Смиле Марковски

Една аритметичка теорема што одговара на прашањето
КОЈ Е НАЈЕФИКАСНИОТ БРОЕН СИСТЕМ?

За разбирање на деловите А и В од оваа статија читателот треба да има сознанија за претставувањето на броевите во различни бројни системи, додека за делот Б (што не зависи од А) не се потребни никакви посебни предзнаења, така што може и самостојно да се чита.

А. Броевите може да се запишуваат во различни бројни системи. Вообичаено е да го употребуваме декадниот броен систем, односно системот што ги користи десетте цифри 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Веројатно ви е познато дека постојат и други бројни системи, односно дека броевите можеме да ги запишуваме и во бинарен броен систем што користи само две цифри 0 и 1, или во тернарен броен систем што користи три цифри 0, 1 и 2, или во октален броен систем што користи осум цифри 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7, итн. На пример, бројот 129 (запишан во декаден броен систем) можеме исто така да го запишеме во облик 10000001_2 (во бинарен броен систем), или 11210_3 (во тернарен броен систем), или 1004_5 (во квинтален броен систем), или 201_8 (во октален броен систем), итн. Забележуваме дека колку што е помала основата на бројниот систем, толку повеќе позиции се потребни за запишување на еден ист број. Значи, од една страна имаме добивка со намалувањето на бројот на потребните цифри за запишување на броевите, а од друга страна имаме загуба со зголемувањето на бројот на потребните позиции за нивното запишување. Од овие причини логично се поставува прашањето: *кој е најефикасниот броен систем?*

За да го објасниме подобро одговорот на претходното прашање (што ќе го дадеме подоцна), проблемот го разгледуваме на следниов начин. Нека ни се дадени n ќелии во вид на квадратчиња, така што во секоја ќелија може да се запишува една цифра. Да ги наредиме квадратчињата во облик на правоаголник со r редици и k колони, при што претпоставуваме дека $n = rk$. Во секоја од колоните ги запишуваме цифрите од бројниот систем со основа r, така што во различни ќелии од иста колона се запишани различни цифри. Користејќи ги овие полиња можеме да запишуваме различни броеви во броен систем со основа r и со најмногу k позиции. На пример, за $n = 20$ ги имаме следниве видови претставувања:

а) $n = 20,\ r = 2,\ k = 10$

Со читање на масните букви се добива бројот 10100110_2 запишан бинарно. Со користење на ова поле можеме да запишеме $2^{10} = 1024$ различни броеви.

k

0	**0**	0	**0**	0	**0**	**0**	0	0	**0**	
1	1	**1**	1	**1**	1	1	**1**	**1**	1	r
0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	

$0010100110_2 = 10100110_2$

б) $n = 20,\ r = 4,\ k = 5$

Со масните букви го имаме запишано во квадрален броен систем бројот 13032_4. Користејќи го ова поле можат да се запишат $4^5 = 1024$ различни броеви.

0	0	**0**	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	**2**
3	**3**	3	**3**	3
1	3	0	3	2

13032_4

в) $n = 20,\ r = 5,\ k = 4$

Со масните букви го имаме запишано во квинтален броен систем бројот 423_5. Со ова поле можат да се запишат $5^4 = 625$ различни броеви.

0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
0	4	2	3

$0423_5 = 423_5$

г) $n = 20,\ r = 10,\ k = 2$

Со масните букви го имаме запишано во декаден броен систем бројот 64. Користејќи го ова поле можеме да запишеме $10^2 = 100$ различни броеви.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
6	4

64_{10}

Од примерите заклучуваме дека со користење на 20 ќелии во бројните системи со основа 2 и 4 можеме да запишеме 1024 броеви, со основа 5 речиси за половина помалку, 625, додека со основа 10 само 100.

Во општ случај, кога имаме r редици и k колони, со помош на полињата како што ги дефиниравме погоре, можат да се запишат r^k различни броеви. Затоа прашањето за најефикасен броен систем се сведува на следново: ако се дадени n ќелии распоредени во правоаголно поле, за кои вредности на r и k, такви што $n = r^k$, r^k има најголема вредност?

Б. Овде ќе ја решиме следнава аритметичка задача: *Даден природен број n да се претстави како збир од неколку позитивни собироци, така што нивниот производ е максимален.* Бројот 14, на пример, може да го претставиме во облик 1+7+4+2 и производот од овие собироци е 56, или во облик 8 + 6 (со производ 48), или во облик 3+3+4+4 (со производ 144), а најголем производ се добива ако се користи претставувањето 3+3+3+3+2 и тој изнесува 162.

Одговорот на поставената задача го дава следнава

ТЕОРЕМА. Ако $n \geq 2$ е даден природен број претставен како збир од $k \geq 1$ позитивни природни собироци,

(1) $\quad n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k,$ при што $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \ldots \geq n_k,$

тогаш производот од собироците е максимален ако и само ако е исполнет еден од следниве случаи:

i) $\quad n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_k = 3,$ или

ii) $\quad n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_{k-1} = 3,$ и $n_k = 2,$ или

iii) $\quad n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_{k-2} = 3,$ и $n_{k-1} = n_k = 2,$ или

iv) $\quad n_1 = 4$ и $n_2 = n_3 = \ldots = n_k = 3.$

Доказ. Тврдењето е секако точно во случаите кога $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ и $n = 5$, што непосредно се проверува. Затоа понатаму земаме дека $n \geq 6$.

Сега, да претпоставиме дека имаме некое претставување на n во обликот (1), така што производот на собироците е максимален. Доказот дека во тој случај важат условите *i)–iv)* е директна последица од следниве четири заклучока.

Заклучок 1. Секој од собироците е поголем од 1.

Навистина, кога би имале $n_k = 1$, тогаш наместо собироците $n_1, n_2, n_3,..., n_k$ ќе ги користиме $n_1, n_2, n_3,..., n_{k-2}$ и $n_{k-1}' = n_{k-1} + 1$, при што

$n_1n_2n_3...n_k = n_1n_2n_3...n_{k-1} < n_1n_2n_3...n_{k-2}(n_{k-1} + 1) = n_1n_2n_3...n_{k-2}n_{k-1}'$.

Заклучок 2. Меѓу собироците има најмногу два кои се еднакви на 2.

Да земеме дека имаме барем три собирока еднакви на 2, т.е. нека $n_{k-2} = n_{k-1} = n_k = 2$. Тогаш од $2 \cdot 2 \cdot 2 < 3 \cdot 3$ заклучуваме дека собироците $n_{k-2} = 2$, $n_{k-1} = 2$ и $n_k = 2$ можеме да ги замениме со $n_{k-2}' = 3$ и $n_{k-1}' = 3$, при што

$$n_1 n_2 n_3 ... n_k < n_1 n_2 n_3 ... n_{k-3} n_{k-2}' n_{k-1}'.$$

Заклучок 3. Нема два собирока што се поголеми од 3.

Нека $n_1 = 4 + x$, $n_2 = 4 + y$, каде $x, y \geq 0$. Ако $x = 0$, тогаш $n_1 n_2 = 4(4 + y) < 3 \cdot 3 \cdot (2 + y)$, па место n_1 и n_2 можеме да ги земеме за собироци броевите 3, 3 и $2 + y$. Истите разгледувања ги вршиме и кога $y = 0$, па остана случајот кога $x > 0$ и $y > 0$. Во тој случај $x = 1 + x'$, $y = 1 + y'$ за некои $x', y' \geq 0$. Но, сега имаме

$$n_1n_2 = (5 + x')(5 + y') < 3 \cdot 3 \cdot (2 + x')(2 + y'),$$

па n_1 и n_2 може да ги замениме со 3, 3, $2 + x'$ и $2 + y'$.

Заклучок 4. Ниту еден од собироците не е поголем од 4.

Кога би бил $n_1 > 4$, тогаш $n_1 = 4 + x$ за некој $x > 0$, па n_1 ќе го замениме со други два собирока 2 и $2 + x$, бидејќи $4 + x < 2(2 + x)$.

За комплетирање на доказот на теоремата остана уште да покажеме дека секој природен број $n \geq 2$ може да се претстави во обликот (1), при што е исполнет некој од случаите *i)–iv)*. Ако q е количникот и t е остатокот при делењето на n со 3, т.е. $n = 3q + t$, тогаш $t = 0$, $t = 1$ или $t = 2$. Во првиот случај (кога $t = 0$) имаме претставување при условот *i)* во вториот случај (кога $t = 1$) имаме претставување при условот *iii)*, односно *iv)*, а во третиот случај (кога $t = 2$) имаме претставување при условот *ii)*.

Со тоа го комплетиравме доказот на теоремата.

Од теоремата ја имаме следнава

ПОСЛЕДИЦА. Нека $n > 1$ е даден природен број, таков што $n = 2p = 3k = st$ за некои p, k, s и t, каде $s > 3$. Тогаш

$$3^k > 2^p \text{ и } 3^k > s^t. \qquad (2)$$

Доказ. Ако $n = 2p = 3k = st$, тогаш n можеме да го претставиме како збир од p собироци еднакви на 2, или како збир од k собироци еднакви на 3, или како збир на t собироци еднакви на s. Производот на овие собироци во секој од овие случаи е еднаков соодветно на 2^p, 3^k односно s^l, па неравенствата (2) следуваат веднаш од теоремата.

В. Се враќаме повторно на разгледувањата од делот А. Веднаш од погоре докажаната последица можеме да го дадеме одговорот на прашањето за најефикасниот броен систем: **најефикасен броен систем е оној со основа 3**, којшто користи три цифри вообичаено означувани со 0, 1 и 2. Имено, ако имаме $n = 3k$ ќелии, тогаш со нивно користење (како што покажавме во делот А) можеме да формираме 3^k различни броеви, а според (2) бројот 3^k има најголема вредност во однос на сите други распределби на n како производ на два броја.

Потребно е да нагласиме дека претходниот одговор не треба да се сфати дека декадниот броен систем со којшто вообичаено работиме не е ефикасен, во смисла на човечките потреби и можности. Напротив, цивилизациското искуство покажува дека претходниот броен систем е еден од најпогодните за човечката употреба: се употребуваат релативно малку цифри (десет), а записот на броевите не е претерано голем. Всушност, ако се земе математичкиот критериум за најпогоден броен систем за човекот, тогаш тоа би бил бројниот систем со основа 12. Имено, бројот 10 ги има за делители 2 и 5 додека бројот 12 ги има за делители 2, 3, 4 и 6, а сепак за бројниот систем со основа 12 би ни требале само уште две цифри повеќе.

Претходниот резултат нема само теоретска важност. Ако се задржиме на принципите на градбата на компјутерите, кои во одредени мемориски ќелии ги чуваат информациите за записот на броевите, доаѓаме до важниот заклучок дека најефикасен броен систем со којшто треба да работат компјутерите е бројниот систем со основа 3. Денешните компјутери го користат бројниот систем со основа 2 од чисто технички причини, бидејќи на сегашниот развој на електрониката најдобро се реализираат две состојби: нема напон (одговара на цифрата 0), или има напон од 5 волти (одговара на цифрата 1). Користењето на бинарниот броен систем кај компјутерите и не е толку лоша работа бидејќи, по тернарниот, бинарниот е следниот броен систем по ефикасност.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија