Problemi s ortocentrom, I

Zvonko Čerin[1], *Zagreb*

U članku se prikazuju tri teorema o ortocentru iz knjige "Trokut i kružnica" profesora Dominika Palmana koji vrijede samo za šiljastokutne trokute. Pokazuje se da za tupokutne trokute treba izmijeniti jedan predznak u danim formulama da bi one postale točne i u ovom slučaju.

Prvi problem o ortocentru

U knjizi "Trokut i kružnica" na 92. stranici u teoremu 11.10 tvrdi se sljedeće:

Teorem 1. *Neka su D, E i F ortogonalne projekcije vrhova trokuta ABC na pravce njegovih stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$. Neka je R radijus opisane kružnice tog trokuta. Udaljenost $|OH|$ između njegovog središta opisane kružnice O i ortocentra H dana je s*

$$|OH|^2 = R^2 - 2 \cdot |AH| \cdot |HD|, \tag{1a}$$

$$|OH|^2 = R^2 - 2 \cdot |BH| \cdot |HE|, \tag{1b}$$

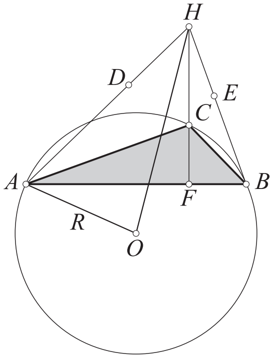
$$|OH|^2 = R^2 - 2 \cdot |CH| \cdot |HF|. \tag{1c}$$

ili s

$$|OH|^2 = 9\,R^2 - (a^2 + b^2 + c^2). \tag{2}$$

Očito je da formule (1a), (1b) i (1c) nisu ispravne jer bi iz njih slijedilo da udaljenost $|OH|$ ne može biti veća od R (tj. da ortocentar trokuta uvijek leži unutar njegove opisane kružnice) što za tupokutne trokute ne vrijedi. U to se možemo uvjeriti i tako da na računalu u programu The Geometer's Sketchpad (ili kratko GSP) nacrtamo trokut ABC, točke D, E, F (nožišta visina), središte opisane kružnice O, ortocentar H, odredimo sve dužine koje se pojavljuju u gornjim formulama i izračunamo razlike (npr. $|OH|^2 + 2 \cdot |AH| \cdot |HD| - R^2$). Kada mičemo točke nije točno da su razlike uvijek jednake nuli. Čim je trokut ABC tupokutan dobivamo isti pozitivan broj za sve tri razlike (vidi sliku 1).

$R = 5.50096$ cm, $|OH| = 9.11062$ cm,
$|AH| = 10.41783$ cm, $|HD| = 2.53137$ cm,
$|BH| = 7.04443$ cm, $|HE| = 3.74358$ cm,
$|CH| = 3.95347$ cm, $|HF| = 6.67044$ cm,
$(|OH|^2 + 2\,|AH|\,|HD|) - R^2 = 105.48549$ cm^2,
$(|OH|^2 + 2\,|BH|\,|HE|) - R^2 = 105.48549$ cm^2,
$(|OH|^2 + 2\,|CH|\,|HF|) - R^2 = 105.48549$ cm^2.



Slika 1. Za tupokutan trokut ABC formule (1a)–(1c) ne vrijede.

[1] Autor je redoviti profesor na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu

Kako se izvući iz ovih poteškoća? Moramo koristiti relativne mjerne brojeve dužina umjesto njihovih duljina (vidi stranicu 3 u [5]). Ako je $[AB]_l$ oznaka za relativni mjerni broj dužine $\overline{AB}$ na orijentiranom pravcu l, onda ispravljeni prvi dio teorema 11.10 iz [5] glasi ovako:

Teorem 2. *Udaljenost* $|OH|$ *između središta opisane kružnice* O *i ortocentra* H *trokuta* ABC *je*

$$|OH|^2 = R^2 - 2\cdot[AH]_{AH}\cdot[HD]_{AH}, \tag{1a*}$$

$$|OH|^2 = R^2 - 2\cdot[BH]_{BH}\cdot[HE]_{BH}, \tag{1b*}$$

$$|OH|^2 = R^2 - 2\cdot[CH]_{CH}\cdot[HF]_{CH}. \tag{1c*}$$

Za dokaz ovog teorema koristit ćemo sljedeće dvije leme.

Lema 1. *(a) Kut* C *je veći od* 90° *onda i samo onda ako je točka* F *između točaka* A *i* B *i ortocentar* H *je izvan dužine* $\overline{CF}$.

(b) Ako je kut C veći od 90° onda točka D leži između točaka A i H i točka E leži između točaka B i H.

Dokaz. Odaberimo pravokutni koordinatni sustav tako da je $A(0,0)$, $B(r(f+g),0)$ i $C\left(\frac{(f^2-1)gr}{fg-1}, \frac{2fgr}{fg-1}\right)$. Parametri f i g su kotangensi polovica kutova A i B dok je r radijus upisane kružnice trokuta ABC. Primijetimo da su f, g i r povezani s duljinama stranica a, b i c ovako

$$f = \frac{(a+b+c)\,(b+c-a)}{4S}, \quad g = \frac{(a+b+c)\,(a-b+c)}{4S}, \quad r = \frac{2S}{a+b+c},$$

gdje je

$$S = \frac{\sqrt{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(c+a-b)\,(a+b-c)}}{4}.$$

Obrnuto,

$$a = \frac{rf(g^2+1)}{fg-1}, \quad b = \frac{rg(f^2+1)}{fg-1}, \quad c = r(f+g).$$

Ovakav odabir koordinata točaka i način dokazivanja uz pomoć računala koji ćemo stalno koristiti detaljno su objašnjeni u sljedećim člancima [2], [3], [4] i [1].

(a) Koordinate točaka D, E, F, H i O su

$$\left(\frac{4g^2r(f+g)}{(g^2+1)^2}, \frac{2gr(f+g)(g^2-1)}{(g^2+1)^2}\right), \left(\frac{r(f+g)(f^2-1)^2}{(f^2+1)^2}, \frac{2fr(f+g)(f^2-1)}{(f^2+1)^2}\right),$$

$$\left(\frac{gr(f^2-1)}{fg-1}, 0\right), \left(\frac{gr(f^2-1)}{fg-1}, \frac{r(f^2-1)(g^2-1)}{2(fg-1)}\right)$$

$$\text{i} \quad \left(\frac{r(f+g)}{2}, \frac{r(f+g+fg-1)(f+g-fg+1)}{4(fg-1)}\right).$$

Odredimo realni broj w u kojem točka F dijeli dužinu $\overline{AB}$. Drugačije rečeno, treba odrediti broj w tako da je $\frac{x_A+wx_B}{1+w} = x_F$ i $\frac{y_A+wy_B}{1+w} = y_F$, gdje su x_P i y_P prva i druga koordinata točke P. Dobije se $w = \frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+c^2-b^2}$. Slično se pokazuje da ortocentar H dijeli dužinu $\overline{CF}$ u omjeru $v = \frac{2c^2(a^2+b^2-c^2)}{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}$.

Ako je kut C veći od 90° onda je broj $a^2+b^2-c^2$ negativan a brojevi $b^2+c^2-a^2$ i $a^2+c^2-b^2$ su pozitivni. Dakle, broj w je pozitivan i točka F leži između A i B. S druge strane, broj v je negativan pa je ortocentar H izvan dužine $\overline{CF}$.

Obrnuto, ako točka F leži između točaka A i B i ortocentar H je izvan dužine $\overline{CF}$ onda je $w>0$ i $v<0$ što vodi na zaključak da je $a^2+b^2-c^2<0$ pa je kut C veći od 90°.

(b) Ako je kut C veći od 90° onda je broj $a^2+b^2-c^2$ negativan a brojevi $b^2+c^2-a^2$ i $a^2+c^2-b^2$ su pozitivni. Budući da točke D i E dijele dužine $\overline{AH}$ i $\overline{BH}$ u pozitivnim omjerima $\frac{16S^2}{(c^2+a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)}$ i $\frac{16S^2}{(b^2+c^2-a^2)(c^2-a^2-b^2)}$ zaključujemo da točka D leži između A i H i da točka E leži između B i H. □

Lema 2. *Ortocentar H je unutar, na ili izvan opisane kružnice trokuta ABC već prema tome da li je taj trokut šiljastokutan, pravokutan ili tupokutan.*

Dokaz. Izračunamo li $R^2-|OH|^2$ dobivamo $\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{16S^2}$. Dakle, ako je H unutar opisane kružnice onda je $R>|OH|$, pa je gornja razlika pozitivna što je moguće jedino ako su sve tri zagrade u brojniku pozitivne tj. ako je ABC šiljastokutan. Obrat očito također vrijedi.

Ako je H na opisanoj kružnici (tj. $R=|OH|$) onda jedna od zagrada u brojniku mora biti nula što povlači da je trokut pravokutan. I to zaključivanje se očigledno također može obrnuti.

I na kraju, ako je ortocentar H izvan opisane kružnice onda je $|OH|>R$. Tada brojnik gornjeg izraza mora biti negativan što je moguće jedino ako je jedna od njegovih zagrada negativna a ostale dvije su pozitivne. Dakle, tada je trokut tupokutan.

Obrnuto, ako je trokut ABC tupokutan samo jedna od zagrada je negativna a preostale dvije su pozitivne. Tada je $|OH|>R$, pa ortocentar H leži izvan opisane kružnice. □

Dokaz teorema 2. Neka pravac visine AH siječe opisanu kružnicu osim u točki A još i u točki D_0.

Ako je trokut ABC šiljastokutan, onda njegov ortocentar H leži unutar opisane kružnice. Potencija točke H obzirom na tu opisanu kružnicu iznosi $|AH|\cdot|HD_0|=R^2-|OH|^2$. Kako prema teoremu 11.1 u [5] vrijedi $|HD_0|=2\cdot|HD|$, gornja jednakost postaje $|AH|\cdot 2\cdot|HD|=R^2-|OH|^2$. Kako u šiljastokutnom trokutu ortocentar H leži na dužini $\overline{AD}$, vrijedi $|AH|=[AH]_{AH}$ i $|HD|=[HD]_{AH}$, što odmah povlači relaciju (1a*).

Ako je trokut ABC pravokutan onda se ortocentar nalazi u jednom od vrhova i dvije od točaka D, E i F su također u tom vrhu, a središte opisane kružnice je u polovištu nasuprotne stranice i vrijedi $|OH|=R$. Zbog toga su produkti $2\cdot[AH]_{AH}\cdot[HD]_{AH}$, $2\cdot[BH]_{BH}\cdot[HE]_{BH}$ i $2\cdot[CH]_{CH}\cdot[HF]_{CH}$ jednaki nuli i formule (1a*) – (1c*) vrijede.

Ako je trokut ABC tupokutan onda je ortocentar H izvan opisane kružnice. Dakle, njegova potencija s obzirom na opisanu kružnicu iznosi $|AH|\cdot|HD_0|=|OH|^2-R^2$. Kao i malo prije za šiljastokutne trokute, lijeva strana je $2\cdot|AH|\cdot|HD|$. S druge strane, prema lemi 1, $[AH]_{AH}=|AH|$ i $[HD]_{AH}=-|HD|$ pa opet dobivamo formulu (1a*). Formule (1b*) i (1c*) se dobivaju slično. □

Napomena. *(a)* Drugi način popravka prvog dijela teorema 1 je

$$\frac{||HO|^2 - R^2|}{2} = |AH| \cdot |HD| = |BH| \cdot |HE| = |CH| \cdot |HF|.$$

Mana tog oblika je što njime nemamo eksplicitni izraz za udaljenost $|HO|$ ortocentra od središta opisane kružnice.

(b) Uz pomoć računala lagano se može dokazati sljedeći obrat formule iz *(a)*. Prisjetimo se da za točku P presjeke pravaca AP, BP i CP redom s pravcima BC, AC i AB označavamo s aP, bP i cP.

Teorem 3. *Neka trokut ABC nije pravokutan. Njegov ortocentar H je jedina točka P ravnine različita od vrhova A, B i C za koju vrijedi*

$$\frac{||PO|^2 - R^2|}{2} = |AP| \cdot |P\,aP| = |BP| \cdot |P\,bP| = |CP| \cdot |P\,cP|.$$

Drugi problem o ortocentru

U idućem teoremu 11.11 iz knjige [5] imamo:

Teorem 4. *Neka su D, E i F ortogonalne projekcije vrhova trokuta ABC na pravce njegovih stranica BC, CA i AB. Neka je R radijus opisane kružnice tog trokuta a r radijus njemu upisane kružnice. Udaljenost $|IH|$ između njegovog središta upisane kružnice I i ortocentra H dana je s*

$$|IH|^2 = 2r^2 - |AH| \cdot |HD|, \tag{3a}$$

$$|IH|^2 = 2r^2 - |BH| \cdot |HE|, \tag{3b}$$

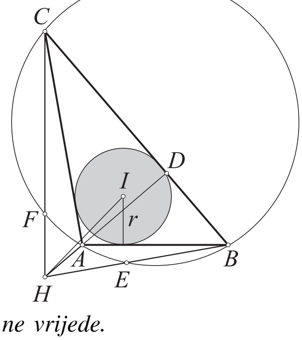
$$|IH|^2 = 2r^2 - |CH| \cdot |HF|. \tag{3c}$$

ili s

$$|IH|^2 = 2(r^2 + 2R^2) - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2). \tag{4}$$

Očito je da formule (3a), (3b) i (3c) nisu ispravne jer bi iz njih slijedilo da udaljenost $|IH|$ ne može biti veća od $r\sqrt{2}$ što za tupokutne jednakokračne trokute kod kojih je ortocentar udaljen od vrha tupog kuta za više od $r\sqrt{2}$, ne vrijedi. U to se možemo uvjeriti i tako da na računalu u GSP-u nacrtamo trokut ABC, točke D, E, F, zatim središte upisane kružnice I i ortocentar H, a onda odredimo sve dužine koje se pojavljuju u gornjim formulama i izračunamo razlike (npr. $|IH|^2 + |AH| \cdot |HD| - 2\,r^2$). Kada pomičemo točke nije točno da su te razlike uvijek jednake nuli. Čim je trokut ABC tupokutan gornje razlike nisu nule već su sve tri jednake istom pozitivnom broju (vidi sliku 2).

$|AH| = 1.99664\,\text{cm}$, $|HD| = 4.17779\,\text{cm}$.
$|BH| = 4.72907\,\text{cm}$, $|HE| = 1.76338\,\text{cm}$.
$|CH| = 5.86216\,\text{cm}$, $|HF| = 1.42294\,\text{cm}$.
$|IH| = 3.20315\,\text{cm}$, $r = 0.97945\,\text{cm}$.
$(|IH|^2 + |AH| \cdot |HD|) - 2r^2 = 16.68305\,\text{cm}^2$,
$(|IH|^2 + |BH| \cdot |HE|) - 2r^2 = 16.68305\,\text{cm}^2$,
$(|IH|^2 + |CH| \cdot |HF|) - 2r^2 = 16.68305\,\text{cm}^2$.



Slika 2. Ako je kut A tup formule (3a) – (3c) ne vrijede.

Ako se prisjetimo načina kako smo rješili problem u prvom teoremu, dolazimo na ideju da ispravak prvog dijela formuliramo ovako:

Teorem 5. *(Popravljeni prvi dio teorema 11.11 iz [5].) Udaljenost $|IH|$ između središta upisane kružnice I i ortocentra H trokuta ABC je dana s*

$$|IH|^2 = 2r^2 - [AH]_{AH} \cdot [HD]_{AH}, \tag{3a*}$$

$$|IH|^2 = 2r^2 - [BH]_{BH} \cdot [HE]_{BH}, \tag{3b*}$$

$$|IH|^2 = 2r^2 - [CH]_{CH} \cdot [HF]_{CH}. \tag{3c*}$$

Dokaz. Po teoremu 2 imamo

$$[AH]_{AH} \cdot [HD]_{AH} = [BH]_{BH} \cdot [HE]_{BH} = [CH]_{CH} \cdot [HF]_{CH} = \frac{R^2 - |OH|^2}{2}.$$

Dakle, dovoljno je pokazati

$$2|IH|^2 - |OH|^2 + R^2 = 4r^2. \tag{*}$$

Budući da središte upisane kružnice I ima koordinate (fr, r) a koordinate središta opisane kružnice O i orthocentra H znamo iz dokaza prvog dijela leme 1, lako izračunamo uz pomoć računala da je $|IH|^2 = \frac{r^2 M_1}{4(fg-1)^2}$, $|OH|^2 = \frac{r^2 M_2}{16(fg-1)^2}$ i $R^2 = \frac{r^2 M_3}{16(fg-1)^2}$, gdje su M_1, M_2 i M_3 polinomi $f^4g^4 - 2f^4g^2 - 4f^3g^3 - 2f^2g^4 + f^4 + 4f^3g + 12f^2g^2 + 4fg^3 + g^4 - 2f^2 - 20fg - 2g^2 + 9$, $9f^4g^4 - 14f^4g^2 - 32f^3g^3 + 9f^4 - 14f^2g^4 + 32f^3g + 36f^2g^2 + 32fg^3 + 9g^4 - 14f^2 - 32fg - 14g^2 + 9$ i $(f^2+1)^2(g^2+1)^2$. Jednakost $(*)$ je posljedica relacije $8M_1 - M_2 + M_3 = 64(fg-1)^2$ koju dokazujemo lagano jer se radi o jednostavnim operacijama s polinomima.

$\square$

Napomena. *(a)* Drugi način popravka prvog dijela teorema 4 je da stavimo $||HI|^2 - 2r^2| = |AH| \cdot |HD| = |BH| \cdot |HE| = |CH| \cdot |HF|$. Loša strana tog oblika je da nemamo eksplicitni izraz za udaljenost $|HI|$ ortocentra od središta upisane kružnice.

(b) Na računalu se lagano dokazuje ovaj obrat formule iz *(a)*. Za pojašnjenje oznaka aP, bP i cP vidi napomenu iza teorema 2.

Teorem 6. *Ortocentar H je jedina točka P ravnine trokuta ABC za koju vrijedi ova trostruka jednakost:*

$$||PI|^2 - 2r^2| = |AP| \cdot |P\,aP| = |BP| \cdot |PbP| = |CP| \cdot |PcP|.$$

Treći problem o ortocentru

I idući teorem 11.12 knjige [5] ima slične poteškoće. U njemu se tvrdi sljedeće:

Teorem 7. *Zbroj udaljenosti ortocentra H od vrhova danog trokuta ABC jednak je dvostrukom zbroju promjera opisane i upisane kružnice toga trokuta,*

$$|HA| + |HB| + |HC| = 2(R + r). \tag{4}$$

Zbroj udaljenosti središta O opisane kružnice od stranica danog trokuta ABC (tj. do polovišta stranica A', B' i C' jednaka je zbroju polumjera opisane i upisane kružnice,

$$|OA'| + |OB'| + |OC'| = R + r. \tag{5}$$

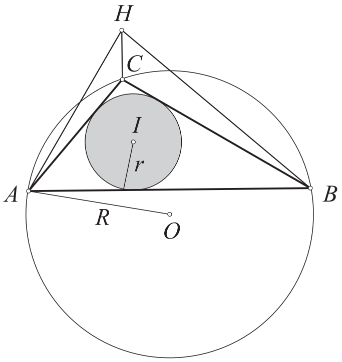
Prvi dio iskaza teorema sadrži pogrešku jer je promjer kružnice jednak dvostrukom njenom polumjeru. Dakle, trebalo bi zapravo reči: "... jednak je zbroju promjera opisane i upisane kružnice tog trokuta" (tj. treba izbaciti riječ "dvostrukom"). Pogrešna tvrdnja izražena formulom (5) dana je u knjizi [5] pod nazivom Carnotov teorem već ranije na 78. stranici.

Ako na računalu u GSP-u nacrtamo trokut ABC, središta I i O upisane i opisane kružnice, ortocentar H, odredimo sve duljine koje se pojavljuju u formuli (4) i izračunamo razliku

$$|HA| + |HB| + |HC| - 2(R + r),$$

kada mičemo točke nije točno da je ona uvijek jednaka nuli. Čim je trokut ABC tupokutan gornja razlika nije jednaka nuli (vidi sliku 3).

$|HA| = 4.34046\,\text{cm}$, $|HB| = 7.04751\,\text{cm}$,
$|HC| = 1.77803\,\text{cm}$,
$R = 3.78477\,\text{cm}$, $r = 1.02020\,\text{cm}$,
$(|HA| + |HB| + |HC|) - 2 \cdot (R + r) = 3.55607\,\text{cm}$,
$(-|HA| + |HB| + |HC|) - 2 \cdot (R + r) = -5.12485\,\text{cm}$,
$((|HA| - |HB|) + |HC|) - 2 \cdot (R + r) = -10.53895\,\text{cm}$,
$(|HA| + |HB|) - |HC| - 2 \cdot (R + r) = 0\,\text{cm}$.



Slika 3. Ako je kut C tup, formula (4) ne vrijedi, ali vrijedi jednakost
$|HA| + |HB| - |HC| = 2(R + r)$.

Promotrimo li malo pažljivije dobivene brojeve u slučaju da je neki kut tup vidimo da gornju razliku treba smanjiti što nas navodi na ideju da ispravak formuliramo ovako:

Teorem 8. *(Popravljeni teorem 11.12 iz [5].) (a) Trokut ABC nije tupokutan onda i samo onda ako je zbroj udaljenosti ortocentra H od vrhova jednak zbroju promjera opisane i upisane kružnice tog trokuta,*

$$|HA| + |HB| + |HC| = 2(R + r). \tag{4*}$$

(b) Trokut ABC nije tupokutan onda i samo onda ako je zbroj udaljenosti središta opisane kružnice O od polovišta stranica jednak zbroju polumjera opisane i upisane kružnice tog trokuta,

$$|OA'| + |OB'| + |OC'| = R + r. \tag{5*}$$

(c) Trokut ABC nema šiljasti kut u vrhu C onda i samo onda ako je

$$|HA| + |HB| - |HC| = 2(R + r). \tag{4c}$$

(d) Trokut ABC nema šiljasti kut u vrhu C onda i samo onda ako je

$$|OA'| + |OB'| - |OC'| = R + r. \tag{5c}$$

Dokaz. Kako u trokutu najviše jedan kut može biti veći ili jednak 90° možemo pretpostaviti da su kutovi A i B šiljasti. U odabiru koordinata pomoću veličina f, g i r (kotangensi kutova $\frac{A}{2}$ i $\frac{B}{2}$ i polumjer upisane kružnice) zato možemo uzeti da je $f > 1$ i $g > 1$. Lagano se izračuna da je $|HA| = \frac{r(f^2-1)(g^2+1)}{2(fg-1)}$, $|HB| = \frac{r(f^2+1)(g^2-1)}{2(fg-1)}$, $|HC| = \frac{r(fg+f+g-1)|fg-f-g-1|}{2(fg-1)}$ i $R = \frac{r(f^2+1)(g^2+1)}{4(fg-1)}$.

(a) Ako trokut ABC nije tupokutan, onda prema dolje dokazanoj lemi 3, udaljenost $|HC|$ je jednaka $\frac{r(fg+f+g-1)(f+g-fg+1)}{2(fg-1)}$. Sada se uvrštavanjem gornjih prikaza lagano provjeri da je $|HA|+|HB|+|HC|=2(R+r)$.

Obrnuto, ako se u jednakost $|HA|+|HB|+|HC|=2(R+r)$ za $|HA|$, $|HB|$ i R uvrste gornje vrijednosti i riješi po $|HC|$ dobije se $|HC|=\frac{r(g+f+fg-1)(f+g-fg+1)}{2(fg-1)}$. Usporedbom s gornjim izrazom za $|HC|$ vidimo da izraz $fg-f-g-1$ nije pozitivan pa prema lemi 3 slijedi da kut C nije tup (tj. da trokut ABC nije tupokutan).

Budući da su zbog jednakosti $|AH|=2\cdot|OA'|$, $|BH|=2\cdot|OB'|$ i $|CH|=2\cdot|OC'|$ (vidi teorem 11.5 u [5]) tvrdnje *(b)* i *(d)* očigledno ekvivalentne tvrdnjama *(a)* i *(c)*, mi ćemo još samo dokazati tvrdnju *(c)*.

(c) Ako kut C nije šiljast, onda je prema lemi 3 udaljenost $|HC|$ jednaka $\frac{r(fg+f+g-1)(fg-f-g-1)}{2(fg-1)}$. Sada odmah slijedi $|HA|+|HB|-|HC|=2(R+r)$.

Obrnuto, ako se u jednakost $|HA|+|HB|-|HC|=2(R+r)$ za $|HA|$, $|HB|$ i R uvrste gornje vrijednosti i riješi po $|HC|$ dobije se $|HC|=\frac{r(g+f+fg-1)(fg-f-g-1)}{2(fg-1)}$. Jer je $|HC|\geqslant 0$ vidimo da je $fg-f-g-1\geqslant 0$.

Ako je $fg-f-g-1=0$ onda je $c^2=a^2+b^2$ pa je prema Pitagorinom teoremu kut c pravi.

Ako je $fg-f-g-1>0$ onda prema lemi 3 slijedi da je kut C tup (tj. da je trokut ABC tupokutan).

Dakle, u svakom slučaju, kut C nije šiljast. □

Lema 3. *Trokut ABC ima tupi kut u vrhu C onda i samo onda ako je izraz* $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}-\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-\operatorname{ctg}\frac{B}{2}-1$ *pozitivan.*

Dokaz. Gornji trigonometrijski izraz je zapravo $fg-f-g-1$ koji, kada se prikaže pomoću duljina stranica, postaje $\frac{c(4S+c^2-(a+b)^2)}{2S(a+b-c)}$. To će biti pozitivno onda i samo onda ako je $4S>(a+b+c)(a+b-c)$. Jer je $4S=\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$, vidimo da je gornji izraz pozitivan onda i samo onda ako je $c^2-a^2-b^2>0$ što je očito ekvivalentno s tvrdnjom da je kut C tup. □

Malo proširena elektronička verzija oba dijela ovog članka izaći će uskoro na adresi `web.math.hr/~mathe/`.

Literatura

[1] M. Bator, Z. Čerin, M. Ćulav, *Analitička geometrija ravnine računalom*, Matematičko-fizički list (Zagreb), 54 br. 1,(2003/2004), 26–36.

[2] Z. Čerin, S. Vlah, *Rješavanje zadataka računalom*, Matka (Zagreb), 10 (2001./2002.), br. 39, 198–202.

[3] Z. Čerin, S. Vlah, *Primjeri upotrebe računala kod rješavanja zadataka*, Matematičko-fizički list (Zagreb), 52 br. 4, (2001/2002), 254–261.

[4] Z. Čerin, S. Vlah, *Još jedno rješenje drugog zadatka na 42. MMO 2001 g.*, Matematičko-fizički list (Zagreb), 53 br. 1, (2002/2003), 55–56.

[5] Dominik Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb 1994.