МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 9 (2021), 61 – 74
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-9.html

ШТО Е ЗАЕДНИЧКО ЗА МЕШАЊЕ ЧАЈ ВО ШОЛЈА, БОЕЊЕ ТЕМИЊА ВО ТРИАГОЛНИК И ФЕР ПОДЕЛБА НА ТРОШОЦИ ЗА СТАНАРИНА?

Ангела Здравковска [1]

1. МЕШАЊЕ ЧАЈ ВО ШОЛЈА. ТЕОРЕМА НА БРАУЕР

Колку добро може да измешаме чај во една шолја? Дали со таканаречено идеално мешање само во круг и без протресување на шолјата може да ја измешаме течноста толку добро, што по нејзиното сталожување сите молекули ќе бидат разместени во положба различна од почетната? Одговорот на ова прашање е негативен. Ако честичките чај во чашата ги сметаме за точки, тогаш (со занемарлива грешка) по секое мешање барем една молекула ќе се врати во почетната положба од којашто почнала да се движи. Овој заклучок му се припишува на холандскиот математичар Брауер (L. E. J. Brouwer). Тој ја формулирал и докажал познатата *Теорема на Брауер за неподвижна точка*, од којашто директно следува заклучокот.

За една точка $x_0 \in X$ се вели дека е *неподвижна точка* за функција $f : X \to X$ ако таа се пресликува во самата себе, т.е. $f(x_0) = x_0$.

Иако има повеќе формулации на теоремата, таа често се среќава во следниот облик:.

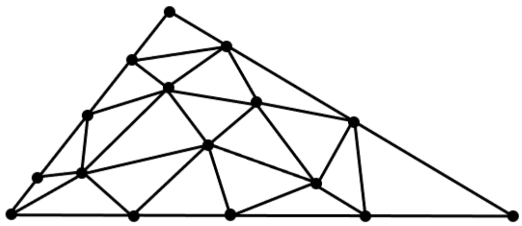
Теорема 1. ([3]). *Секоја непрекината трансформација* $f : \mathbb{D}_n \to \mathbb{D}_n$, *каде што* $\mathbb{D}_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le 1\}$, *има неподвижна точка* $x_0 \in \mathbb{D}_n$.

Важно е да се напомене дека својството на еден тополошки простор секоја негова непрекината трансформација да има неподвижна точка е тополошки инваријантно својство. Со други зборови, сите тополошки простори хомеоморфни со таквиот простор го имаат истото својство. Од тој аспект, за просторот кој го зафаќа течноста (чајот) во шолјата важи теоремата на Брауер (просторот е хомеоморфен со $\mathbb{D}_3$). Тоа ни го дава одговорот на почетното прашање, [3].

2. ШПЕРНЕРОВО БОЕЊЕ. ШПЕРНЕРОВА ЛЕМА

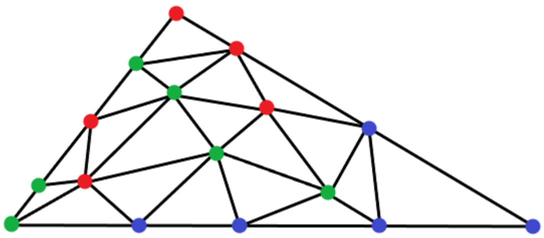
Теоремата на Брауер заради едноставноста, и покрај тополошката природа, наоѓа примена во многу различни, па дури и неочекувани области, како што се економијата и теоријата на игри. Дел од заслугата за тоа имаат разните дополнувања на оваа теорема, како и тврдењата еквивалентни на неа. Интересен еквивалент на теоремата на Брауер од аспект на комбинаториката е Шпернеровата лема. Со оваа лема всушност се дава можеби и наједноставниот доказ на теоремата на Брауер.

Најпознат е дводимензионалниот случај на Шпернеровата лема од којшто следува доказот на теоремата на Брауер за затворената топка $\mathbb{D}_2$. Основната идеја во овој случај е таканареченото Шпернерово боење на триаголник. Имено, нека е даден произволен триаголник. Една триангулација на триаголникот е негова поделба на помали триаголници како што е прикажано на Сликата 1.



Слика 1. Триангулација на триаголник.

Нека темињата на големиот триаголник се обоени со една од три различни бои, на пример, со зелена, црвена и сина боја. Нека темињата на помалите триаголници кои лежат на една страна на големиот триаголник се обоени со една од боите на крајните темиња на таа страна, и нека темињата во внатрешноста на триаголникот се произволно обоени со една од трите почетни бои.



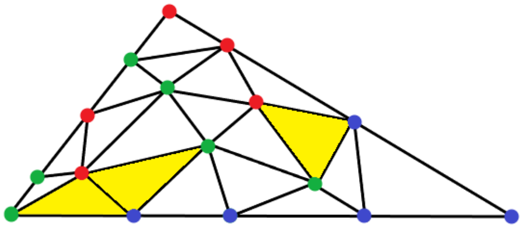
Слика 2. Едно Шпернерово боење на триангулацијата од Слика 1.

Ваквото боење на темињата се нарекува Шпернерово боење. На Слика 2 е прикажано едно Шпернерово боење на триангулацијата од Слика 1. Ваквото боење искористиме во следната Лема којашто ја формулирал германскиот математичар Емануел Шпернер (Emanuel Sperner, 1905 – 1980) и затоа го носи името Шпернерова лема.

Лема 1. *Во секоја триангулација на еден триаголник и при секое Шпернерово боење на триангулацијата, постои барем еден од помалите триаголници чии темиња се обоени со трите различни почетни бои*.

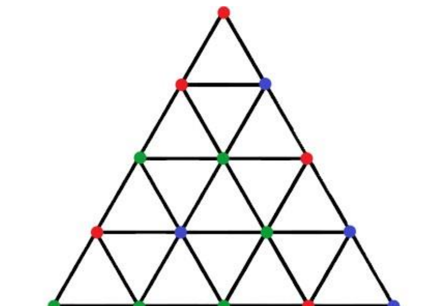
Ваквиот триаголник се вика *комплетно обоен триаголник*.

Во Шпернеровото боење од Сликата 2 може да се забележат три комплетно обоени триаголници (Слика 3). Всушност, секогаш постои непарен број такви триаголници, но во овој дел е докажан случајот за постоење на барем еден таков триаголник.



Слика 3. Комплетно обоени триаголници.

Доказ. За полесна визуализација, разгледуваме Шпернерово боење на рамностран триаголник со триангулација на n^2 рамнострани триаголници (како на Сликата 4).



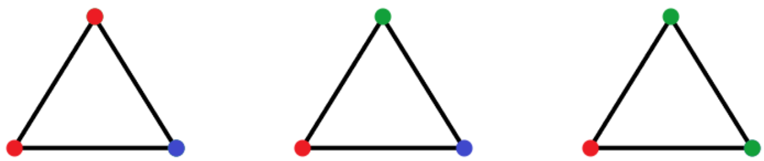
Слика 4. Триангулација на рамностран триаголник на 25 триаголници и едно нејзино Шпернерово боење.

Големиот триаголник може да го разгледуваме како куќа, помалите триаголници како соби во куќата и без губење од општоста, страните на помалите триаголници со една црвена и една зелена крајна точка како врати на собите. Вратите кои се наоѓаат на страната на големиот триаголник со зелено и црвено крајно теме се надворешни врати. Лемата е докажана ако најдеме комплетно обоена соба (комплетно обоен триаголник), [3], [1].

Може да се забележи дека бројот на надворешни врати секогаш е непарен. Навистина, започнувајќи од крајното зелено (односно црвено) теме на страната од големиот триаголник, секоја промена на боја на теме означува една надворешна врата. Последното теме е црвено (односно зелено), што значи дека се случил непарен број промени на бојата на темињата, т.е. има непарен број надворешни врати, [1].

Слика 5. Страна на почетниот триаголник од некое Шпернерово боење.

Уште да забележиме дека една соба може да има 0, 1 или 2 врати, но не е можно да има три врати (слика 6).

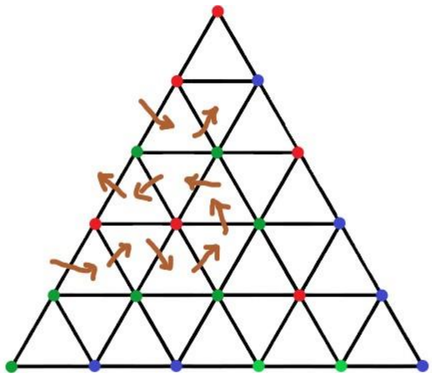


Слика 6. Од лево кон десно: соба без врати, соба со 1 врата, соба со 2 врати.

Сега, да направиме прошетка низ куќата, влегувајќи од надворешна врата и движејќи се низ собите, користејќи ја секоја следна врата по еднаш (за да влеземе или излеземе од една соба). Бидејќи не може да влеземе во соба без врати, можни се следниве два случаја:

1. Прошетката се состои само од посета на соби со две врати (и евентуално излегување од куќата низ друга надворешна врата);
2. Во прошетката се посетува соба со една врата (комплетно обоена соба) и во овој случај не можеме да излеземе од куќата.

Секоја прошетка е еднозначно определена, па затоа на секоја прошетка при која има излез од куќата ѝ одговараат точно две надворешни врати. Но, има непарен број надворешни врати па значи, постои прошетка при која нема излез од куќата, т.е. постои комплетно обоена соба. На Сликата 7 е прикажана една примена на оваа постапка за наоѓање на комплетно обоен триаголник. На страната од големиот триаголник со црвено и зелено крајно теме има три (надворешни) врати, од кои две се крајни врати на иста прошетка низ куќата, а третата води до комплетно обоена соба.



Слика 7. Наоѓање на комплетно обоен триаголник со прошетка.

Шпернеровата лема има обопштување во n-димензии за n-симплекси и идејата на доказот е иста како во дводимензионалиот случај. Притоа, 0-симплекс е точка, 1-симплекс е отсечка, 2-симплекс е триаголник итн., n-симплекс е обопштување на тетраедар во n димензии.

3. ФЕР ПОДЕЛБА НА ТРОШОЦИ ЗА СТАНАРИНА СО ШПЕРНЕРОВАТА ЛЕМА

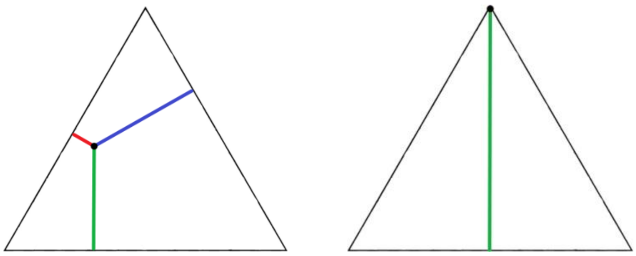
Шпернеровата лема се користи за наоѓање на неподвижни точки или на нули на непрекината функција, но и за правење фер поделби каква што е поделбата на трошоци за станарина помеѓу неколку пријатели. Конкретно, проблемот на поделба на трошоци за $(n+1)$-пријатели може да се реши со помош на n-димензионалниот случај на Шпернеровата лема.

Да претпоставиме дека тројца пријатели: Ангел, Бојан и Виктор се вселуваат заедно во стан со три соби (црвена, зелена и сина соба) и дека месечната станарина која треба да ја плаќаат за станот изнесува 300€. Притоа, собите се разликуваат меѓу себе (на пример: по големина, поглед од собата, достапност на Wi-Fi мрежа итн.). Пријателите сакаат да ги поделат месечните трошоци за секоја соба така што секој да се согласува со сумата којашто ја плаќа за собата која ја избрал и со сумите кои другите двајца ги плаќаат. Дали е возможно да се направи таква фер поделба ако е познато дека:

(1) за која било поделба на станарината, секој пријател се согласува да земе некоја од собите,
(2) доколку му е понудено, секој од пријателите би избрал бесплатна соба,
(3) ако еден пријател е задоволен со секоја сума од конвергентна низа на понудени суми за собата која ја избрал, тогаш е задоволен и со сумата кон која конвергира таа низа?

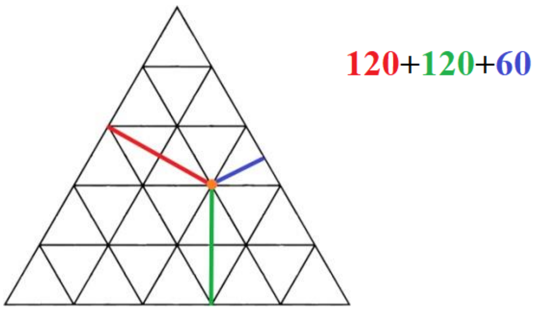
При вака поставените услови, одговорот на поставеното прашање е потврден и тоа може да се покаже со помош на Шпернеровата лема за триаголник која ја докажавме, [2]. Всушност, во реалниот свет не би имало потреба од идеална фер поделба, бидејќи пријателите во дадената ситуација често може да се договорат за некои приближни цени до идеалните за собите кои ќе им одговараат на сите. Во продолжение е дадена постапката со која пријателите практично може да пресметаат таква приближна фер поделба, [4].

При оваа постапка од полза е фактот дека збирот на растојанијата на точка во рамностран триаголник до страните на триаголникот е константен. Тој збир е еднаков на висината во рамностраниот триаголник (Слика 8). Овој резултат е познат како *Теорема на Вивијани*.



Слика 8. Збирот на црвеното, зеленото и синото растојание е константен.

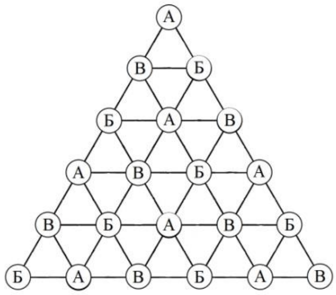
Нека, сега, земеме еден рамностран триаголник и негова триангулација на 25 рамнострани триаголници како на сликата 9... Тогаш висината на големиот триаголник е еднаква на 5 висини од малите триаголници, т.е 5 единици, како на Сликата 9. Трите растојанија од произволно теме од триангулацијата до трите страни на големиот триаголник ги боиме на следниот начин: растојанието кон страната лево од темето на врвот го боиме со црвена боја, растојанието кон страната спроти темето на врвот го боиме со зелена боја и преостанатото растојание го боиме со сина боја. Во избраната точка на Слика 9, црвеното растојание е 2 единици, зеленото е 2 единици и синото е 1 единица, па збирот на растојанијата е 5 единици, па значи важи теоремата на Вивијани. Всушност, таа ќе важи во секое теме од триангулацијата и, уште повеќе, може да се забележи дека изборот на произволно теме од триангулацијата одговара на различно разбивање на бројот 5 како збир на три собироци коишто се разликуваат меѓу себе (во смисла на тоа дека е важен редоследот на собироците, бидејќи имаме три различни растојанија – црвено, зелено и сино). Темињата од триангулацијата ги исцрпуваат сите такви претставувања на бројот 5, па ако земеме секоја единица да ни одговара на 60€, тогаш во секое теме ќе добиеме разбивање на сумата од 300€ на три собирока во истата смисла. На Сликата 9 имаме: $2 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 1 \cdot 60 = 300$.



Слика 9. Претставување на бројот 300 како збир
на три собироци во едно теме од триангулацијата.

Сега, нека трите растојанија одговараат на црвената, зелената и сината соба, соодветно, според бојата. Ги означуваме темињата на секој триаголник од триангулацијата со А, Б, В соодветно за Ангел, Бојан и Виктор, така што темињата во секој мал триаголник се различно означени, како на Сликата 10.

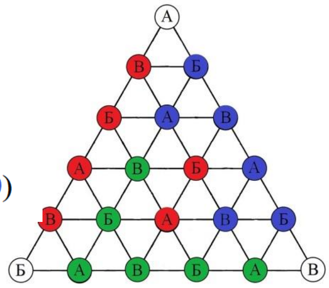
Пријателот чија почетна буква е во некое теме одговара на прашањето: „Која соба би ја одбрал доколку распределбата на трошоците е понуденото разбивање на сумата од 300€ во тоа теме?“ По претпоставка, за секоја поделба на трошоците на пријателот му одговара некоја соба, па темето го боиме со соодветната боја на собата која тој ја избира.



Слика 10. Означување на темињата од триангулацијата.

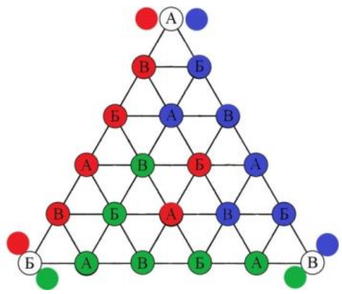
Да забележиме дека, заради претпоставката (2), за избор за бесплатна соба темињата на секоја страна од големиот триаголник ќе бидат обоени во иста боја (на пример, црвена на страната на која црвената соба е бесплатна).

(0,120,180)



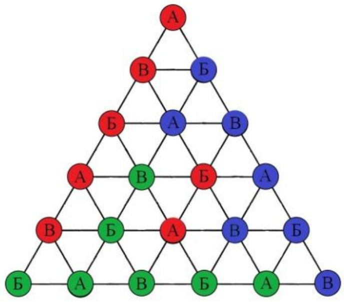
Слика 11. Едно Шпернерово боење според изборот на собите.
Ангел ја избира црвената соба за понудената поделба.

Вака може да се обои секое теме од триангулацијата, освен трите темиња на големиот триаголник во кои секој пријател може да избере една од две бесплатни соби.



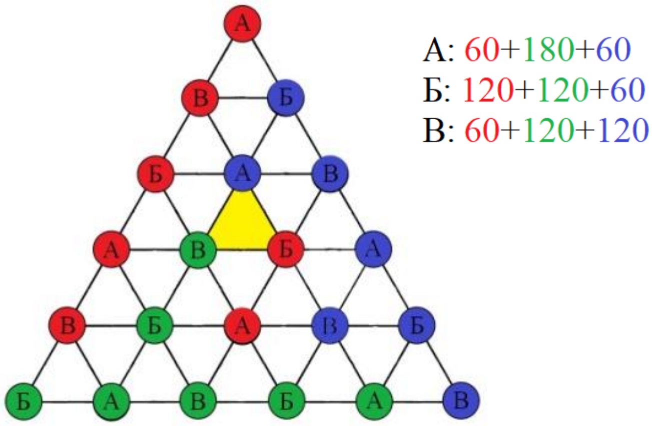
Слика 12. Можности за боење на темињата на големиот триаголник од Сликата 11.

За да добиеме Шпернерово боење тројцата пријатели треба да се согласат за различни соби во темињата на големиот триаголник. Да претпоставиме дека тројцата пријатели успеале да направат таков избор и нека изборот е направен како на Сликата 13.



Слика 13. Едно Шпернерово боење на триаголникот од Сликата 11.

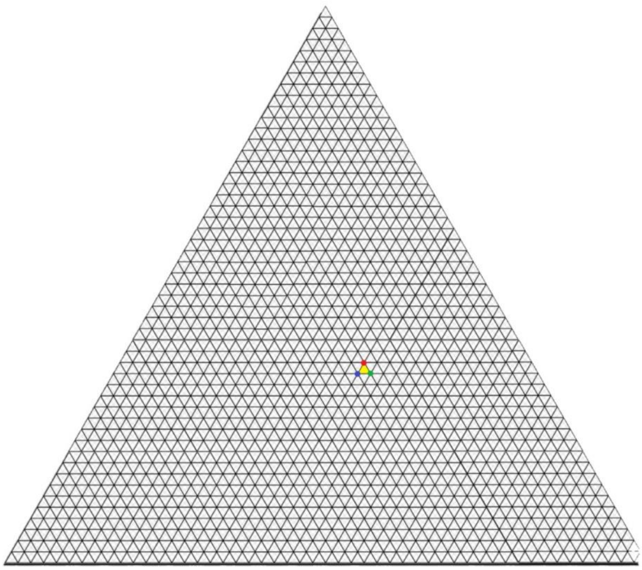
Според Шпернеровата лема, постои комплетно обоен триаголник (Слика 14), а за проблемот кој се разгледува тоа значи дека постои некоја приближна фер поделба со која сите тројца пријатели се согласуваат, [4]. Притоа, тие може да изберат која било од понудените поделби во трите темиња на триаголникот. За Шпернеровото боење дадено на Сликата 13 се добива:



Слика 14. Понудени поделби за Шпернеровото боење на Слика 13.

Оваа приближна фер поделба е релативно лоша бидејќи понудените поделби многу се разликуваат меѓу себе, а тоа се должи на грубата триангулација на триаголникот во која една единица изнесува дури 60€, па затоа и разбивањата на бројот 300 во секое теме се релативно груби.

Значи, за да има помали разлики помеѓу разбивањата е поволно да направиме што е можно пофина триангулација на големиот триаголник, т.е. да го поделиме на што е можно повеќе триаголници. А тоа секогаш може да се направи со помош на претходната триангулација. На пример, нека во претходната триангулација секој мал триаголник го разделиме на 10^2 складни рамнострани триаголници и за единица должина ја земеме висината на тие складни триаголници, т.е. висината на триаголниците со најмала страна во новата триангулација. Тогаш висината на големиот триаголник ќе биде долга 50 единици. Може да земеме една единица да одговара на 6€. На Слика 15 е прикажана поделба која во новата триангулација би одговарала на означениот триаголник, ако тој е комплетно обоен.

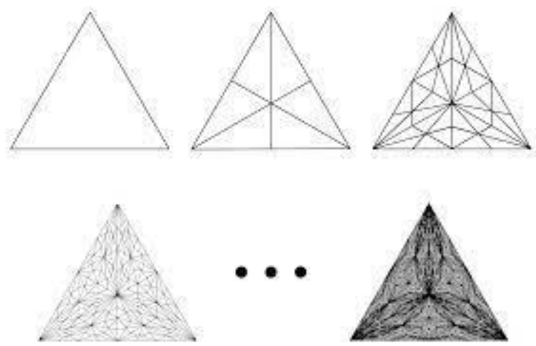


Слика 15. Понудени поделби на трошоците кои одговараат на означената приближна фер поделба (жолт триаголник).

Вака понудените поделби на трошоците се пофер од претходните и поприфатливи во реална ситуација. Пријателите може да направат уште пофина триангулација и да добијат пореална приближна фер поделба. Во практика, проблем при оваа постапка претставува означувањето и боењето на темињата. Во првата триангулација обоивме 25 темиња, додека во втората треба да се обојат дури $25 \cdot 10^2$ што е значително посложено.

Постои полесен начин да се обојат темињата – со помош на постапката која ја изложивме во доказот на Шпернеровата лема. Имено, може да се забележи дека во Шпернеровото боење од проблемот за фер поделба има точно една надворешна врата на секоја од страните на големиот триаголник (види Слика 13), па секоја од нив сигурно води до комплетно обоен триаголник. Затоа, место боење на сите триаголници од триангулацијата може прво да се означат и обојат темињата на големиот триаголник и темињата во нивна близина и тргнувајќи од секоја надворешна врата да се означуваат и бојат темињата на триаголниците кои имаат таква врата, [2].

Користејќи го ова, изложениот метод за наоѓање на фер поделба на трошоците лесно се имплементира и со помош на линеарното програмирање. Може да се добие приближна фер поделба во која цените за секоја соба при трите понудени поделби ќе се разликуваат меѓу себе за занемарливо мал дел од вкупната сума, т.е. број помал од некој однапред зададен број $\varepsilon > 0$. Притоа, место триангулацијата која ја користевме досега се користи т.н. барицентрична поделба која полесно се обопштува за n-симплекси. На Слика 16 се дадени последователни барицентрични поделби на рамностран триаголник. Да забележиме дека барицентар на една отсечка е нејзината средишна точка, барицентар на триаголник е неговото тежиште, барицентар на тетраедар е пресекот на отсечките кои поврзуваат едно теме со тежиштето на спротивната страна, итн. Уште, од секоја барицентрична поделба се добива пофина триангулација едноставно со правење на барицентрична поделба на најмалите симплекси.



Слика 16. Барицентрични поделби на рамностран триаголник.

За решавање на проблемот кој го разгледавме со помош на линеарно програмирање, може да почнеме со барицентрична поделба на рамностраниот триаголник со темиња (1,0,0), (0,1,0) и (0,0,1), правејќи пофини поделби сè додека не се добие триангулација во која секој триаголник има страна со должина помала од ε. Притоа, означувањето на темињата се прави на следниот начин. При правење на m-тата барицентрична поделба, сите темиња од $(m-1)$-вата поделба се означуваат со иста буква (т.е. со истиот пријател), на пример A. Секое ново теме кое се добива при m-тата поделба е барицентар на помал триаголник или пак на некоја страна на помал триаголник од m-тата барицентрична поделба, т.е. барицентар на 2-симплекс или барицентар на 1-симплекс. Барицентрите на 2-симплексите ги означуваме со буква различна од A, на пример $Б$, и барицентрите на 1-симплексите ги означуваме со преостанатата буква, во случајот, $В$. На овој начин во новата триангулација нема две соседни темиња со иста ознака. Означувањето се обопштува аналогно за n-симплекси.

Сега, на означениот триаголник може да се примени полесниот метод за боење на темиња со надворешни врати за побрзо да се дојде до комплетно обоен триаголник. Понудените поделби се разликуваат за број помал од $\varepsilon > 0$.

Останува уште да се образложи зошто при почетните поставени услови постои идеална фер поделба. Со продолжување на постапката на сè пофино и пофино триангулирање на почетниот триаголник, добиваме низа од триангулации и ако од секоја триангулација избереме еден комплетно обоен триаголник, добиваме низа од комплетно обоени триаголници.

Од компактноста на триаголникот и од тоа што низата е опаѓачка во однос на плоштината на триаголниците следи дека оваа низа содржи конвергентна подниза која конвергира кон точка во големиот триаголник. Со други зборови, предложените фер поделби конвергираат кон фер поделба која е таква што трите понудени поделби се совпаѓаат, па тоа е всушност идеалната поделба за тројцата пријатели. Дека секој пријател може да избере различна соба од идеалната поделба следи од тоа што пријателите избираат бесконечно многу пати од конечен број соби. На пример, во конвергентната подниза Виктор ја избрал зелената соба бесконечно многу пати, т.е. таа му одговара за бесконечно многу суми понудени за зелената соба, па по претпоставка ќе му одговара и за сумата на зелената соба од идеалната поделба на трошоците, [2].

ЗАКЛУЧОК

Во текот на денот извршуваме повеќе едноставни физички дејства како мешање чај или кафе во шолја. Знаењето од физиката му помага на човекот да ги разбере тие дејства од механички и динамички аспект, но како што забележавме, причината за овој „речиси“ феномен (бидејќи не може да се изврши идеално мешање) е всушност едноставен резултат од теориската математика – теоремата на Брауер. Оваа теорема пак, се поврзува со поапстрактни концепти во многу други гранки, како наоѓањето на фиксни точки во економијата, со наоѓањето на Нешов еквилибриум во теоријата на игри, па и со Шпернеровата лема во комбинаториката. А токму комбинаториката е позната како алатка за изнаоѓање интересни алгоритми за решавање на разни проблеми од секојдневниот живот на човекот. Проблемот за фер поделба на станарина е еден таков проблем. Во овој текст ја прикажавме врската меѓу физичкиот свет, некои резултати од теориската математика кои се добиени независно од процесите во тој свет и еден проблем на човекот како дел од општеството кое е негово разумно дело.

ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Ruangwises, *Sperner's lemma and fair division problems*, MIT Undergraduate Seminar In Discrete Mathematics, 2015, https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-304-undergraduate-seminar-in-discrete-mathematics-spring-2015/projects/MIT18_304S15_project1.pdf

[2] F. E. Su, *Rental Harmony: Sperner's lemma in fair division problems*, The American Mathematical Monthly, 106 (1999), 930– 942 https://math.hmc.edu/su/wp-content/uploads/sites/10/2019/06/Rental-harmony.pdf

[3] A. Wright, *Sperner's lemma and Brouwer's fixed point theorem,* http://www-personal.umich.edu/~alexmw/BFPT.pdf

[4] Mathologer | *NYT: Sperner's lemma defeats the rental harmony problem*, 10.02.2017, https://www.youtube.com/watch?v=7s-YM-kcKME

[1] Природно-математички факултет,
ул. Архимедова 3, 1000 Скопје, Р.Северна Македонија
e-mail: *azdravkovska8@gmail.com*

Примен: 31.3.2021
Поправен: 26.5.2021
Одобрен: 7.9.2021
Објавен на интернет: 24.9.2021