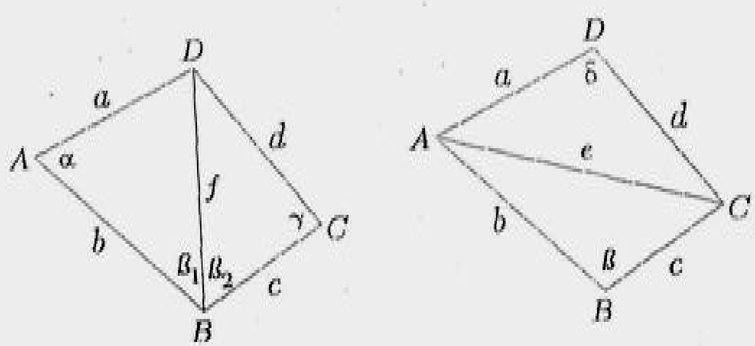
О КОНВЕКСНОМ ЧЕТВОРОУГЛУ

Ђура Паунић, Институт за математику, Нови Сад

Читајући врло интересантну књижицу професора др В. Петровића *Тетивни и тангентни четвороугао* (Мала математичка библиотека, Просветни преглед, Београд 1996) запитао сам се да ли обрасци за површину и дужину дијагонала имају "лепо" уопштење за конвексне четвороуглове. Испоставило се да су и за конвексне четвороуглове ови обрасци врло једноставни, а и да њихово извођење није сувише компликовано да буде изложено у једном краћем раду.

Нека је дат конвексан четвороугао $ABCD$. Означимо његове странице са a, b, c и d, дијагонале са e и f, а углове α, β, γ и δ као што је приказано на слици 1. При том су направљене два цртежа истог четвороугла да се слика не оптерети сувише.



Слика 1. Конвексни четвороугао

Ако применимо косинусну теорему на троуглове $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ добија се да је

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \quad \text{и} \quad f^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\gamma.$$

Када се од прве једнакости одузме друга добија се први помоћни образац

$$\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right) = ab\cos\alpha - cd\cos\gamma. \qquad (I)$$

Ако површину четвороугла P изразимо као збир површине троугла $\triangle ABD$, $P_{ABD} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$, и троугла $\triangle BCD$, $P_{BCD} = \frac{1}{2}cd\sin\gamma$, добија се да је

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\gamma,$$

из чега се добија други помоћни образац

$$2P = ab\sin\alpha + cd\sin\gamma. \qquad (II)$$

Квадрирајмо и саберимо први и други помоћни образац. Добија се

$$4P^2 + \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 =$$

$$= (ab\cos\alpha - cd\cos\gamma)^2 + (ab\sin\alpha + cd\sin\gamma)^2 =$$

$$= a^2b^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + c^2d^2(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) -$$

$$- 2abcd(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma) =$$

$$= a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha + \gamma) =$$

$$= a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 - 2abcd - 2abcd\cos(\alpha + \gamma) =$$

$$= (ab + cd)^2 - 2abcd[1 + \cos(\alpha + \gamma)] = (ab + cd)^2 - 4abcd\cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

При рачунању су коришћени опште познати тригонометријски идентитети $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, адициона теорема за косинус и формула за косинус полуугла. Када ову једнакост помножимо са 4 и пребацимо други сабирак са леве стране на десну добија се

$$16P^2 = 4(ab + cd)^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 - 16abcd\cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Ако се на прва два сабирка са десне стране примени формула за разлику квадрата и формуле за квадрат збира и квадрат разлике добија се да је

$$4(ab + cd)^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 =$$

$$= \left(2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)\left(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2\right) =$$

$$= \left[(a + b)^2 - (c - d)^2\right]\left[(c + d)^2 - (a - b)^2\right] =$$

$$= (a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d).$$

Да се овај израз напише симетричније и погодније за памћење уводимо помоћну величину s, полузбир страница четвороугла

$$s = \frac{a + b + c + d}{2}.$$

Тада је

$$a + b + c - d = a + b + c + d - 2d = 2s - 2d = 2(s - d),$$

$$a + b - c + d = a + b + c + d - 2c = 2s - 2c = 2(s - c),$$

$$a - b + c + d = a + b + c + d - 2b = 2s - 2b = 2(s - b),$$

$$-a + b + c + d = a + b + c + d - 2a = 2s - 2a = 2(s - a),$$

одакле следи

$$16P^2 = 16(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - 16abcd\cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Када се ова једнакост подели са 16 добија се формула за површину конвексног чевороугла

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}.$$

Из ове формуле одмах могу да се изведу две последице.

Прва је да од свих конвесних четвороуглова са једнаким страницама тетивни има највећу површину. Четвороугао је тетивни ако и само ако му је збир наспрамних углова 180°. Тада је њихов полузбир 90° и $\cos 90^\circ = 0$. Тако је образац за површину тетивног четвороугла

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Друга последица је Херонов образац за површину троугла. Наиме, ако се у претходном обрасцу стави да је дужина странице $d = 0$, чиме четвороугао прелази у троугао, добија се *познати Херонов образац*

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad \text{где је } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Арапски математичари тврде да овај образац потиче од Архимеда, а Херон нигде не каже да га је он открио, тако да је то могуће.

Изведимо сад везу између страница и дијагонала конвексног четвороугла. Поновимо сличан поступак израчунавања као и мало пре. Означимо са β_1 угао који заклапа дијагонала f са страницом b, а са β_2 угао који дијагонала f образује са страницом c (слика 1). Тада се применом косинусне теореме на троуглове $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ добија

$$a^2 = b^2 + f^2 - 2bf\cos\beta_1 \quad \text{и} \quad d^2 = c^2 + f^2 - 2cf\cos\beta_2.$$

Када се од друге једнакости одузме прва и среди тако да само сабирци са косинусима остану на истој страни добија се трећа помоћна једнакост

$$2f(b\cos\beta_1 - c\cos\beta_2) = b^2 + d^2 - a^2 - c^2. \qquad (III)$$

Ако се саберу површине троуглова $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ добија се да је површина четвороугла

$$P = \frac{1}{2}bf\sin\beta_1 + \frac{1}{2}cf\sin\beta_2,$$

па када се ова једнакост помножи са четири добија се четврта помоћна једнакост

$$4P = 2f(b\sin\beta_1 + c\sin\beta_2). \qquad (IV)$$

Квадрирајмо трећу и четврту помоћну једнакост и саберимо их. Као и у претходном случају, добија се

$$16P^2 + \left(b^2 + d^2 - a^2 - c^2\right)^2 =$$

$$= 4f^2\left(b\cos\beta_1 - c\cos\beta_2\right)^2 + 4f^2\left(b\sin\beta_1 + c\sin\beta_2\right)^2 =$$

$$= 4f^2\left(b^2+c^2-2bc\cos(\beta_1+\beta_2)\right) = 4f^2\left(b^2+c^2-2bc\cos\beta\right) = 4f^2e^2.$$

Једнакост $e^2 = b^2+c^2-2bc\cos\beta$ следи из косинусне теореме примењене на троугао $\triangle ABC$. То је пета помоћна једнакост

$$4e^2f^2 = 16P^2 + \left(b^2+d^2-a^2-c^2\right)^2. \qquad (V)$$

Приликом израчунавање површине четвороугла, на почетку рада, добијено је

$$4P^2 + \frac{1}{4}\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2 = a^2b^2+c^2d^2-2abcd\cos(\alpha+\gamma).$$

Ако ову једнакост помножимо са 4 и изразимо $16P^2$ добија се

$$16P^2 = 4(a^2b^2+c^2d^2) - \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2 - 8abcd\cos(\alpha+\gamma).$$

Када се $16P^2$ замени у пету помоћну једнакост следи

$$4e^2f^2 = \left(b^2+d^2-a^2-c^2\right)^2 - \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2 +$$

$$+ 4(a^2b^2+c^2d^2) - 8abcd\cos(\alpha+\gamma).$$

Разлика квадрата на десној страни може се представити у облику

$$\left(b^2+d^2-a^2-c^2\right)^2 - \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2 =$$

$$= (2b^2-2c^2)(2d^2-2a^2) = 4b^2d^2-4a^2b^2-4c^2d^2+4a^2c^2.$$

Када добијени резултат заменимо у полазну једнакост добија се

$$4e^2f^2 = 4b^2d^2-4a^2b^2-4c^2d^2+4a^2c^2+4(a^2b^2+c^2d^2)-$$

$$-8abcd\cos(\alpha+\gamma) = 4a^2c^2+4b^2d^2-8abcd\cos(\alpha+\gamma).$$

Поделимо ову једнакост са 4 и додајмо и одузмимо $2abcd$. Тада је

$$e^2f^2 = a^2c^2+2abcd+b^2d^2-2abcd(1+\cos(\alpha+\gamma)) =$$

$$= (ac+bd)^2 - 4abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

Добијена једнакост представља уопштење познатог Птолемејевог обрасца који повезује странице и дијагонале тетивног четвороугла ($ef = ac+bd$). У произвољном конвексном четвороуглу важи следећа веза страница и дијагонала

$$ef = \sqrt{(ac+bd)^2 - 4abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}.$$

Ова једнакост омогућује да се у формули за површину четвороугла елиминишу његови углови, а да се уместо њих користе дијагонале. Наиме, добија се да је

$$abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{(ac+bd)^2-e^2f^2}{4} = \frac{(ac+bd+ef)(ac+bd-ef)}{4}.$$

Када се овај израз замени у претходно изведеном обрасцу за површину добија се образац за површину четвороугла у коме се не појављују углови

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \tfrac{1}{4}(ac+bd+ef)(ac+bd-ef)}.$$

Треба напоменути да се у овом обрасцу појављују обе дијагонале четвороугла, иако је довољно знати само једну дијагоналу и редослед страница да он буде једнозначно одређен. Када је позната само једна дијагонала конвексног четвороугла тада се његова површина најједноставније израчунава као збир површина двају троуглова одређених датом дијагоналом, применом Хероног обрасца.

Из Птолемејевог обрасца и обрасца за површину тетивног четвороугла се лако може изразити R, полупречник описаног круга помоћу страница a, b, c и d. Наиме, поделом четвороугла дијагоналом f на два троугла и израчунавањем њихових површина је добијен образац

$$2P = ab\sin\alpha + cd\sin\gamma,$$

а аналогно, из поделе четвороугла дијагоналом e, добија се да је

$$2P = ad\sin\delta + bc\sin\beta.$$

Ако је четвороугао тетивни тада је R, полупречник описаног круга око четвороугла, уједно и полупречник описаног круга око сваког од ова четири троугла.

Из синусне теореме следи

$$\sin\alpha = \frac{f}{2R}, \qquad \sin\gamma = \frac{f}{2R}, \qquad \sin\beta = \frac{e}{2R}, \qquad \sin\delta = \frac{e}{2R}.$$

Када се ови синуси замене у претходна два обрасца, сваки од њих помножи са $2R$, а затим се те једнакости помноже међусобно добија се

$$16P^2R^2 = (ab+cd)(ad+bc)ef.$$

Како је $ef = ac+bd$ па се добија да је

$$16P^2R^2 = (ab+cd)(ac+bd)(ad+bc).$$

Када се површина тетивног четвороугла замени одговарајућим обрасцем добија се да је полупречник описаног круга око тетивног четвороугла

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}} = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4P}.$$

Користећи образац за површину конвексног четвороугла може се извести и образац за површину тангентног четвороугла који је врло једноставан, али се ипак ретко наводи у литератури.

Четвороугао је тангентни ако се у њега може уписати круг. За то је потребан и довољан услов да је збир две наспрамне странице једнак збиру друге две наспрамне странице. Ако су странице означене као на слици 1 тада је услов за тангентност четвороугла $a+c=b+d$.

Нека је у конвексном четвороуглу $a+c=b+d=\sigma$. Очигледно је тада

$$s=\frac{a+b+c+d}{2}=\frac{\sigma+\sigma}{2}=\sigma,$$

па је

$$s-a=\sigma-a=a+c-a=c, \qquad s-b=\sigma-b=b+d-b=d,$$

$$s-c=\sigma-c=a+c-c=a, \qquad s-d=\sigma-d=b+d-d=b.$$

Када се ове вредности упрсте у образац за површину конвексног четвороугла добија се да је образац за површину тангентног четвороугла

$$P=\sqrt{abcd-abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}=\sqrt{abcd\sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}=\sqrt{abcd}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

Приметимо да је у конвексном четвороуглу

$$\frac{\alpha+\gamma}{2}<180^\circ \qquad \text{из чега следи} \qquad \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}>0.$$

Због тога се при при кореновању апсолутна вредност може изоставити. У обрасцу за површину тангентног четвороугла

$$P=\sqrt{abcd}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

може се користити било који пар наспрамних углова.

Из обрасца за површину тангентног четвороугла следи да тангентни четвороугао има максималну површину када је истовремено и тетивни. Наиме, за угао из интервала од нула до 180° синус је највише један па се максимална површина добија када је $\alpha+\gamma=180^\circ$, тј. када је тангентни четвороугао уједно и тетивни. Тако се површина четвороугла који је и тангентан и тетиван израчунава врло једноставним обрасцем

$$P=\sqrt{abcd}.$$

Слично као и за површину произвољног конвексног четвороугла, могуће је добити једноставан образац за површину тангентног четвороугла у коме се уместо углова користе дијагонале. Из услова тангентности следи

$$(b+d)^2=(a+c)^2 \quad \text{односно} \quad b^2+d^2-a^2-c^2=2ac-2bd.$$

Када се ова вредност за $b^2+d^2-a^2-c^2$ уврсти у пету помоћну једнакост

$$4e^2f^2=16P^2+\left(b^2+d^2-a^2-c^2\right)^2$$

добија се

$$16P^2=4e^2f^2-(2ac-2bd)^2=4(ef+ac-bd)(ef-ac+bd),$$

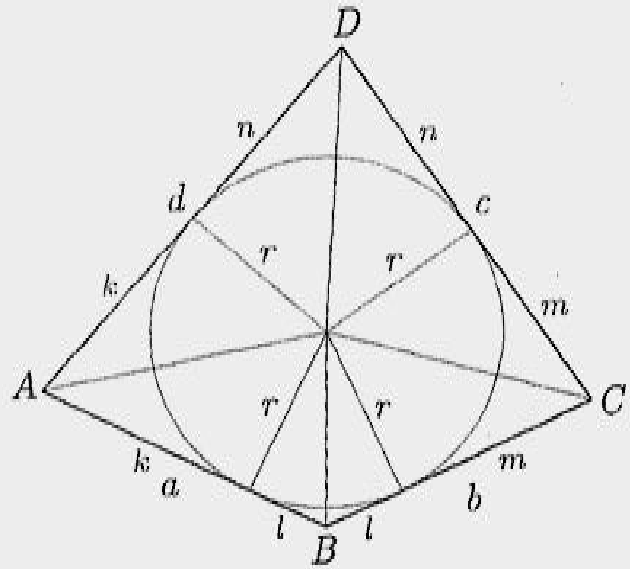
па је

$$P=\frac{1}{2}\sqrt{e^2f^2-(ac-bd)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(ef+ac-bd)(ef-ac+bd)}.$$

Дакле, образац за површину тангентног четвороугла у коме се она израчунава преко страница и дијагонала је још једноставнији од одговарајућег обрасца за тетивни четвороугао.

Из ових формула за површину тангентног четвороугла лако се добија образац за дужину полупречника уписаног круга. Опште је познато да је $P = rs$ па се из овог и претходних образаца добија да је

$$r = \frac{2\sqrt{(ef + ac - bd)(ef - ac + bd)}}{a + b + c + d} = \frac{2\sqrt{abcd}}{a + b + c + d} \sin \frac{\alpha + \gamma}{2},$$



Слика 2. Тангентни четвороугао

Тангентни четвороугао са задатим страницама a, b, c и d може да се потпуно одреди или растојањем једне додирне тачке уписаног круга и странице четвороугла од једног темена на тој страници или унутрашњим угловима. Испитајмо најпре случај када је познато растојање додирне тачке уписаног круга од темена.

Нека је k растојање додирне тачке уписаног круга и странице a од темена A. Користимо ознаке као на слици 2. Тада су и све остале додирне тачке једнозначно одређене ($l = a - k$, $m = b - l = b - a + k$, $n = d - k$).

У сваком четвороуглу је збир унутрашњих углова $360°$ па је

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360° \quad \Longrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180° - \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right).$$

Применимо тангенс на обе стране ове једнакости. Ако се искористи да је

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \quad \text{добија се} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right).$$

Када се примени формула за тангенс збира и замене вредности $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = r/k$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = r/l$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = r/m$ и $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = r/n$ добија се

$$\frac{\frac{r}{k} + \frac{r}{l}}{\frac{r}{k}\frac{r}{l} - 1} = -\frac{\frac{r}{m} + \frac{r}{m}}{\frac{r}{m}\frac{r}{m} - 1}.$$

После сређивања двојног разломка добија се

$$\frac{k+l}{r^2-kl} = -\frac{m+n}{r^2-mn},$$

односно

$$(k+l)r^2 - (k+l)mn + (m+n)r^2 - (m+n)kl = 0.$$

Ако се реши по r^2 добија се

$$r^2 = \frac{(k+l)mn + (m+n)kl}{k+l+m+n}.$$

Међутим, како је $k+l+m+n = s$, $k+l = a$ и $m+n = c$, добија се да је полупречник уписаног круга у тангентни четвороугао

$$r = \sqrt{\frac{amn + ckl}{s}}.$$

Сада се површина тангентног четвороугла може једноставно изразити ако се r елиминише из обрасца $P = rs$. Добија се симетричан образац

$$P = \sqrt{s(amn + ckl)}.$$

Дакле, површина тангентног четвороугла је једнака квадратном корену из производа полузбира његових страница s и збира производа једне странице и одсечака одређеним додирном тачком уписаног круга на наспрамној страници и производа наспрамне странице и одсечака одређеним додирном тачком уписаног круга на првој страници.

Мање симетричан образац се добија када се из горњег обрасца елиминишу l, m и n:

$$P = \sqrt{s(a(b-a+k)(d-k) + c(a-k)k)}.$$

Испитајмо сада тангентни четвороугао када су познати углови и обим. Нека је α угао код темена A, β код темена B, γ код темена C и δ код темена D, а полупречник уписаног круга r (слика 2). Очигледно је

$$\frac{k}{r} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \iff k = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \qquad \frac{l}{r} = \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \iff l = r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2},$$

$$\frac{m}{r} = \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} \iff m = r\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}, \qquad \frac{n}{r} = \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} \iff n = r\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2},$$

па је

$$a = r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right), \qquad b = r\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$c = r\left(\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\right), \qquad d = r\left(\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

Одавде је

$$a+b+c+d = 2r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\right).$$

Ако се има у виду да је $a+b+c+d=2s$, следи

$$r=\frac{s}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}}.$$

Када се овај израз замени у већ коришћени образац за површину тангентног четвороугла $P=sr$ добија се образац за површину тангентног четвороугла када су познати углови и обим

$$P=\frac{s^2}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}}.$$

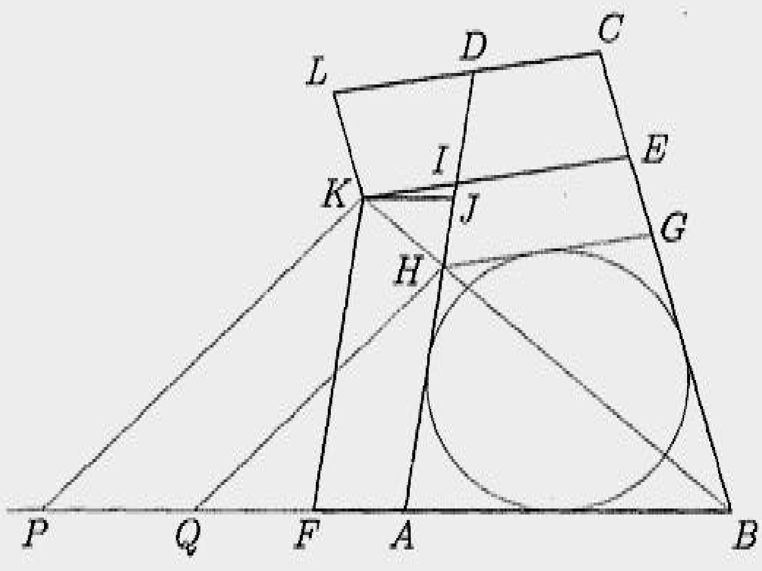
Овај образац омогућује да се израчуна површина конвексног четвороугла на нов начин. Наиме, површина конвексног четвороугла може да се изрази као разлика површина тангентних четвороуглова. Први тангентни четвороугао има исте углове и исти обим као и полазни четвороугао, а други тангентни четвороугао има суплементне углове у односу на полазни четвороугао, а обим му је једнак разлици збирова наспрамних страница полазног четвороугла.

Нека је $ABCD$ произвољан конвексан четвороугао и нека је $|AB|=a$, $|BC|=b$, $|CD|=c$ и $|DA|=d$. Нека важи

$$b+d>a+c,$$

а претпоставимо и да је $b\geq d$. Означимо полуобим са s, а са t полуразлику збирова наспрамних страница,

$$t=\frac{b+d-(a+c)}{2}=s-(a+c)=b+d-s.$$



Слика 3. Конструкција тангентних четвороуглова

Конструишимо најпре тангентни четвороугао који има исти обим и исте углове као и полазни четвороугао $ABCD$ (слика 3). Конструишимо круг који додирује три суседне странице AB, BC и DA четвороугла $ABCD$, а затим конструишимо тангенту круга паралелну четвртој страници четвороугла CD. Нека она сече страницу BC у тачки G, а страницу AD у H. Тада је четвороугао $ABGH$ тангентан и има углове једнаке угловима четвороугла $ABCD$. Применимо сад хомотетију са центром у B за конструкцију четвороугла сличног $ABGH$ таквог да му обим буде једнак обиму полазног четвороугла. На полуправој BA конструишимо тачке P и Q тако да је

$$|BQ| = \frac{|AB| + |BG| + |GH| + |HA|}{2} \quad \text{и} \quad |BP| = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Спојимо тачке Q и H и конструишимо пресек праве BH и праве која пролази кроз тачку P, а паралелна је правој QH. Означимо тај пресек са K. Нека права повучена кроз тачку K и паралелна са AH сече праву BA у тачки F. Нека даље права повучена кроз H и паралелна са HG сече BG у тачки E и праву AD у тачки I. Тада је четвороугао $FBEK$ тангентни, има унутрашње углове једнаке угловима у четвороуглу $ABCD$ и исти обим као и $ABCD$ па је

$$s = |AD| + |BC| = |BF| + |EK| = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Означимо полупречник уписаног круга у $FBEK$ са r_1. Тада је

$$r_1 = \frac{s}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}}.$$

Нека паралела са AB конструисана кроз K сече DA у J и нека паралела са BC повучена кроз K сече CD у L. Тиме су добијена два паралелограма $AFKJ$ и $ECLK$ и четвороугао $DJKL$. Покажимо да је и четвороугао $DJKL$ тангентни. Израчунајмо збирове наспрамних страница.

$$|JK| + |DL| = |AF| + |KE| - |CD| = |BF| - |AB| + |KE| - |CD| =$$

$$= s - (a+c) = t,$$

$$|KL| + |DJ| = |EC| + |DA| - |AJ| = |BC| - |BE| + |DA| - |FK| =$$

$$= b + d - s = t.$$

Како су збирови наспрамних страница једнаки, четвороугао $DJKL$ је тангентни чији је полуобим $t = (b+d-a-c)/2$. Углови су му по конструкцији суплементни унутрашњим угловима четвороугла $ABCD$ што се лако види. Означимо полупречник уписаног круга у $DJKL$ са r_2. Тада је

$$r_2 = \frac{t}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}},$$

јер је $\operatorname{ctg}\frac{180^\circ - \alpha}{2} = \operatorname{ctg}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Докажимо сад да паралелограми $FAJK$ и $ECLK$ имају једнаке површине.

$$P_{FAJK} = |FA| \cdot |FK| \sin\alpha.$$

Израчунајмо $|FA| = |KJ|$ као страницу у тангентном четвороуглу $DJKL$ чији су углови $180^\circ - \alpha$, $180^\circ - \beta$, $180^\circ - \gamma$ и $180^\circ - \delta$. Добија се да је

$$|FA| = |KJ| = r_2\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right),$$

јер је цтг $\frac{180^\circ-\varphi}{2}$ = тг $\frac{\varphi}{2}$, а када се израчуна $|FK|$ као страница у тангентном четвороуглу $FBEK$ добија се

$$|FB| = r_1\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\right).$$

Коначно, површина паралелограма $FAJK$ је

$$P_{FAJK} = r_1r_2\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\right)\sin\alpha =$$

$$= 2r_1r_2\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\delta}{2}\right)}{\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Притом су тангенси и котангенси представљени као количници синуса и косинуса, $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ и искоришћена адициона формула за синус. Аналогним израчунавањем се добија да је површина паралелограма $ECLK$

$$P_{ECLK} = |KL|\cdot|EK|\sin\gamma = 2r_1r_2\frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}\right)}{\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Да се докаже једнакост површина треба још само искористити да је збир углова у четвороуглу 360°, тј. полузбир је 180°. Дакле,

$$\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{2} = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\delta}{2}\right) \qquad \text{и} \qquad \frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2} = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right),$$

а за угао $0 \le \varphi \le 180^\circ$ важи да је $\sin(180^\circ - \varphi) = \sin\varphi$ па је

$$P_{ECLK} = 2r_1r_2\frac{\sin\left(180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\right)\sin\left(180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\right)}{\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} =$$

$$= 2r_1r_2\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\delta}{2}\right)}{\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = P_{FAJK}.$$

Остаје још само да се израчуна површина полазног четвороугла $ABCD$.

$$P_{ABCD} = P_{ABEI} + P_{IECD} = P_{FBEK} - P_{FAIK} + P_{IECD} =$$

$$= P_{FBEK} - (P_{FAJK} + P_{IJK}) + P_{IECD} = P_{FBEK} - P_{CEKL} - P_{IJK} + P_{IECD} =$$

$$= P_{FBEK} - (P_{CEKL} + P_{IJK} - P_{IECD}) = P_{FBEF} - P_{DJKL}.$$

Када се примени образац за површину тангентног четвороугла коначно се добија да је површина конвексног четвороугла у коме су a, c и b, d парови наспрамних страница

$$P_{ABCD} = \frac{s^2}{\text{цтг}\,\frac{\alpha}{2} + \text{цтг}\,\frac{\beta}{2} + \text{цтг}\,\frac{\gamma}{2} + \text{цтг}\,\frac{\delta}{2}} - \frac{t^2}{\text{тг}\,\frac{\alpha}{2} + \text{тг}\,\frac{\beta}{2} + \text{тг}\,\frac{\gamma}{2} + \text{тг}\,\frac{\delta}{2}},$$

где је

$$s = \frac{a+b+c+d}{2} \quad \text{и} \quad t = \frac{b+d-a-c}{2}.$$

Овај образац за површину конвексног четвороугла природно је уопштење обрасца за површину тангентног четвороугла када су познати углови и обим, јер потребан и довољан услов за четвороугао да буде тангентни је да важи $a+c=b+d$, а тада други сабирак отпада.

Задаци:

1. Нека је $\triangle ABC$ оштроугли троугао такав да је угао код темена $C = 60°$. Ако су AA_1 и BB_1 висине, а C' средина странице CB доказати да је троугао $\triangle A_1B_1C'$ једнакостранични.

2. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Нека круг уписан у троугао $\triangle ACD$ додирује дијагоналу у P, а круг уписан у троугао $\triangle ABC$ у Q. Доказати да је четвороугао тангентни ако и само ако се тачке P и Q поклапају.

3. Доказати да је конвексан четвороугао тангентни ако и само ако се симетрале његових унутрашњих углова секу у једној тачки.

4. Нека је $ABCD$ тетивни четвороугао чије су дијагонале узајамно нормалне и нека се секу у тачки S. Ако је A' нормална пројекција тачке S на праву AB, B' нормална пројекција тачке S на праву BC, C' на праву CD и D' на праву DA доказати да је тада четвороугао $A'B'C'D'$ и тетиван и тангентан. (Важи и обрнуто тврђење да се сваки тетивно-тангентни четвороугао може добити на описани начин – за доказ обрнутог тврђења видети горе наведену књижицу професора Петровића.)

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2001/02 година