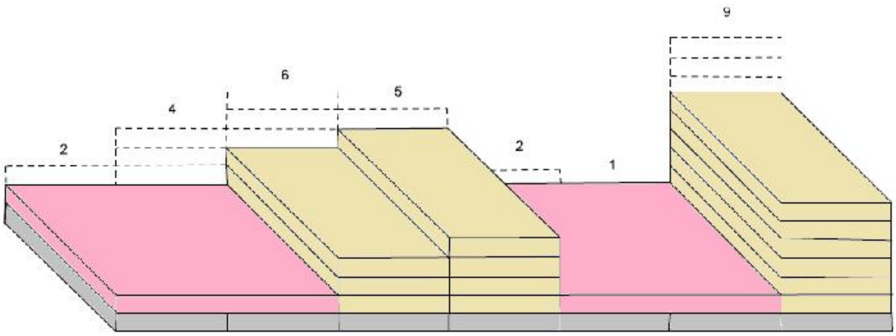
Броевите $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ ќе ги наречеме *висински ограничувања* за $(n+1)$ – табла.

На слика 2 е прикажана празна $(n+1)$ – табла со висински ограничувања $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$.



Слика 2. Празна $(n+1)$ – табла

Пример 4. Една покривка на 7-табла со висински ограничувања 2, 4, 6, 5, 2, 1, 9 е прикажана на слика 3. Да забележиме дека покривката се состои од розеви правоаголни плочки и кафеави квадратни плочки. □



Слика 3. Една покривка на 7-табла

За да го одговориме прашањето што го поставивме погоре, ќе ги воведеме следниве ознаки:

$P_{a_0 a_1 \dots a_n}$ – број на начини на кој може да се покрие $(n+1)$ – табла со висински ограничувања $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.

$Q_{a_0 a_1 \dots a_n}$ – број на начини на кој може да се покрие n – табла со висински ограничувања $a_1, a_2, \dots, a_n$, каде

$$Q_{a_0 a_1 \dots a_n} = P_{a_1 \dots a_n}. \qquad (5)$$

Да забележиме дека бројот на начини на кој може да се покрие 1-табла со висинско ограничување a е

$$P_a = a. \qquad (6)$$

Бројот на начини на кој може да се покрие празна табла се дефинира да е 1, т.е.

$$Q_a = 1. \qquad (7)$$

Пример 5. Да ги пресметаме $P_{2,4,5}$ и $Q_{2,4,5}$. Имаме, $Q_{2,4,5}$ е број на покривки на 2-табла со висински ограничувања 4, 5.

- Постои само една покривка која се состои од една правоаголна плочка.
- Ако за покривање на 2-таблата се користат само квадратни плочки, тогаш првата ќелија може да се покрие на 4 начини (употребувајќи 1 до 4 квадратни плочки), а втората ќелија може да се покрие на 5 начини (употребуваќи 1 до 5 квадратни плочки). Значи вкупниот број на покривки со квадратни плочки е $20 = 4 \cdot 5$.

Тогаш $Q_{2,4,5} = 21$

Имаме, $P_{2,\,4,5}$ е бројот на покривки на 3-табла со висински ограничувања 2, 4, 5. Ако покривката содржи правоаголна плочка, тогаш постојат два начини таа правоаголна плочка да се постави на 3-табла:

i) првите две ќелии се покриени со правоаголната плочка; тогаш третата ќелија може да се покрие на 5 начини. Значи во овој случај можни се 5 покривки.

ii) крајните две ќелии се покриени со правоаголната плочка; тогаш првата ќелија може да се покрие на 2 начини. Значи во овој случај можни се 2 покривки.

Ако за покривање на 3-табла се користат само квадратни плочки, тогаш првата ќелија може да се покрие на 2 начини, втората на 4 начини, и третата на 5 начини. Во овој случај постојат вкупно $40 = 2\cdot 4\cdot 5$ покривки.
Тогаш $P_{2,\,4,5} = 5+2+40 = 47$. □

Следно, сакаме да најдеме рекурзивни формули за $P_{a_0a_1\ldots a_n}$, за $n \geq 1$. За да го дефинираме $P_{a_0a_1\ldots a_n}$, за $n \geq 1$ рекурзивно ќе разгледаме два случаи:

i) Ако првата ќелија од таблата е покриена со квадратни плочки, тогаш таа може да се покрие на a_0 начини. Останатите ќелии формираат $n-$табла која може да се покрие на $P_{a_1\ldots a_n}$ начини. Тогаш целата $(n+1)-$табла може да се покрие на $a_0 P_{a_1\ldots a_n}$ начини.

ii) Ако првите две ќелии од таблата се покриени со правоаголна плочка на единствен начин, тогаш останатите ќелии формираат $(n-1)-$табла која може да се покрие на $P_{a_2\ldots a_n}$ начини. Значи целата $(n+1)-$табла може да се покрие исто на $P_{a_2\ldots a_n}$ начини.

Со комбинирање на овие два случаи ја добиваме рекурзивната формула за бројот на покривки на $(n+1)-$табла со висински ограничувања $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$P_{a_0a_1\ldots a_n} = a_0 P_{a_1\ldots a_n} + P_{a_2\ldots a_n} == a_0 P_{a_1\ldots a_n} + Q_{a_1\ldots a_n}\,. \qquad (8)$$

1.3 Комбинаторна репрезентација на верижни дропки

Следната теорема ја прикажува врската помеѓу конечните верижни дропки и проблемот на покривање на $(n+1)-$табла дискутиран во претходниот дел, т.е. ја дава комбинаторската репрезентација на конечните верижни дропки.

Теорема 1. *Нека* $a_0, a_1, \ldots$ *е дадена низа од позитивни цели броеви. За секој* $n \geq 0$, *да претпоставиме дека конечната верижна дропка* $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ *е еднаква на нескратливата дропка* $\frac{p_n}{q_n}$. *Тогаш за секој* $n \geq 0$, p_n *е број на покривки на* $(n+1)-$*табла со висински ограничувања* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *и* q_n *е број на покривки на* $n-$*табла со висински ограничувања* $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Доказ. Ако ги споредиме рекурзивните формули (3) и (8), како и (4) и (5), ќе забележиме дека тие се идентични. Уште повеќе, тие задоволуваат исти почетни услови (2) и (6,7), што ја покажува точноста на тврдењето во теоремата. □

Пример 6. Да ја разгледаме конечната верижна дропка од примерот 1:

$$[2,\ 4,\ 5] = \frac{47}{21}.$$

Според Теоремата 1, бројот на покривки на 3-табла со висински ограничувања 2, 4, 5, е 47, а бројот на покривки на 2-табла со висински ограничувања 4, 5, е 21, што беше потврдено во примерот 4. □

Комбинаторната репрезентација на конечните верижни дропки дадена со претходната теорема, овозможува на комбинаторен начин да се покажат некои интересни својства на конечните верижни дропки (вклучувајќи го и интересното својство споменато во поглавјето 1.1 – што ќе биде докажано во следната Теорема).

Теорема 2. *Нека* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *се дадени позитивни цели броеви и нека* $[a_0, a_1, \cdots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$. *Тогаш за секој* $n \geq 0$ *, важи*

$$[a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0] = \frac{p_n}{p_{n-1}}.$$

Доказ. Да претпоставиме дека

$$[a_0, a_1, \cdots, a_n] = \frac{p_n}{q_n} \quad \text{и} \quad [a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0] = \frac{p_n^{(r)}}{q_n^{(r)}}.$$

Тогаш според теорема 1, знаеме дека $p_n^{(r)}$ е број на покривки на $(n+1)-$табла со висински ограничувања $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ и $q_n^{(r)}$ е број на покривки на $n-$табла со висински ограничувања $a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$. Сакаме да покажеме дека $p_n^{(r)} = p_n$ и $q_n^{(r)} = p_{n-1}$.

Прво да забележиме дека за $(n+1)-$табла постои биективно пресликување помеѓу покривања со висински ограничувања $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ и покривања со висински ограничувања $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Ова пресликување може да се конструира со едноставна ротација на $(n+1)-$таблата за 180°. Со ова пресликување се покажува дека броителот на $[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0]$, $p_n^{(r)}$, е еднаков на броителот на $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$, p_n (број на покривања со висински ограничувања $a_0, a_1, \ldots, a_n$). Уште повеќе, $q_n^{(r)}$ според дефиницијата е еднаков на $p_{n-1}^{(r)}$. Рестрикцијата на горенаведеното биективно пресликување на *n*-табла, покажува дека $p_{n-1}^{(r)} = p_{n-1}$. Покажавме дека $q_n^{(r)} = p_{n-1} = q_n$. □

Теорема 3. *Нека* $n \geq 0$ *и* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *се дадени позитивни цели броеви и нека* $[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$. *Тогаш*

i) $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_1 = a_1$.

ii) за секој $n \geq 2$, $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$.

iii) за секој $n \geq 2$, $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$.

Доказ. Нека $[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ е дефинирана за секој $n \geq 0$.

i) Ако $n = 0$, тогаш $[a_0] = a_0 = \frac{p_0}{q_0}$ и според (2), $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$.

Ако $n = 1$, тогаш $[a_0, a_1] = \frac{p_1}{q_1}$ и според рекурзивните формули (2), (3), и (4), $p_1 = a_0\, p_{a_1} + q_{a_1} = a_0 a_1 + 1$, и $q_1 = p_{a_1} = a_1$.

ii) Според теоремата 1, p_n е број на покривки на $(n+1)-$табла со висински ограничувања $a_0, a_1, \ldots, a_n$. За да го пресметаме овој број на покривки комбинаторно, ќе разгледаме два случаи:

a) Да претпоставиме дека последната ќелија на $(n+1)-$табла е покриена со квадратни плочки. Тогаш таа може да се покрие на a_n начини, а останатитиот дел на таблата (што во овој случај е $n-$табла) може да се покрие на p_{n-1} начини.

   Во овој случај $(n+1)-$табла може да се покрие на $a_n p_{n-1}$ начини.

b) Да претпоставиме дека последните две ќелии на $(n+1)-$табла се покриени со правоаголна плочка. Тогаш останатиот дел на таблата (што во овој случај е $(n-2)$ – табла) може да се покрие на p_{n-2} начини, што значи дека во овој случај $(n+1)$ – табла може да се покрие исто на p_{n-2} начини.

Со комбинирање на овие два случаи добиваме дека

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}.$$

iii) Овој случај се покажува на сличен начин како и ii). □

Теорема 4. *Нека* $a_0, a_1, \cdots, a_n$ *се дадени позитивни цели броеви. За секој* $n \geq 0$ *и* $m \geq 2$, *важи*

$$[a_0, a_1, \cdots, a_n, m] = [a_0, a_1, \cdots, a_n, m-1, 1].$$

<u>Доказ.</u> Да претпоставиме дека

$$[a_0, a_1, \cdots, a_n, m] = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \quad \text{и} \quad [a_0, a_1, \cdots, a_n, m-1, 1] = \frac{p'_{n+2}}{q'_{n+2}}.$$

Сакаме да покажиме дека $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p'_{n+2}}{q'_{n+2}}$. Бидејќи тие се нескратливи дропки, сакаме да покажеме дека

$$\text{i) } p_{n+1} = p'_{n+2} \quad \text{и} \quad \text{ii) } q_{n+1} = q'_{n+2}.$$

i) Според Теорема 3 ii), знаеме дека $p_{n+1} = mp_n + p_{n-1}$. Според теорема 1 знаеме дека p'_{n+2} е бројот на покривки на $(n+3)$ – табла со висински ограничувања $a_0, a_1, \cdots, a_n, m-1, 1$, каде $m \geq 2$. За да го пресметаме овој број комбинаторски (без користење на Теорем 3 ii), ќе разгледаме два случаи:

a) Ако последните две ќелии на $(n+3)$ – таблата се покриени со правоаголна плочка, тогаш постојат p_n начини да се покрие целата табла.

b) Ако последната ќелија е покриена со квадратна плочка, тогаш ќе разгледаме два случаи:

- Да претпоставиме дека претпоследната $(n+2)$ – ра ќелија е покриена со квадратни плочки. Тогаш оваа ќелија може да се покрие на $m-1$ начини, а останатиот дел на таблата (што во овој случај е $(n+1)$ – табла со висински ограничувања $a_0, a_1, \cdots, a_n$) може да се покрие на p_n начини. Значи целата табла може да се покрие на $(m-1)p_n$ начини.
- Да претпоставиме дека $(n+1)$ – та и $(n+2)$ – та ќелија се покриени со правоаголна плочка. Тогаш останатиот дел на таблата (што во овој случај е *n*-табла со висински ограничувања $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$)

може да се покрие на p_{n-1} начини. Значи целата табла може исто да се покрие на p_{n-1} начини.

Со комбинација на овие три разгледани случаи добиваме:

$$p'_{n+2} = p_n + (m-1)p_n + p_{n-1} = mp_n + p_{n-1},$$

што покажува дека $p_{n+1} = p'_{n+2}$.

ii) Овој случај се покажува на сличен начин како и i). □

Интересно прашање кое може да се постави за понатамошно рагледување на заинтересираните читатели е следното:

Што се случува ако дозволиме да ставаме правоаголни плочки една над друга?

Упатство. Во овој случај, се доаѓа до комбинаторна репрезентација на конечни верижни дропки кои не се едноставни.

Литература

1. A. T. Benjamin, J. J. Quinn, *Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof*, MAA, 2003.
2. R. G. Archibald, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Merrill, Publishing and Co., Columbia, OH, 1970.

Статијата прв пат е објвена во списанието СИГМА на сојузот на математичарите на Македонија