Лилјана Грибовска-Поповиќ
Скопје

ЗА ВИЕТОВАТА ТЕОРЕМА

Делата на повеќе математичари се вградени во современата средношколска математика. Но, два математичара за неа направиле повеќе отколку останатите: геометарот од античка Грција, Евклид и таткото на современата алгебра, Франсоа Виет.

Франсоа Виет (1540-1603) е француски математичар. Најнапред студирал право и работел како адвокат. Тој бил сестрано образован човек кој добро ги знаел класичните јазици, но и астрономијата, а на математиката и се предавал со занес. Умеел своето знаење и способности да ги примени на разни математички проблеми и се случувало со денови да останс без храна и сон, за да ги реши.

Неговите остроумни мисли ширум ја отвориле вратата на математиката во новиот свет на современата алгебра чии основи лсжат на сметањето со букви. Пред него скоро сите пресметковни онерации и знаци биле пишувани со зборови. На иример, денешниот израз $a^3 + ab = c$, се запишувал како:

A cubus + A planum in B aequantur C solido,

каде aequantur е напишано место знакот за еднакво, а planum значи плоштина. Во негово време не можеле да се запишат, па ниту да се проучуваат алгебарските равенки во општ облик или други алгебарски изрази. Виет и неговитс следбеници забележале дека не се важни самите цифри или геометриските толкувања на самиот број, туку може да се смета дека сите тие броеви припаѓаат на ист вид и може да се означуваат, на пример со буквите од латинската азбука.

Денес, кога секој ученик умее автоматски да ги примени и запише правилата што ги вовел Виет, јасно е зошто тој е толку важен за севкупната современа алгебра.

Виетовата заслуга е и запишувањето на алгебарските изрази со помош на формули. Ваквиот начин на обележување и остроумноста му овозможиле на Виет да дојде до важни откритија при проучувањата на општи алгебарски равенки. Едно од нив, со кое особено се гордеел, е и познатата Виетова теорема, на средношколците позната во следниот облик:

Ако x_1 и x_2 се решенија (корени) на квадратната равенка $x^2 + px + q = 0$, тогаш за нив важи $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = q$.

Нејзиниот доказ лесно може да се изведе ако на местата на x_1 и x_2 се стави

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}\ .$$

Овде ќе биде докажана обопштената Виетова теорема, при што ќе бидат искористени следниве својства:

1° Секој полином со реални коефициенти има барем еден комплексен корен.

2° Ако a е корен на полиномот

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n,$$

тогаш постои полином

$$Q_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-1},$$

така што

$$P_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x).$$

3° Еден полином од n -ти степен може да има најмногу n корени.

4° Ако $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, тогаш постојат $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$, така што $P_n(x) = a(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$.

Теорема. Ако $x_1, x_2, ..., x_n$ се корени на полиномната равенка

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

каде $a_0 \neq 0$, тогаш се точни следните формули:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = \frac{-a_1}{a_0},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0},$$

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \frac{-a_3}{a_0},$$

....

$$x_1x_2x_3...x_n = \frac{(-1)^n a_n}{a_0}$$

Доказ. Имаме

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = a_0(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$$
$$= a_0x^n - a_0(x_1 + x_2 + ... + x_n)x^{n-1} + a_0(x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n)x^{n-2} -$$
$$- a_0(x_1x_2x_3 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n)x^{n-3} + ... + (-1)^n a_0x_1...x_n.$$

па со изедначување на косфициентите пред еднаквите степени на x ги добиваме бараните формули. ■

Пример 1. Не решавајќи ја равенката $x^3 - 3x^2 + 2x + 5 = 0$, најди го збирот на квадратите на нејзините корени.

Решение. Нека x_1, x_2 и x_3 се корените на дадената равенка. Според Виетовата теорема имаме:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3, \; x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2 \text{ и } x_1x_2x_3 = -5.$$

Ако во идентитетот

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

ги замениме првите две равенства, ќе добиеме:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3^2 - 2\cdot 2 = 5 .$$

Значи бараниот збир е 5 .■

Пример 2. Броевите α и β , $(\alpha \neq \beta)$ се корени на равенката $x^3 + px + q = 0$ и за нив важи равенството $\alpha\beta + \alpha + \beta = 0$. Изрази го третиот корен на равенката преку α и β а потоа најди го односот меѓу p и q .

Решение. Нека третиот корен на дадената равенка е γ . Според формулите на Виет имаме $\alpha + \beta + \gamma = 0$, па

$$\gamma = -(\alpha + \beta) \qquad (1)$$

Но, од условот на задачата $\alpha + \beta = -\alpha\beta$, па значи $\gamma = \alpha\beta$. Од формулите на Виет исто така важи:

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = p \qquad (2)$$

$$\alpha\beta\gamma = -q \qquad (3)$$

Ако сега од условот на задачата $\alpha\beta + \alpha + \beta = 0$ и равенствата (1), (2) и (3) ги исклучиме α , β и γ ќе добиеме $(p - q)^2 - q = 0$. ■

Пример 3. Ако x_1, x_2, x_3 се корени на равенката $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, состави равенка од трет степен по y , чии корени се: $y_1 = x_2 + x_3, y_2 = x_1 + x_3, y_3 = x_1 + x_2$.

Решение. Бидејќи x_1, x_2, x_3 се корени на равенката $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, според Виетовата теорема важи

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a ,\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b \ \text{ и } \ x_1x_2x_3 = -c .$$

Од друга страна за корените на бараната равенка, која ќе има облик

$$y^3 + py^2 + qy + r = 0 ,$$

според Виетовата теорема ќе важи

$$y_1 + y_2 + y_3 = -p ,\ y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = q \ \text{ и } \ y_1y_2y_3 = -r .$$

Од условите на задачата имаме

$$y_1 + y_2 + y_3 = 2(x_1 + x_2 + x_3) = 2(-a) \Rightarrow -p = -2a \Rightarrow p = 2a ;$$

$$\begin{aligned} q &= y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 \\ &= (x_2 + x_3)(x_1 + x_3) + (x_2 + x_3)(x_1 + x_2) + (x_1 + x_3)(x_1 + x_2) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = a^2 + b \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} r &= -y_1y_2y_3 = -(x_2 + x_3)(x_1 + x_3)(x_1 + x_2) \\ &= -(2x_1x_2x_3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2) \\ &= -((x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - x_1x_2x_3) = -(-ab + c) = ab - c \end{aligned}$$

.

Тогаш бараната равенка од трет степен гласи $y^3+2ay^2+(a^2+b)y+ab-c=0$.■

Пример 4. Најди ги корените на равенката $x^3+ax+b=0$, ако се знае дека има еден двоен корен.

Решение. Ако x_1,x_2,x_3 се корени на дадената равенка, тогаш според Виетовата теорема имаме $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=a$ и $x_1x_2x_3=-b$. Од условот на задачата нека $x_1=x_2$. Тогаш имаме $2x_1+x_3=0$, $x_1^2+2x_1x_3=a$ и $x_1^2x_3=-b$. Од првата равенка $x_3=-2x_1$. Заменувајќи во втората и третата равенка добиваме $x_1^2-4x_1=a$ и $-2x_1^3=-b$. Значи $x_1^2=-\frac{a}{3}$, односно $x_1^3=\frac{b}{2}$. Одовде бидејќи $x_1x_1^2=\frac{b}{2}$, добиваме $x_1(-\frac{a}{3})=\frac{b}{2}$, односно $x_1=-\frac{3b}{2a}$. На крајот, бидејки $x_3=-2x_1$, имаме $x_3=\frac{3b}{a}$.■

Пример 5. Кој услов треба да го исполнат коефициентите p, q и r на равенката $x^3+px^2+qx+r=0$, така што за нејзините корени да важи релацијата $x_1x_2=x_3$?

Решение. Од Виетовата теорема имаме

$$x_1+x_2+x_3=-p,\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q \text{ и } x_1x_2x_3=-r.$$

Од првата равенка $x_1+x_2=-(x_3+p)$, додска во втората и третата равенка ако го примениме условот на задачата ќе добиеме

$$x_3+x_3(x_1+x_2)=q \tag{1}$$

$$x_3^2=-r \tag{2}$$

Значи, од (1) и (2) ќе имаме

$$x_3+x_3(-(x_3+p))=q \Rightarrow x_3-x_3^2-x_3p=q \Rightarrow$$

$$x_3+r-x_3p=q \Rightarrow x_3(1-p)=q+r \Rightarrow x_3=\frac{q+r}{1-p}.$$

Додека од (2) ќе имаме $x_3=\pm\sqrt{-r}$. Од споредбата на последните два резултата ја добиваме бараната врска меѓу коефициентите p, q и r на дадената равенка

$$(1-p)\sqrt{-r}=q+r\ .■$$

Пример 6. Одреди ги коефициентите a и b, така што равенката од четврт степен $ax^4+bx^3+1=0$, да има двоен корен $x=1$.

Решение. Нека x_1,x_2,x_3,x_4 се корени на дадената равенка, тогаш според Виетовата теорема имаме

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0,$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0 \text{ и}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{1}{a}.$$

Од условот на задачата нека $x_3 = x_4 = 1$, тогаш во горните равенства имаме $x_1 + x_2 + 2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 1 = 0$, $2x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 = 0$ и $x_1x_2 = \frac{1}{a}$.

Од втората и третата равенка наоѓаме дека $x_1x_2 = \frac{1}{3}$, додека $x_1 + x_2 = -\frac{2}{3}$. Заменувајќи ги овие резултати во четвртата, односно првата равенка, ќе добиеме дека $a = 3$ и $b = 4$.■

Пример 7. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ xy + yz + xz = a^2 \\ xyz = a^3 \end{cases}$$

Решение 1. Да го замениме збирот $x + y$ од првата равенка во втората, ќе добиеме $xy + z(a - z) = a^2$. Сега xy од оваа равенка да го замениме во третата равенка. Добиваме $z^3 - az^2 + a^2z - a^3 = 0$. Левата страна од ова равенство можеме да ја разложиме на множители $(z - a)(z - ai)(z + ai) = 0$. Од овде имаме $z_1 = a$, $z_2 = ai$ и $z_3 = -ai$.

Ако го замениме $z_1 = a$ во првата и втората равенка ќе го добиемс системот $x + y = 0$, $xy = a^2$. Одовде $x = \pm ia$, $y = \mp ia$. Притоа лесно може да се провери дека тројките броеви (x, y, z): $(ia, -ia, a)$, $(-ia, ia, a)$, го задоволуваат почетниот систем равенки. Аналогно наоѓаме уште два пара решенија, од $z_2 = ai$ и од $z_3 = -ai$. Тоа се:

$$(a, -ia, ia),\ (-ia, a, ia) \text{ и } (ia, a, -ia),\ (a, ia, -ia).$$

На тој начин шесте горедобиени решенија го задоволуваат системот. ■

Решение 2. До овој резултат можеме да дојдеме и на поелегантен начин, ако воочиме дека дадениот систем равенки се сведува на решавање на кубната равенка:

$$t^3 - at + a^2t - a^3 = 0 \qquad (1)$$

Навистина, ако x, y, z се решенија на равенката (1), тогаш од Виетовите формули добиваме дека за x, y, z важат релациите од почетниот систем.

Бидејќи

$$t^3 - at^2 + a^2t - a^3 = t^2(t-a) + a^2(t-a) = (t-a)(t-ai)(t+ai),$$

трите корени на равенката (1) се: $t_1 = a, t_2 = ia, t_3 = -ia$.

Ако ги индексираме на сите можни начини (ги има 3!), ќе ги добиеме сите решенија на разгледуваниот систем. На таков начин ние иовторно ги имаме шесте решенија, најдени и во погоре наведеното решение.

Овде ќе докажеме дека тие шест решенија се сите можни решенија на дадениот систем равенки. Навистина, да земеме тројката (x_1, y_1, z_1), да е некое решение на системот равенки и да ја разгледаме равенката од трет степен

$$(t-x_1)(t-x_2)(t-x_3) = 0,$$

чии корени се броевите x_1, y_1 и z_1. Ако се ослободиме од заградите во равенката и ако ги искористиме равенствата

$$x_1 + y_1 + z_1 = a,\ xy + yz + xz = a^2 \text{ и } xyz = a^3$$

ќе забележиме дека равенките (1) и

$$(t-x_1)(t-x_2)(t-x_3) = 0$$

се еквивалентни. Значи x_1, y_1 и z_1 се јавуваат како корени и на равенката (1), што требаше и да се докаже.

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Не решавајќи ја равенката $x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$, најди го збирот на квадратите на нејзините корени.
2. Состави равенка од трет степен по y, чии корени се $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_1 + x_3$ и $y_3 = x_1 + x_2$, каде x_1, x_2 и x_3 се корени на равенката $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, без да ја решаваш равенката по x.
3. Под кој услов равенката $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, има трикратен корен?
4. Кој услов треба да го исполнат коефициентите p, q и r на равенката $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, така што за нејзините корени да важи релацијата $x_1 + x_2 = x_3$.
5. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \\ xy + xz + yz = 27 \end{cases}$$

Литература

[1] Bell Eric Templ, *Veliki matematičari,* Znanje, Zagreb, 1972.
[2] Stipanić Ernest, *Putevima razvitka maiematike,* Vuk Karadzić, Beograd, 1988.
[3] Лидский В. Б. и др., *Задачи по элементарной математике,* Москва, 1962.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија